Electromagnetism Notes

by Ham Kittichet

April 8, 2025

▶ Table of Contents

บทที่ 1 | ไฟฟ้าสถิต

▶ 1.1. สนามไฟฟ้า

▶ แรง Coulomb

กฎของ Coulomb. สำหรับจุดประจุที่อยู่นิ่ง q_1 และ q_2 จะได้ว่าแรงที่กระทำต่อประจุ q_1 คือ

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}} \tag{1.1}$$

เมื่อ $\mathscr{r}$ คือเวกเตอร์จาก q_1 ไป q_2

โดยประจุไฟฟ้าในหน่วย SI คือ C (coulomb) และ $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$ เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่า*สภาพยอมในสุญญากาศ (permittivity of free space)* เราจะเรียกแรงนี้ว่า*แรง Coulomb*

▶ สนามไฟฟ้า

สังเกตว่าถ้ามีประจุวางไว้อยู่แล้ว เราสามารถนิยาม*สนามไฟฟ้า*ได้ดังนี้:

นิยามสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \tag{1.2}$$

และโดยกฎของ Coulomb (1.1) จะได้ว่า

สนามไฟฟ้าของจุดประจุ.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\mathbf{r}_k \neq \mathbf{r}} q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{\mathscr{r}_k^2} \hat{\mathscr{r}}_k \tag{1.3}$$

โดยถ้าประจุไม่ดิสครีตแต่กระจายตัวอย่างต่อเนื่องด้วยความหนาแน่นประจุ $\rho(\mathbf{r})$ จะได้ว่า

สนามไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau' \tag{1.4}$$

เมื่อ $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}^3 r'$ และในทำนองเดียวกันกับความหนาแน่นเชิงเส้น λ และความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ

► 1.2. Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

► ฟลักซ์ไฟฟ้าและกฎของ Gauss

นิยามฟลักซ์ไฟฟ้า. ฟลักซ์ของ $\mathbf{E}$ ที่ผ่านผิว $\mathcal{S}$ คือ

$$\Phi_E \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \tag{1.5}$$

พิจารณาพื้นผิวปิด $\mathcal{S}$ ที่มีจุดประจุ q อยู่ภายในและพื้นที่เล็ก ๆ $\mathrm{d}\tau$ บน $\mathcal{S}$ โดยมี $\mathscr{r}$ เป็นเวกเตอร์จาก q มายัง $\mathrm{d}a$ และ $\mathrm{d}a'$ เป็นภาพฉายของ $\mathrm{d}a$ มาตั้งฉากกับ $\mathscr{r}$ จะได้

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}a\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}a' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega$$

เมื่อ $\mathrm{d}\Omega$ คือมุมสเตอเรเดียนเทียบกับตำแหน่งของประจุ q ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าจาก q ที่ผ่านพื้นผิว $\mathcal{S}$ เท่ากับ

$$\Phi_E^{(q\,\mathrm{in})} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\mathcal{S}}\mathrm{d}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.6}$$

โดยทำในทำนองเดียวกันจะเห็นว่าถ้า q อยู่นอก $\mathcal{S}$ แล้ว $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = (\mathrm{const.})\,\mathrm{d}\Omega$ จะมีคู่ของมันที่เครื่องหมายตรงข้ามในอีกฝั่งของ $\mathcal{S}$ จึงทำให้ตัดกันหมด ดังนั้นในกรณีจุดประจุ q อยู่นอก $\mathcal{S}$ จะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้า:

$$\Phi_E^{(q\,\mathrm{out})} = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \tag{1.7}$$

ดังนั้นจึงได้

กฎของ Gauss (Integral form). สำหรับทุกพื้นผิวปิดจะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวนั้นเท่ากับ

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\mathrm{enc}}}{\varepsilon_0} \tag{1.8}$$

Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

พิจารณาใช้ divergence theorem ($\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}\tau$) บนกฎของ Gauss (1.8) จะได้ว่า

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\tau$$
$$\int_{\mathcal{V}} \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}\tau = 0$$

เนื่องจากเป็นจริงทุกปริมาตร $\mathcal{V}$ ดังนั้น

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

ก็จะได้

กฎของ Gauss (Differential form).

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.9}$$

และเนื่องจาก curl ของจุดประจุเท่ากับ $\mathbf{0}$ ดังนั้นจึงได้ว่า curl ของสนาม $\mathbf{E}$ สถิตใด ๆ จึงเท่ากับ $\mathbf{0}$ ด้วย

กฎของ Faraday สำหรับสนามไฟฟ้าสถิต.

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{1.10}$$

1.3. ศักย์ไฟฟ้า

นิยามศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0$ โดย Stokes' theorem จะได้ว่า $\int \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ ไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทาง เราจึงสามารถนิยามฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับอินทิกรัลของสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้:

นิยามศักย์ไฟฟ้า. ให้ $\mathcal{O}$ เป็นจุดอ้างอิง เราสามารถนิยาม*ศักย์ไฟฟ้า* $V(\mathbf{r})$ ที่จุด $\mathbf{r}$ คือ

$$V(\mathbf{r}) \equiv -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{1.11}$$

โดยที่ V มีหน่วย SI เป็น V (volt) ซึ่งโดยปกติแล้วเราจะนิยามศักย์ไฟฟ้าให้ $V|_{r\to\infty} = 0$

โดยจะได้*ความต่างศักย์*ระหว่าง $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ คือ

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{1.12}$$

และจาก

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\boldsymbol{\nabla} V) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

จะได้ว่า

ศักย์ไฟฟ้าในรูป Gradient.

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V \tag{1.13}$$

อีกสมการหนึ่งที่สำคัญที่ได้จากศักย์ไฟฟ้าโดยนำสมการ (1.13) ไปแทนใน (1.9) จะได้

สมการ Poisson. สำหรับสนามศักย์ไฟฟ้า V:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.14}$$

โดยถ้า $\rho = 0$ จะได้*สมการ Laplace*

$$\nabla^2 V = 0 \tag{1.15}$$

โดยสามารถหา V ของจุดประจุ q ได้จากกฎของ Coulomb (1.1):

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}' = -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(r')^2}\,\mathrm{d}r'$$

ก็จะได้ว่า

ศักย์ไฟฟ้าของจุดประจุ.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\mathscr{r}} \tag{1.16}$$

ในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้า เราสามารถหาศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ที่เกิดจากประจุที่กระจายแบบต่อเนื่องด้วยความหนาแน่น ρ ได้ดังนี้:

ศักย์ไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau' \tag{1.17}$$

► สภาวะขอบเขต

ต่อมาจะมาดูสมบัติของ $\mathbf{E}$ และ V ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ σ

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกบางที่บางมากจนฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านบริเวณผิวข้างเท่ากับ 0 ที่คลุมบริเวณเล็ก ๆ ของแผ่นประจุ จะได้ว่า

$$E^{\perp}_{\text{above}} - E^{\perp}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

จะเห็นได้ว่าส่วนของ $\mathbf{E}$ ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุจะเกิดความไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

2. พิจารณาอินทิกรัลเส้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุ จาก (1.10) และ Stokes' theorem จะได้ว่า $\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$ ดังนั้น
$$E^{\parallel}_{\text{above}} - E^{\parallel}_{\text{below}} = 0$$
จะเห็นได้ว่าส่วนของ $\mathbf{E}$ ที่ขนานกับแผ่นประจุจะยังต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

3. พิจารณาจุด $\mathbf{a}$ และ $\mathbf{b}$ ที่อยู่ใกล้กันมาก ๆ แต่ $\mathbf{b}$ อยู่ด้านบนแผ่นส่วน $\mathbf{a}$ อยู่ด้านล่างแผ่น จะได้ว่า
$$V_{\text{above}} - V_{\text{below}} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$$
ดังนั้น V ต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

จึงสรุปได้ดังนี้:

สภาวะขอบเขตของ $\mathbf{E}$ และ V เมื่อผ่านแผ่นประจุบาง. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ จะได้ว่า
$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \tag{1.18}$$
และ
$$\mathbf{E}_{\text{above}} - \mathbf{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{1.19}$$
เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า
$$\frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1.20}$$

▶ 1.4. งานและพลังงาน

▶ พลังงานศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times q\mathbf{E} = 0$ ดังนั้นแรง Coulomb จึงเป็นแรงอนุรักษ์ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับแรงโน้มถ่วงด้วย จึงหาพลังงานศักย์ของจุดประจุ 2 ตัวได้คล้ายกัน

พลังงานศักย์ไฟฟ้าสำหรับจุดประจุ.
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\mathscr{r}} \tag{1.21}$$

และจาก (1.13) ยังได้อีกว่า

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์.

$$V = \frac{U}{q} \tag{1.22}$$

ต่อมาจะมาหาพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบประจุที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามภายนอก $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ โดยพิจารณาการหาผลต่างของพลังงานศักย์ในการนำจุดประจุจาก ∞ มาวางทีละตัว จะได้ผลต่างพลังงานศักย์ของประจุที่ k เป็นดังนี้:

$$\Delta U_k = q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k)$$

เนื่องจากนิยามให้ $U|_{r\to\infty} = qV|_{r\to\infty} = 0$ ก็จะได้

$$U_{\text{ext}} = \sum_k \Delta U_k = \sum_k q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k) \tag{1.23}$$

หรือขยายมาในกรณีต่อเนื่องก็คือ

พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายนอก.

$$U_{\text{ext}} = \int \rho V_{\text{ext}} \,\mathrm{d}\tau \tag{1.24}$$

ส่วนพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากระบบเองหาได้โดยการพิจารณาเอาจุดประจุจาก ∞ มาวางเช่นเดียวกัน จะได้ประจุตัวที่ k มีพลังงานศักย์

$$U_k = \sum_{k'<k} q_k V_{k'}(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k'<k} \frac{q_k q_{k'}}{\mathscr{r}_{kk'}}$$

ดังนั้นโดยใช้ความสมมาตร

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \sum_{k'<k} \frac{q_k q_{k'}}{\mathscr{r}_{kk'}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k\neq k'} \frac{q_k q_{k'}}{\mathscr{r}_{kk'}} \tag{1.25}$$

แต่ในกรณีต่อเนื่องเราไม่จำเป็นต้องสนใจเงื่อนไข $k \neq k'$ เพราะอินทิกรัลลู่เข้าและส่วนที่มาจาก $k = k'$ สามารถมองเป็นส่วนพลังงานที่มาจากประจุที่ใกล้กันมาก ๆ ได้ จึงได้ว่า

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \,\mathrm{d}\tau' \,\mathrm{d}\tau$$

เนื่องจาก $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'}{\mathscr{r}} = V(\mathbf{r})$ ดังนั้น

พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายใน.

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V \,\mathrm{d}\tau \tag{1.26}$$

▶ พลังงานในสนามไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาพลังงานศักย์ภายในของระบบอีกแบบโดยแทนสมการ Poisson (1.14) เข้าไปใน (1.26) โดยอินทิเกรตบนปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่ใหญ่มาก ๆ จน $\mathbf{E}$ ที่ผิวของ $\mathcal{V}$ เข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V\nabla^2 V \,\mathrm{d}\tau = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}V))\,\mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau$$

โดย Chain Rule: $\boldsymbol{\nabla}\cdot(V\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}V\cdot\mathbf{F} + V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F})$ นำไปแทนต่อ จากนั้นใช้ divergence theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(V\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau - \int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot(\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\oint_{\partial\mathcal{V}} V\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} + \int_{\mathcal{V}} E^2\,\mathrm{d}\tau\right)
\end{aligned}$$

แต่จาก $\mathbf{E}$ ที่ขอบเป็น 0 พจน์แรกจึงหายไป ดังนั้น

พลังงานในสนามไฟฟ้า.

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau \tag{1.27}$$

โดยเราจะเรียก $u(\mathbf{r}) \equiv \frac{\varepsilon_0}{2}E^2(\mathbf{r})$ ว่า*ความหนาแน่นพลังงานสนามไฟฟ้า* (*energy density of the electric field*)

แต่คำถามคือ: ทำไมสมการ (1.25) ทำให้พลังงานศักย์เป็นลบได้แต่ (1.27) จึงเป็นบวกเสมอ? เหตุผลก็คือ (1.25) ยังไม่ได้รวมพลังงานในการสร้างจุดประจุตั้งแต่แรก (ถ้ารวมด้วยจะทำให้เป็น ∞) ดังนั้นถ้าจะหาพลังงานของระบบที่เป็นจุดประจุ ถ้าใช้ (1.25) จะสมเหตุสมผลกว่า

ต่อมาเรามาพิจารณาพลังงานศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากอิทธิพลของทั้งสนามภายนอกและภายใน:

$$U = U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \frac{1}{2}\int \rho V_{\text{int}}\,\mathrm{d}\tau + \int \rho V_{\text{ext}}\,\mathrm{d}\tau$$

หาพจน์ฝั่งขวาโดยทำคล้าย ๆ (1.27):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \rho V_{\text{ext}}\,\mathrm{d}\tau &= -\varepsilon_0\int_{\mathcal{V}} V_{\text{ext}}(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}V_{\text{int}}))\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\varepsilon_0\left(\cancel{\oint_{\partial\mathcal{V}} -V_{\text{ext}}\mathbf{E}_{\text{int}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}} - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot\mathbf{E}_{\text{int}}\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \varepsilon_0\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot\mathbf{E}_{\text{int}}\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

นำไปแทนในสมการ U และใช้ร่วมกับ (1.27) จะได้

$$U = \int u(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{เมื่อ} \qquad u(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\Big(E_{\text{int}}^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})\Big) \tag{1.28}$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วเหมือนกับ (1.27) เลย โดยบวกเข้าลบออกด้วย $E^2_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ ใน $u(\mathbf{r})$ และให้ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{int}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}$ จะได้

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau - \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2_{\text{ext}}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau}_{\text{const.}}$$

เนื่องจากพจน์ด้านหลังเป็นค่าคงที่ เราจึงสามารถให้พจน์นั้นเป็นค่าอ้างอิงได้ จึงได้ว่าเราสามารถใช้ (1.27) ได้ในทุกกรณี เพียงแค่ต้องรวม $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ ไปด้วย:

$$U' = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\tau \tag{1.29}$$

สุดท้ายจะเป็นพิสูจน์ทฤษฎีบท:

Green's Reciprocity Theorem.

$$\int \rho_1 V_2\,\mathrm{d}\tau = \int \rho_2 V_1\,\mathrm{d}\tau \tag{1.30}$$

ทฤษฎีบทนี้หมายความว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 1 ที่เกิดจากระบบ 2 มีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 2 ที่เกิดจากระบบ 1 ซึ่งก็ไม่แปลกเพราะแรง Coulomb เป็นแรงที่เป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน แต่จะมาพิสูจน์กันดังนี้:

พิสูจน์. พิจารณาปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่ใหญ่มาก ๆ

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau &= -\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} V_1\cdot\mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\left(\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(V_1\mathbf{E}_2)\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} - \int_{\mathcal{V}} V_1\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= -\left(\cancel{\oint_{\partial\mathcal{V}} V_1\mathbf{E}_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} V_1\rho_2\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} V_1\rho_2\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} V_2\rho_1\,\mathrm{d}\tau$$

ดังนั้น $\int \rho_1 V_2\,\mathrm{d}\tau = \int \rho_2 V_1\,\mathrm{d}\tau$ ตามต้องการ □

▶ 1.5. ตัวนำและความจุไฟฟ้า

▶ ตัวนำไฟฟ้า

ในวัตถุที่เป็น*ฉนวนไฟฟ้า* (หรือ*ไดอิเล็กทริก*) อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ภายในบริเวณอะตอมของมัน แต่ใน*ตัวนำไฟฟ้า* จะมีอิเล็กตรอนจำนวนหนึ่งเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในเนื้อตัวนำ (ในตัวนำที่เป็นของเหลวเช่นน้ำเกลือจะเป็นไอออนอย่าง Na^+

และ Cl^- ที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระแทน) โดยตัวนำอุดมคติหมายถึงตัวนำที่มีประจุอิสระไม่จำกัด ซึ่งโลหะจะเป็นตัวนำที่ใกล้เคียงกับตัวนำอิสระพอที่จะใช้การประมาณดังต่อไปนี้ได้:

สมบัติของตัวนำไฟฟ้าอุดมคติ. ตัวนำไฟฟ้าในสภาวะสมดุลจะต้องไม่มีประจุเคลื่อนที่ในเนื้อตัวนำ จึงสามารถตั้งข้อสมมติเกี่ยวกับสนามไฟฟ้าภายในเนื้อตัวนำได้ว่า

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{1.31}$$

ซึ่งจะเรียกว่า *electric field screening effect* สังเกตว่าจากกฎของ Gauss จะแปลว่าไม่มีประจุอยู่ภายในเนื้อตัวนำ ประจุทั้งหมดจะรวมกันที่ผิวเท่านั้น
โดย (1.31) สามารถเขียนได้ในอีกรูปคือ

$$V = \text{const.} \tag{1.32}$$

อีกสมบัติหนึ่งคือจาก (1.18) ถึง (1.20) และ (1.31) จะได้ว่าสนามไฟฟ้าที่ผิวตัวนำจะตั้งฉากกับผิวเสมอและมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นประจุดังนี้

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{\text{out}} = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \tag{1.33}$$

สถานการณ์หนึ่งที่น่าสนใจคือเมื่อมี “*โพรง*” อยู่ในเนื้อตัวนำ โพรงนี้จะเปรียบเสมือนว่าไม่โดนผลกระทบจากสนามไฟฟ้าด้านนอกตัวนำเลย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบท uniqueness ในบทถัดไป โดยจะเรียกตัวนำที่กันสนามภายนอกนี้ว่า *Faraday's cage* (ในทางกลับกัน สนามด้านนอกตัวนำจะไม่โดนผลกระทบจากประจุด้านในโพรง) โดยถ้าในโพรงไม่มีประจุ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในโพรงเป็น 0 (พิสูจน์กรณีนี้ไม่ยาก ได้จากการสังเกตว่าถ้ามีสนามไฟฟ้าจะต้องมีเส้นแรงไฟฟ้าที่ลากจากผิวไปผิวบนโพรง ถ้าสร้างเส้นทางปิดในการอินทิเกรตบนเส้นแรงนั้นจะได้ผลลัพธ์ไม่เป็น 0 ซึ่งจาก (1.10) เกิดข้อขัดแย้ง) แต่ถ้านำประจุ Q ไว้ในโพรง โดยกฎของ Gauss จะได้ว่าประจุที่อยู่บนผิวของโพรงจะต้องรวมได้ $-Q$

และยิ่งไปกว่านั้น ถ้าโพรงดังกล่าวอยู่ในตัวนำทรงกลมที่ไม่มีประจุ (ประจุรวมเป็น 0) สนามไฟฟ้าด้านนอกทรงกลมนั้นจะเปรียบเสมือนสนามไฟฟ้าของตัวนำทรงกลมประจุ Q ทั้งนี้เป็นเพราะมัน “*เป็นไปได้*” ที่ประจุด้านในจะเรียงตัวให้ประจุที่ผิวของโพรงกับประจุ Q ในโพรงหักล้างกันหมดด้านนอกโพรง และเมื่อมีวิธีการเรียงตัวหนึ่งที่เป็นไปได้ที่ทำให้สนามในเนื้อตัวนำเป็น $\mathbf{0}$ ปรากฏว่า (ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) วิธีการจัดเรียงประจุนั้นจะเป็นวิธีเดียวเท่านั้น

► แรงบนตัวนำไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาแรงที่กระทำต่อผิวตัวนำ $\mathrm{d}a$ ก้อนเล็ก ๆ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในบริเวณนั้นมาจากสองส่วนคือ $\mathbf{E}_{\text{other}}$ มาจากประจุอื่น ๆ นอกบริเวณ $\mathrm{d}a$ และ $\mathbf{E}_{\text{self}}$ มาจาก $\mathrm{d}a$ เอง โดยสนามด้านบนและด้านล่างของ $\mathbf{E}_{\text{self}}$ คือ $\sigma/2\varepsilon_0$ และ $-\sigma/2\varepsilon_0$ ตามลำดับ (เพราะสนามนี้ดูในบริเวณที่ใกล้ $\mathrm{d}a$ มาก ๆ จนเปรียบเสมือน $\mathrm{d}a$ เป็นผิวราบอนันต์) ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{above}} &= \mathbf{E}_{\text{other}} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \\
\mathbf{E}_{\text{below}} &= \mathbf{E}_{\text{other}} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{E}_{\text{other}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}})$$

ก็จะได้แรงที่กระทำต่อ $\mathrm{d}a$ คือ

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \sigma\,\mathrm{d}a \cdot \mathbf{E}_{\text{other}}$$

ดังนั้นแรงต่อหน่วยพื้นที่ $\mathbf{f} = \mathrm{d}\mathbf{F}/\,\mathrm{d}a$ คือ

แรงต่อพื้นที่บนแผ่นประจุ.

$$\mathbf{f} = \sigma\mathbf{E}_{\text{average}} = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}) \tag{1.34}$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วใช้ได้กับแผ่นประจุทุกกรณี แต่ในกรณีตัวนำ:

แรงต่อพื้นที่บนผิวตัวนำ.

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \tag{1.35}$$

จะได้ว่าเมื่อด้านนอกตัวนำมีสนาม $\mathbf{E}$ แล้ว*ความดันไฟฟ้าสถิต* (*electrostatic pressure*: P) เป็นดังนี้

ความดันไฟฟ้าสถิตบนผิวตัวนำ.

$$P = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \tag{1.36}$$

► ความจุไฟฟ้า

เมื่อมีตัวนำสองตัวโดยตัวหนึ่งมีประจุ $+Q$ และอีกตัว $-Q$ เนื่องจากเมื่อ Q เพิ่มขึ้นจำนวน k เท่า จะได้ว่าทำให้ σ บนทั้งสองประจุเพิ่มขึ้นเป็น k เท่าเช่นกัน (เพราะมีการจัดเรียงแบบเดียวเท่านั้นที่ทำให้เนื้อตัวนำมี $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) ส่งผลให้ $\mathbf{E}$ เพิ่มเป็น k เท่า จึงทำให้ความต่างศักย์ $V = V_+ - V_-$ ก็เพิ่มขึ้นเป็น k เท่าด้วย จึงสรุปได้ว่า $Q \propto V$ ดังนั้นเราสามารถนิยามค่าคงที่การแปรผันนี้ว่า*ความจุไฟฟ้า* (*capacitance*: C) ดังนี้

นิยามความจุไฟฟ้า.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{1.37}$$

โดย C นี้มีหน่วย SI คือ F (farad)

ส่วนความจุไฟฟ้าของตัวนำตัวเดียว (self-capacitance) คือให้จินตนาการว่ามีตัวนำเปลือกทรงกลมที่มีรัศมีใหญ่มาก ๆ หรือก็คือให้ใช้ V เป็น V ของตัวนำโดยมีจุดอ้างอิงเป็น ∞

สุดท้าย งานในการชาร์จตัวเก็บประจุหาได้โดยรวมงานในการย้ายประจุ $\mathrm{d}q$ จากฝั่งลบมาฝั่งบวก:

$$\mathrm{d}W = V\,\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q$$

ดังนั้นงานในการชาร์จประจุจาก 0 มาเป็น Q (หรือก็คือพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ) เท่ากับ

พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ.

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \tag{1.38}$$

บทที่ 2 | ศักย์ไฟฟ้า

▶ 2.1. สมการ Laplace

▶ สมการ Laplace ในสามมิติ

ในการแก้หาสนามไฟฟ้า ถ้าไม่มีความสมมาตรพอที่จะใช้กฎของ Gauss (1.8) อาจจะง่ายกว่าที่จะหาศักย์ไฟฟ้าก่อน โดยเรามักสนใจศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่ไม่ได้อยู่ในเนื้อประจุ ดังนั้นสมการ Laplace (1.15) จึงเป็นสมการที่สำคัญ โดยมีสมบัติของผลเฉลยของมัน (ซึ่งเรียกว่า*ฟังก์ชันฮาร์มอนิก*) ที่ควรรู้คือ

สมบัติของผลเฉลยของสมการ Laplace ในสามมิติ. ถ้า V เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace แล้ว

1. V มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ V รอบ ๆ หรือก็คือ สำหรับทุก $\mathbf{r}$ และพื้นผิวทรงกลม $\mathcal{S}$ รัศมี R ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $\mathbf{r}$ จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\mathcal{S}} V \, \mathrm{d}a \tag{2.1}$$

2. V ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือค่าสุดขีดทั้งหมดของ V ในปริมาตร $\mathcal{V}$ จะอยู่บน $\partial\mathcal{V}$ เท่านั้น

หมายเหตุ: *ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับสมการ Laplace มักจะใช้ได้เมื่อปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่สนใจนั้นมี $\rho = 0$ เท่านั้น ดังนั้นต้องเลือกปริมาตรดี ๆ*

พิสูจน์. ให้จุดประจุ q อยู่ที่ $(0, 0, z)$ พิจารณาค่าเฉลี่ยของ V บนทรงกลมที่อยู่ที่จุดกำเนิดที่มีรัศมี R (ให้ θ เป็นมุมที่ $\mathbf{r}$ ทำกับแกน $+z$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\mathcal{S}} V \, \mathrm{d}a &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}a \\
&= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}} R^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta}} R^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta} \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{zR} \big((z + R) - (z - R)\big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z}$$
$$= V(\mathbf{0})$$

ซึ่งเป็นไปตามต้องการสำหรับจุดประจุ ดังนั้นจึงเป็นจริงสำหรับสนามใด ๆ ก็ตาม

ส่วนข้อ 2. ได้มาจากข้อ 1. โดยตรง เพราะถ้าค่าใด ๆ ของ V เกิดจากค่าเฉลี่ยของจุดรอบ ๆ ค่า V ค่านั้นไม่มีทางเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ □

► Uniqueness ของผลเฉลยของสมการ Laplace

ทฤษฎีบท Uniqueness ที่หนึ่ง. สมการ Laplace จะมีผลเฉลยเดียวบนปริมาตร $\mathcal{V}$ ถ้ารู้ค่า V ทั้งหมดบน $\partial\mathcal{V}$

พิสูจน์. ให้ V_1 และ V_2 เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace บนปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่มีค่าตรงกันบน $\partial\mathcal{V}$ ดังนั้น

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace ที่มีค่าที่ $\partial\mathcal{V}$ เท่ากับ 0
แต่เนื่องจากค่าสุดขีดของสมการ Laplace จะต้องอยู่บน $\partial\mathcal{V}$ ดังนั้น $V_3 = 0$ ทุกที่ในปริมาตร หรือก็คือ

$$V_1 = V_2$$

ตามต้องการ □

และไม่ยากที่จะขยายทฤษฎีบทนี้กับสมการ Poisson โดยใช้วิธีพิสูจน์คล้าย ๆ กับด้านบนจะได้ว่า:

บทตั้ง. บนปริมาตร $\mathcal{V}$ ถ้ารู้ ρ ภายในปริมาตรและรู้ค่า V ทั้งหมดบน $\partial\mathcal{V}$ แล้วจะได้ว่ามีสนาม V ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเพียงสนามเดียว

ทฤษฎีบท Uniqueness ที่สอง. บนปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่มีขอบเขตอยู่บนผิวของตัวนำ (อาจมีขอบเขตหนึ่งเป็นตัวนำที่ ∞ ได้) ถ้ารู้ค่า ρ ภายในปริมาตรและรู้ค่า Q ของตัวนำทั้งหมดแล้วจะได้ว่ามีสนาม $\mathbf{E}$ ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดเพียงสนามเดียว

พิสูจน์. ให้ $\mathbf{E}_1$ และ $\mathbf{E}_2$ เป็นสนามใน $\mathcal{V}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ จาก (1.9) จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}_3 = 0 \tag{$*1$}$$

และจาก (1.8) จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{E}_3 \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = 0 \tag{$*2$}$$

สำหรับทุก "*ผิวย่อย*" ของ $\partial\mathcal{V}$ ต่อมาพิจารณา

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(V_3\mathbf{E}_3) = \boldsymbol{\nabla}V_3\cdot\mathbf{E}_3 + V_3(\cancel{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_3}) = -E_3^2$$

และโดย divergence theorem จะได้ว่า

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} V_3\mathbf{E}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\cdot(V_3\mathbf{E}_3)\,\mathrm{d}\tau = -\int_{\mathcal{V}} E_3^2\,\mathrm{d}\tau \tag{$*3$}$$

แต่เนื่องจากทุกผิวย่อยของ $\partial\mathcal{V}$ บนแต่ละตัวนำมี V_3 คงที่จะได้ว่า

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} V_3\mathbf{E}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \sum_{\mathcal{S}} V_{\mathcal{S}}\oint_{\mathcal{S}}\mathbf{E}_3\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \overset{(*2)}{=} 0$$

นำไปใส่กลับใน $(*3)$ จะได้ว่า $\int_{\mathcal{V}} E_3^2\,\mathrm{d}\tau = 0$ ดังนั้น $\mathbf{E}_3 = \mathbf{0}$ หรือก็คือ

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

ตามต้องการ □

▶ 2.2. การจำลองภาพ

▶ การสร้างระบบใหม่เพื่อแก้หาสนาม

ในบางครั้งการหาศักย์ไฟฟ้าตรง ๆ อาจจะยาก แต่ถ้าหาระบบใหม่ที่มีค่า V ที่บริเวณขอบเขตและ ρ ตรงกับค่าบนระบบที่เราสนใจ จากทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง จะได้ว่าศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่สนใจของทั้งสองระบบจะเท่ากันพอดี ยกตัวอย่างเช่น

> **ตัวอย่าง.** ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีแผ่นตัวนำที่ต่อสายดินวางอยู่ทั่วทั้งระนาบ xy และมีจุดประจุ q วางอยู่ ณ จุด $(0, 0, d)$ จงหาศักย์ไฟฟ้าในบริเวณด้านบนแผ่นตัวนำ

วิธีทำ. พิจารณาอีกระบบที่มีจุดประจุ q ที่ $(0, 0, d)$ และ $-q$ ที่ $(0, 0, -d)$ สังเกตว่าระบบนี้มีสภาวะขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าในปริมาตรเหนือระนาบ xy ตรงกันกับระบบในโจทย์เลย ($V = 0$ บนระนาบ xy, $V = 0$ ที่บริเวณไกลมาก ๆ) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง ทั้งสองระบบนี้จะต้องมีสนามศักย์ไฟฟ้าตรงกันบนปริมาตรเหนือระนาบ xy ดังนั้นจึงได้ว่า

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{-1/2} - \left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{-1/2}\right) & \text{เมื่อ } z \ge 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } z < 0 \end{cases}$$

($V(x,y,z) = 0$ เมื่อ $z < 0$ เพราะด้านล่างเหมือนกับระบบที่ไม่มีประจุที่ใดเลย) □

หมายเหตุ: *ควรระวังว่าระบบที่สร้างขึ้นมาเปรียบเทียบนี้จะต้องมีการกระจายตัวของประจุในบริเวณที่สนใจเหมือนกับระบบตั้งต้นเท่านั้นจึงจะใช้ได้ และไม่ได้แปลว่าทุกอย่างของทั้งสองระบบจะเหมือนกัน เช่น ถ้าลองคำนวณดูแล้วพลังงานของระบบโจทย์จะเป็นครึ่งหนึ่งของระบบที่สร้างขึ้นมาใหม่ (มาจากสนามอีกครึ่งที่หายไป)*

▶ 2.3. การแยกตัวแปร

▶ การแยกตัวแปรบนพิกัดคาร์ทีเซียน

เริ่มจากการ "เดา" ว่า

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

ดังนั้นจากสมการ Laplace จะได้ว่า

$$\begin{aligned} YZ\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + XZ\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + XY\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} &= 0 \\ \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากแต่ละพจน์เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวโดยต้องรวมกันเท่ากับ 0 ทุก (x, y, z) ในปริมาตรที่สนใจ ดังนั้น

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = C_x, \qquad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = C_y, \qquad \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = C_z$$

จากนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตในโจทย์เพื่อดูว่า C ในแต่ละสมการควรเป็นค่าบวกหรือลบ และแก้สมการเชิงอนุพันธ์ออกมาโดยจะมีคำตอบดังนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดคาร์ทีเซียน. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} = CT \tag{2.2}$$

มีคำตอบคือ

$$\begin{cases} Ae^{kt} + Be^{-kt} & \text{ถ้า } C = k^2 > 0 \\ At + B & \text{ถ้า } C = 0 \\ A\sin kt + B\cos kt & \text{ถ้า } C = -k^2 < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่

จากนั้นแก้หาค่าคงที่ให้ได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้จากเงื่อนไขโจทย์ จะได้เซตของผลเฉลยมาเซตหนึ่งที่อาจไม่มีผลเฉลยใดเลยสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของโจทย์ เนื่องจากสมการ Laplace เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นเราอาจจะหาวิธีการนำผลเฉลยที่ได้จากการแยกตัวแปรนี้มาบวกกันให้ได้คำตอบที่ตรงกับค่าขอบเขตได้ ซึ่งผลเฉลยเหล่านี้ในกรณีนี้จะอยู่ในรูป sin จึงสามารถใช้การวิเคราะห์ Fourier เพื่อนำผลเฉลยมาบวกกันให้ได้ค่าที่ตรงกับค่าขอบเขต โดยเราจะหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในอนุกรม Fourier ได้โดยใช้ทริคดังต่อไปนี้

อินทิกรัลสำคัญในการวิเคราะห์ Fourier.

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin\!\left(n't\right)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \tag{2.4}$$

หรือแทนตัวแปร $t \mapsto (\pi/a)t$ ได้เป็น

$$\int_0^a \sin\!\left(\frac{n\pi t}{a}\right)\sin\!\left(\frac{n'\pi t}{a}\right)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \dfrac{a}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \tag{2.5}$$

ดังนั้นถ้าต้องการหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ n ที่ทำให้อนุกรม Fourier เท่ากับฟังก์ชัน $V(x)$ ฝั่งซ้าย:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\!\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

สามารถคูณ $\sin(n\pi x/a)$ เข้าไปทั้งสองฝั่งแล้วอินทิเกรตโดยใช้ (2.5) จะได้

$$C_n = \int_0^a V(x)\sin\!\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

เหตุผลที่เราสามารถทำแบบนี้กับเซตของฟังก์ชัน sin เหล่านั้นได้เป็นเพราะ

1. เซตของฟังก์ชันนี้เป็นเซตที่*สมบูรณ์* (*complete*) หมายความว่า ฟังก์ชันใด ๆ สามารถถูกเขียนได้ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันในเซต
2. เซตของฟังก์ชันนี้ (ให้เป็น $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$) เป็นเซตที่*ตั้งฉากกัน* (*orthogonal*) หมายความว่า

   $$\int f_n(t)\, f_{n'}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   สำหรับทุก $n' \neq n$

► การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกลม

ในส่วนนี้จะพิจารณาแค่ระบบที่มีความสมมาตรแบบ azimuth (สมมาตรรอบแกน z) ดังนั้นให้

$$V(r,\theta,\phi) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกลม) จะได้ว่า

$$\Theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{R}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0$$
$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0$$

เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน แต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = C_r, \qquad \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = C_\theta$$

เมื่อให้ $C_r = l(l+1)$ และ $C_\theta = -l(l+1)$ จะแก้สมการได้คำตอบดังนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 1. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = l(l+1)R \tag{2.7}$$

มีคำตอบคือ

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \tag{2.8}$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

แต่อีกสมการหนึ่งจะยากหน่อย:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 2. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -l(l+1)\sin\theta\,\Theta \tag{2.9}$$

มีคำตอบคือ

$$\Theta(\theta) = A\cdot P_l(\cos\theta) \tag{2.10}$$

เมื่อ P_l คือพหุนาม Legendre ดีกรี l และ A คือค่าคงที่

หมายเหตุ: *คำตอบในด้านบนเป็นเพียงส่วนเดียวจากคำตอบทั้งหมดเท่านั้น แต่ที่ไม่พิจารณาส่วนของค่าคงที่อีกตัวเพราะส่วนนั้นจะลู่ออกเสมอที่ค่า θ เท่ากับ 0 และ π (ในกรณีที่บนแกน z ไม่นำมาคิดอาจต้องพิจารณาคำตอบอื่นนี้)*

โดยพหุนาม Legendre หาได้ดังสูตรต่อไปนี้

สูตรของ Rodrigues.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l \tag{2.11}$$

ดังนั้นในการใช้สูตรนี้จึงจะสมมติว่า l เป็นจำนวนเต็มไม่ลบและแต่ละพหุนามจะมีแค่พจน์กำลังคู่หรือคี่เท่านั้น โดยเมื่อแทนสูตร Rodrigues เข้าไปจะได้พหุนาม Legendre ที่มีดีกรีตั้งแต่ 0 ถึง 5 คือ:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= (3x^2-1)/2\\
P_3(x) &= (5x^3-3x)/2
\end{aligned}$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$
$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

จากนั้นเมื่อแก้ค่าคงที่ออกมามักจะเหลือเซตของผลเฉลยที่เป็นพหุนาม Legendre โดยเซตของพหุนาม Legendre นี้ เช่นเดียวกับ sin เป็นเซตของฟังก์ชันที่สมบูรณ์และตั้งฉากกันบน $(-1, 1)$ โดย

สมบัติการตั้งฉากกันของพหุนาม Legendre.

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_{l'}(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \dfrac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \tag{2.12}$$

หรือเมื่อแทนค่า $x = \cos\theta$ จะได้

$$\int_{0}^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \dfrac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \tag{2.13}$$

ซึ่งสามารถใช้ในการแก้หาสัมประสิทธิ์ของคำตอบสุดท้ายที่เป็นการนำคำตอบแบบแยกตัวแปรมาบวกกันได้

► การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกระบอก

จะพิจารณาระบบที่สมมาตรแบบทรงกระบอก (สมมาตรในแนวแกน z) ดังนั้นให้

$$V(s, \phi, z) = S(s)\, \Phi(\phi)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกระบอก) จะได้ว่า

$$\frac{\Phi}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{S}{s^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$
$$\frac{s}{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{s}{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) = C_s, \qquad \frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = C_\phi$$

โดยถ้าให้ $C_s = k^2 = -C_\phi$ (เพราะถ้า C_ϕ ไม่เป็นลบจะได้คำตอบในรูป exponential ทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันคาบตามที่ต้องการ) จะได้คำตอบของ Φ เป็น $\Phi(\phi) = A\sin k\phi + B\cos k\phi$ เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน และ

สมการเชิงอนุพันธ์ในพิกัดทรงกระบอก. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{k^2}{s}S \tag{2.14}$$

มีคำตอบคือ

$$S(s) = As^k + Bs^{-k} \tag{2.15}$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

แต่เมื่อ $k = 0$ จะได้คำตอบเดียวคือค่าคงที่ ซึ่งไม่ครบกับอันดับของสมการ (เมื่อนำมารวมกันตอนสุดท้ายอาจทำให้ได้คำตอบไม่ครบได้ แต่กรณีของ Φ เหตุผลที่ไม่นำ $A\phi + B$ ที่เป็นผลเฉลยในกรณี $k = 0$ มาใช้เพราะว่าเห็นชัดว่า A ต้องเป็น 0 ซึ่งรวมอยู่ในกรณี $k = 0$ ของ $A\sin k\phi + B\cos k\phi$ อยู่แล้ว) จึงต้องคิดแยกกรณี:

กรณี $k = 0$. สมการ (2.14) ถ้า $k = 0$ จะได้คำตอบคือ

$$S(s) = A\log s + B \tag{2.16}$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

โดยในการหาสัมประสิทธิ์ของคำตอบต่อไปให้ใช้การวิเคราะห์ Fourier แบบเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียน

► 2.4. การกระจาย Multipole

► การประมาณศักย์ไฟฟ้าระยะไกล

พิจารณา *electric dipole* ที่ประกอบด้วยจุดประจุ $+q$ และ $-q$ ที่ห่างกัน d โดยสมมติให้ dipole นี้ตั้งในแกน z โดยมีประจุบวกอยู่ในทิศ $+z$ และจุดศูนย์กลางของ dipole อยู่ที่จุดกำเนิด และให้ $\boldsymbol{\mathscr{r}}_+$, $\boldsymbol{\mathscr{r}}_-$ เป็นเวกเตอร์จากขั้วบวกและลบมายัง $\mathbf{r}$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\mathscr{r}_+} - \frac{q}{\mathscr{r}_-}\right)$$

และจากกฎของ cos จะได้

$$\mathscr{r}_\pm^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd\cos\theta = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

ดังนั้นเมื่อ $r \gg d$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\mathscr{r}_\pm} \approx \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

ก็จะได้ว่าที่ระยะ r ไกล ๆ จาก dipole:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2} \tag{2.17}$$

และเช่นเดียวกัน quadrupole, octopole, ... จะมีศักย์ที่โตแบบ $1/r^3$, $1/r^4$, ... ตามลำดับ ที่ระยะไกล ๆ

ดังนั้นเราจึงอาจหาวิธีเขียนศักย์ของการกระจายตัวของประจุแบบใด ๆ ให้อยู่ในรูปอนุกรมของพจน์ multipole ($1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$, ...) เพื่อที่จะประมาณค่าศักย์ไกล ๆ ด้วยพจน์ monopole และ dipole ได้:

พิจารณาการให้ $\mathscr{r}$ และ α เป็นมุมและระยะระหว่าง $\mathbf{r}$ และ $\mathbf{r}'$ ตามลำดับ จะได้

$$\mathscr{r}^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\alpha = r^2\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha\right)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\alpha\right)\right)^{-1/2} \tag{2.18}$$

จากนั้นใช้ทฤษฎีบททวินามกับ (2.18) และ (2.11) จะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha) \tag{2.19}$$

นำไปแทนใน (1.17) ก็จะได้ว่า

การกระจาย Multipole.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int (r')^n\, P_n(\cos\alpha)\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' \tag{2.20}$$

► พจน์ Monopole และ Dipole

สำหรับพจน์ monopole ($n = 0$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int P_0(\cos\alpha)\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int \rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

ดังนั้น

พจน์ Monopole.

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{2.21}$$

ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะค่าศักย์ที่ระยะไกล ๆ ก็ควรจะโตคล้ายประจุรวม Q ในระบบ (เรียก Q นี้ว่า *monopole moment*) โดยพจน์ monopole นี้จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิด ต่างจากพจน์อื่น ๆ ที่ขึ้นกับตำแหน่งที่ใช้เป็นจุดกำเนิดในระบบ

ต่อมาพจน์ dipole ($n = 1$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r'\,P_1(\cos\alpha)\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r\cos\alpha\,\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\tau'$$

แต่ว่า $r' \cos\alpha = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ ดังนั้น

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')\, \mathrm{d}\tau'$$

อินทิกรัลในด้านขวาไม่ขึ้นกับ $\mathbf{r}$ ดังนั้นเราจะนิยาม *dipole moment* $\mathbf{p}$ รอบจุด ๆ หนึ่งว่า:

นิยาม Electric Dipole Moment.

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')\, \mathrm{d}\tau' \tag{2.22}$$

ก็จะได้ว่าพจน์ dipole คือ:

พจน์ Dipole.

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{2.23}$$

โดยพจน์ dipole จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิดเมื่อประจุรวม $Q = 0$ (พิสูจน์จากการแทน $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$)

► Dipole บริสุทธิ์

จาก (2.17) จะได้ว่า dipole จะเหลือแค่พจน์ dipole ในการกระจาย multipole ถ้าระยะ $\mathbf{r}$ ไกลมาก ๆ หรืออาจมองกลับกันว่าถ้าระยะ d น้อยมาก ๆ ก็จะเหลือแค่พจน์ dipole เช่นกัน ดังนั้นถ้าเรามองในลิมิต $q \to \infty$ และ $d \to 0$ โดยให้ $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ คงที่ตลอด จะได้จุด *dipole บริสุทธิ์* ที่จะมีสนามศักย์เป็นเพียง

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\alpha}{r^2} \tag{2.24}$$

ถ้ากำหนดว่า $\mathbf{p}$ ชี้ในทิศ $+z$ ก็จะได้

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

ดังนั้นเมื่อใช้ (1.13) จะได้สนามไฟฟ้า:

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p\cos\theta}{r^3} \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\sin\theta}{r^3} \\
E_\phi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{r^3} \left(2\cos\theta\, \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{2.25}$$

แสดงว่าสนามไฟฟ้าของ dipole โตแบบ $1/r^3$ (และเช่นเดียวกัน สนามไฟฟ้าของ quadrupole, octopole, ... ก็จะโตแบบ $1/r^4$, $1/r^5$, ... เพราะในการใช้ gradient หาสนามไฟฟ้าจะเพิ่ม $1/r$ ขึ้นมาอีกหนึ่งตัว) แต่สูตรด้านบนยังเป็นสูตรที่ขึ้นกับระบบพิกัดทรงกลม เราสามารถหาสูตรที่ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดได้ดังนี้:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{dip}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\Big(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\Big)\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(2p\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + p\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\Big)\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3p\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + p\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - p\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}}\Big)\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3\left(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\Big)\end{aligned}$$

สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์.

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\Big(3\left(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}\Big) \tag{2.26}$$

บทที่ 3 | สนามไฟฟ้าในสสาร

▶ 3.1. โพลาไรเซชัน

▶ การเหนี่ยวนำ Dipole

เมื่อนำอะตอมที่เป็นกลางไปไว้ในสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ จะทำให้นิวเคลียสเคลื่อนที่ไปในทิศของ $\mathbf{E}$ และกลุ่มหมอกอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในทิศตรงข้าม ถ้า $\mathbf{E}$ มีค่ามากพอก็จะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมทำให้อะตอมนั้นกลายเป็นไอออน แต่ถ้า $\mathbf{E}$ มีค่าไม่มากนักจะทำให้กลุ่มหมอกอิเล็กตรอนและนิวเคลียสเหลื่อมกันเล็กน้อยจึงเหนี่ยวนำให้เกิด dipole moment $\mathbf{p}$ ขึ้น (จะเรียกว่าอะตอมนี้โดน*โพลาไรซ์*) โดยปกติเมื่อ $\mathbf{E}$ เล็ก ๆ เราจะประมาณ dipole moment ที่เกิดนี้ได้ว่าแปรผันตรงกับสนาม:

Dipole เหนี่ยวนำ.

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \tag{3.1}$$

จะเรียก α นี้ว่า *สภาพมีขั้วได้ของอะตอม* (atomic polarizability)

สำหรับการปล่อยสนาม $\mathbf{E}$ นี้ไปบนโมเลกุล การเหนี่ยวนำ dipole จะต่างกันเล็กน้อย เพราะโมเลกุลนี้อาจจะถูกโพลาไรซ์ยากง่ายไม่เท่ากันในแกนที่ต่างกัน เช่นในตัวอย่างง่าย ๆ อย่าง CO_2 ที่โมเลกุลมีรูปร่างเป็นเส้นตรง เมื่อปล่อยสนามผ่านโมเลกุลในทิศเอียงจะต้องคิด dipole moment แยกเป็นสองพจน์:

$$\mathbf{p} = \alpha_\perp \mathbf{E}_\perp + \alpha_\parallel \mathbf{E}_\parallel$$

แต่ถ้าเป็นโมเลกุลที่ซับซ้อนกว่านี้จะต้องใช้*เทนเซอร์สภาพโพลาไรซ์ได้* (polarizability tensor) α_{ij} ซึ่งเป็นเทนเซอร์สามมิติที่มีแรงก์ 2 โดยมีความสัมพันธ์ระหว่าง $\mathbf{E}$, $\mathbf{p}$, และ α_{ij} ดังนี้:

Dipole เหนี่ยวนำในโมเลกุล.

$$p_i = \alpha_{ij} E_j \tag{3.2}$$

หรือก็คือ

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

(ถ้าเลือกแกนดี ๆ จะทำให้เหลือแค่พจน์ α_{xx}, α_{yy}, และ α_{zz} ได้)

► การหมุนของโมเลกุลมีขั้ว

พิจารณาโมเลกุลน้ำ (H_2O) รูปร่างของโมเลกุลนี้จะมีออกซิเจนอยู่ตรงกลางที่เชื่อมอยู่กับไฮโดรเจน 2 อะตอม โดยจะมีมุมบิดไป $105°$ การที่โมเลกุลน้ำมีลักษณะแบบนี้จะทำให้ฝั่งหนึ่งของโมเลกุลมีประจุบวกและอีกฝั่งหนึ่งมีประจุลบจึงทำให้โมเลกุลน้ำนี้เป็น dipole อยู่แล้ว (โดยจะเรียกโมเลกุลแบบนี้ว่า*มีขั้ว*) ถ้าโมเลกุลนี้อยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ $\mathbf{E}$ (หรือเปลี่ยนแปลงไม่มาก) แรงลัพธ์ของโมเลกุลจะเป็น $\mathbf{0}$ ก็จริง แต่ฝั่งบวกจะเกิดแรงกระทำในทิศเดียวกับ $\mathbf{E}$ ส่วนฝั่งลบจะเกิดแรงในทิศตรงข้าม จึงทำให้เกิดทอร์กบนโมเลกุล ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{d}$ เป็นเวกเตอร์จากจุดศูนย์กลางของฝั่งลบไปยังฝั่งบวก จะหาทอร์กได้ดังนี้:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= \left(\frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E})\right) + \left(\frac{-\mathbf{d}}{2} \times (-q\mathbf{E})\right) \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

(ซึ่งในสนามไม่สม่ำเสมอก็ยังใช้ได้อยู่เพราะเนื่องจาก d เล็กมากจะได้ว่า $|\Delta\mathbf{E}| \ll E$ ดังนั้น $\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \approx 2\mathbf{E}$) ดังนั้นจะได้ว่า

ทอร์กของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{3.4}$$

ก็คือเมื่อนำโมเลกุลมีขั้วนี้ไปไว้ในสนามไฟฟ้า โมเลกุลจะหมุนไปเรื่อย ๆ จนกว่า dipole moment จะมีทิศตรงกับสนาม

แต่ถ้าสนามเปลี่ยนเยอะในช่วงเล็ก ๆ จะเกิดแรงลัพธ์ด้วยทำให้โมเลกุลเคลื่อนที่:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\,\Delta\mathbf{E} \\ &\approx q(\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} \end{aligned}$$

เพราะระยะ d เล็กมาก ๆ ดังนั้น

แรงลัพธ์ของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} \tag{3.5}$$

▶ เวกเตอร์โพลาไรเซชัน

สองหัวข้อด้านต้นเป็นตัวอย่างของการโพลาไรซ์ไดอิเล็กทริก โดยทั้งสองกรณีมีสิ่งที่เหมือนกันก็คือ: ทำให้เกิด dipole เล็ก ๆ จำนวนมากชี้ในทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า ซึ่งเราจะนิยาม*โพลาไรเซชัน* $\mathbf{P}$ คือ:

นิยามโพลาไรเซชัน.

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \textit{dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร} \tag{3.6}$$

จริง ๆ แล้วโพลาไรเซชันนี้ซับซ้อนกว่าสองกรณีที่กล่าวมาและวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์สามารถทำให้คงสภาพโพลาไรเซชันนี้ไว้ได้ด้วย เพราะฉะนั้นจากนี้เราจึงจะเลิกสนใจแหล่งกำเนิดของเวกเตอร์โพลาไรเซชันและใช้ตามนิยามไปเลย

▶ 3.2. สนามไฟฟ้าของวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์

▶ Bound Charges

พิจารณาปริมาตร $\mathcal{V}$ ที่ถูกโพลาไรซ์ให้มีโพลาไรเซชัน $\mathbf{P}$ จาก (2.23) จะได้ว่าศักย์ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ จาก dipole ในปริมาตรเล็ก ๆ ณ ตำแหน่ง $\mathbf{r}'$ เท่ากับ

$$\mathrm{d}V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{P}\,\mathrm{d}\tau'\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}$$

ดังนั้น

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\mathbf{P}\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}\tau'$$

เมื่อ $\boldsymbol{\nabla}'$ คือ gradient เทียบพิกัด $\mathbf{r}'$ ต่อมาใช้ integration by parts จะได้:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}\tau' - \int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{P})\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\mathrm{d}\tau'\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\partial\mathcal{V}}\frac{\mathbf{P}}{\mathscr{r}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{-\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{P}}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\tau' \end{aligned}$$

ซึ่งหน้าตาคล้าย ๆ ศักย์ของประจุบนปริมาตรรวมกับประจุในปริมาตร ดังนั้นเราจะนิยาม

นิยาม Bound Charges. Bound surface charge σ_b คือ:

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{3.7}$$

และ bound volume charge ρ_b คือ:

$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} \tag{3.8}$$

ก็จะได้ว่า:

ศักย์ของวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\sigma_b}{\mathscr{r}}\, \mathrm{d}a' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_b}{\mathscr{r}}\, \mathrm{d}\tau' \tag{3.9}$$

โดยจาก (1.13) เราจึงหาสนามได้เช่นกัน

หมายเหตุ: *ไดอิเล็กทริกจริง ๆ ตามในส่วนที่แล้วไม่ได้เป็นเนื้อ dipole บริสุทธิ์ที่ต่อเนื่อง โดยสำหรับสนามและศักย์นอกไดอิเล็กทริกสามารถใช้การประมาณนี้ได้โดยไม่มีปัญหาเพราะระยะ $\mathscr{r}$ ใหญ่มากเมื่อเทียบกับ d แต่ถ้าเป็นสนามและศักย์ภายในเนื้อตัวนำ ถ้าจะให้การประมาณ dipole แบบต่อเนื่องใช้ได้ จะต้องเป็นศักย์หรือสนามเฉลี่ยในระดับ macroscopic เท่านั้น (เฉลี่ยในปริมาตรที่มีโมเลกุลมาก ๆ แต่ยังเล็กเมื่อเทียบกับปริมาตรของไดอิเล็กทริกอยู่พอสมควร)*

อีกวิธีหนึ่งที่อาจมีประโยชน์ในการหาศักย์หรือสนามของวัตถุที่ถูกโพลาไรซ์คือการนำวัตถุ 1 และ 2 ที่มีความหนาแน่นประจุ $+\rho$ และ $-\rho$ มาวางเหลื่อมกันด้วยระยะเล็ก ๆ d แล้วคำนวณศักย์หรือสนามตามปกติ (ถ้าระบบนี้ง่ายพอ เช่น ทรงกลมที่มีโพลาไรเซชันสม่ำเสมอ)

► 3.3. การกระจัดไฟฟ้า

► กฎของ Gauss เมื่อมีไดอิเล็กทริก

เราสามารถแบ่งส่วนที่ทำให้เกิด $\mathbf{E}$ ในกรณีที่มีไดอิเล็กทริกออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่มาจาก bound charge และส่วนที่ไม่ได้มาจากโพลาไรเซชัน (เรียกว่า *free charge*) หรือก็คือ

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \rho_f$$

ดังนั้นถ้าเรานิยาม

นิยามการกระจัดไฟฟ้า. *การกระจัดไฟฟ้า* (*electric displacement*: $\mathbf{D}$) นิยามดังนี้:

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.10}$$

ก็จะได้ว่า

กฎของ Gauss สำหรับระบบที่มีไดอิเล็กทริก.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f \qquad \text{และ} \qquad \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = Q_{f\,\mathrm{enc}} \tag{3.11}$$

เวกเตอร์การกระจัดไฟฟ้านี้มีสมบัติคล้าย ๆ $\mathbf{E}$ แต่ต้องระวังเพราะสนาม $\mathbf{E}$ ที่หาได้จากเพียง ρ (ด้วยกฎของ Gauss) เป็นเพราะว่ายังมีอีกเงื่อนไขที่ $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ด้วย แต่ในกรณีของการกระจัดไฟฟ้า

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla} \times \varepsilon_0 \mathbf{E} + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{P} \tag{3.12}$$

ไม่จำเป็นต้องเป็น $\mathbf{0}$ ดังนั้น $\mathbf{D}$ จึงไม่ได้กำหนดโดยเพียง ρ_f

▶ รอยต่อแผ่นประจุสำหรับการกระจัดไฟฟ้า

ต่อมาเช่นเดียวกับ $\mathbf{E}$ และ V เรามาดูสมบัติของ $\mathbf{D}$ ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ σ_f:

1. โดย (3.11) จะได้ว่า
$$D^{\perp}_{\text{above}} - D^{\perp}_{\text{below}} = \sigma_f \tag{3.13}$$
2. โดย (3.12) จะได้ว่า
$$D^{\parallel}_{\text{above}} - D^{\parallel}_{\text{below}} = P^{\parallel}_{\text{above}} - P^{\parallel}_{\text{below}} \tag{3.14}$$

▶ 3.4. ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

▶ สภาพอ่อนไหว, สภาพยอม, ค่าคงที่ไดอิเล็กทริก

เราสามารถประมาณเวกเตอร์โพลาไรเซชันในไดอิเล็กทริกได้คล้ายกับ (3.1) ดังนี้:

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \tag{3.15}$$

หมายเหตุ: $\mathbf{E}$ *ในที่นี้คือสนาม<u>ทั้งหมด</u> ดังนั้นสมการนี้ไม่ได้ใช้ง่ายอย่างที่คิด เพราะการโพลาไรซ์ด้วยสนามภายนอก* $\mathbf{E}^{\text{ext}}$ *จะทำให้เกิดสนามมาเพิ่มจาก* $\mathbf{P}$ *ที่เกิดขึ้นอีกที วนไปวนมาเรื่อย ๆ วิธีที่ง่ายที่สุดในการคำนวณก็คือควรพิจารณา* $\mathbf{D}$ *ก่อนและใช้กฎของ Gauss*

โดยเราจะเรียกไดอิเล็กทริกที่เป็นไปตามสมการด้านบนว่า*ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น* และเราจะเรียก χ_e ว่า*สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า* (*electric susceptibility*) ของไดอิเล็กทริกนั้น ๆ ต่อมาพิจารณา

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

จึงได้ว่า $\mathbf{D} \propto \mathbf{E}$ ด้วย เราจึงนิยาม*สภาพยอมทางไฟฟ้า* (*electric permittivity*) ว่า

นิยามสภาพยอมทางไฟฟ้า.

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \tag{3.16}$$

ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{3.17}$$

และนิยาม*สภาพยอมสัมพัทธ์* หรือ*ค่าคงที่ไดอิเล็กทริก*ว่า

นิยามค่าคงที่ไดอิเล็กทริก.

$$\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{3.18}$$

พิจารณาภายในบริเวณที่มี χ_e คงที่ จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{และ} \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

โดย Helmholtz's theorem จึงได้ว่า

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{vac}} \tag{3.19}$$

เมื่อ $\mathbf{E}_{\text{vac}}$ คือสนามไฟฟ้าเมื่อระบบอยู่ในสุญญากาศ ก็จะได้

สภาพยอมทางไฟฟ้าในไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} = \frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{E}_{\text{vac}} \tag{3.20}$$

ซึ่งเปรียบเสมือนการเปลี่ยนค่าจาก ε_0 เป็น ε ในสมการต่าง ๆ คล้าย ๆ เป็นการ "ต้าน" สนาม $\mathbf{E}$ ให้มีค่าลดลง

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นด้านบนไม่ได้เป็นไดอิเล็กทริกเชิงเส้นแบบ "ทั่วไป" จริง ๆ แต่จะเรียกว่าเป็น *isotropic linear dielectric* แต่ถ้าไม่ isotropic ไดอิเล็กทริกอาจถูกโพลาไรซ์ได้ยากง่ายไม่เท่ากันในแต่ละทิศจึงทำให้สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้าจะถูกอธิบายด้วยเทนเซอร์:

เทนเซอร์สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า.

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{e,ij} E_j \tag{3.21}$$

หรือก็คือ

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \varepsilon_0(\chi_{e,xx}E_x + \chi_{e,xy}E_y + \chi_{e,xz}E_z) \\ P_y &= \varepsilon_0(\chi_{e,yx}E_x + \chi_{e,yy}E_y + \chi_{e,yz}E_z) \\ P_z &= \varepsilon_0(\chi_{e,zx}E_x + \chi_{e,zy}E_y + \chi_{e,zz}E_z) \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

► ปัญหาสภาวะขอบเขตเกี่ยวกับไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เนื่องจาก

$$\rho_b = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\chi_e}{\varepsilon}\mathbf{D}\right) = (\text{const.})\rho_f$$

ดังนั้นในบริเวณที่ไม่มีประจุอิสระ จะได้ว่า $\rho = \rho_b + \rho_f = 0$ ทำให้สามารถใช้สมการ Laplace แก้หา V ได้โดยวิธีจากบทที่แล้ว โดยมีสภาวะขอบเขตดังนี้ (พิสูจน์โดย (3.11)):

สภาวะขอบเขตของรอยต่อไดอิเล็กทริก. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นของประจุอิสระเชิงพื้นที่ σ_f จะได้ว่า

$$\varepsilon_{\text{above}} E^{\perp}_{\text{above}} - \varepsilon_{\text{below}} E^{\perp}_{\text{below}} = \sigma_f \tag{3.23}$$

หรือ

$$\varepsilon_{\text{above}} \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \varepsilon_{\text{below}} \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\sigma_f \tag{3.24}$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน
และสำหรับ V จะต่อเนื่องเช่นเคย:

$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \tag{3.25}$$

ตัวอย่าง. ทรงกลมไดอิเล็กทริกเชิงเส้นรัศมี R ที่มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริก ε_r ถูกวางไว้ที่จุด $(0, 0, 0)$ โดยมีสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ (เมื่อไม่รวมสนามจากไดอิเล็กทริก) $\mathbf{E}_0$ ไหลผ่านในทิศ $+z$ จงหาสนามไฟฟ้าภายในไดอิเล็กทริก

วิธีทำ. เห็นชัดว่าระบบนี้ในพิกัดทรงกลมจะสมมาตรแบบ azimuth ดังนั้นใช้คำตอบของสมการ Laplace จาก (2.8) และ (2.10) ได้ว่าข้างในไดอิเล็กทริก ($r < R$):

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{$\star$1}$$

ข้างนอกไดอิเล็กทริกจะต้องมี $V(r,\theta)$ เมื่อ $r \to \infty$ เป็น

$$V(r,\theta) \approx -E_0 r\cos\theta$$

ก็จะได้ว่าที่ $r > R$:

$$V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{$\star$2}$$

เนื่องจาก V ต้องต่อเนื่องที่ $r = R$ จาก ($\star$1) และ ($\star$2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 R &= -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} && \text{เมื่อ } l = 1 \\ A_l R^l &= \frac{B_l}{R^{l+1}} && \text{เมื่อ } l \neq 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_l = B_l = 0$ สำหรับทุก $l \neq 1$ ก็จะได้

$$V(r,\theta) = \begin{cases} A_1 r\cos\theta & \text{เมื่อ } r < R \\ -E_0 r\cos\theta + \dfrac{(A_1 + E_0)R^3}{r^2}\cos\theta & \text{เมื่อ } r > R \end{cases}$$

ต่อมาใช้ (3.24) จะแก้หา A_1 ได้

$$A_1 = \frac{-3E_0}{2 + \varepsilon_r}$$

ก็จะได้ V เมื่อ $r < R$:

$$V(r,\theta) = -\frac{3}{2+\varepsilon_r}E_0 r\cos\theta$$
$$V(x,y,z) = -\frac{3}{2+\varepsilon_r}E_0 z$$

ดังนั้นก็จะได้ $\mathbf{E}_{\text{in}} = \dfrac{3}{2+\varepsilon_r}\mathbf{E}_0$ $\square$

► พลังงานในระบบที่มีไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เราสามารถหาพลังงานของระบบไดอิเล็กทริกโดยการ "ประกอบ" ระบบของประจุอิสระ ρ_f ทีละนิด แล้วปล่อยให้ไดอิเล็กทริกเกิดการโพลาไรซ์ก่อนที่จะประกอบต่อไป งานที่ต้องใช้บนประจุ $\Delta\rho_f$ ในการนำมาประกอบจะเท่ากับ

$$\Delta U = \int (\Delta\rho_f) V \,\mathrm{d}\tau$$

แต่ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_f$ ดังนั้น $\Delta\rho_f = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\Delta\mathbf{D})$ นำไปแทนแล้วใช้ integration by parts และ Stokes' theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\Delta U &= \int \big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Delta\mathbf{D})\big) V \,\mathrm{d}\tau \\ &= \int \boldsymbol{\nabla}\cdot(V\,\Delta\mathbf{D})\,\mathrm{d}\tau + \int \Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \cancel{\oint V\,\Delta\mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}} + \int \Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int \Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

ต่อมาพิจารณา

$$\Delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}) = \varepsilon\,\Delta\big(E^2\big) = 2\varepsilon E\,\Delta E = 2\,\Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

ก็จะได้ว่า

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int \Delta(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau$$

หรือก็คือ

พลังงานในสนามไฟฟ้าที่มีไดอิเล็กทริก.

$$U = \frac{1}{2}\int (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{d}\tau \tag{3.26}$$

หมายเหตุ: *สังเกตว่า (3.26) $\geq$ (1.27) เหตุผลเป็นเพราะว่า (1.27) จะเป็นพลังงานเนื่องจากสนามไฟฟ้าโดยตรง ไม่รวมพลังงานในการ "แยก" ขั้วของไดอิเล็กทริกในการโพลาไรซ์ (อาจมองเหมือนเป็นสปริงที่เชื่อมขั้วทั้งสองเข้าด้วยกัน) ดังนั้นก็จะได้อีกว่าพลังงานภายในของ "สปริง" นี้เท่ากับ* $\int \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau - \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\,\mathrm{d}\tau$

▶ แรงบนไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

พิจารณาไดอิเล็กทริกที่ขั้นในตัวเก็บประจุแผ่นตัวนำคู่ขนานกว้าง w ยาว l หน้า d (ให้แนวยาวขนานกับแกน x และตัวเก็บประจุนี้ชิดกับระนาบ yz) โดยที่ไดอิเล็กทริกเหลื่อมกับตัวเก็บประจุไประยะ $+x$ ถ้าดังไดอิเล็กทริกออกมาอีก $\mathrm{d}x$ จะได้ว่างานที่กระทำ:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W = F_{\text{ext}}\,\mathrm{d}x$$

ดังนั้นแรงที่สนามกระทำเท่ากับ

$$F = -F_{\text{ext}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \tag{♦1}$$

พิจารณาความจุไฟฟ้ารวมของตัวเก็บประจุที่มีระยะเหลื่อม x ใด ๆ:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{wx}{d}\varepsilon_0 + \frac{w(l-x)}{d}\varepsilon_r\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 w}{d}\left(\varepsilon_r l - \chi_e x\right) \tag{♦2}$$

จะได้พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุที่มีระยะเหลื่อม x ใด ๆ เท่ากับ

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

ดังนั้น

$$\mathrm{d}U = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\,\mathrm{d}C = -\frac{1}{2}V^2\,\mathrm{d}C \overset{(♦2)}{=} \frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0\chi_e w}{d}\,\mathrm{d}x$$

นำกลับไปแทนใน (♦1) จะได้ว่า

> **แรงบนไดอิเล็กทริกระหว่างแผ่นตัวนำ.**
>
> $$F = -\frac{\varepsilon_0\chi_e w}{2d}V^2 \tag{3.27}$$

หมายเหตุ: *เมื่อ $x = 0$ ไม่ได้ทำให้ $F = 0$ เพราะการใช้ U เป็นค่านั้นเป็นการประมาณสำหรับ x ที่มีค่ามาก ๆ*

บทที่ 4 | แม่เหล็กสถิต

▶ 4.1. กฎแรง Lorentz

▶ แรงแม่เหล็ก

แรง Lorentz. ประจุ Q ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}$ ในสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ จะถูกแรงแม่เหล็กกระทำดังนี้:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{4.1}$$

โดยถ้ามีทั้งสนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก:

$$\mathbf{F} = Q\big(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\big) \tag{4.2}$$

สนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ นี้มีหน่วยเป็น T (tesla) โดยการเคลื่อนที่ใน $\mathbf{B}$ สม่ำเสมอที่น่าสนใจมีดังนี้:

1. ถ้าประจุ Q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}$ ในสนาม $\mathbf{B}$ เพียงอย่างเดียว ส่วนของ $\mathbf{v}_\perp$ จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่วงกลมตามสมการ

   $$QBR = mv = p$$

   เมื่อ p คือโมเมนตัม และได้

   $$\omega = \frac{QB}{R}$$

   จะเรียกว่า*ความถี่ cyclotron*

2. ถ้าประจุ Q เริ่มจากหยุดนิ่งในสนาม $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{B}$ ที่ตั้งฉากกัน ถ้าแก้สมการมาจะได้ว่าประจุจะเคลื่อนที่เป็นรูป cycloid ที่มีรัศมี

   $$R = \frac{E}{\omega B}$$

   เมื่อ ω คือความถี่ cyclotron และศูนย์กลางวงกลมที่ทำให้เกิดรูป cycloid จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

   $$u = \omega R = \frac{E}{B}$$

ต่อมาพิจารณางานจากแรงแม่เหล็ก:

$$\mathrm{d}W_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{d}t = 0$$

ดังนั้นได้ว่า

งานของแรงแม่เหล็ก. แรงแม่เหล็กไม่ทำงาน:

$$W_{\text{mag}} = 0 \tag{4.3}$$

▶ กระแสไฟฟ้า

นิยามกระแสไฟฟ้า. กระแสไฟฟ้า ($\mathbf{I}$) ของจุดหนึ่งในสายไฟคือปริมาณประจุที่เคลื่อนที่ผ่านจุด ๆ นั้นต่อหน่วยเวลา หรือก็คือ

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \tag{4.4}$$

โดยกระแสไฟฟ้านี้มีหน่วย SI คือ A (ampere หรือ amp)

พิจารณา

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int \mathrm{d}\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}q$$

ดังนั้นในสายไฟจะได้

แรงแม่เหล็กบนสายไฟ.

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\,\mathrm{d}\ell \tag{4.5}$$

หรือก็คือ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) \tag{4.6}$$

ต่อมา หากประจุที่เคลื่อนที่เป็นประจุจากความหนาแน่นในสองหรือสามมิติ เราจะนิยาม:

นิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า. สำหรับประจุที่ไหลบนผิวในสองมิติ ถ้าในแถบเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $\mathrm{d}\mathbf{I}$ กว้าง $\mathrm{d}\ell_\perp$ เราจะนิยาม*ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงพื้นที่* ($\mathbf{K}$) ว่า

$$\mathbf{K} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}\ell_\perp} = \sigma \mathbf{v} \tag{4.7}$$

สำหรับประจุที่ไหลในปริมาตรสามมิติ ถ้าในท่อเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $\mathrm{d}\mathbf{I}$ มีพื้นที่ $\mathrm{d}a_\perp$ เราจะนิยาม*ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงปริมาตร* ($\mathbf{J}$) ว่า

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}a_\perp} = \rho \mathbf{v} \tag{4.8}$$

โดยเราจึงสามารถหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านผิว ๆ หนึ่งหรือเส้น ๆ หนึ่งได้จาก

$$I = \int \mathbf{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \quad \text{และ} \quad I = \int \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{4.9}$$

และเช่นเดียวกับ (4.5) จะได้ว่า

แรงแม่เหล็กบนกระแสในสองและสามมิติ.

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}a \tag{4.10}$$

และ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}\tau \tag{4.11}$$

จากสมการ (4.8) จะได้ว่า

$$I = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{4.12}$$

และเนื่องจากประจุที่ไหลออก (I) จะต้องเท่ากับประจุที่หายไป ดังนั้น

$$\int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J})\, \mathrm{d}\tau = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = I = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{enc}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \rho\, \mathrm{d}\tau = -\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right) \mathrm{d}\tau$$

ก็จะได้ว่า

สมการความต่อเนื่อง.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4.13}$$

▶ 4.2. กฎของ Biot-Savart

▶ ระบบกระแสคงที่

ในบทก่อน ๆ เราได้หาสนามไฟฟ้าในระบบที่เป็นประจุหยุดนิ่งไปแล้วหรือก็คือเป็นระบบ*ไฟฟ้าสถิต* (*electrostatics*) ต่อมาในกรณีสนามแม่เหล็ก ในการที่ระบบจะเป็น*แม่เหล็กสถิต* (*magnetostatics*) ระบบจะต้องมีกระแสคงเดิมตลอดเวลา หรือก็คือ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \tag{4.14}$$

เมื่อนำไปแทนใน (4.13) จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{4.15}$$

โดยในระบบกระแสคงที่นี้เราจะหาสนามแม่เหล็กได้จาก:

กฎของ Biot-Savart. สนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ในระบบที่เป็นแม่เหล็กสถิต หาได้จาก

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\, \mathrm{d}\ell' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \tag{4.16}$$

เมื่อ $\mu_0 \approx 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}} \approx 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$ คือ*สภาพซึมผ่านได้ของสุญญากาศ* (*permeability of free space*) โดยในกรณีความหนาแน่นกระแส:

กฎของ Biot-Savart ของกระแสในสองและสามมิติ.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\, \mathrm{d}a' \quad \text{และ} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2}\, \mathrm{d}\tau' \tag{4.17}$$

▶ 4.3. Divergence และ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

▶ Divergence ของสนามแม่เหล็กสถิต

พิจารณา (4.17) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) \mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) \mathrm{d}\tau' \right)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathbf{J}$ อยู่ในพิกัด (x', y', z') จึงได้ว่า $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$ และจาก

$$\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} = \mathbf{0}$$

ดังนั้น

กฎของ Gauss สำหรับสนามแม่เหล็ก.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.18}$$

▶ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

เช่นเดิม จาก (4.17) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) \mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} + \mathbf{J} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) - \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}) \right) \mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathbf{J}$ ขึ้นกับพิกัด (x', y', z'):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\mathbf{J} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) \mathrm{d}\tau' \tag{$\dagger$}$$

พิจารณาพจน์ด้านหลัง เนื่องจาก $\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}/\mathscr{r}^2 = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ดังนั้น $\boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\nabla}'$ จะได้ว่า

$$\int -(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \, \mathrm{d}\tau' = \int (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}') \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \, \mathrm{d}\tau'$$

คิดแยกแกน โดยให้ $\mathcal{V}$ คือปริมาตรที่อินทิเกรต (ปริมาตรที่ใหญ่มาก ๆ):

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{V}} -(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \, \mathrm{d}\tau' \right)_x &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}') \, \frac{x - x'}{\mathscr{r}^2} \, \mathrm{d}\tau' \\
&= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla}' \cdot \left(\frac{x - x'}{\mathscr{r}^2} \mathbf{J} \right) \mathrm{d}\tau' - \cancel{\int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{J}) \frac{x - x'}{\mathscr{r}^2} \, \mathrm{d}\tau'} \\
&= \oint_{\partial\mathcal{V}} \left(\frac{x - x'}{\mathscr{r}^2} \mathbf{J} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathcal{V}$ ใหญ่มาก ดังนั้นจะได้ว่าไม่มีกระแสไหลออกจากระบบเลย ดังนั้น

$$\int_{\mathcal{V}} -(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \, \mathrm{d}\tau' = \mathbf{0}$$

นำไปแทนใน $(\dagger)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}}{\mathscr{r}^2} \right) \mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \left(4\pi \, \delta^3(\boldsymbol{\mathscr{r}}) \right) \mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

ดังนั้น

กฎของ Ampère (Differential Form).

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{4.19}$$

ต่อมาอินทิเกรตบนผิวใด ๆ:

$$\int (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

โดย Stokes' Theorem จะได้ว่า

กฎของ Ampère (Integral Form).

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{4.20}$$

▶ 4.4. เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก

▶ นิยามศักย์แม่เหล็ก

ในบทสนามไฟฟ้า เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ทำให้เราสามารถนิยามสนามสเกลาร์ V (ศักย์ไฟฟ้า) ซึ่ง

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$$

ในกรณีของสนามแม่เหล็ก เรามี (4.18) ที่กล่าวว่า $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ จึงทำให้เราสามารถนิยาม*ศักย์แม่เหล็ก*ซึ่งเป็นสนามเวกเตอร์ได้ว่า

นิยามศักย์แม่เหล็ก.

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{4.21}$$

พิจารณา (4.19):

$$\begin{aligned}\mu_0 \mathbf{J} &= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \\ &= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \\ &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\end{aligned}$$

สังเกตว่าถ้า $\mathbf{A}_0$ สอดคล้องกับ (4.21) แล้ว $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\nabla}\lambda$ ก็สอดคล้องด้วย พิจารณา $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเลือกสนามศักย์แม่เหล็กให้มี $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = 0$ ได้เสมอ (เพราะเรารู้ว่าสมการ Poisson $\nabla^2 \lambda = -f(x) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}_0$ มีคำตอบ) ก็จะได้ว่า

สมการ Poisson ของศักย์แม่เหล็ก.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{4.22}$$

ในบทไฟฟ้าสถิตเรามีคำตอบของสมการ $\nabla^2 V = \rho/\varepsilon_0$ อยู่แล้ว (เมื่อ $\rho \to 0$ เมื่อ $\mathbf{r} \to \infty$) คือ

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}\tau'$$

จังดัดแปลงให้เป็นคำตอบของ (4.22) ได้ว่า

ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแส.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}\tau' \tag{4.23}$$

หรือสำหรับหนึ่งและสองมิติ:

ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแสในหนึ่งและสองมิติ.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}a' \quad \text{และ} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r})}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{1}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \tag{4.24}$$

โดยสมการศักย์นี้ใช้ได้เมื่อ $\mathbf{J} \to \mathbf{0}$ เมื่อ $\mathbf{r} \to \infty$ แต่ถ้าไม่ใช่ อาจต้องหาศักย์โดยใช้วิธีอื่น วิธีหนึ่งคือสังเกตว่า

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}$$

โดยเราจะเรียกพจน์ฝั่งขวาว่า*ฟลักซ์แม่เหล็ก* (Φ_B):

นิยามฟลักซ์แม่เหล็ก. ฟลักซ์ของ $\mathbf{B}$ ที่ผ่านผิว $\mathcal{S}$ คือ

$$\Phi_B \equiv \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \tag{4.25}$$

ดังนั้นสมการด้านบนก็จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \Phi_B \tag{4.26}$$

ซึ่งสามารถนำมาใช้หา $\mathbf{A}$ ได้เช่นเดียวกับการใช้ (4.20) ในการหา $\mathbf{B}$ ในระบบที่มีความสมมาตร

► สภาวะขอบเขต

ต่อมาเรามาหาสภาวะขอบเขตของสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ และศักย์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ เช่นเดียวกับในบทไฟฟ้าสถิต โดยพิจารณาที่บริเวณแผ่นที่มีกระแส $\mathbf{K}$ ไหลอยู่:

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกที่บางมาก ๆ ดั่งในตอนหาสภาวะขอบเขตของ $\mathbf{E}$ และใช้ (4.18) จะได้ว่า

   $$B^{\perp}_{\text{above}} - B^{\perp}_{\text{below}} = 0$$

   ดังนั้นส่วนของ $\mathbf{B}$ ที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสจะต่อเนื่อง

2. พิจารณาลูป Amperian รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแคบ ๆ ที่มีด้านขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ $\mathbf{K}$ จะได้ว่า

   $$B^{\parallel}_{\text{above}} - B^{\parallel}_{\text{below}} = \mu_0 K$$

   ดังนั้นส่วนของ $\mathbf{B}$ ที่ขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ $\mathbf{K}$ จะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\mu_0 K$

3. เนื่องจาก $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$ จะได้ว่า $A^{\perp}$ ต่อเนื่อง และจาก (4.26) ก็จะได้ว่า $A^{\parallel}$ ก็ต่อเนื่อง ดังนั้น

   $$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}}$$

   หรือก็คือ $\mathbf{A}$ ต่อเนื่องเมื่อผ่านแนวแผ่นกระแส

4. กำหนดให้ $\Delta\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}$, $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{K}}$, และ $\hat{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ จากข้อ 1. และ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mu_0\left(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}\right) &= \mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} \\
\mu_0 K\hat{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}\right) \\
&= \boldsymbol{\nabla} \times \Delta\mathbf{A} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{n}} & \hat{\mathbf{p}} \\ D_k & D_n & D_p \\ \Delta A_k & \Delta A_n & \Delta A_p \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{p}}\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial k}\Delta A_n} - \frac{\partial}{\partial n}\Delta A_k\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta A_p - \cancel{\frac{\partial}{\partial p}\Delta A_n}\right)
\end{aligned}$$

(เนื่องจาก $\mathbf{A}$ ต่อเนื่อง $\partial/\partial k$ และ $\partial/\partial p$ ของข้างบนและข้างล่างจึงเท่ากัน) ดังนั้นก็จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial n}\Delta A_k = -\mu_0 K \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta A_p = 0 \tag{$\heartsuit$1}$$

ต่อมา จาก

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \Delta\mathbf{A} = \cancel{\frac{\partial}{\partial k}\Delta A_k} + \frac{\partial}{\partial n}\Delta A_n + \cancel{\frac{\partial}{\partial p}\Delta A_p}$$

ก็จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial n}\Delta A_n = 0 \tag{$\heartsuit$2}$$

จาก ($\heartsuit$1) และ ($\heartsuit$2) ก็จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0\mathbf{K}$$

สรุปก็คือ

สภาวะขอบเขตของ B และ A เมื่อผ่านแผ่นกระแส. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}} \tag{4.27}$$

และ

$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0\left(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}\right) \tag{4.28}$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือก็จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0\mathbf{K} \tag{4.29}$$

► การกระจาย Multipole ของศักย์แม่เหล็ก

พิจารณาการกระจาย multipole ของ $\mathbf{A}$ (อนุกรมกำลังในรูป $1/r$) โดยใช้ (2.19) และ (4.24):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{1}{\mathscr{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\oint (r')^n P_n(\cos\alpha)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'\end{aligned}$$

ก็จะได้พจน์

$$\mathbf{A}_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = \mathbf{0}$$

ตามที่คาด (เพราะจาก (4.18) เราสมมติไม่มี magnetic monopole)

ก่อนที่จะไปดูพจน์ dipole เราจะต้องพิสูจน์เอกลักษณ์หนึ่งที่จะต้องใช้ก่อน:

> **Claim.**
> $$\oint_{\partial\mathcal{S}}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c} \tag{4.30}$$

พิสูจน์. พิจารณา Stokes' Theorem บน $\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})$:

$$\oint_{\partial\mathcal{S}}\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{c}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}))\,\mathrm{d}\mathbf{a}$$

จากนั้นสลับการคูณของสเกลาร์ในฝั่งซ้ายและใช้กฎการคูณในฝั่งขวา จะได้

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\mathcal{S}}\mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \cancel{\int_{\mathcal{S}}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{c})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}} - \int_{\mathcal{S}}(\mathbf{c}\times\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}))\cdot\mathrm{d}A \\ &= -\int_{\mathcal{S}}(\mathbf{c}\times\mathbf{c})\cdot\mathrm{d}a \\ &= -\int_{\mathcal{S}}\mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\times\mathrm{d}\mathbf{a})\end{aligned}$$

ตัด $\mathbf{c}$ ทั้งสองฝั่ง ก็จะได้

$$\oint_{\partial\mathcal{S}}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{S}}\mathrm{d}\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

ตามต้องการ □

ต่อมาเรามาพิจารณาพจน์ dipole:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint r'\cos\alpha\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'\end{aligned}$$

แต่จาก claim (4.30) ก็จะได้ว่า $\oint_{\partial S}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = \int_S \mathrm{d}\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a}\times\hat{\mathbf{r}}$ ดังนั้น

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathbf{a}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

เราจึงนิยาม *magnetic dipole moment* ($\mathbf{m}$):

นิยาม Magnetic Dipole Moment.

$$\mathbf{m} \equiv I\int \mathrm{d}\mathbf{a} = I\mathbf{a} \tag{4.31}$$

ก็จะได้ว่า

พจน์ Dipole.

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{4.32}$$

โดยสังเกตว่า $\mathbf{m}$ นี้ไม่ขึ้นกับจุดกำเนิด

► Dipole บริสุทธิ์

เช่นเดียวกับ electric dipole บริสุทธิ์ เราสามารถสร้างจุดที่เป็น magnetic dipole บริสุทธิ์ได้ถ้ามองในลิมิต $I\to\infty$ และ $a\to 0$ โดยให้ $\mathbf{m} = I\mathbf{a}$ คงที่

สมมติให้ $\mathbf{m}$ ของ dipole บริสุทธิ์นี้ชี้ในทิศ $+z$ จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ดังนั้นจึงได้สนามแม่เหล็กของ dipole บริสุทธิ์:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$$

เมื่อคำนวณออกมาจะได้ว่า

สนามแม่เหล็กของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(r,\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{4.33}$$

ได้เหมือนกับสนามของ electric dipole บริสุทธิ์พอดี เราจึงหาสูตรในรูปทั่วไปที่ไม่ขึ้นกับพิกัดทรงกลมได้ในแบบเดียวกับ (2.26) ก็จะได้ว่า

สนามแม่เหล็กของ Dipole บริสุทธิ์.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\Big(3\left(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}}\right)\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}\Big) \tag{4.34}$$

บทที่ 5 | สนามแม่เหล็กในสสาร (TO-DO)

► 5.1. แมกเนไทเซชัน (TO-DO)

► **Diamagnet, Paramagnet, Ferromagnet**

บทที่ 6 | พลศาสตร์ไฟฟ้า

► 6.1. แรงเคลื่อนไฟฟ้า

► กฎของ Ohm

ในการเคลื่อนย้ายประจุให้เกิดกระแสก็จะต้องออกแรง เราจึงมาหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับกระแสกันก่อน

พิจารณาสายไฟที่มีอิเล็กตรอนอิสระอยู่ n อนุภาคต่อหน่วยปริมาตรและแต่ละอิเล็กตรอนมีมวล m_e ประจุ e และสมมติมีสนามแรง $\mathbf{f}$ (ต่อหน่วยประจุ) กระทำอยู่กับทั้งสาย แรง $\mathbf{f}$ จะทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่ง a ก่อนที่จะชนกับอิเล็กตรอนอีกอนุภาคจนทำให้อัตราเร็ว (โดยเฉลี่ยทั้งหมดแล้ว) กลับมาเป็น 0 อีกครั้ง โดยถ้าสมมติว่าอัตราเร็วของอิเล็กตรอนเนื่องจากความร้อนเท่ากับ v_{thermal} และมีระยะทางเฉลี่ย λ ระหว่างการชน เนื่องจาก v_{thermal} มีค่าสูงมาก จึงประมาณได้ว่าความเร่งที่เกิดขึ้นนั้นมีผลน้อยมาก จึงได้เวลาโดยเฉลี่ยก่อนที่จะชนกับอิเล็กตรอนอีกอนุภาคคือ

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{thermal}}}$$

ก็จะได้ขนาดของความเร็วเร็วเฉลี่ยหรือ*อัตราเร็วลอยเลื่อน* (*drift velocity*) เท่ากับ

$$v_d = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{\text{thermal}}} \tag{6.1}$$

ดังนั้นกระแสจึงเท่ากับ

$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v}_d = ne\frac{\lambda\mathbf{a}}{2v_{\text{thermal}}} = \left(\frac{\cancel{n}e\lambda}{2v_{\text{thermal}}\cancel{n}m_e}\right)\mathbf{F} = \left(\frac{ne^2\lambda}{2v_{\text{thermal}}m_e}\right)\mathbf{f} \tag{6.2}$$

จะเห็นว่าโดยปกติแล้วสำหรับวัสดุทั่วไป $\mathbf{J}$ จึงแปรผันตรงกับ $\mathbf{f}$:

> **สมการการแปรผันตรงของกระแสกับแรง.**
>
> $$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{f} \tag{6.3}$$

โดยที่ σ เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่า*สภาพนำไฟฟ้า* (*conductivity*) ของสสารนั้น (ถ้าสสารเป็นตัวนำในอุดมคติก็จะมี $\sigma = \infty$) และ $\rho \equiv 1/\sigma$ เรียกว่า*สภาพต้านทาน* (*resistivity*) โดยถ้าแรงที่ใช้เป็นแรงทางไฟฟ้าเท่านั้นโดยมีส่วนของแรงแม่เหล็กน้อยมาก ๆ ก็จะได้

กฎของ Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{6.4}$$

และจาก (6.1) จะได้ว่า

อัตราเร็วลอยเลื่อน.

$$v_d = \frac{a\lambda}{2v_{\text{thermal}}} = \frac{eE}{2m_e v_{\text{thermal}}}\lambda = \frac{eE}{2m_e}\tau' = \frac{eE}{m_e}\tau \tag{6.5}$$

เมื่อ τ' คือเวลาเฉลี่ยระหว่างการชนสองครั้งที่ติดกันและ τ คือเวลาเฉลี่ยหลังการชนครั้งก่อนหน้า (โดยใช้เวลาเฉลี่ยบนการสุ่มเลือกอิเล็กตรอน)

หมายเหตุ: *สมการ (6.2) และ (6.5) เป็นเพียงการประมาณหยาบ ๆ แบบกลศาสตร์ดั้งเดิมเท่านั้น จึงไม่สามารถนำมาใช้หา σ และ v_d ได้ในสสารจริง ๆ และยิ่งไปกว่านั้น ในความเป็นจริงแล้วยังมีวัสดุบางชนิดที่ไม่เป็นไปตามกฎการแปรผันตรงนี้อีกด้วย เราจะเรียกวัสดุที่เป็นไปตามกฎของ Ohm ว่าเป็นวัสดุ Ohmic*

สังเกตว่าในการทำให้ความต่างศักย์มากขึ้น k เท่าระหว่างขั้ว*อิเล็กโทรด* เราจะต้องเพิ่ม Q ไป k เท่า ทำให้ $\mathbf{E}$ เพิ่ม k เท่าและจาก (6.4) จะได้ว่า $\mathbf{J}$ และ I ก็เพิ่ม k เท่าเช่นกัน ก็จะได้กฎของ Ohm ในอีกรูปแบบ:

กฎของ Ohm ในรูปกระแสและความต่างศักย์.

$$V = IR \tag{6.6}$$

เมื่อ R เป็นค่าคงที่*ความต้านทาน*ระหว่างสองจุดนั้น (ในการคำนวณหาความต้านทานใช้ (6.4) ตามในแต่ละระบบได้เลย) โดย R นี้มีหน่วย SI คือ Ω (ohm)

ในกรณีที่กระแสไหลแบบคงที่ในสสารเนื้อเดียวกันที่เป็นไปตามกฎของ Ohm จาก (4.15) จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{6.7}$$

ดังนั้นในบริเวณที่สสารเป็นไปตามกฎของ Ohm ก็จะไม่มีประจุตกค้างอยู่ภายในเลย จึงทำให้สามารถใช้ทริคในการแก้ศักย์และสนามจากสมการ Laplace ได้ตามปกติ

สุดท้าย จาก (6.2) เนื่องจากแรงที่ออกนั้นไม่ส่งผลในอัตราเร็วลอยเลื่อนเพิ่มขึ้นเลย ดังนั้นพลังงานส่วนมากจากการชนจะถูกเปลี่ยนเป็นความร้อน โดยถ้ามีประจุไหลต่อเวลาเท่ากับ I โดยศักย์ของประจุลดลง V ก็จะได้

กฎการให้ความร้อนของ Joule.

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{6.8}$$

▶ แรงเคลื่อนไฟฟ้า

โดยปกติแล้วในวงจรไฟฟ้าจะมีแรงสองแรงในการทำให้ประจุเคลื่อนที่คือแรงจากแหล่งกำเนิด ($\mathbf{f}_s$) ซึ่งโดยปกติแล้วแรงนี้จะอยู่แค่ในบริเวณแหล่งกำเนิดเท่านั้น และอีกแรงคือแรงจากสนามไฟฟ้าที่จะเป็นตัวที่ช่วยทำให้กระแสไหลด้วย I คงที่ตลอดทั้งสาย ดังนั้นแรงต่อประจุโดยรวมจะเท่ากับ

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$$

แต่แรง $\mathbf{E}$ ที่ช่วยให้กระแสไหลคงที่มาจากไหนล่ะ? เราลองพิจารณาทีละขั้นตอน ดังนี้:

1. เมื่อเริ่มต่อสายไฟกับแบตเตอรี่ จะเกิดแรง $\mathbf{f}_s$ ทำให้เกิดกระแสไหลออก โดยถ้ากระแสในสายไฟเปล่านี้เริ่มไหลไม่คงที่ จะทำให้มีประจุสะสมเกิดขึ้นจึงมี $\mathbf{E}$ ต้านกระแสส่วนที่เร็วเกินไปและเสริมในส่วนที่ช้าเกินไป

2. ที่บริเวณตัวต้านทานก็เช่นเดียวกัน จะต้องมีกระแสเท่ากับนอกตัวต้านทาน แต่คราวนี้ประจุจะสะสมไปเรื่อย ๆ จนกว่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะมากพอที่จะพลักประจุผ่านตัวต้านทานไปได้ด้วยกระแสเท่ากับข้างนอก (ตาม (6.4)) โดยกระเกิดประจุสะสมที่ฝั่งหนึ่งของตัวต้านทานก็จะทำให้เกิดประจุสะสมที่ขั้วของแบตเตอรี่ด้วย

3. อีกขั้วของแบตเตอรี่ก็จะเกิดกระบวนการเช่นเดียวกับ 1. และ 2. แต่ในทิศและขั้วตรงข้าม

เราจึงนิยามผลของแรงทั้งหมดภายในวงจรว่า*แรงเคลื่อนไฟฟ้า*หรือ *emf* (*electromotive force*: $\mathcal{E}$):

นิยามแรงเคลื่อนไฟฟ้า.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{f}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{6.9}$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าสถิต $\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$ โดย $\mathcal{E}$ นี้มีหน่วยเป็น V เช่นเดียวกับศักย์ไฟฟ้า

หมายเหตุ: *emf นี้นิยามเป็นค่า ณ ขณะหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นเมื่อสายไฟขยับ เราจะใช้* $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ *เป็นทิศเดียวกับสายไฟจริง ๆ ไม่ต้องคำนึงถึงความเร็ว*

พิจารณาในสภาวะสมดุลหลังจากต่อแบตเตอรี่: สมมติแหล่งกำเนิดเป็นแบตเตอรี่ไร้ความต้านทาน ($\sigma = \infty$) ก็จะได้ว่าแรงที่ออกในการเคลื่อนประจุเป็น 0 ดังนั้น $0 = \mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$ ก็จะได้

$$V = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{f}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} \tag{6.10}$$

แต่ถ้าแบตเตอรี่นี้มีความต้านทาน r (หมายความว่าถ้าตัดแรง $\mathbf{f}_s$ ออกแล้วความต่างศักย์ $V_{\text{off}} = \int \mathbf{E}_{\text{off}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = Ir$) สมการด้านบนจะไม่เป็นจริง โดยจะได้

$$V = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left(\mathbf{f}_s - \frac{\mathbf{J}}{\sigma}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} + \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E}_{\text{off}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} - V_{\text{off}} = \mathcal{E} - Ir \tag{6.11}$$

▶ แรงเคลื่อนไฟฟ้าจากสายไฟเคลื่อนที่

เราสามารถเหนี่ยวนำเส้นลวดให้เกิด emf ได้โดยอาศัยสนามแม่เหล็ก ซึ่งเป็นวิธีที่*เครื่องกำเนิดไฟฟ้า* (*generator*) ใช้ในการสร้างกระแสไฟฟ้า โดยยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราเอาสายไฟรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กว้าง h ไปวางในสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ที่มีทิศตั้งฉากกับสายไฟ แล้วทำการดึงสายไฟออกด้วยอัตราเร็ว v ในทิศตั้งฉากกับทั้งสายไฟและ $\mathbf{B}$ ก็จะได้

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = vBh$$

แต่เพราะในขณะที่สายไฟมีความเร็ว v กระแสที่เกิดขึ้นก็จะทำให้มีแรงแม่เหล็กต้านไว้ แรงที่ดึงจึงต้องต้านแรงแม่เหล็กนี้ด้วย โดยถ้าสมมติว่าอิเล็กตรอนไหลด้วยอัตราเร็ว u เทียบกับสายไฟ จะได้แรงที่ต้องดึง $\mathbf{f}_{\text{pull}} = uB$ จึงได้ว่างานที่สายไฟนี้ทำต่อประจุเท่ากับ

$$\int \mathbf{f}_{\text{pull}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = uB\left(\frac{h}{\cos\theta}\right)\sin\theta = vBh$$

ดังนั้นจริง ๆ แล้วงานที่เกิดขึ้นนั้นมาจากแรงดึงทั้งหมด ไม่ได้มาจากแรงแม่เหล็ก (ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะแรงแม่เหล็กไม่ทำงาน) ต่อมาเราจะมาพิสูจน์กฎที่สำคัญในการหา emf จากการสนามแม่เหล็กดังกระบวนการก่อนหน้านี้

พิจารณาสายไฟวงปิดที่เกิดการเคลื่อนที่หรือบิด ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านผิวที่กำหนดเส้นขอบโดยสายไฟ เมื่อเวลาผ่านไป $\mathrm{d}t$ ก็จะเกิด "ริบบิ้น" ของพื้นที่ส่วนที่เปลี่ยนแปลงขึ้น ก็จะได้

$$\mathrm{d}\Phi_B = \int_{\text{ribbon}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{$\circ$1}$$

ถ้าพิจารณา $\mathrm{d}\mathbf{a}$ ที่จุด ๆ หนึ่งโดยให้ความเร็วของอิเล็กตรอน $\mathbf{w}$ มาจากสองส่วนคือส่วน $\mathbf{v}$ ที่เป็นความเร็วของสายไฟ และ $\mathbf{u}$ ที่เป็นความเร็วของกระแส ก็จะได้ว่า

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{w} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathbf{w}\,\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{$\circ$2}$$

นำ ($\circ$2) ไปแทนใน ($\circ$1) จะได้

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w}\,\mathrm{d}t \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) = -\int (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\mathcal{E}$$

ดังนั้น

กฎฟลักซ์แม่เหล็กสำหรับสายไฟเคลื่อนที่.

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{6.12}$$

หมายเหตุ: *กฎนี้เห็นชัดจากการพิสูจน์ว่าต้องเกิดจากการเคลื่อนที่ของสายไฟ ดังนั้นการสับสวิทช์ที่ทำให้วงสายไฟใหญ่ขึ้นจึงไม่ทำให้เกิด emf เป็นอนันต์*

▶ 6.2. การเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า

▶ กฎของ Faraday

ต่อมา Michael Faraday ได้ทำการทดลองเพิ่มจาก (6.12) โดยแทนที่จะขยับสายไฟ เขาทำการขยับแม่เหล็กและปรับขนาดของฟลักซ์แม่เหล็กแทน ปรากฏว่า emf ที่เกิดขึ้นก็ยังคงเป็นไปตาม (6.12) อยู่ดี โดยไม่ต้องขยับสายไฟเลย โดยแรงที่เกิดขึ้นนี้เป็นแรงไฟฟ้าไม่ใช่แรงแม่เหล็ก ดังนั้น

กฎของ Faraday (Integral Form).

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{6.13}$$

โดยถ้าใช้ Stokes' theorem ต่อก็จะได้

$$\int (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

หรือก็คือ

กฎของ Faraday (Differential Form).

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6.14}$$

เราสามารถรวมกฎของ Faraday (6.13) และกฎฟลักซ์แม่เหล็กสำหรับสายไฟเคลื่อนที่ (6.12) ได้เป็นกฎฟลักซ์แม่เหล็กรวม (หรือบางคนเรียกว่ากฎของ Faraday) ดังนี้:

กฎฟลักซ์แม่เหล็กรวม.

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \tag{6.15}$$

โดยทิศของกระแสอาจจะมึนจึงมีกฎของ Lenz มาช่วยให้คิดทิศของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำง่ายขึ้น:

กฎของ Lenz. ธรรมชาติต่อต้านการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กโดยสร้างกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทิศที่จะเกิดสนามแม่เหล็กต้านการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์

▶ สนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ

เราสามารถสังเกตว่าในกฎของ Faraday ถ้าพิจารณาในปริเวณที่ไม่มีประจุแล้ว

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \text{และ} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ซึ่งเหมือนกับสมการของแม่เหล็กสถิต ดังนั้นเราสามารถใช้ทริคต่าง ๆ คล้ายในบทแม่เหล็กสถิต เช่นจะได้ "กฎ Biot-Savart" ว่า:

กฎ Biot-Savart ของสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathbf{B}\times\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\boldsymbol{\imath}^2} \tag{6.16}$$

หรือเราอาจจะใช้ (6.13) เพื่อสร้างลูป Amperian ในการคำนวณสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำได้เช่นกัน

ตัวอย่าง. ประจุที่มีความหนาแน่นเชิงเส้น λ ถูกนำกาวติดไว้ที่ริมของล้อรัศมี b ที่วางในระนาบ xy และหมุนได้อย่างอิสระ ข้างในล้อมีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ $\mathbf{B}_0$ ชี้ในทิศ $+z$ ที่กระจายอยู่ทั่วในทรงกระบอกที่มีศูนย์กลางเดียวกับล้อและมีรัศมี $a < b$ ถ้าเกิดว่าปิดสนามแม่เหล็กนี้แล้วจะเกิดอะไรขึ้นกับล้อ

วิธีทำ. การปิดสนามนี้จะเกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กในล้อ จึงจะเกิดสนามไฟฟ้าวนในทิศทวนเข็มนาฬิกา (โดยกฎของ Lenz) เพื่อต้านการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็ก โดยจะได้ทอร์กจากสนามไฟฟ้า ณ เวลาใด ๆ เท่ากับ

$$\tau = b\int \mathrm{d}F = b\int E\,\mathrm{d}q = bE\lambda(2\pi b)$$

จาก (4.20) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\\ E(2\pi b) &= -\pi a^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

นำไปแทนในทอร์กจะได้

$$\tau = -\lambda\pi a^2 b\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

ดังนั้น

$$\Delta L = \int \tau\,\mathrm{d}t = -\lambda\pi a^2 b\int\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \lambda\pi a^2 b(B_{\text{before}} - B_{\text{after}}) = \lambda\pi a^2 bB_0$$

จึงได้ว่าไม่ว่าจะปิดสนามแม่เหล็กนี้เร็วแค่ไหน จะเกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากันเสมอ □

ปัญหาหนึ่งของการใช้กฎของ Faraday คือสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นนี้จะต้องเกิดจากสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นตามทฤษฎีแล้วเราจึงไม่สามารถคำนวณหาสนามแม่เหล็กที่นำมาใส่ในสมการได้ด้วยสมการเดียวกับบทแม่เหล็กสถิต แต่ในความเป็นจริง ถ้าสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงนี้เปลี่ยนช้าพอ (เราจะเรียกว่าเปลี่ยนแบบ *quasistatic*) error ที่เกิดขึ้นจากการใช้กฎจากแม่เหล็กสถิตในการคำนวณนี้จะถือว่าน้อยมาก ๆ ในบริเวณที่อยู่ใกล้ ๆ กับแหล่งกำเนิดของการเปลี่ยนแปลงนี้

▶ ความเหนี่ยวนำ

พิจารณาขดลวดสายไฟสองขดลวดที่วางไว้อยู่นิ่ง ถ้าลวดเส้นที่หนึ่งมีกระแส I_1 ไหลผ่านจะทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}_1$ และจะเกิดฟลักซ์แม่เหล็ก Φ_2 ผ่านขดลวดที่สอง เนื่องจากกฎ Biot-Savart จะได้ว่า $B_1 \propto I_1$ ดังนั้น $\Phi_2 \propto I_1$ โดยเราจะเรียกค่าคงที่การแปรผันนี้ว่า*ความเหนี่ยวนำร่วมกัน* (*mutual inductance*: M_{21}) ของขดลวดทั้งสอง:

นิยามความเหนี่ยวนำร่วมกัน.

$$M_{21} \equiv \frac{\Phi_2}{I_1} \qquad \text{หรือ} \qquad \Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{6.17}$$

พิจารณาการหา M_{21} โดยเราจะเริ่มจาก Φ_2 และใช้ Stokes' theorem:

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}_2 = \int (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_1) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{\mathscr{r}} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2$$

ก็จะได้ $M_{21} = M_{12} \equiv M$ และจะได้

สูตรของ Neumann.

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}_2}{\mathscr{r}} \tag{6.18}$$

จริง ๆ แล้วการเหนี่ยวนำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กของสายไฟ ไม่จำเป็นต้องใช้สายไฟสองเส้นก็ได้ เราจึงนิยาม*ความเหนี่ยวนำตัวเอง* (*self inductance*: L) หรืออาจจะเรียกสั้น ๆ ว่า*ความเหนี่ยวนำ* ดังนี้

นิยามความเหนี่ยวนำ.

$$L \equiv \frac{\Phi_B}{I} \qquad \text{หรือ} \qquad \Phi_B = LI \tag{6.19}$$

ความเหนี่ยวนำมีหน่วยเป็น H (henry) และโดยกฎของ Faraday ก็จะได้ว่าเมื่อพยายามจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของกระแสในวงจรแบบ quasistatic แล้วจะเกิด emf ในทิศย้อนศร (back emf) เป็นแรงเคลื่อนไฟฟ้าต้านการเปลี่ยนแปลงของกระแส:

Back Emf.

$$\mathcal{E}_{\text{back}} = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{6.20}$$

ในวงจรหนึ่ง เราสามารถสร้างขดลวดโซลีนอยด์เพื่อให้มีความเหนี่ยวนำตามที่ต้องการได้ เราจะเรียกขดลวดนี้ว่า*ตัวเหนี่ยวนำ* (*inductor*)

▶ พลังงานในสนามแม่เหล็ก

จาก (6.20) จะเห็นได้ว่าเราจะต้องใช้พลังงานมากกว่าปกติเพื่อที่จะทำให้เกิดกระแสที่ต้องการในตัวเหนี่ยวนำ (หรือในวงจร) โดยงานที่จะต้องต้าน back emf นี้เพื่อให้เกิดกระแส I เท่ากับ

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{E}I = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

ดังนั้นจะได้ว่างานที่ต้องใช้ในการสร้างกระแสในตัวเหนี่ยวนำเท่ากับ

พลังงานสะสมในตัวเหนี่ยวนำ.

$$U = \frac{1}{2}\Phi_B I = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\Phi_B^2}{L} \tag{6.21}$$

เราสามารถเขียน (6.21) ได้ในอีกรูป พิจารณา

$$U = \frac{1}{2}\Phi_B I = \frac{1}{2}I\int \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{2}I\int(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{1}{2}I\oint\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2}\oint(\mathbf{A}\cdot\mathbf{I})\,\mathrm{d}\ell$$

ขยายมาในสามมิติจะได้

$$U = \frac{1}{2}\int(\mathbf{A}\cdot\mathbf{J})\,\mathrm{d}\tau \tag{6.22}$$

ใช้ (4.19) ก็จะได้

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2\mu_0}\int_{\mathcal{V}}(\mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\left(\int_{\mathcal{V}}\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\,\mathrm{d}\tau - \int_{\mathcal{V}}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{2\mu_0}\left(\int_{\mathcal{V}}B^2\,\mathrm{d}\tau - \oint_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}\right)
\end{aligned}$$

เนื่องจากที่ระยะไกล ๆ $\mathbf{B}$ และ $\mathbf{A}$ เข้าใกล้ $\mathbf{0}$ ดังนั้นพจน์หลังจึงหายไป ก็จะได้

พลังงานในสนามแม่เหล็ก.

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,\mathrm{d}\tau \tag{6.23}$$

โดยเราสามารถใช้ (6.23) และ (6.21) เพื่อนิยามความเหนี่ยวนำที่เป็นระบบสายไฟเชิงพื้นที่หรือเชิงปริมาตรได้ (การหาฟลักซ์จากระบบเหล่านี้อาจไม่มีนิยามที่ตายตัว) ดังนี้

นิยามความเหนี่ยวนำจากพลังงาน.

$$L \equiv \frac{1}{\mu_0 I^2}\int B^2\,\mathrm{d}\tau \tag{6.24}$$

▶ 6.3. สมการ Maxwell

▶ ข้อบกพร่องของกฎของ Ampère

ตอนนี้เรามีสมการสี่สมการที่อธิบายแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนี้

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(กฎของ Gauss)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(กฎของ Faraday)}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \qquad \text{(กฎของ Ampère)}$$

แต่ยังมีข้อบกพร่องอยู่ในกฎของ Ampère เพราะว่ากฎนี้เราอธิบายมาจากกฎ Biot-Savart ซึ่งใช้ได้เฉพาะระบบที่เป็นแม่เหล็กสถิตหรือมีกระแสคงที่ ข้อบกพร้องนี้เห็นได้ชัดถ้าเราพิจารณา divergence ของสมการกฎของ Ampère:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J}) \\ 0 &= \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J})\end{aligned}$$

ซึ่งไม่ได้เป็นจริงเสมอไป

ต่อมา James Clerk Maxwell จึงได้ทำการแก้ข้อบกพร่องนี้โดยอาศัยสมการความต่อเนื่อง:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

นำไปเพิ่มในกฎของ Ampère จากสมการด้านบนจะได้

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu_0(\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mu_0 \varepsilon_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าแก้ไขสมการกฎของ Ampere เป็นดังต่อไปนี้ จะได้กฎที่ไร้ข้อขัดแย้ง:

กฎของ Ampère-Maxwell.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{6.25}$$

และเราจะเรียกพจน์ $\varepsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ ว่า*กระแสแทนที่* (*displacement current*)

โดยนำสมการทั้งสี่มารวมกันทั้งหมดจะได้*สมการ Maxwell* (*Maxwell's equations*):

สมการ Maxwell. การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ และสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ทั้งหมดถูกอธิบายได้ด้วยสี่สมการ:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(กฎของ Gauss)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{(กฎของ Faraday)}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{(กฎของ Ampère-Maxwell)}$$

โดยแรงที่ทำให้เกิดกระแสและการเคลื่อนที่ทั้งหมดอธิบายโดยกฎแรง Lorentz (4.2)

▶ 6.4. สมการ Maxwell ในสสาร (TO-DO)

บทที่ 7 | ไฟฟ้ากระแสตรง

▶ 7.1. การวิเคราะห์วงจร

▶ กฎของ Kirchhoff

เรามี "กฎของ Ohm" สำหรับแต่ละ *passive component* (อุปกรณ์ที่ไม่สร้างพลังงาน) ดังนี้

ความสัมพันธ์ของ V และ I สำหรับ Passive Component. สำหรับตัวต้านทาน:

$$v = iR \tag{7.1}$$

และสำหรับตัวเหนี่ยวนำ:

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{7.2}$$

สำหรับตัวเก็บประจุ:

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{7.3}$$

(ในบทนี้เราจะใช้ตัวอักษร v และ i ที่เป็นตัวพิมพ์เล็กเพื่อแทนความต่างศักย์และกระแสที่อาจขึ้นกับเวลา) ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์วงจรได้ด้วยกฎของ Kirchhoff:

พิจารณาวงจร ณ จุด ๆ หนึ่ง ถ้าที่จุดนั้นไม่มีประจุสะสมอยู่เลยโดย 4.13 จะได้ว่า

Kirchhoff's Current Law (KCL).

$$\sum_{\text{junction}} i = 0 \tag{7.4}$$

โดยกฎนี้ใช้ในการวิเคราะห์วงจรแบบ*โนด* (*nodal analysis*) โดยเริ่มจากการตั้งศักย์ไฟฟ้าบนแต่ละโนดและกระแสที่ไหลเข้าและออกจากแต่ละโนด จากนั้นใช้ (7.4) และ (7.3) ถึง (7.2) ในการเขียนทุกตัวแปรให้อยู่ในรูป V

ต่อมาพิจารณาวงจรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงสนามแม่เหล็ก จะได้ว่า $\mathbf{E}$ เป็นสนามอนุรักษ์ ดังนั้น

Kirchhoff's Voltage Law (KVL).

$$\sum_{\text{loop}} v = 0 \tag{7.5}$$

กฎนี้ใช้ในการวิเคราะห์วงจรแบบ*ลูป* (*mesh analysis*) โดยเริ่มจากกำหนดกระแสที่วนอยู่ในแต่ละลูปที่กำหนดขึ้น จากนั้นใช้ (7.5) และ (7.3) ถึง (7.2) ตั้งสมการตามจำนวนลูปที่กำหนดไว้เพื่อแก้หา I ในแต่ละลูป

▶ การต่อตัวต้านทาน, ตัวเก็บประจุ, และตัวเหนี่ยวนำอย่างง่าย

พิจารณาการต่อตัวต้านทาน R_1 และ R_2 แบบ*อนุกรม* จะได้ว่ากระแส i บนตัวต้านทาน R_1 จะเท่ากับ I บนตัวต้านทาน R_2 ดังนั้น

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2$$

จึงได้ความต้านทานรวมเท่ากับ

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2$$

โดยเราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวต้านทานกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวต้านทานแบบอนุกรม.

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \tag{7.6}$$

และพิจารณาการต่อตัวต้านทาน R_1 และ R_2 แบบ*ขนาน* จะได้ว่าความต่างศักย์ของตัวต้านทานทั้งสองจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$i_{\text{total}} = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2}$$

จึงได้ความต้านทานรวมเท่ากับ

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

โดยเช่นเดียวกับการต่อแบบอนุกรม เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวต้านทานกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวต้านทานแบบขนาน.

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{7.7}$$

ต่อมาเช่นเดียวกับตัวต้านทาน พิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ C_1 และ C_2 แบบอนุกรม จะได้ว่า q บนตัวเก็บประจุ C_1 จะเท่ากับ q บนตัวเก็บประจุ C_2 ดังนั้น

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรม.

$$\frac{1}{C_{\text{total}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \tag{7.8}$$

และพิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ C_1 และ C_2 แบบขนาน จะได้ว่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุทั้งสองจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 = C_1 v + C_2 v$$

เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวเก็บประจุแบบขนาน.

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{7.9}$$

สุดท้าย พิจารณาการต่อตัวเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 แบบอนุกรม จะได้ว่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำทั้งสองจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

ก็จะได้

การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรม.

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \tag{7.10}$$

และพิจารณาการต่อตัวเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 แบบขนาน จะได้ความต่างศักย์บนตัวเหนี่ยวนำทั้งสองเท่ากัน ดังนั้น

$$\frac{\mathrm{d}i_{\text{total}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{L_1} + \frac{v}{L_2}$$

ก็จะได้

การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนาน.

$$\frac{1}{L_{\text{total}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \tag{7.11}$$

▶ 7.2. วงจรอันดับหนึ่ง

▶ อันดับของวงจร

นิยามอันดับของวงจร. *อันดับของวงจร*คืออันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายวงจร เช่นวงจรไฟฟ้ากระแสตรงที่มีแค่แบตเตอรี่และตัวต้านทานไม่มีอนุพันธ์อะไรเลย จึงเป็นวงจรอันดับศูนย์

โดยวงจรอันดับหนึ่งได้แก่ วงจรที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุ (วงจร RC) และวงจรที่มีตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำ (วงจร RL) และวงจรอันดับสองได้แก่วงจรที่มีตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ (วงจร LC และ RLC)

▶ วงจร RC

วงจร RC เป็นวงจรอันดับหนึ่ง โดยจะยกตัวอย่างโจทย์การปล่อยประจุ (*discharge*) จากตัวเก็บประจุ:

ตัวอย่าง. จงหา $v(t)$ คร่อมตัวเก็บประจุของวงจรที่มีการต่อตัวเก็บประจุ C และตัวต้านทาน R แบบอนุกรม โดยที่ C มีประจุเริ่มต้น Q_0

วิธีทำ. ให้ i_R และ i_C คือกระแสที่ไหลออกจากจุด ๆ หนึ่งที่อยู่ฝั่งบวกของตัวเก็บประจุ จากนั้นใช้ KCL จะได้

$$\begin{aligned} i_R + i_C &= 0 \\ \frac{v}{R} + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t'} &= 0 \\ -\frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t' &= \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\ -\int_0^t \frac{1}{RC}\,\mathrm{d}t' &= \int_{V_0}^{v(t)} \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\ -\frac{1}{RC}t &= \log\left(\frac{v(t)}{V_0}\right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $V_0 = Q_0/C$ ก็จะได้

$$v(t) = \frac{Q_0}{C}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

โยเราจะเรียก $\tau \equiv RC$ ว่า*ค่าคงที่เวลา* (*time constant*) □

พิจารณาวงจรที่มี C ที่ *steady state* (เมื่องจรเป็น steady current) ก็จะได้ว่า

$$i_C = C\frac{\cancel{\mathrm{d}v}}{\cancel{\mathrm{d}t}} = 0$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

ตัวเก็บประจุในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงที่ Steady State. เมื่อ $t \to \infty$ จะสามารถมองได้ว่าตัวเก็บประจุ C เปรียบเสมือนสายไฟขาด

▶ วงจร RL

วงจร RL เป็นวงจรอันดับหนึ่ง โดยจะยกตัวอย่างโจทย์การต่อแบตเตอรี่กับวงจรที่มี L:

ตัวอย่าง. จงหา $i(t)$ และค่าคงที่เวลา τ ของการต่อแบตเตอรี่ที่มีแรงเคลื่อนไฟฟ้า $\mathcal{E}$ ในวงจรที่มีการต่อตัวต้านทาน R และตัวเหนี่ยวนำ L แบบอนุกรม โดยที่ ณ เวลา $t = 0$ ไม่มีกระแสไหลอยู่เลย

วิธีทำ. วนลูปที่มีกระแส $i(t)$ รอบวงจร จากนั้นใช้ KVL จะได้

$$\begin{aligned}
v_R + v_L - \mathcal{E} &= 0 \\
iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t'} &= \mathcal{E} \\
-\frac{1}{L}\,\mathrm{d}t' &= \frac{1}{iR - \mathcal{E}}\,\mathrm{d}i \\
-\int_0^t \frac{1}{L}\,\mathrm{d}t' &= \int_0^{i(t)} \frac{1}{iR - \mathcal{E}}\,\mathrm{d}i \\
-\frac{R}{L}t &= \log\left(\frac{\mathcal{E} - Ri(t)}{\mathcal{E}}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นก็จะได้

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

และค่าคงที่เวลา $\tau = L/R$ $\square$

พิจารณาวงจรที่มี L ที่ steady state ก็จะได้ว่า

$$v = L\frac{\cancel{\mathrm{d}i}}{\cancel{\mathrm{d}t}} = 0$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

ตัวเหนี่ยวนำในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงที่ Steady State. เมื่อ $t \to \infty$ จะสามารถมองได้ว่าตัวเหนี่ยวนำ L เปรียบเสมือนสายไฟเปล่า

▶ วงจรอันดับหนึ่งในรูปทั่วไป

โดยทั่วไปแล้วสมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรอันดับหนึ่งจะอยู่ในรูป

$$A\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Bi = C$$

(หรือบางครั้งอาจติดอยู่ในรูป v) โดยเมื่อเราแก้สมการออกมาจะได้

คำตอบทั่วไปของวงจรอันดับหนึ่ง.

$$i(t) = \frac{C}{A} + \left(I_0 - \frac{C}{A}\right)e^{-\frac{B}{A}t} \tag{7.12}$$

ก็จะได้ว่าโดยทั่วไปแล้ว ค่าคงที่เวลา τ จะเท่ากับ

ค่าคงที่เวลาโดยทั่วไป.

$$\tau = \frac{A}{B} \tag{7.13}$$

เราจะเรียกช่วงแรกที่เกิดการปรับตัวของกระแสหรือความต่างศักย์อย่างรวดเร็ว (ก่อน steady state) ว่า *transient response*

▶ 7.3. วงจรอันดับสอง

▶ วงจร RLC แบบอนุกรม

พิจารณาการแก้สมการของวงจรที่เป็น RLC ที่ต่อแบบอนุกรมโดยไม่มีแบตเตอรี่ โดย KVL จะได้ (ให้กระแสไหลออกจากฝั่งลบของตัวเก็บประจุ)

$$\begin{aligned} v_R + v_L + v_C &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_R + v_L + v_C) &= 0 \\ L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i &= 0 \end{aligned} \tag{7.14}$$

เราสามารถแก้สมการนี้ได้โดยการใช้ราก $s_{1,2}$ ของ characteristic equation:

$$x^2 + (R/L)x + 1/LC = 0$$

ก็จะได้คำตอบคือ

คำตอบของ Characteristic Equation ของ RLC แบบอนุกรม.

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{7.15}$$

โดยเราจะนิยามราก $s_{1,2}$ ของสมการว่าเป็น*ความถี่ธรรมชาติ*ของวงจร และก็จะนิยาม *damping factor* (α) และ*ความถี่ resonant* (ω_0) (*undamped natural frequency*) ดังนี้:

นิยาม Damping Factor และความถี่ Resonant.

$$s_{1,2} \equiv -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{7.16}$$

หมายเหตุ: *โดยเราจะใช้หน่วย* Np/s *สำหรับ* α *แต่จริง ๆ แล้วหน่วย* Np *(neper) นี้เป็นน่วยที่ไม่มีมิติเหมือนกับ* rad

และเราจะนิยามอัตราส่วนระหว่าง α และ ω_0 ว่า *damping ratio* (ζ) ซึ่งเป็นค่าที่บ่งบอกว่าระบบถูก *damp* ไปแค่ไหน:

นิยาม Damping Ratio.

$$\zeta \equiv \frac{\alpha}{\omega_0} \tag{7.17}$$

ในที่นี้เราก็จะได้

Damping Factor, ความถี่ Resonant, และ Damping Ratio ของ RLC แบบอนุกรม.

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{7.18}$$

เมื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ถ้าราก $s_{1,2}$ เป็นจำนวนจริง ($\zeta > 1$) จะได้ว่า

วงจร RLC อนุกรมแบบ Overdamped.

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{7.19}$$

โดยเราจะเรียกว่าเป็นวงจร *overdamped* ซึ่งจะมีกราฟเป็นการลดลงของกระแส

แต่ถ้าราก $s_{1,2}$ เป็นรากซ้ำ ($\zeta = 0$) โดยให้เป็น s จะได้ว่า

วงจร RLC อนุกรมแบบ Critically Damped.

$$i(t) = (A_2 + A_1 t)e^{st} \tag{7.20}$$

โดยเราจะเรียกว่าเป็นวงจร *critically damped* ซึ่งจะมีกราฟเป็นการลดลงของกระแสที่มากที่สุดที่ยังไม่เกิดการสั่นขึ้นลงของกราฟ (decay แบบยังไม่มี oscillatory behavior)

และสุดท้าย ถ้าราก $s_{1,2}$ ไม่เป็นจำนวนจริง ($\zeta < 1$) เราจะนิยาม*ความถี่ damped* (*damped natural frequency*):

นิยามความถี่ Damped.

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{7.21}$$

และก็จะได้คำตอบของสมการว่า

วงจร RLC อนุกรมแบบ Underdamped.

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right) \tag{7.22}$$

โดยเราจะเรียกว่าเป็นวงจร *underdamped* ซึ่งกราฟจะมีการสั่นขึ้นลงของกระแสโดยมีแอมพลิจูดลดลงเรื่อย ๆ (decay แบบ oscillatory)

ในกรณีที่เป็นวงจร LC ($R = 0$, $\zeta = 0$) จะได้ว่า $\alpha = 0$ และคำตอบของสมการอยู่ในกรณี underdamped โดยจะคำตอบเป็นดังนี้:

จงจร LC แบบอนุกรม.

$$i(t) = A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t) \tag{7.23}$$

โดยเราอาจจะเรียกว่าเป็น RLC แบบ *undamped* ซึ่งกราฟจะมีแค่การสั่นขึ้นลงแต่ไม่มีการลดลงของแอมพลิจูด (completely oscillatory)

► วงจร RLC แบบขนาน

พิจารณาการแก้สมการของวงจรที่เป็น RLC ที่ต่อแบบขนานโดยไม่มีแบตเตอรี่ โดย KCL จะได้ (ให้กระแสไหลออกจากฝั่งลบของตัวเก็บประจุ)

$$\begin{aligned} i_R + i_L + i_C &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_R + i_L + i_C) &= 0 \\ C\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}v &= 0 \end{aligned} \tag{7.24}$$

ก็จะได้ characteristic equation:

$$x^2 + (1/RC)x + 1/LC = 0$$

มีคำตอบ $s_{1,2}$ คือ

คำตอบของ Characteristic Equation ของ RLC แบบขนาน.

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{7.25}$$

ก็จะได้ว่า

Damping Factor, ความถี่ Resonant, และ Damping Ratio ของ RLC แบบขนาน.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{7.26}$$

ต่อมาเมื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (เช่นเดียวกับในกรณีต่อแบบอนุกรมแต่ที่นี้หา v แทน i) ก็จะได้

วงจร RLC ขนานแบบ Overdamped.

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{7.27}$$

ในกรณี overdamped,

วงจร RLC ขนานแบบ Critically Damped.

$$v(t) = (A_2 + A_1 t)e^{st} \tag{7.28}$$

ในกรณี critically damped, และ

วงจร RLC ขนานแบบ Underdamped.

$$v(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)\right) \tag{7.29}$$

ในกรณี underdamped

ส่วนในกรณีที่เป็นวงจร LC แบบขนาน ($R \to \infty$, $\zeta = 0$) หรือ RLC ขนานแบบ undamped จะได้ว่า $\alpha = 0$ และมีคำตอบคือ

จงจร LC แบบขนาน.

$$v(t) = A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t) \tag{7.30}$$

▶ วงจรอันดับสองในรูปทั่วไป

โดยทั่วไปแล้วสมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรอันดับสองจะอยู่ในรูป

$$A\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ci = D$$

(หรืออาจติดอยู่ในรูป v) โดยจะได้

Damping Factor, ความถี่ Resonant, และ Damping Ratio โดยทั่วไป.

$$\alpha = \frac{B}{2A} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{A}} \qquad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{AC}} \tag{7.31}$$

และจะได้ homogeneous solution เป็น (7.19), (7.20), (7.22), และ (7.23) เมื่อ $\zeta > 1$, $\zeta = 1$, $0 < \zeta < 1$, และ $\zeta = 0$ ตามลำดับ และเมื่อแก้ particular solution ก็จะได้

คำตอบทั่วไปของวงจรอันดับสอง.

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = i_h(t) + \frac{D}{C} \tag{7.32}$$

▶ 7.4. กำลังไฟฟ้า

▶ กำลังไฟฟ้าและประสิทธิภาพ

จาก (6.8) เราจะสามารถคำนวณกำลังไฟฟ้า P ได้จาก

กำลังไฟฟ้า.

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{7.33}$$

(Q คือความร้อนที่ได้จากวงจร) ซึ่งเราจะสามารถนำมาใช้คำนวณพลังงานที่เครื่องใช้ไฟฟ้านั้นถูกกระทำ โดยเนื่องจากพลังงานที่เครื่องใช้ไฟฟ้านี้ได้รับเป็นพลังงานความร้อน เราจึงต้องอาศัย *heat engine* ในการเปลี่ยนความร้อนมาเป็นพลังงานที่เราสามารถนำไปใช้ประโยชน์ต่อได้ จึงนิยาม*ประสิทธิภาพ* (*efficiency*: η) ของเครื่องใช้ไฟฟ้า (heat engine) นี้ว่า

นิยามประสิทธิภาพ.

$$\eta \equiv \frac{W}{Q} \tag{7.34}$$

หมายเหตุ: *$Q_C = Q - W$ เป็นความร้อนที่ถูกปล่อยทิ้งลงใน cold sink ซึ่งโดยกฎข้อที่สองของ thermodynamics จะได้ว่า $Q_C > 0$ ดังนั้น $\eta < 1$*

บทที่ 8 | ไฟฟ้ากระแสสลับ

▶ 8.1. นิยามของไฟฟ้ากระแสสลับ

▶ แหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ

วงจรทั้งหมดที่เราเจอมาเรียกว่า*วงจรไฟฟ้ากระแสตรง* (*direct current* หรือ *DC*) ซึ่งเกิดจากแหล่งกำเนิดที่ให้ความต่างศักย์คงที่ (หรือกระแสคงที่) ตลอดเวลา แต่วงจรไฟฟ้าที่เราใช้ในบ้านจะเป็น*วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ* (*alternating current* หรือ *AC*) ซึ่งเป็นวงจรที่แหล่งกำเนิดมี emf สลับทิศไปมาเป็นฟังก์ชันคาบ โดยไฟฟ้ากระแสสลับที่เราจะมาดูกันเราจะสมมติมาเป็นไฟฟ้ากระแสสลับรูปไซน์ (sinusoidal) ก็คือ

ไฟฟ้ากระแสสลับ.

$$(i \text{ or } v)(t) = (I \text{ or } V)_m \cos\omega t \tag{8.1}$$

เมื่อ I_m และ V_m คือ*แอมพลิจูด*ของกราฟไซน์และ ω เรียกว่า*ความถี่เชิงมุม* โดย argument ที่อยู่ในฟังก์ชันเราจะเรียกว่า*เฟส* ณ ขณะนั้น และเราจะนิยาม*คาบ* (T) และ*ความถี่* (f) ตามปกติ:

นิยามคาบและความถี่.

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{และ} \qquad f \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{8.2}$$

โดยยกตัวอย่างแหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับเช่น ลองพิจารณาสายไฟที่หมุนรอบแกน x และมีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอขนาด B ชี้ในแกน $+y$ ก็จะได้ว่าถ้าเราหมุนลูปสายไฟนี้ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω แล้วก็จะได้ว่า

$$\Phi_B = BA\cos\omega t$$

ดังนั้น

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = BA\omega\sin\omega t$$

แหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ.

$$\mathcal{E} = BA\omega\sin\omega t = BA\omega\cos(\omega t + \pi/2) \tag{8.3}$$

► ตัวต้านทาน, ตัวเก็บประจุ, และตัวเหนี่ยวนำ

ต่อมาเรามาพิจารณาอุปกรณ์ที่เราคุ้นเคยกัน เริ่มจากตัวต้านทานเมื่อให้กระแสที่ไหลผ่าน $i(t) = I_m \cos\omega t$ เนื่องจาก $v = iR$ จะได้ว่า

$$v(t) = Ri(t) = I_m R\cos\omega t = V_m \cos\omega t$$

ดังนั้น

เฟสของ v และ i บนตัวต้านทาน. เฟสของ v และ i จะ*ตรงกัน*บนตัวต้านทาน R โดยที่

$$V_m = RI_m \tag{8.4}$$

พิจารณาตัวเก็บประจุเมื่อให้ $v(t) = V_m \cos\omega t$ จะได้ว่า

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = CV_m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t = -\omega CV_m \sin\omega t = I_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

ดังนั้น

เฟสของ v และ i บนตัวเก็บประจุ. เฟสของ i จะนำ v อยู่ $\pi/2$ บนตัวเก็บประจุ C โดยที่

$$V_m = \left(\frac{1}{\omega C}\right) I_m \tag{8.5}$$

สุดท้าย พิจารณาตัวเหนี่ยวนำเมื่อให้ $i(t) = I_m \cos\omega t$ จะได้ว่า

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LI_m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t = -\omega LI_m \sin\omega t = V_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

ดังนั้น

เฟสของ v และ i บนตัวเหนี่ยวนำ. เฟสของ v จะนำ i อยู่ $\pi/2$ บนตัวเหนี่ยวนำ L โดยที่

$$V_m = (\omega L) I_m \tag{8.6}$$

สังเกตว่าสมการ (8.4) ถึง (8.6) หน้าตาคล้ายกับกฎของ Ohm เราจึงนิยามค่าความต้านทานเสมือนของตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำว่า *รีแอคแตนซ์เชิงประจุและรีแอคแตนซ์เชิงเหนี่ยวนำ* (*capacitive/inductive reactance*: X_C และ X_L) ดังนี้:

นิยาม Reactance.

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \qquad \text{และ} \qquad X_L \equiv \omega L \tag{8.7}$$

▶ 8.2. เฟสเซอร์

▶ Steady State และ Frequency Domain

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ เช่นเดียวกับไฟฟ้ากระแสตรง ก็จะมี transient response ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นของวงจร แต่เมื่อเวลาผ่านไปเรื่อย ๆ ที่ steady state เราจะได้ว่าแอมพลิจูดจะคงที่และความถี่ของทั้งวงจรจะเท่ากันหมด โดยเราจะมาดูปรากฏการณ์ที่ steady state ดังนั้นต่อไปนี้จะสมมติว่า ω คงที่ทั้งวงจร

เราสามารถแทนฟังก์ชันไซน์ด้วยส่วนจริงของฟังก์ชัน exponential เชิงซ้อน:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(A_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) \equiv \mathrm{Re}(\tilde{A} e^{j\omega t})$$

(ในการวิเคราะห์วงจรเราจะใช้ j แทนหน่วยจินตภาพเพราะ i ซ้ำกับกระแส) โดยจำนวนเชิงซ้อน $\tilde{A}$ เรียกว่าเป็นรูปใน*โดเมนเฟสเซอร์/ความถี่* (*phasor/frequency domain*) ของ $a(t)$ (โดยจะเรียก $a(t)$ ว่ารูป *time domain*) โดยเราจะแทน $\tilde{A} = A_m e^{j\phi}$ ด้วยสัญลักษณ์

นิยามสัญลักษณ์แทนจำนวนเชิงซ้อนในการวิเคราะห์วงจร.

$$A_m \underline{/\phi} \equiv A_m e^{j\phi} = \tilde{A} \tag{8.8}$$

ซึ่งเป็นรูปที่มีประโยชน์ในการวิเคราะห์ steady state ของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ เพราะเราสามารถที่จะดำเนินการบวกและลบบน frequency domain เพื่อหา $\tilde{I}_{\text{total}}$ หรือ $\tilde{V}_{\text{total}}$ ได้เลย (เนื่องจากที่ steady state มี ω คงที่)

▶ Impedance และ Admittance

ต่อมาเรามาดู "กฎของ Ohm" ของแต่ละอุปกรณ์ใน frequency domain, จาก (8.4) ถึง (8.6) ก็จะได้

อุปกรณ์ต่าง ๆ ใน Frequency Domain. สำหรับตัวต้านทาน R:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} \tag{8.9}$$

สำหรับตัวเก็บประจุ C:

$$\tilde{V} = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)\tilde{I} \tag{8.10}$$

สำหรับตัวเหนี่ยวนำ L:

$$\tilde{V} = (j\omega L)\tilde{I} \tag{8.11}$$

เราจึงจะนิยามค่า*อิมพีแดนซ์* (*impedance*: Z) และ*แอดมิตแทนซ์* (*admittance*: Y) ว่า

นิยาม Impedance และ Admittance.

$$Z \equiv \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} \qquad \text{และ} \qquad Y \equiv \frac{1}{Z} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}} \tag{8.12}$$

โดยที่ในส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ impedance จะเป็นส่วนความต้านทาน (resistance: R) และส่วน reactance (X) ตามลำดับ:

ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ Impedance.

$$\mathrm{Re}(Z) = R \qquad \text{และ} \qquad \mathrm{Im}(Z) = X \qquad \text{หรือก็คือ} \qquad Z = R + jX \tag{8.13}$$

และส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ admittance จะเป็นส่วนความนำไฟฟ้า (conductance: G) และส่วน susceptance (B) ตามลำดับ:

ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ Impedance.

$$\mathrm{Re}(Y) = G \qquad \text{และ} \qquad \mathrm{Im}(Y) = B \qquad \text{หรือก็คือ} \qquad Y = G + jB \tag{8.14}$$

และเราจะได้ impedance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ:

Impedance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ.

$$Z_R = R \qquad Z_L = j\omega L \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{8.15}$$

admittance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ:

Admittance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ.

$$Y_R = \frac{1}{R} \qquad Y_L = \frac{1}{j\omega L} \qquad Y_C = j\omega C \tag{8.16}$$

► 8.3. การวิเคราะห์วงจรใน Frequency Domain

► กฎของ Kirchhoff ใน Frequency Domain

เนื่องจากฟังก์ชัน Re และ Im มีสมบัติเชิงเส้น การแทนฟังก์ชันรูปไซน์ใน frequency domain จึงมีประโยชน์ต่อการคำนวณด้วย เพราะกฎที่สำคัญต่าง ๆ ใน time domain ยังคงเป็นจริงใน frequency domain โดยที่สำคัญสุดเลยก็คือกฎของ Kirchhoff:

KCL ใน Frequency Domain.

$$\sum_{\text{junction}} \tilde{I} = 0 \tag{8.17}$$

และ

KVL ใน Frequency Domain.

$$\sum_{\text{loop}} \tilde{V} = 0 \tag{8.18}$$

▶ การรวม Impedance

พิจารณาการต่อวงจรแบบอนุกรม โดยมีอุปกรณ์อยู่สองชิ้นที่มี impedance Z_1 และ Z_2 จะได้ว่ากระแส $\tilde{I}$ ที่ไหลผ่านอุปกรณ์ทั้งสองต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$\begin{aligned}
v_{\text{total}}(t) &= \operatorname{Re}(\tilde{V}_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\tilde{V}_2 e^{j\omega t}) \\
&= \operatorname{Re}(\tilde{I} Z_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\tilde{I} Z_2 e^{j\omega t}) \\
&= \operatorname{Re}\Big(\tilde{I}(Z_1 + Z_2) e^{j\omega t}\Big)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\tilde{V}_{\text{total}} = \tilde{I}(Z_1 + Z_2)$ แล้วก็จะได้

$$Z_{\text{total}} = Z_1 + Z_2$$

ขยายเป็น n อุปกรณ์จะได้

การรวม Impedance แบบอนุกรม.

$$Z_{\text{total}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \tag{8.19}$$

ต่อมาพิจารณาการต่อวงจรแบบขนาน โดยมีอุปกรณ์สองชิ้นเดิม จะได้ว่าความต่างศักย์ $\tilde{V}$ คร่อมอุปกรณ์ทั้งสองต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$\begin{aligned}
i_{\text{total}}(t) &= \operatorname{Re}(\tilde{I}_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(\tilde{I}_2 e^{j\omega t}) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{V}}{Z_1} e^{j\omega t}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{\tilde{V}}{Z_2} e^{j\omega t}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\tilde{V}\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) e^{j\omega t}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\tilde{I}_{\text{total}} = \tilde{V}\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)$ และจะได้

$$Y_{\text{total}} = \frac{1}{Z_{\text{total}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

ขยายเป็น n อุปกรณ์จะได้

การรวม Impedance แบบขนาน.

$$\frac{1}{Z_{\text{total}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \tag{8.20}$$

หรือ

การรวม Admittance แบบขนาน.

$$Y_{\text{total}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \tag{8.21}$$

► Resonance ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

จากในส่วนของวงจรอันดับสองในบทไฟฟ้ากระแสตรง เราได้ดูผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$A\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ci = D$$

ซึ่งจะมี particular solution เป็น $i_p(t) = \frac{D}{C}$ แต่ถ้าเราเปลี่ยนแหล่งกำเนิดเป็นแหล่งกำเนิดกระแสสลับก็จะได้ (โดยพิจารณา KVL และให้ emf ที่แหล่งกำเนิด $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$)

$$A\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ci = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_m \sin \omega t = \mathcal{E}_m \omega \cos \omega t$$

โดยถ้าเดาคำตอบให้อยู่ในรูป $I_m \cos(\omega t - \phi)$ จะแก้ particular solution ได้เป็น

Particular Solution ของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ.

$$i_p(t) = I_m \cos(\omega t - \phi) \tag{8.22}$$

เมื่อ

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{B^2 + (A\omega - C/\omega)^2}} \quad \text{และ} \quad \phi = \arctan\left(\frac{B\omega}{C - A\omega^2}\right) \tag{8.23}$$

แต่เพราะส่วนที่เป็น homogeneous solution มีการ decay ลงเรื่อย ๆ จนที่ $t \to \infty$ จะได้ว่า $i_h(t) \to 0$ ดังนั้น particular solution นี้จึงเป็น steady state ของวงจร ต่อมาสังเกตว่าความถี่ resonant ใน (7.31) เป็นค่าที่ทำให้เฟสของ driving emf และเฟสของกระแสตรงกัน (จะได้ $\phi = \pi/2$ ซึ่งตรงกับความต่างเฟสของ cos ในกระแสและ sin ใน emf) ดังนั้นเราอาจนิยามความถี่ resonant ใหม่ได้ดังนี้

นิยามความถี่ Resonant (แบบเฟส). ความถี่ resonant (ω_0) คือความถี่เชิงมุมที่ทำให้เฟสของกระแสและ emf ตรงกัน

หมายเหตุ: *บางครั้งเราอาจจะนิยามความถี่ resonant เป็นความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดสูงสุด (ซึ่งสำหรับหลาย ๆ ระบบนิยามแบบเฟสก็จะทำให้เกิดแอมพลิจูดสูงสุด) แต่เพื่อให้นิยามตรงกับ (7.31) จึงขอใช้นิยามแบบเฟส*

เนื่องจาก $\tilde{V} = Z\tilde{I}$ ถ้าอยากให้เฟสตรงกัน Z ต้องมีแต่ส่วนความต้านทาน (reactance เป็น 0) ดังนั้น

ความถี่ Resonant. ความถี่ resonant (ω_0) คือความถี่เชิงมุมที่ทำให้

$$\mathrm{Im}(Z) = 0 \tag{8.24}$$

ยกตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง. จงหาความถี่ resonant ของวงจรที่มีตัวต้านทาน R ต่อแบบอนุกรมกับวงจรที่มีตัวเหนี่ยวนำ L, ตัวเก็บประจุ C ต่อกันแบบขนาน โดยที่ตัวเก็บประจุ C มีความต้านทานภายใน r

วิธีทำ. เริ่มจากหา impedance รวมของวงจร LC แบบขนาน จะได้

$$\begin{aligned} Z_{LC} &= \frac{Z_L(Z_C + r)}{Z_L + Z_C + r} = \frac{j\omega L(\frac{1}{j\omega C} + r)}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + r} \\ &= \frac{1}{\text{const.}}\left(\text{const.} + j\left(-\frac{\omega L^2}{C} + \frac{L}{\omega C^2} + r^2\omega L\right)\right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก R ที่ต่อออกมามี impedance เป็นจำนวนจริงอยู่แล้ว จึงสามารถพิจารณาแค่ $\mathrm{Im}(Z_{LC}) = 0$ ได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_0 L^2}{C} + \frac{L}{\omega_0 C^2} + r^2\omega_0 L &= 0 \\ -\frac{L^2}{C}\omega_0^2 + \frac{L}{C^2} + r^2 L\omega_0^2 &= 0 \\ \left(r^2 L - \frac{L^2}{C}\right)\omega_0^2 &= -\frac{L}{C^2} \end{aligned}$$

ก็จะได้

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - r^2C^2}}$$

เป็นความถี่ resonant □

▶ 8.4. กำลังไฟฟ้าและค่ายังผล

▶ กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย

ในไฟฟ้ากระแสตรงเราสามารถใช้กำลังไฟฟ้าในรูปของ $\tilde{I}$ และ $\tilde{V}$ ที่คงที่ ณ steady state ได้เลย แต่ไฟฟ้ากระแสสลับ ณ steady state เรายังมี $i(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันรูปไซน์ เราจึงพิจารณาการหา*กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย*บนอุปกรณ์ โดย

มีกระแส $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_1)$ และความต่างศักย์คร่อม $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_2)$ โดยเริ่มจากการหากำลัง ณ เวลาใด ๆ:

$$\begin{aligned} p(t) = i(t)v(t) &= I_m V_m \cos(\omega t + \phi_i)\cos(\omega t + \phi_v) \\ &= \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\phi_i - \phi_v) + \frac{1}{2} I_m V_m \cos(2\omega t + \phi_i + \phi_v) \end{aligned}$$

จะได้กำลังเฉลี่ยในหนึ่งคาบเท่ากับ

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\frac{1}{2} I_m V_m \cos(\phi_i - \phi_v)\int_0^T \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\frac{1}{2} I_m V_m \cancel{\int_0^T \cos(2\omega t + \phi_i + \phi_v)\,\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

เนื่องจากพจน์หลังเป็นฟังก์ชัน cos คาบ $T/2$ จึงเหลือ 0 ดังนั้น

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย.

$$P = \frac{1}{2} I_m V_m \cos\Delta\phi \tag{8.25}$$

โดยเราจะเรียก $\cos\Delta\phi$ ว่า*อัตราส่วนกำลัง* (*power factor*)

▶ กระแสและความต่างศักย์ยังผล

เวลามากระแสผ่านโหลดต้านทาน R เราอาจจะต้องการ*กระแสยังผล* (*effective current*: I_{eff}) เพื่อที่จะนำมาคำนวณกำลังไฟฟ้าแบบไฟฟ้ากระแสปกติ โดยพิจารณาโดยทั่วไป กระแสสลับ $i(t)$ ที่มีคาบ T (ไม่จำเป็นต้องเป็นรูปไซน์) จะได้

$$\begin{aligned} P &= I_{\text{eff}}^2 R \\ \cancel{R}\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t &= I_{\text{eff}}^2 \cancel{R} \\ I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t} \\ I_{\text{eff}} &= \sqrt{\langle i^2 \rangle} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้*ความต่างศักย์ยังผล* (*effective voltage*: V_{eff}) เท่ากับ

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

ก็จะได้

กระแสและความต่างศักย์ยังผล.

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}} = \sqrt{\langle i^2 \rangle} \quad \text{และ} \quad V_{\text{eff}} = V_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \tag{8.26}$$

โดยถ้า $i(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันรูปไซน์ เมื่ออินทิเกรตออกมาจะได้ว่า

กระแสและความต่าง rms ของไฟฟ้ากระแสสลับรูปไซน์.

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{และ} \quad V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{8.27}$$

และเราจะนิยาม $\tilde{I}_{\text{rms}}$ และ $\tilde{V}_{\text{rms}}$ ว่า

นิยามกระแสและความต่างศักย์ rms ในรูปเฟสเซอร์.

$$\tilde{I}_{\text{rms}} \equiv I_{\text{rms}}\underline{/\phi_i} \quad \text{และ} \quad \tilde{V}_{\text{rms}} \equiv V_{\text{rms}}\underline{/\phi_v} \tag{8.28}$$

► กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

สังเกตว่ากำลังไฟฟ้าเฉลียนี้เราสามารถหาได้จาก

$$P = \text{Re}(\tilde{I}^*_{\text{rms}}\tilde{V}_{\text{rms}}) = \frac{1}{2}\text{Re}(\tilde{I}^*\tilde{V}) \tag{8.29}$$

(เมื่อ $*$ แทน complex conjugate) ดังนั้นจึงนิยาม*กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน* (*complex power*: $\tilde{P}$) ว่า

นิยามกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน.

$$\tilde{S} \equiv \tilde{I}^*_{\text{rms}}\tilde{V}_{\text{rms}} \tag{8.30}$$

หรือสำหรับไฟฟ้ากระแสสลับรูปไซน์:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}\tilde{I}^*\tilde{V} \tag{8.31}$$

ซึ่งจะมีหน่วย SI เป็น VA (volt-ampere) เพื่อแสดงให้เห็นว่าไม่ใช่กำลังจริง ๆ โดยจะเรียกขนาดของมันว่า*กำลังปรากฏ* (*apparent power*: S), ส่วนจริงของมัน (P) ตามด้านบน คือ*กำลังจริง* (P), และส่วนจินตภาพเรียกว่า*กำลังเชิงรีแอค* (*reactive power*: Q) ซึ่งมีหน่วย SI เป็น VA เช่นกัน สรุปก็คือ

นิยามกำลังปรากฏ.

$$S \equiv |\tilde{S}| = I_{\text{rms}}V_{\text{rms}} \tag{8.32}$$

(เหตุผลที่เรียกกำลังปรากฏเพราะเป็นค่าที่ดูเหมือนจะเป็นกำลังจริง ๆ แต่ไม่ใช่) และ

นิยามกำลังเชิงรีแอค.

$$Q \equiv \text{Im}(\tilde{S}) = I_{\text{rms}}V_{\text{rms}}\sin(\phi_v - \phi_i) \tag{8.33}$$

โดยกำลังเชิงซ้อนนี้ยังคงเป็นค่าที่อนุรักษ์เหมือนกับกำลังจริง กล่าวคือ

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \cdots + \tilde{S}_n \tag{8.34}$$

► การคิดค่าไฟ

ไฟฟ้าที่ใช้กันทั่วไปตามบ้านเรือนนั้นเป็นไฟฟ้ากระแสสลับที่มีค่า emf ยังผลประมาณ 220 V โดยการคิดค่าไฟนั้นอาจมีหรือไม่มีส่วนแรกที่คงที่และมีอีกส่วนหลังที่แปรผันตามพลังงานที่ใช้ (นับเป็นเงินต่อหน่วยหรือต่อ kWh) เช่น ในประเทศไทยมีอัตราค่าไฟดังนี้:

หน่วยที่ใช้ (หน่วย)	อัตราค่าไฟ (บาท/หน่วย)
$1-15$	2.3488
$16-25$	2.9882
$26-35$	3.2405
$36-100$	3.6237
$101-150$	3.7171
$151-400$	4.2218
401 ขึ้นไป	4.4217

บทที่ 9 | กฎอนุรักษ์

▶ 9.1. ประจุและพลังงาน

▶ ทฤษฎีบท Poynting

พิจารณางานที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้ากระทำกับประจุหนึ่ง:

$$\mathrm{d}W = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{d}t = \mathbf{E} \cdot q\mathbf{v}\, \mathrm{d}t$$

ดังนั้นกำลังเท่ากับ

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J})\, \mathrm{d}\tau \tag{9.1}$$

จาก

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

เมื่อนำไปแทนใน $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ แล้วใช้ product rule ก็จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{9.2}$$

เราจึงนิยาม *Poynting vector*:

นิยาม Poynting Vector.

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{9.3}$$

นำ (9.2) แทนใน (9.1) และใช้ divergence theorem จะได้

ทฤษฎีบทของ Poynting.

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} u\,\mathrm{d}\tau - \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \tag{9.4}$$

และถ้าสมมติว่าระบบไม่โดนงานมากระทำเลย (แต่โดยปกติแล้วไม่สามารถทำได้) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S} \tag{9.5}$$

คล้ายกับเป็น "สมการความต่อเนื่อง" ของพลังงาน

โดยสมการนี้ก็คือสมการอนุรักษ์พลังงานของแม่เหล็กไฟฟ้านั่นเอง เพราะเมื่ออินทิเกรตบน $\mathcal{V}$ ที่ใหญ่มาก ๆ (หรือก็คืออินทิเกรตทั่วทุกพื้นที่) จะได้ว่าอินทิกรัล*ฟลักซ์พลังงาน* (อินทิกรัลที่มี Poynting vector)

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} \tag{9.6}$$

กล่าวคือ พลังงานที่หายไปจากสนาม จะถูกถ่ายทอดมาเป็นงานที่กระทำกับประจุ

▶ 9.2. โมเมนตัม

▶ เทนเซอร์ความเค้นของ Maxwell

ประจุที่เคลื่อนที่จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าพุ่งออกจากประจุและสนามแม่เหล็กเป็นไปตามกฎมือขวา (จะพิสูจน์ในบทการแผ่รังสี) เราจะเห็นได้ว่าแรงแม่เหล็กบนสองประจุที่เคลื่อนที่เข้าหากันในแนวตั้งฉากจะไม่เป็นไปตามกฎข้อที่สามของนิวตัน ดังนั้นจริง ๆ แล้วกฎข้อที่สามไม่เป็นจริงสำหรับแม่เหล็กไฟฟ้า จึงทำให้โมเมนตัมแบบดั้งเดิมไม่อนุรักษ์เช่นกัน เราจึงอาจจะหาพิธีเพิ่มพจน์โมเมนตัมบางอย่างที่เกิดจากสนามเพื่อทำให้โมเมนตัมอนุรักษ์

พิจารณาแรงทั้งหมดที่สนามกระทำใน $\mathcal{V}$:

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\rho\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}} (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B})\,\mathrm{d}\tau \tag{$\star$}$$

พิจารณาการเขียนแรงต่อปริมาตร $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}$ ในรูปที่ติดแค่ $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{B}$ จะได้

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \varepsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B} \\ &= \varepsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}\end{aligned} \tag{$\star$1}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\end{aligned}$$

แทนใน ($\star$1) จะได้ (บวกเข้าด้วย $1/\mu_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}$)

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0\Big((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\Big) + \frac{1}{\mu_0}\Big((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\Big) - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{$\star$2}$$

ต่อมา เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) &= (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} + (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} + \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) + \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) \\
\boldsymbol{\nabla}\big(E^2\big) &= 2(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E} + 2\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) \\
\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\big(E^2\big) - (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}
\end{aligned}$$

แทนใน ($\star$2) ก็จะได้

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} = {} & \varepsilon_0\Big((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}\Big) + \frac{1}{\mu_0}\Big((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}\Big) \\
& - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})
\end{aligned} \tag{$\star$3}$$

สามารถเขียนได้อยู่ในรูปที่ง่ายกว่าโดยเราจะนิยาม*เทนเซอร์ความเค้นของ Maxwell* (*Maxwell's stress tensor*) ดังนี้

นิยามเทนเซอร์ความเค้นของ Maxwell.

$$T_{ij} \equiv \varepsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right) \tag{9.7}$$

เมื่อ δ_{ij} คือ *Kronecker delta* ซึ่งเท่ากับ 1 เมื่อ $i = j$ มิฉะนั้นเป็น 0

โดยสังเกตว่า

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right)_j &= \sum_{i=x,y,z}\frac{\partial}{\partial i}T_{ij} \\
&= \varepsilon_0\left((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})E_j + (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})E_j - \frac{1}{2}\nabla_j E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left((\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})B_j + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right)
\end{aligned}$$

(เมื่อ $\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = a_iT_{ij}\hat{\mathbf{j}}$ คือ column-wise dot product) จาก ($\star$3) จึงได้ว่า

แรงต่อปริมาตร.

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \mu_0\varepsilon_9\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} \tag{9.8}$$

ดังนั้นแทนกลับใน ($\star$) จะได้

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial\mathcal{V}}\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}}\mathbf{S}\,\mathrm{d}\tau \tag{9.9}$$

โดยถ้าระบบเป็นระบบสนามสถิตก็จะได้ว่า

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial\mathcal{V}}\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} \tag{9.10}$$

▶ กฎอนุรักษ์โมเมนตัม

ถ้าเรานิยาม*โมเมนตัมจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า*ว่า

นิยามโมเมนตัมจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า.

$$\mathbf{p}_{\mathrm{em}} \equiv \mu_0 \varepsilon_0 \int \mathbf{S}\,\mathrm{d}\tau \tag{9.11}$$

โดยมี*ความหนาแน่นโมเมนตัม* ($\mathbf{g}$)

นิยามความหนาแน่นโมเมนตัม.

$$\mathbf{g} \equiv \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S} = \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{9.12}$$

จาก (9.9) ก็จะได้

แรงลัพธ์ในรูปเทนเซอร์ความเค้น.

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g}\,\mathrm{d}\tau + \oint_{\partial\mathcal{V}} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{9.13}$$

และจะได้เป็นกฎอนุรักษ์โมเมนตัม:

กฎอนุรักษ์โมเมนตัม.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} + \oint \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{9.14}$$

และถ้าไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงกล จะได้ "สมการความต่อเนื่อง" ของโมเมนตัม:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \tag{9.15}$$

สุดท้าย เช่นเดียวกับกฎอนุรักษ์พลังงาน พจน์*ฟลักซ์โมเมนตัม* (คือพจน์ที่มี stress tensor, โดยในกรณีนี้ flux density จะเป็น $-\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ เพราะในสมการเป็นบวก) จะเข้าใกล้ศูนย์ถ้าอินทิเกรตบนพื้นที่ที่ใหญ่มาก ๆ (อินทิเกรตทั่วทุกพื้นที่) ทำให้เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} \tag{9.16}$$

▶ โมเมนตัมเชิงมุม

เราสามารถนิยามโมเมนตัมเชิงมุมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้ารอบจุด ๆ หนึ่งได้เช่นกัน

นิยามความหนาแน่นโมเมนตัมเชิงมุม.

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \varepsilon_0 \big(\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\big) \tag{9.17}$$

ก็จะได้

นิยามโมเมนตัมเชิงมุมจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า.

$$\mathbf{L}_{\text{em}} \equiv \int \mathbf{l} \, \mathrm{d}\tau \tag{9.18}$$

โดยโมเมนตัมเชิงมุมนี้ก็อนุรักษ์กับ counterpart ของมันเช่นเดียวกับพลังงานและโมเมนตัมเชิงเส้น โดยจากทอร์ก:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \mathrm{d}\tau - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \mathrm{d}\tau = -\int_{\mathcal{V}} \cancel{(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r})} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \, \mathrm{d}\tau + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathrm{d}\tau = \oint_{\partial\mathcal{V}} \left(\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$$

(เมื่อ $\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ เป็น column-wise cross product) ก็จะได้ว่า

ทอร์กในรูปเทนเซอร์ความเค้น.

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{l} \, \mathrm{d}\tau + \oint_{\partial\mathcal{V}} \left(\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{9.19}$$

หรือ

กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} + \oint \left(\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} \tag{9.20}$$

ถ้าไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม (เชิงกล) จะได้ "สมการความต่อเนื่อง" ของโมเมนตัมเชิงมุม:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}\right) \tag{9.21}$$

และเนื่องจากพจน์*ฟลักซ์โมเมนตัมเชิงมุม* $(-\oint (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a})$ จะเข้าใกล้ศูนย์ถ้าอินทิเกรตบนทุกพื้นที่ ทำให้เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัมมุม

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} \tag{9.22}$$

บทที่ 10 | สัมพัทธภาพกับแม่เหล็กไฟฟ้า

▶ 10.1. ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

▶ สัจพจน์ของ Einstein

ในบทคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเราจะเห็นว่าแสงเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ แต่ความเร็วนี้เทียบกับอะไรล่ะ? นั่นเป็นคำถามที่นักฟิสิกส์ในยุคก่อน Einstein ได้ถกเถียงกันและได้ตั้งทฤษฎีต่าง ๆ มามากมาย จนกระทั่ง Einstein ได้ลองคิดว่า จริง ๆ แล้วความเร็วแสงนี้อาจเท่ากันหมดไม่ว่าจะเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยใด ๆ ก็ตาม และความคิดเรื่องสัมพัทธภาพแบบดั้งเดิม (Galilean relativity) ที่เป็นการนำความเร็วมาบวกกันและ simultaneity ของทุกกรอบอ้างอิงเหมือนกัน อาจไม่เป็นจริงก็ได้ โดย Einstein ได้ตั้งข้อสมมติไว้ดังนี้:

สัจพจน์ของ Einstein (Einstein's Postulates).

1. กฎของฟิสิกส์สามารถใช้ได้บนกรอบอ้างอิงเฉื่อยทุกกรอบ
2. ความเร็วแสงในสุญญากาศมีค่าเท่ากันสำหรับผู้สังเกตในทุก ๆ กรอบอ้างอิงเฉื่อย

▶ เรขาคณิตของสัมพัทธภาพ

จาก postulate แค่สองข้อนั้น เราสามารถได้ผลลัพธ์ต่าง ๆ มากมาย

ลองพิจารณารถบรรทุกคันหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ไปทางขวาเทียบกับพื้นโดยมีแหล่งกำเนิดแสงอยู่ตรงกลาง เมื่อให้แหล่งกำเนิดปล่อยแสงมาในทุกทิศ ในมุมมองผู้สังเกตบนพื้นจะเห็นแสงกระทบกับผนังด้านซ้ายก่อนด้านขวา แต่ในมุมมองผู้สังเกตบนรถ แสงจะกระทบทั้งสองฝั่งพร้อม ๆ กัน จึงสรุปได้ว่า

ความไม่คงที่ของความเกิดขึ้นพร้อมกัน (Simultaneity). เหตุการณ์สองเตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกันในกรอบอ้างอิงหนึ่ง อาจเกิดขึ้นไม่พร้อมกันในอีกกรอบอ้างอิง

ต่อมา พิจารณารถคันเดิมโดยสมมติว่าสูง h แต่คราวนี้มาลองดูเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางจากเพดานลงมาถึงพื้นสำหรับผู้สังเกตบนรถ แสงเคลื่อนที่จากบนลงล่างเป็นเส้นตรงในแนวดิ่ง จะได้ว่าเวลา

$$\Delta\bar{t} = \frac{h}{c}$$

แต่สำหรับผู้สังเกตบนพื้น พื้นของรถเคลื่อนที่ออกไปแล้ว $v\Delta t$ ดังนั้นแสงจะต้องเคลื่อนที่แบบเอียง ๆ ก็จะได้

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2} \\ \Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{h}{c} \end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าเรานิยาม

นิยาม Lorentz Factor.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{10.1}$$

ก็จะได้ว่า

การขยายขนาดของเวลา (Time Dilation).

$$\Delta \bar{t} = (1/\gamma)\Delta t \tag{10.2}$$

หมายเหตุ: *สมการนี้ใช้ได้เฉพาะผลต่างเวลาที่สองเหตุการณ์เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกันเทียบกับกรอบอ้างอิงรถ โดยเหตุผลจะได้เห็นอีกที*

ต่อมา ให้รถนี้ยาว $\Delta \bar{x}$ และ Δx สำหรับผู้สังเกตบนรถและบนพื้น ตามลำดับ เราจะแสดงว่าความยาวทั้งสองนี้ไม่เท่ากัน พิจารณาเวลาที่ใช้ในการที่ปล่อยแสงจากฝั่งซ้ายของรถให้เคลื่อนที่ไปทางขวาของรถที่มีกระจกวางไว้อยู่แล้วให้สะท้อนกลับมาที่ฝั่งซ้าย สำหรับผู้สังเกตบนรถ จะต้องใช้เวลา

$$\Delta \bar{t} = 2\frac{\Delta \bar{x}}{c}$$

สำหรับผู้สังเกตบนพื้น แบ่งเป็นเวลา Δt_1 และ Δt_2 คือเวลาที่แสงใช้เคลื่อนที่ไปและกลับ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c} \qquad \text{และ} \qquad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c}$$

ก็จะได้

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v} \qquad \text{และ} \qquad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}$$

ดังนั้น

$$\Delta t = 2\frac{\Delta x}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

จาก (10.2) จึงได้ว่า

การหดตัวของความยาว (Length Contraction).

$$\Delta \bar{x} = \gamma \Delta x \tag{10.3}$$

สุดท้าย สมมติข้าง ๆ ถนนมีกำแพงที่มีแถบสีน้ำเงินถูกทาไว้ 1 เมตรเหนือถนนสำหรับผู้สังเกตบนพื้น สมมติมีคน ๆ หนึ่งอยู่บนรถ ถ้าคนนั้นโผล่หัวออกมาจากหน้าต่างแล้วใช้พู่กันทาสีแดงบนกำแพงเหนือถนน 1 เมตรสำหรับเขา ถ้าสรุปแล้วแถบสีแดงไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับแถบสีน้ำเงินจะเกิดข้อขัดแย้ง เพราะโดยสัจพจน์ของ Einstein ในมุมมองผู้สังเกตบนพื้นจะได้ผลลัพธ์ตรงกันข้าม จึงสรุปได้ว่า

การแปลงของมิติที่ตั้งฉากกับความเร็ว. มิติที่ตั้งฉากกับความเร็วจะไม่เกิดการหดหรือขยาย

การแปลง Lorentz

เราจะนิยาม*เหตุการณ์* (*event*) คือชุดของตำแหน่ง (x, y, z) และเวลา t โดยสัมพัทธภาพแบบ Galilean การแปลงพิกัดของเหตุการณ์ $E(x, y, z, t)$ จากกรอบอ้างอิง $\mathcal{S}$ เป็น $E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ ในกรอบ $\bar{\mathcal{S}}$ ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v\hat{\mathbf{x}}$ เทียบ $\mathcal{S}$ สามารถทำได้โดย

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x - vt \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= t \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

ซึ่งจะเรียกว่า*การแปลง Galilean* (*Galilean transformation*)

แต่ถ้าเป็นการแปลงแบบสัมพัทธภาพพิเศษ เราจะได้ว่า

$$x = d + vt$$

เมื่อ d คือระยะจาก $\bar{O}$ ไปยัง $\bar{A}$ (ซึ่งคือจุดในแนวแกน $\bar{x}$ ที่เกิด E) ณ เวลา t (ซึ่งเป็นระยะที่วัดในกรอบ $\mathcal{S}$) โดยถ้าเป็นสัมพัทธภาพ Galilean เราจะได้พจน์ d นี้ก็คือ $\bar{x}$ และได้ดัง (10.4) แต่จาก (10.3) เรารู้แล้วว่าจริง ๆ แล้ว

$$d = \frac{1}{\gamma}\bar{x}$$

ดังนั้น

$$\bar{x} = \gamma(x - vt) \tag{$\diamond$1}$$

แต่ถ้าเราคิดในทางกลับกันโดยวัด $\bar{d}$ ในกรอบ $\bar{\mathcal{S}}$ จะได้ว่า

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \tag{$\diamond$2}$$

จาก ($\diamond$1) และ ($\diamond$2) จะได้แก้ว่า

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{$\diamond$3}$$

ดังนั้นโดยสมการ ($\diamond$1) และ ($\diamond$3) เราก็จะได้การแปลงที่สมบูรณ์ ซึ่งเรียกว่าเป็น*การแปลง Lorentz* (*Lorentz transformation*) ดังนี้

การแปลง Lorentz (Lorentz Transformation).

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \gamma(x - vt)\\ \bar{y} &= y\\ \bar{z} &= z\\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

พิจารณาอนุภาคหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u ในกรอบ $\mathcal{S}$ จะได้ว่า

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

แต่ใน $\mathcal{S}'$ จาก (10.5) จะได้ว่า

$$\mathrm{d}\bar{x} = \gamma(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t)$$

และ

$$\mathrm{d}\bar{t} = \gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

ก็จะได้อัตราเร็วของอนุภาคนี้ใน $\mathcal{S}'$ เท่ากับ

$$\bar{u} = \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\bar{t}} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t)}{\gamma(\mathrm{d}t - v/c^2\,\mathrm{d}x)} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

ได้เป็นสมการรวมความเร็วสัมพัทธ์แบบสัมพัทธภาพพิเศษ

กฎการรวมความเร็วของ Einstein.

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2} \tag{10.6}$$

▶ 10.2. โครงสร้างของปริภูมิเวลา

▶ โฟร์เวกเตอร์

การแปลง Lorentz สามารถเขียนได้อยู่ในรูปที่อ่านง่ายขึ้นถ้าเรานิยาม

$$x^0 \equiv ct, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

และ $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ จะได้

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1)\\ \bar{x}^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0)\\ \bar{x}^2 &= x^2\\ \bar{x}^3 &= x^3\end{aligned}\right\}$$

หรือก็คือ

การแปลง Lorentz ในรูปเมทริกซ์.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{10.7}$$

ถ้าเรานิยามเมทริกซ์ตรงกลางว่าเป็น Λ จะได้ว่า

การแปลงของการกระจัด.

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{10.8}$$

โดยการคำนวณใน Einstein summation ให้รวมทุก ๆ ค่าที่เป็นไปได้ของทุก index ที่ปรากฏอยู่สองตัวต่อพจน์ เราจะเรียกชุดของตัวเลขสี่ตัวที่แปลงในแบบเดียวกับ (x^0, x^1, x^2, x^3) ว่า*โฟร์เวกเตอร์* (*4-vector*)

โดยเราจะมีผลคูณเชิงสเกลาร์ของโฟร์เวกเตอร์ดังนี้

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของโฟร์เวกเตอร์.

$$-a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \tag{10.9}$$

โดยลองพิจารณาการแปลงพิกัดจาก $\mathcal{S}$ ไปเป็น $\mathcal{S}'$ ซึ่งเป็นการแปลง Lorentz ในแนวแกน x เช่นเดิม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -\bar{a}^0\bar{b}^0 + \bar{a}^1\bar{b}^1 + \bar{a}^2\bar{b}^2 + \bar{a}^3\bar{b}^3 &= -\gamma^2\left(a^0 - \beta a^1\right)\left(b^0 - \beta b^1\right) + \gamma^2\left(a^1 - \beta a^0\right)\left(b^1 - \beta b^0\right) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= \gamma^2\Big(-(1-\beta^2)a^0b^0 + (1-\beta^2)a^1b^1\Big) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \end{aligned}$$

เนื่องจากพจน์สามพจน์ด้านหลังเป็นเพียง dot product ของทรีเวกเตอร์ (3-vector) จึงทำให้สมการนี้ก็ต้องเป็นจริงเมื่อ $\mathcal{S}'$ เคลื่อนที่ในแนวอื่นด้วย จึงได้ว่าผลคูณเชิงสเกลาร์นี้ *invariant* ภายใต้การแปลง Lorentz

โดยเพื่อให้ง่ายต่อการดูเครื่องหมายติดลบตรงพิกัดเวลา เราจะนิยามเวกเตอร์ *covariant* a_μ ดังนี้

นิยามเวกเตอร์ Covariant.

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3) \tag{10.10}$$

โดยเราจะเรียกโฟร์เวกเตอร์ a^μ ปกติว่าเป็นเวกเตอร์ *contravariant* เราจะเรียกเทนเซอร์ที่อธิบายการแปลงจาก contravariant เป็น covariant vector ว่าเป็นเทนเซอร์*เทนเซอร์เมทริก Minkowski* (*Minkowski metric*: $g_{\mu\nu}$)

นิยาม Minkowski Metric.

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.11}$$

หมายเหตุ: *บางที่อาจนิยาม $g_{\mu\nu}$ แบบกลับเครื่องหมาย แต่สุดท้ายแล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ก็จะ invariant อยู่ดี*

ดังนั้นเราจะสามารถเขียนผลคูณเชิงสเกลาร์ได้ว่า

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของโฟร์เวกเตอร์.

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \tag{10.12}$$

คือผลคูณเชองสเกลาร์ของโฟร์เวกเตอร์ a^μ และ b^μ ซึ่งจะ invariant ภายใต้การแปลง Lorentz

สุดท้ายเราจะนิยามค่าที่เกี่ยวข้องกับความเร็วเพิ่มเติมอีกค่อคือ *rapidity* (θ)

นิยาม Rapidity.

$$\theta \equiv \operatorname{artanh}(v/c) \tag{10.13}$$

ซึ่งบางครั้งอาจมีประโยชน์กว่าความเร็ว เพราะจะได้

$$\beta = \tanh\theta \qquad \text{และ} \qquad \gamma = \cosh\theta$$

จาก (10.7) จะเห็นว่าการแปลง Lorentz คล้ายกับการหมุนเลย โดยเฉพาะถ้าปริภูมิเวลาเป็นสองมิติจะได้

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

และจาก (10.6) จะได้

กฎการรวม Rapidity.

$$\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC} \tag{10.14}$$

► Invariant Interval

เช่นเดียวกับเวกเตอณ์ปกติ เราสามารถนิยาม "ขนาด" ของโฟร์เวกเตอร์ได้จากการนำเวกเตอร์มาคูณเชิงสเกลาร์กับตัวมันเอง

$$a^\mu a_\mu$$

โดยเราจะแบ่งเป็น 3 กรณี

นิยาม Spacelike, Timelike, Lightlike. เราจะเรียกโฟร์เวกเตอร์ a^μ ว่า*เหมือนปริภูมิ* (*spacelike*) ถ้า

$$a^\mu a_\mu > 0$$

จะเรียกว่า*เหมือนเวลา* (*timelike*) ถ้า

$$a^\mu a_\mu < 0$$

และจะเรียกว่า*เหมือนแสง* (*lightlike*) ถ้า

$$a^\mu a_\mu = 0$$

สมมติเรามีเหตุการณ์ A และ B ซึ่งมีโฟร์เวกเตอร์ที่อธิบายตำแหน่งในปริภูมิเวลา x_A^μ และ x_B^μ ตามลำดับ และให้ $\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu$ เราจะนิยาม *invariant interval* ของการกระจัดระหว่างสองเหตุการณ์นั้นว่า

นิยาม Invariant Interval.

$$I \equiv \Delta x^\mu \Delta x_\mu = -c^2t^2 + d^2 \tag{10.15}$$

เมื่อ t เวลาระหว่างสองเหตุการณ์นั้น และ d คือระยะระหว่างสองเหตุการณ์นั้น

► แผนภาพปริภูมิเวลา

ถ้าอยากวาด trajectory ของอนุภาคหนึ่งออกมา เราสามารถนำมันมาพล็อตใน*แผนภาพปริภูมิเวลา* (หรือ*แผนภาพ Minkowski*) ได้ โดยให้แกนตั้งเป็นแกน ct และแกนนอน (หรือระนาบนอน) เป็นแกน x (และ y) เราจะเรียกเส้นที่ระบุการเดินทางของอนุภาคนั้นว่าเป็น *world line* ของอนุภาค กรวยที่กวาดโดยแสงจากจุดกำเนิดในทิศเวลาเป็นบวกจะเรียกว่า *forward light cone* และกรวยที่ไปในฝั่งเวลาติดลบเรียกว่า *backward light cone* โดยภายใน forward light cone เราจะเรียกว่าเป็น*อนาคต*ของอนุภาค ภายใน backward light cone เรียกว่าเป็น*อดีต*ของอนุภาค และบริเวณนอกเหนือจากนั้นทั้งหมดเรียกว่าเป็น*ปัจจุบัน*ของอนุภาค สังเกตว่าไม่ว่าอนุภาคนั้นจะเดินทางอย่างไรก็ตาม อนุภาคนั้นไม่มีทางที่จะส่งผลกระทบใด ๆ ต่อเหตุการณ์ทุกเหตุการณ์ในบริเวณปัจจุบันของอนุภาคเลย

เนื่องจาก interval $I = x^2 - c^2t^2$ invariant บนการแปลง Lorentz ดังนั้นไม่เราจะแปลง Lorentz ด้วยกรอบอ้างอิงเฉื่อยใด ๆ เหตุการณ์ทุกเหตุการณ์จะต้องอยู่บน hyperboloid (หรือ hyperbola ในกรณีมีแค่แกน x) เดียวกันในปริภูมิเวลา ถ้า interval จาก $\mathcal{O}$ ไปที่เหตุการณ์เหมือนเวลา เหตุการณ์จะอยู่บน *hyperboloid of two sheets* แต่ถ้าเหมือนปริภูมิ เหตุการณ์นั้นจะอยู่บน *hyperboloid of one sheet* จึงทำให้ถ้าการกระจัดระกว่างเหตุการณ์สองเหตุการณ์เหมือนเวลา ถ้าให้เหตุการณ์หนึ่งเป็นจุดกำเนิด ไม่ว่าจะแปลง Lorentz ยังไง เหตุการณ์อีกเหตุการณ์ก็จะต้องอยู่ใน light cone เดิม (เพราะจะต้องอยู่บน hyperboloid of two sheets เดียวกันกับตอนก่อนที่จะ transform และเหตุการณ์ไม่สามารถ teleport ไปอีกฝั่งของ hyperboloid ได้ภายใต้การแปลง Lorentz) จึงทำให้เรายังนิยามความสัมพันธ์แบบเกิดก่อน-เกิดหลัง (causality) ระหว่างสองเหตุการณ์ได้ เมื่อการกระจัดระกว่างสองเหตุการณ์เหมือนเวลา (หรือเหมือนแสง) (แต่ในทางกลับกัน ถ้าการกระจัดเหมือนปริภูมิ จะทำให้ความเกิดก่อน-หลังของเหตุการณ์ขึ้นอยู่กับกรอบอ้างอิงที่เราพิจารณา)

▶ 10.3. กลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

▶ เวลาแท้และความเร็วแท้

เราจะนิยาม*เวลาแท้* (*proper time*: τ) คือเวลาจริง ๆ ที่ผ่านไป เมื่อวัดโดยกรอบอ้างอิงของอนุภาคนั้น ๆ หรือ

นิยามเวลาแท้.

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\,\mathrm{d}t \tag{10.16}$$

โดยจะเห็นได้ว่าเวลาแท้นี้ invariant บนการแปลง Lorentz

และจะนิยาม*ความเร็วแท้* (*proper velocity*: $\boldsymbol{\eta}$) คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ต่อหน่วยเวลาแท้ของวัตถุนั้น ๆ หรือก็คือ

นิยามความเร็วแท้.

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}\tau} \tag{10.17}$$

โดยจะเร็วความเร็ว $\mathbf{u}$ ปกติ ($\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}/\,\mathrm{d}t$) ว่า*ความเร็วสามัญ* (*ordinary velocity*) และได้

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\mathbf{u} \tag{10.18}$$

โดยเราจะนิยามโฟร์เวกเตอร์ของความเร็วแท้ (*4-velocity*) คือ

นิยามโฟร์เวกเตอร์ของความเร็วแท้.

$$\eta^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{10.19}$$

ซึ่งมี component เวลา (η^0) เท่ากับ

$$\eta^0 = \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{10.20}$$

เราสามารถเห็นได้ว่าความเร็วแท้นี้เป็นโฟร์เวกเตอร์จริง ๆ เพราะเวกเตอร์นี้แปลงแบบ Lorentz ภายใต้การเปลี่ยนกรอบอ้างอิงเช่นเดียวกับการกระจัด:

การแปลงของความเร็วแท้.

$$\bar{\eta}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\nu \tag{10.21}$$

หมายเหตุ: *จะเห็นว่าความเร็วแท้นี้เหมือนเวลาเสมอเพราะ*

$$\eta^\mu \eta_\mu = \frac{-c^2}{1 - u^2/c^2} + \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\eta} = \frac{-c^2}{1 - u^2/c^2} + \frac{u^2}{1 - u^2/c^2} = -c^2 < 0 \tag{10.22}$$

▶ โมเมนตัมและพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ

เราจะนิยามโมเมนตัมตามที่ใช้ในสัมพัทธภาพพิเศษด้วยควมเร็วแท้แทนความเร็วสามัญ:

นิยามโมเมนตัมเชิงสัมพัทธภาพ.

$$\mathbf{p} \equiv m\boldsymbol{\eta} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{10.23}$$

ซึ่งเป็น component ปริภูมิของ*โฟร์เวกเตอร์พลังงาน-โมเมนตัม* (เรียกสั้น ๆ ว่า*โฟร์เวกเตอร์โมเมนตัม*)

นิยามโฟร์เวกเตอร์โมเมนตัม.

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu \tag{10.24}$$

โดยที่ component เวลาของโฟร์เวกเตอร์นี้คือ

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{10.25}$$

ซึ่ง Einstein ได้ระบุไว้ว่า $p^0 c$ นี้คือพลังงาน:

นิยามพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ.

$$E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{10.26}$$

จะเห็นว่าพลังงานนี้ไม่เป็นศูนย์แม้มองในกรอบอ้างอิงที่ทำให้อนุภาคอยู่นิ่ง โดยเราจะเรียกพลังงานนี้ว่า*พลังงานนิ่ง* (*rest energy*):

นิยามพลังงานนิ่ง.

$$E_{\text{rest}} \equiv mc^2 \tag{10.27}$$

และส่วนที่เหลือของพลังงานเมื่อนำ rest energy ออกจะเป็นพลังงานจลน์

นิยามพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ.

$$E_{\text{kin}} \equiv E - mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1\right) \tag{10.28}$$

ซึ่งจากการทดลองต่าง ๆ โดยนักฟิสิกส์ สรุปออกมาได้ว่า

กฎอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม. ในทุก ๆ ระบบปิด พลังงานและโมเมนตัมเชิงสัมพัทธภาพจะอนุรักษ์

หมายเหตุ: *มวลในที่นี้จะไม่อนุรักษ์ แต่จะอนุรักษ์ร่วมกับพลังงานในรูป rest energy*

ต่อมา พิจารณาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ p^μ กับตัวมันเอง:

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -E^2/c^2 + p^2$$

แต่จาก (10.22) จะได้ว่า $p^\mu p_\mu = m^2\eta^\mu\eta_\mu = -m^2c^2$ ดังนั้น

สมการพลังงาน-โมเมนตัม.

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \tag{10.29}$$

ซึ่งสามารถนำมาใช้หาพลังงานเมื่อรู้โมเมนตัมและหาโมเมนตัมเมื่อรู้พลังงานได้

▶ จลนศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

สังเกตว่าในกลศาสตร์ดั้งเดิม ถ้าอนุภาคไม่มีมวล พลังงานและโมเมนตัมจะเป็น 0 แต่ในสัมพัทธภาพพิเศษเราสามารถมีอนุภาคไร้มวลที่มีพลังงานและโมเมนตัมได้ (เพราะจาก (10.23) และ (10.26) ถ้า $u = c$ จะได้ $0/0$ ซึ่งเป็นรูปไม่กำหนด) โดยจาก (10.29) ก็จะได้ว่า

สมการพลังงาน-โมเมนตัมของอนุภาคไร้มวล.

$$E = pc \tag{10.30}$$

และจากกลศาสตร์ควอนตัมเราสามารถใช้สูตรของ Planck มาใช้ร่วมกันในโจทย์ปัญหาได้:

สูตรของ Planck.

$$E = h\nu \tag{10.31}$$

เมื่อ h คือ*ค่าคงที่ Planck* (*Planck's constant*) มีค่าประมาณ $6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

และสุดท้าย เช่นเดียวกับกลศาสตร์ดั้งเดิม เราจะเรียกการชนที่อนุรักษ์พลังงานจลน์ (และสุดท้ายจะอนุรักษ์มวลด้วย) ว่าเป็น*การชนแบบยืดหยุ่น*

ตัวอย่าง (การกระเจิง Compton). โฟตอนที่มีความยาวคลื่น λ_0 พุ่งเข้าไปในแนวแกน $+x$ เข้าชนกับอิเล็กตรอนซึ่งอยู่นิ่ง ทำให้โฟตอน “เด้ง” ออกจากอิเล็กตอนด้วยมุมที่เบนออกไปจากแกน x ขนาด θ ขึ้นไปในแนวแกน y จงหาความยาวคลื่น λ ของโฟตอนหลังชนในรูป θ

วิธีทำ. เริ่มจากการหา E ในรูป θ ก่อน กำหนดให้ก่อนชนโฟตอนมีพลังงาน $E_0 = hc/\lambda_0$ และมุมที่อิเล็กตรอนเบน

ออกไปจากแกน x คือ ϕ พิจารณากฎอนุรักษ์ดมเมนตัมในแกน y จะได้

$$
\begin{aligned}
p_e \sin\phi &= p_\gamma \sin\theta \\
\sin\phi &= \frac{E}{p_e c}\sin\theta
\end{aligned}
\tag{⊛1}
$$

ในแนวแกน x ได้

$$
\begin{aligned}
p_0 = \frac{E_0}{c} &= p_\gamma \cos\theta + p_e\cos\phi \\
&\overset{⊛1}{=} \frac{E}{c}\cos\theta + p_e\sqrt{1-\left(\frac{E}{p_e c}\sin\theta\right)^2} \\
(E_0 - E\cos\theta)^2 &= p_e^2c^2 - e^2\sin^2\theta \\
p_e^2c^2 &= E_0^2 - 2E_0E\cos\theta + E^2
\end{aligned}
\tag{⊛2}
$$

สุดท้าย พิจารณากฎอนุรักษ์พลังงาน

$$
\begin{aligned}
E_0 + m_ec^2 &= E + E_e \\
&= E + \sqrt{m_e^2c^4 + p_e^2c^2} \\
&\overset{⊛2}{=} E + \sqrt{m_e^2c^4 + E_0^2 - 2E_0E\cos\theta + E^2} \\
\left(E_0 + m_ec^2 - E\right)^2 &= m_e^2c^4 + E_0^2 - 2E_0E\cos\theta + E^2 \\
E_0m_ec^2 &= E\left(E_0 + m_ec^2 - E_0\cos\theta\right) \\
E &= \frac{1}{(1-\cos\theta)/m_ec^2 + 1/E_0}
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

เมื่อนำ (10.31) แทนเข้าไปจะได้ว่า

การกระเจิง Compton.

$$
\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_ec}(1-\cos\theta) \tag{10.33}
$$

โดยเราจะเรียกพจน์ $\lambda_c = h/m_ec \approx 2.43 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}$ ว่า*ความยาวคลื่น Compton* ของอิเล็กตรอน □

► พลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

เนื่องจากกฎอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงานเป็นจริงเมื่อใช้โมเมนตัมและพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ กฎข้อที่สองของนิวตันก็เป็นจริงเช่นกัน:

กฎข้อที่สองของนิวตัน.

$$
\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} \tag{10.34}
$$