

Electromagnetism Notes

by Ham Kittichet

April 7, 2025

► Table of Contents

บทที่ 1. ไฟฟ้าสถิต	1
► 1.1. สนามไฟฟ้า	1
► 1.2. Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต	2
► 1.3. ศักย์ไฟฟ้า	3
► 1.4. งานและพลังงาน	5
► 1.5. ตัวนำและความจุไฟฟ้า	8
บทที่ 2. ศักย์ไฟฟ้า	12
► 2.1. สมการ Laplace	12
► 2.2. การจำลองภาพ	14
► 2.3. การแยกตัวแปร	15
► 2.4. การกระจาย Multipole	19
บทที่ 3. สนามไฟฟ้าในสสาร	23
► 3.1. โพลาริเซชัน	23
► 3.2. สนามไฟฟ้าของวัตถุที่ถูกโพลาริซ์	25
► 3.3. การกระจัดไฟฟ้า	26
► 3.4. ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น	27
บทที่ 4. แม่เหล็กสถิต	32
► 4.1. กฎแรง Lorentz	32
► 4.2. กฎของ Biot-Savart	34
► 4.3. Divergence และ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต	35
► 4.4. เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก	37
บทที่ 5. สนามแม่เหล็กในสสาร (TO-DO)	43
► 5.1. แมกเนไทเซชัน (TO-DO)	43

บทที่ 6. พลศาสตร์ไฟฟ้า	44
▶ 6.1. แรงเคลื่อนไฟฟ้า	44
▶ 6.2. การเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า	48
▶ 6.3. สมการ Maxwell	52
▶ 6.4. สมการ Maxwell ในสสาร (TO-DO)	53
บทที่ 7. ไฟฟ้ากระแสตรง	54
▶ 7.1. การวิเคราะห์วงจร	54
▶ 7.2. วงจรอันดับหนึ่ง	56
▶ 7.3. วงจรอันดับสอง	59
▶ 7.4. กำลังไฟฟ้า	63
บทที่ 8. ไฟฟ้ากระแสสลับ	64
▶ 8.1. นิยามของไฟฟ้ากระแสสลับ	64
▶ 8.2. เฟสเซอร์	66
▶ 8.3. การวิเคราะห์วงจรใน Frequency Domain	67
▶ 8.4. กำลังไฟฟ้าและค่ายังผล	70
บทที่ 9. กฏอนุรักษ์	74
▶ 9.1. ประจุและพลังงาน	74
▶ 9.2. โมเมนตัม	75
บทที่ 10. สัมพัทธภาพกับแม่เหล็กไฟฟ้า	79
▶ 10.1. ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ	79
▶ 10.2. โครงสร้างของปริภูมิเวลา	82
▶ 10.3. กลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ	86

บทที่ 1 | ไฟฟ้าสถิต

► 1.1. สนามไฟฟ้า

► แรง Coulomb

กฎของ Coulomb. สำหรับจุดประจุที่อยู่หนึ่ง q_1 และ q_2 จะได้ว่าแรงที่กระทำต่อประจุ q_1 คือ

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{r}}$ คือเวกเตอร์จาก q_1 ไป q_2

โดยประจุไฟฟ้าในหน่วย SI คือ C (coulomb) และ $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่าสภาพยอมในสุญญากาศ (permittivity of free space) เราจะเรียกแรงนี้ว่าแรง Coulomb

► สนามไฟฟ้า

สังเกตว่าถ้ามีประจุวางไว้อยู่แล้ว เราสามารถนิยามสนามไฟฟ้าได้ดังนี้:

นิยามสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q} \quad (1.2)$$

และโดยกฎของ Coulomb (1.1) จะได้ว่า

สนามไฟฟ้าของจุดประจุ.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\mathbf{r}_k \neq \mathbf{r}} q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k^2} \hat{\mathbf{r}}_k \quad (1.3)$$

โดยถ้าประจุไม่ติดสคริตแต่กระจายตัวอย่างต่อเนื่องด้วยความหนาแน่นประจุ $\rho(\mathbf{r})$ จะได้ว่า

สนามไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau' \quad (1.4)$$

เมื่อ $d\tau' = d^3r'$ และในทำนองเดียวกันกับความหนาแน่นเชิงเส้น λ และความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ

► 1.2. Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

► ฟลักซ์ไฟฟ้าและกฎของ Gauss

นิยามฟลักซ์ไฟฟ้า. ฟลักซ์ของ \mathbf{E} ที่ผ่านผิว S คือ

$$\Phi_E \equiv \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.5)$$

พิจารณาพื้นผิวปิด S ที่มีจุดประจุ q อยู่ภายในและพื้นที่เล็ก ๆ $d\tau$ บน S โดยมี $\hat{\mathbf{r}}$ เป็นเวกเตอร์จาก q มายัง $d\mathbf{a}$ และ $d\mathbf{a}'$ เป็นภาพฉายของ $d\mathbf{a}$ มาตั้งฉากกับ $\hat{\mathbf{r}}$ จะได้

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\mathbf{a} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} d\mathbf{a}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

เมื่อ $d\Omega$ คือมุมสเตอเรเดียนเทียบกับตำแหน่งของประจุ q ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าจาก q ที่ผ่านพื้นผิว S เท่ากับ

$$\Phi_E^{(q \text{ in})} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

โดยทำในทำนองเดียวกันจะเห็นว่าถ้า q อยู่นอก S แล้ว $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = (\text{const.}) d\Omega$ จะมีคู่ของมันที่เครื่องหมายตรงข้ามในอีกฝั่งของ S จึงทำให้ตัดกันหมด ดังนั้นในกรณีจุดประจุ q อยู่นอก S จะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้า:

$$\Phi_E^{(q \text{ out})} = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (1.7)$$

ดังนั้นจึงได้

กฎของ Gauss (Integral form). สำหรับทุกพื้นผิวปิดจะได้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวนั้นเท่ากับ

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

► Divergence และ Curl ของสนามไฟฟ้าสถิต

พิจารณาใช้ divergence theorem ($\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau$) บนกฎของ Gauss (1.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau &= \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \\ \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากเป็นจริงทุกปริมาตร V ดังนั้น

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

ก็จะได้ว่า

กฎของ Gauss (Differential form).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

และเนื่องจาก curl ของจุดประจุเท่ากับ 0 ดังนั้นจึงได้ว่า curl ของสนาม \mathbf{E} สถิตใด ๆ จึงเท่ากับ 0 ด้วย

กฎของ Faraday สำหรับสนามไฟฟ้าสถิต.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.10)$$

► 1.3. ศักย์ไฟฟ้า

► นิยามศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ โดย Stokes' theorem จะได้ว่า $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell}$ ไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทาง เราจึงสามารถนิยามฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับอินทิกรัลของสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้:

นิยามศักย์ไฟฟ้า. ให้ \mathcal{O} เป็นจุดอ้างอิง เราสามารถนิยามศักย์ไฟฟ้า $V(\mathbf{r})$ ที่จุด \mathbf{r} คือ

$$V(\mathbf{r}) \equiv - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} \quad (1.11)$$

โดยที่ V มีหน่วย SI เป็น V (volt) ซึ่งโดยปกติแล้วเราจะนิยามศักย์ไฟฟ้าให้ $V|_{r \rightarrow \infty} = 0$

โดยจะได้ความต่างศักย์ระหว่าง \mathbf{a} และ \mathbf{b} คือ

$$V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\ell} \quad (1.12)$$

และจาก

$$\int_a^b (\nabla V) \cdot d\ell = V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\ell$$

จะได้ว่า

ศักย์ไฟฟ้าในรูป Gradient.

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1.13)$$

อีกสมการหนึ่งที่สำคัญที่ได้จากศักย์ไฟฟ้าโดยนำสมการ (1.13) ไปแทนใน (1.9) จะได้

สมการ Poisson. สำหรับสนามศักย์ไฟฟ้า V :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.14)$$

โดยถ้า $\rho = 0$ จะได้สมการ Laplace

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.15)$$

โดยสามารถหา V ของจุดประจุ q ได้จากกฎของ Coulomb (1.1):

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\ell' = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2} dr'$$

ก็จะได้ว่า

ศักย์ไฟฟ้าของจุดประจุ.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (1.16)$$

ในทำนองเดียวกันกับสนามไฟฟ้า เราสามารถหาศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่ง \mathbf{r} ที่เกิดจากประจุที่กระจายแบบต่อเนื่องด้วยความหนาแน่น ρ ได้ดังนี้:

ศักย์ไฟฟ้าของประจุต่อเนื่อง.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad (1.17)$$

► สภาวะขอบเขต

ต่อมาจะมาดูสมบัติของ \mathbf{E} และ V ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ σ

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกบางที่บางมากจนฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านบริเวณผิวข้างเท่ากับ 0 ที่คลุมบริเวณเล็ก ๆ ของแผ่นประจุ จะได้ว่า

$$E_{\text{above}}^{\perp} - E_{\text{below}}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

จะเห็นได้ว่าส่วนของ \mathbf{E} ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุจะเกิดความไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

2. พิจารณาอินทิกรัลเส้นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุ จาก (1.10) และ Stokes' theorem จะได้ว่า $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ดังนั้น

$$E_{\text{above}}^{\parallel} - E_{\text{below}}^{\parallel} = 0$$

จะเห็นได้ว่าส่วนของ \mathbf{E} ที่ขนานกับแผ่นประจุจะยังต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

3. พิจารณาจุด \mathbf{a} และ \mathbf{b} ที่อยู่ใกล้กันมาก ๆ แต่ \mathbf{b} อยู่ด้านบนแผ่น ส่วน \mathbf{a} อยู่ด้านล่างแผ่น จะได้ว่า

$$V_{\text{above}} - V_{\text{below}} = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

ดังนั้น V ต่อเนื่องเมื่อผ่านแผ่นประจุ

จึงสรุปได้ดังนี้:

สถานะขอบเขตของ \mathbf{E} และ V เมื่อผ่านแผ่นประจุบาง. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ จะได้ว่า

$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \quad (1.18)$$

และ

$$\mathbf{E}_{\text{above}} - \mathbf{E}_{\text{below}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (1.19)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือเขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

$$\frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.20)$$

► 1.4. งานและพลังงาน

► พลังงานศักย์ไฟฟ้า

เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times q\mathbf{E} = 0$ ดังนั้นแรง Coulomb จึงเป็นแรงอนุรักษ์ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับแรงโน้มถ่วงด้วย จึงหาพลังงานศักย์ของจุดประจุ 2 ตัวได้คล้ายกัน

พลังงานศักย์ไฟฟ้าสำหรับจุดประจุ.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1.21)$$

และจาก (1.13) ยังได้อีกว่า

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์.

$$V = \frac{U}{q} \quad (1.22)$$

ต่อมาจะมามหาพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบประจุที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามภายนอก \mathbf{E}_{ext} โดยพิจารณาการหาผลต่างของพลังงานศักย์ในการนำจุดประจุจาก ∞ มาวางที่ละตัว จะได้ผลต่างพลังงานศักย์ของประจุที่ k เป็นดังนี้:

$$\Delta U_k = q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k)$$

เนื่องจากนิยามให้ $U|_{r \rightarrow \infty} = qV|_{r \rightarrow \infty} = 0$ ก็จะได้

$$U_{\text{ext}} = \sum_k \Delta U_k = \sum_k q_k V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_k) \quad (1.23)$$

หรือขยายมาในกรณีต่อเนื่องก็คือ

พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายนอก.

$$U_{\text{ext}} = \int \rho V_{\text{ext}} d\tau \quad (1.24)$$

ส่วนพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากระบบเองหาได้โดยการพิจารณาเอาจุดประจุจาก ∞ มาวางเช่นเดียวกัน จะได้ประจุตัวที่ k มีพลังงานศักย์

$$U_k = \sum_{k' < k} q_k V_{k'}(\mathbf{r}_k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k' < k} \frac{q_k q_{k'}}{r_{kk'}}$$

ดังนั้นโดยใช้ความสมมาตร

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \sum_{k' < k} \frac{q_k q_{k'}}{r_{kk'}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k \neq k'} \frac{q_k q_{k'}}{r_{kk'}} \quad (1.25)$$

แต่ในกรณีต่อเนื่องเราไม่จำเป็นต้องสนใจเงื่อนไข $k \neq k'$ เพราะอินทิกรัลคู่เข้าและส่วนที่มาจาก $k = k'$ สามารถมองเป็นส่วนพลังงานที่มาจากประจุที่ใกล้กันมากๆ ได้ จึงได้ว่า

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau' d\tau$$

เนื่องจาก $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau'}{r} = V(\mathbf{r})$ ดังนั้น

พลังงานศักย์ไฟฟ้าจากสนามภายใน.

$$U = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad (1.26)$$

▶ พลังงานในสนามไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาพลังงานศักย์ภายในของระบบอีกแบบโดยแทนสมการ Poisson (1.14) เข้าไปใน (1.26) โดยอินทิเกรตบนปริมาตร V ที่ใหญ่มาก ๆ จน \mathbf{E} ที่ผิวของ V เข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla^2 V \, d\tau = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot (\nabla V) \, d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau$$

โดย Chain Rule: $\nabla \cdot (V\mathbf{F}) = \nabla V \cdot \mathbf{F} + V(\nabla \cdot \mathbf{F})$ นำไปแทนต่อ จากนั้นใช้ divergence theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V \nabla \cdot (V\mathbf{E}) \, d\tau - \int_V (\nabla V) \cdot (\mathbf{E}) \, d\tau \right) \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\oint_{\partial V} V\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} + \int_V E^2 \, d\tau \right) \end{aligned}$$

แต่จาก \mathbf{E} ที่ขอบเป็น 0 พจน์แรกจึงหายไป ดังนั้น

พลังงานในสนามไฟฟ้า.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau \quad (1.27)$$

โดยเราจะเรียก $u(\mathbf{r}) \equiv \frac{\epsilon_0}{2} E^2(\mathbf{r})$ ว่าความหนาแน่นพลังงานสนามไฟฟ้า (energy density of the electric field)

แต่คำถามคือ: ทำไมสมการ (1.25) ทำให้พลังงานศักย์เป็นลบได้แต่ (1.27) จึงเป็นบวกเสมอ? เหตุผลก็คือ (1.25) ยังไม่ได้รวมพลังงานในการสร้างจุดประจุตั้งแต่แรก (ถ้ารวมด้วยจะทำให้เป็น ∞) ดังนั้นถ้าจะหาพลังงานของระบบที่เป็นจุดประจุ ถ้าใช้ (1.25) จะสมเหตุสมผลกว่า

ต่อมาเรามาดูพลังงานศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากอิทธิพลของทั้งสนามภายนอกและภายใน:

$$U = U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \int \rho V_{\text{int}} \, d\tau + \int \rho V_{\text{ext}} \, d\tau$$

หาพจน์ฝั่งขวาโดยทำคล้าย ๆ (1.27):

$$\begin{aligned} \int_V \rho V_{\text{ext}} \, d\tau &= -\epsilon_0 \int_V V_{\text{ext}} (\nabla \cdot (\nabla V_{\text{int}})) \, d\tau \\ &= -\epsilon_0 \left(\oint_{\partial V} V_{\text{ext}} \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{a} - \int_V \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} \, d\tau \right) \\ &= \epsilon_0 \int_V \mathbf{E}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} \, d\tau \end{aligned}$$

นำไปแทนในสมการ U และใช้ร่วมกับ (1.27) จะได้

$$U = \int u(\mathbf{r}) \, d\tau \quad \text{เมื่อ} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(E_{\text{int}}^2(\mathbf{r}) + 2\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \quad (1.28)$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วเหมือนกับ (1.27) เลย โดยบวกเข้าลบออกด้วย $E_{\text{ext}}^2(\mathbf{r})$ ใน $u(\mathbf{r})$ และให้ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{int}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}$ จะได้

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2(\mathbf{r}) d\tau - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int E_{\text{ext}}^2(\mathbf{r}) d\tau}_{\text{const.}}$$

เนื่องจากพจน์ด้านหลังเป็นค่าคงที่ เราจึงสามารถให้พจน์นั้นเป็นค่าอ้างอิงได้ จึงได้ว่าเราสามารถใช่ (1.27) ได้ในทุกกรณี เพียงแค่ต้องรวม \mathbf{E}_{ext} ไปด้วย:

$$U' = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2(\mathbf{r}) d\tau \quad (1.29)$$

สุดท้ายจะเป็นพิสูจน์ทฤษฎีบท:

Green's Reciprocity Theorem.

$$\int \rho_1 V_2 d\tau = \int \rho_2 V_1 d\tau \quad (1.30)$$

ทฤษฎีบทนี้หมายความว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 1 ที่เกิดจากระบบ 2 มีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ไฟฟ้าในระบบ 2 ที่เกิดจากระบบ 1 ซึ่งก็ไม่น่าแปลกเพราะแรง Coulomb เป็นแรงที่เป็นไปตามกฎข้อที่ 3 ของนิวตัน แต่จะมาพิสูจน์กันดังนี้:

พิสูจน์. พิจารณาปริมาตร \mathcal{V} ที่ใหญ่มาก ๆ

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau &= - \int_{\mathcal{V}} \nabla V_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \\ &= - \left(\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V_1 \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{a} - \int_{\mathcal{V}} V_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_2 d\tau \right) \\ &= - \left(\oint_{\partial \mathcal{V}} V_1 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} V_1 \rho_2 d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} V_1 \rho_2 d\tau \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} V_2 \rho_1 d\tau$$

ดังนั้น $\int \rho_1 V_2 d\tau = \int \rho_2 V_1 d\tau$ ตามต้องการ □

► 1.5. ตัวนำและความจุไฟฟ้า

► ตัวนำไฟฟ้า

ในวัตถุที่เป็นฉนวนไฟฟ้า (หรือไดอิเล็กทริก) อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่ภายในบริเวณอะตอมของมัน แต่ในตัวนำไฟฟ้าจะมีอิเล็กตรอนจำนวนหนึ่งเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในเนื้อตัวนำ (ในตัวนำที่เป็นของเหลวเช่นน้ำเกลือจะเป็นไอออน

อย่าง Na^+ และ Cl^- ที่เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระแทน) โดยตัวนำอุดมคติหมายถึงตัวนำที่มีประจุอิสระไม่จำกัด ซึ่งโลหะจะเป็นตัวนำที่ใกล้เคียงกับตัวนำอิสระพอที่จะใช้การประมาณดังต่อไปนี้ได้:

สมบัติของตัวนำไฟฟ้าอุดมคติ. ตัวนำไฟฟ้าในสภาวะสมดุลจะต้องไม่มีประจุเคลื่อนที่ในเนื้อตัวนำ จึงสามารถตั้งข้อสมมติเกี่ยวกับสนามไฟฟ้าภายในเนื้อตัวนำได้ว่า

$$\mathbf{E} = 0 \quad (1.31)$$

ซึ่งจะเรียกว่า *electric field screening effect* สังเกตว่าจากกฎของ Gauss จะแปลว่าไม่มีประจุอยู่ภายในเนื้อตัวนำ ประจุทั้งหมดจะรวมกันที่ผิวเท่านั้น

โดย (1.31) สามารถเขียนได้ในอีกรูปคือ

$$V = \text{const.} \quad (1.32)$$

อีกสมบัตินึ่งคือจาก (1.18) ถึง (1.20) และ (1.31) จะได้ว่าสนามไฟฟ้าที่ผิวตัวนำจะตั้งฉากกับผิวเสมอและมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นประจุดังนี้

$$\sigma = \epsilon_0 E_{\text{out}} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad (1.33)$$

สถานการณ์หนึ่งที่น่าสนใจคือเมื่อมี “โพรง” อยู่ในเนื้อตัวนำ โพรงนี้จะเปรียบเสมือนว่าไม่โดนผลกระทบจากสนามไฟฟ้าด้านนอกตัวนำเลย ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ทฤษฎีบท uniqueness ในบทถัดไป โดยจะเรียกตัวนำที่กั้นสนามภายนอกนี้ว่า *Faraday's cage* (ในทางกลับกัน สนามด้านนอกตัวนำจะไม่โดนผลกระทบจากประจุด้านในโพรง) โดยถ้าในโพรงไม่มีประจุ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในโพรงเป็น 0 (พิสูจน์กรณีนี้ไม่ยาก ได้จากการสังเกตว่าถ้ามีสนามไฟฟ้าจะต้องมีเส้นแรงไฟฟ้าที่ลากจากผิวไปผิวบนโพรง ถ้าสร้างเส้นทางปิดในการอินทิเกรตบนเส้นแรงนั้นจะได้ผลลัพธ์ไม่เป็น 0 ซึ่งจาก (1.10) เกิดข้อขัดแย้ง) แต่ถ้านำประจุ Q ไว้ในโพรง โดยกฎของ Gauss จะได้ว่าประจุที่อยู่บนผิวของโพรงจะต้องรวมได้ $-Q$

และยิ่งไปกว่านั้น ถ้าโพรงดังกล่าวอยู่ในตัวนำทรงกลมที่ไม่มีประจุ (ประจุรวมเป็น 0) สนามไฟฟ้าด้านนอกทรงกลมนั้นจะเปรียบเสมือนสนามไฟฟ้าของตัวนำทรงกลมประจุ Q ทั้งนี้เป็นเพราะมัน “เป็นไปได้” ที่ประจุด้านในจะเรียงตัวให้ประจุที่ผิวของโพรงกับประจุ Q ในโพรงหักล้างกันหมดด้านนอกโพรง และเมื่อมีวิธีการเรียงตัวหนึ่งที่เป็นไปได้ที่ทำให้สนามในเนื้อตัวนำเป็น 0 ปรากฏว่า (ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) วิธีการจัดเรียงประจุนั้นจะเป็นวิธีเดียวเท่านั้น

► แรงบนตัวนำไฟฟ้า

ต่อมาพิจารณาแรงที่กระทำต่อผิวตัวนำ da ก้อนเล็ก ๆ จะได้ว่าสนามไฟฟ้าในบริเวณนั้นมาจากสองส่วนคือ $\mathbf{E}_{\text{other}}$ มาจากประจุอื่น ๆ นอกบริเวณ da และ \mathbf{E}_{self} มาจาก da เอง โดยสนามด้านบนและด้านล่างของ \mathbf{E}_{self} คือ $\sigma/2\epsilon_0$ และ $-\sigma/2\epsilon_0$ ตามลำดับ (เพราะสนามนี้ดูในบริเวณที่ใกล้ da มาก ๆ จนเปรียบเสมือน da เป็นผิวราบอนันต์) ดังนั้น

จะได้

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{above}} &= \mathbf{E}_{\text{other}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{E}_{\text{below}} &= \mathbf{E}_{\text{other}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{E}_{\text{other}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}})$$

ก็จะได้แรงที่กระทำต่อ da คือ

$$d\mathbf{F} = \sigma da \cdot \mathbf{E}_{\text{other}}$$

ดังนั้นแรงต่อหน่วยพื้นที่ $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/da$ คือ

แรงต่อพื้นที่บนแผ่นประจุ.

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{\text{average}} = \frac{1}{2} \sigma (\mathbf{E}_{\text{above}} + \mathbf{E}_{\text{below}}) \quad (1.34)$$

ซึ่งจริง ๆ แล้วใช้ได้กับแผ่นประจุทุกกรณี แต่ในกรณีตัวนำ:

แรงต่อพื้นที่บนผิวตัวนำ.

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (1.35)$$

จะได้ว่าเมื่อด้านนอกตัวนำมีสนาม \mathbf{E} แล้วความดันไฟฟ้าสถิต (electrostatic pressure: P) เป็นดังนี้

ความดันไฟฟ้าสถิตบนผิวตัวนำ.

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (1.36)$$

► ความจุไฟฟ้า

เมื่อมีตัวนำสองตัวโดยตัวหนึ่งมีประจุ $+Q$ และอีกตัว $-Q$ เนื่องจากเมื่อ Q เพิ่มขึ้นจำนวน k เท่า จะได้ว่าทำให้ σ บนทั้งสองประจุเพิ่มขึ้นเป็น k เท่าเช่นกัน (เพราะมีการจัดเรียงแบบเดียวกันที่นั่นที่ทำให้เนื้อตัวนำมี $\mathbf{E} = 0$ ซึ่งจะพิสูจน์ในบทถัดไป) ส่งผลให้ \mathbf{E} เพิ่มขึ้นเป็น k เท่า จึงทำให้ความต่างศักย์ $V = V_+ - V_-$ ก็เพิ่มขึ้นเป็น k เท่าด้วย จึงสรุปได้ว่า $Q \propto V$ ดังนั้นเราสามารถนิยามค่าคงที่การแปรผันนี้ว่าความจุไฟฟ้า (capacitance: C) ดังนี้

นิยามความจุไฟฟ้า.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (1.37)$$

โดย C นี้มีหน่วย SI คือ F (farad)

ส่วนความจุไฟฟ้าของตัวนำตัวเดียว (self-capacitance) คือให้จินตนาการว่ามีตัวนำเปลือกทรงกลมที่มีรัศมีใหญ่
มาก ๆ หรือก็คือให้ใช้ V เป็น V ของตัวนำโดยมีจุดอ้างอิงเป็น ∞

สุดท้าย งานในการชาร์จตัวเก็บประจุหาได้โดยรวมงานในการย้ายประจุ dq จากฝั่งลบมาฝั่งบวก:

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

ดังนั้นงานในการชาร์จประจุจาก 0 มาเป็น Q (หรือก็คือพลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ) เท่ากับ

พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุ.

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (1.38)$$

บทที่ 2 | ศักย์ไฟฟ้า

► 2.1. สมการ Laplace

► สมการ Laplace ในสามมิติ

ในการแก้หาสนามไฟฟ้า ถ้าไม่มีความสมมาตรพอที่จะใช้กฎของ Gauss (1.8) อาจจะง่ายกว่าที่จะหาศักย์ไฟฟ้าก่อน โดยเรามักสนใจศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่ไม่ได้อยู่ในเนื้อประจุ ดังนั้นสมการ Laplace (1.15) จึงเป็นสมการที่สำคัญ โดยมีสมบัติของผลเฉลยของมัน (ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันฮาร์มอนิก) ที่ควรรู้คือ

สมบัติของผลเฉลยของสมการ Laplace ในสามมิติ. ถ้า V เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace แล้ว

1. V มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของ V รอบ ๆ หรือก็คือ สำหรับทุก \mathbf{r} และพื้นผิวทรงกลม S รัศมี R ที่มีจุดศูนย์กลางที่ \mathbf{r} จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V da \quad (2.1)$$

2. V ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ นั่นคือค่าสุดขีดทั้งหมดของ V ในปริมาตร V จะอยู่บน ∂V เท่านั้น

หมายเหตุ: ทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับสมการ Laplace มักจะใช้ได้เมื่อปริมาตร V ที่สนใจนั้นมี $\rho = 0$ เท่านั้น ดังนั้นต้องเลือกปริมาตรดี ๆ

พิสูจน์. ให้จุดประจุ q อยู่ที่ $(0, 0, z)$ พิจารณาค่าเฉลี่ยของ V บนทรงกลมที่อยู่จุดกำเนิดที่มีรัศมี R (ให้ θ เป็นมุมที่ \mathbf{r} ทำกับแกน $+z$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V da &= \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} da \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}} R^2 \sin \theta d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta}} R^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{zR} \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{zR} ((z+R) - (z-R)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z} \\
 &= V(0)
 \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นไปตามต้องการสำหรับจุดประจุ ดังนั้นจึงเป็นจริงสำหรับสนามใด ๆ ก็ตาม

ส่วนข้อ 2. ได้มาจากข้อ 1. โดยตรง เพราะถ้าค่าใด ๆ ของ V เกิดจากค่าเฉลี่ยของจุดรอบ ๆ ค่า V ค่านั้นไม่มีทางเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ □

► Uniqueness ของผลเฉลยของสมการ Laplace

ทฤษฎีบท Uniqueness ที่หนึ่ง. สมการ Laplace จะมีผลเฉลยเดียวบนปริมาตร V ถ้ารู้ค่า V ทั้งหมดบน ∂V

พิสูจน์. ให้ V_1 และ V_2 เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace บนปริมาตร V ที่มีค่าตรงกันบน ∂V ดังนั้น

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

เป็นผลเฉลยของสมการ Laplace ที่มีค่าที่ ∂V เท่ากับ 0

แต่เนื่องจากค่าสุดขีดของสมการ Laplace จะต้องอยู่บน ∂V ดังนั้น $V_3 = 0$ ทุกที่ในปริมาตร หรือก็คือ

$$V_1 = V_2$$

ตามต้องการ □

และไม่ยากที่จะขยายทฤษฎีบทนี้กับสมการ Poisson โดยใช้วิธีพิสูจน์คล้าย ๆ กับด้านบนจะได้ว่า:

บทตั้ง. บนปริมาตร V ถ้ารู้ ρ ภายในปริมาตรและรู้ค่า V ทั้งหมดบน ∂V แล้วจะได้ว่ามีสนาม V ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเพียงสนามเดียว

ทฤษฎีบท Uniqueness ที่สอง. บนปริมาตร V ที่มีขอบเขตอยู่บนผิวของตัวนำ (อาจมีขอบเขตหนึ่งเป็นตัวนำที่ ∞ ได้) ถ้ารู้ค่า ρ ภายในปริมาตรและรู้ค่า Q ของตัวนำทั้งหมดแล้วจะได้ว่ามีสนาม E ในปริมาตรนั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดเพียงสนามเดียว

พิสูจน์. ให้ E_1 และ E_2 เป็นสนามใน V ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข และให้ $E_3 = E_1 - E_2$ จาก (1.9) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot E_3 = 0 \tag{*1}$$

และจาก (1.8) จะได้ว่า

$$\oint E_3 \cdot da = 0 \tag{*2}$$

สำหรับทุก “ผิวย่อย” ของ ∂V ต่อมาพิจารณา

$$\nabla \cdot (V_3 \mathbf{E}_3) = \nabla V_3 \cdot \mathbf{E}_3 + V_3 (\nabla \cdot \mathbf{E}_3) = -E_3^2$$

และโดย divergence theorem จะได้ว่า

$$\oint_{\partial V} V_3 \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot (V_3 \mathbf{E}_3) d\tau = - \int_V E_3^2 d\tau \quad (*3)$$

แต่เนื่องจากทุกผิวย่อยของ ∂V บนแต่ละตัวนำมี V_3 คงที่ จะได้ว่า

$$\oint_{\partial V} V_3 \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} = \sum_S V_S \oint_S \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{a} \stackrel{(*2)}{=} 0$$

นำไปใส่กลับใน (*3) จะได้ว่า $\int_V E_3^2 d\tau = 0$ ดังนั้น $\mathbf{E}_3 = \mathbf{0}$ หรือก็คือ

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$$

ตามต้องการ □

► 2.2. การจำลองภาพ

► การสร้างระบบใหม่เพื่อแก้หาสนาม

ในบางครั้งการหาคักย์ไฟฟ้าตรง ๆ อาจจะยาก แต่ถ้าหากระบบใหม่ที่มีค่า V ที่บริเวณขอบเขตและ ρ ตรงกับค่าบนระบบที่เราสนใจ จากทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง จะได้ว่าศักย์ไฟฟ้าในบริเวณที่สนใจของทั้งสองระบบจะเท่ากันพอดี ยกตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง. ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีแผ่นตัวนำที่ต่อสายดินวางอยู่ทั่วทั้งระนาบ xy และมีจุดประจุ q วางอยู่บนจุด $(0, 0, d)$ จงหาคักย์ไฟฟ้าในบริเวณด้านบนบนแผ่นตัวนำ

วิธีทำ. พิจารณาอีกระบบที่มีจุดประจุ q ที่ $(0, 0, d)$ และ $-q$ ที่ $(0, 0, -d)$ สังเกตว่าระบบนี้มีสภาวะขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าในปริมาตรเหนือระนาบ xy ตรงกันกับระบบในโจทย์เลย ($V = 0$ บนระนาบ xy , $V = 0$ ที่บริเวณไกลมาก ๆ) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท uniqueness ที่หนึ่ง ทั้งสองระบบนี้จะต้องมีสนามศักย์ไฟฟ้าตรงกันบนปริมาตรเหนือระนาบ xy ดังนั้นจึงได้ว่า

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left((x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{-1/2} \right) & \text{เมื่อ } z \geq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } z < 0 \end{cases}$$

($V(x, y, z) = 0$ เมื่อ $z < 0$ เพราะด้านล่างเหมือนกับระบบที่ไม่มีประจุที่ใดเลย) □

หมายเหตุ: ควรระวังว่าระบบที่สร้างขึ้นมาเปรียบเทียบกับนี้จะต้องมีการกระจายตัวของประจุในบริเวณที่สนใจเหมือนกับระบบตั้งต้นเท่านั้นจึงจะใช้ได้ และไม่ได้แปลว่าทุกอย่างของทั้งสองระบบจะเหมือนกัน เช่น ถ้าลองคำนวณดูแล้วพลังงานของระบบโจทย์จะเป็นครึ่งหนึ่งของระบบที่สร้างขึ้นใหม่ (มาจากสนามอีกครึ่งที่หายไป)

► 2.3. การแยกตัวแปร

► การแยกตัวแปรบนพิกัดคาร์ทีเซียน

เริ่มจากการ “เดา” ว่า

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

ดังนั้นจากสมการ Laplace จะได้ว่า

$$\begin{aligned} YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \\ \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจากแต่ละพจน์เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวโดยต้องรวมกันเท่ากับ 0 ทุก (x, y, z) ในปริมาตรที่สนใจ ดังนั้น

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = C_x, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = C_y, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = C_z$$

จากนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตในโจทย์เพื่อดูว่า C ในแต่ละสมการควรเป็นค่าบวกหรือลบ และแก้สมการเชิงอนุพันธ์ออกมาโดยจะมีคำตอบดังนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดคาร์ทีเซียน. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = CT \tag{2.2}$$

มีคำตอบคือ

$$\begin{cases} Ae^{kt} + Be^{-kt} & \text{ถ้า } C = k^2 > 0 \\ At + B & \text{ถ้า } C = 0 \\ A \sin kt + B \cos kt & \text{ถ้า } C = -k^2 < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่

จากนั้นแก้หาค่าคงที่ให้ได้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้เซตของผลเฉลยมาเซตหนึ่งที่อาจไม่มีผลเฉลยใดเลยสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตของโจทย์ เนื่องจากสมการ Laplace เป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นเราอาจหาวิธีการนำผลเฉลยที่ได้จากการแยกตัวแปรนี้มาบวกกันให้ได้คำตอบที่ตรงกับค่าขอบเขตได้ ซึ่งผลเฉลยเหล่านี้ในกรณีนี้จะอยู่ในรูป \sin จึงสามารถใช้การวิเคราะห์ Fourier เพื่อนำผลเฉลยมาบวกกันให้ได้ค่าที่ตรงกับค่าขอบเขต โดยเราจะหาสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในอนุกรม Fourier ได้โดยใช้ทริคดังต่อไปนี้

อินทิกรัลสำคัญในการวิเคราะห์ Fourier.

$$\int_0^\pi \sin(nt) \sin(n't) dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \quad (2.4)$$

หรือแทนตัวแปร $t \mapsto (\pi/a)t$ ได้เป็น

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi t}{a}\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n' \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{ถ้า } n' = n \end{cases} \quad (2.5)$$

ดังนั้นถ้าต้องการหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ n ที่ทำให้อนุกรม Fourier เท่ากับฟังก์ชัน $V(x)$ ฝั่งซ้าย:

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

สามารถคูณ $\sin(n\pi x/a)$ เข้าไปทั้งสองฝั่งแล้วอินทิเกรตโดยใช้ (2.5) จะได้

$$C_n = \int_0^a V(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (2.6)$$

เหตุผลที่เราสามารถทำแบบนี้กับเซตของฟังก์ชัน \sin เหล่านั้นได้เป็นเพราะ

1. เซตของฟังก์ชันนี้เป็นเซตที่สมบูรณ์ (complete) หมายความว่า ฟังก์ชันใด ๆ สามารถถูกเขียนได้ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันในเซต
2. เซตของฟังก์ชันนี้ (ให้เป็น $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$) เป็นเซตที่ตั้งฉากกัน (orthogonal) หมายความว่า

$$\int f_n(t) f_{n'}(t) dt = 0$$

สำหรับทุก $n' \neq n$

► การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกลม

ในส่วนนี้จะพิจารณาแค่ระบบที่มีความสมมาตรแบบ azimuth (สมมาตรรอบแกน z) ดังนั้นให้

$$V(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกลม) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Theta \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) &= 0 \end{aligned}$$

เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน แต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = C_r, \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = C_\theta$$

เมื่อให้ $C_r = l(l+1)$ และ $C_\theta = -l(l+1)$ จะแก้สมการได้คำตอบดังนี้:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 1. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R \quad (2.7)$$

มีคำตอบคือ

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad (2.8)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

แต่อีกสมการหนึ่งจะยากหน่อย:

สมการเชิงอนุพันธ์ของสมการ Laplace ในพิกัดทรงกลม 2. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin \theta \Theta \quad (2.9)$$

มีคำตอบคือ

$$\Theta(\theta) = A \cdot P_l(\cos \theta) \quad (2.10)$$

เมื่อ P_l คือพหุนาม Legendre ดีกรี l และ A คือค่าคงที่

หมายเหตุ: คำตอบในด้านบนเป็นเพียงส่วนเดียวจากคำตอบทั้งหมดเท่านั้น แต่ที่ไม่พิจารณาส่วนของค่าคงที่อีกตัว เพราะส่วนนั้นจะลู่ออกเมื่อค่า θ เท่ากับ 0 และ π (ในกรณีที่บนแกน z ไม่นำมาคิดอาจต้องพิจารณาคำตอบอื่นนี้)

โดยพหุนาม Legendre หาได้ดังสูตรต่อไปนี้

สูตรของ Rodrigues.

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.11)$$

ดังนั้นในการใช้สูตรนี้จึงจะสมมติว่า l เป็นจำนวนเต็มไม่ลบและแต่ละพหุนามจะมีแค่พจน์กำลังคู่หรือคี่เท่านั้น โดยเมื่อแทนสูตร Rodrigues เข้าไปจะได้พหุนาม Legendre ที่มีดีกรีตั้งแต่ 0 ถึง 5 คือ:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

จากนั้นเมื่อแก้ค่าคงที่ออกมา มักจะเหลือเซตของผลเฉลยที่เป็นพหุนาม Legendre โดยเซตของพหุนาม Legendre นี้ เช่นเดียวกับ \sin เป็นเซตของฟังก์ชันที่สมบูรณ์และตั้งฉากกันบน $(-1, 1)$ โดย

สมบัติการตั้งฉากกันของพหุนาม Legendre.

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \quad (2.12)$$

หรือเมื่อแทนค่า $x = \cos \theta$ จะได้

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{ถ้า } l' = l \end{cases} \quad (2.13)$$

ซึ่งสามารถใช้ในการแก้หาสัมประสิทธิ์ของคำตอบสุดท้ายที่เป็นการนำคำตอบแบบแยกตัวแปรมาบวกกันได้

► การแยกตัวแปรบนพิกัดทรงกระบอก

จะพิจารณาระบบที่สมมาตรแบบทรงกระบอก (สมมาตรในแนวแกน z) ดังนั้นให้

$$V(s, \phi, z) = S(s) \Phi(\phi)$$

จากสมการ Laplace (ในระบบพิกัดทรงกระบอก) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{S} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) + \frac{S}{s^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= 0 \\ \frac{s}{S} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\frac{s}{S} \frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) = C_s, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = C_\phi$$

โดยถ้าให้ $C_s = k^2 = -C_\phi$ (เพราะถ้า C_ϕ ไม่เป็นลบจะได้คำตอบในรูป exponential ทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันคาบตามที่ต้องการ) จะได้คำตอบของ Φ เป็น $\Phi(\phi) = A \sin k\phi + B \cos k\phi$ เช่นเดียวกับในพิกัดคาร์ทีเซียน และ

สมการเชิงอนุพันธ์ในพิกัดทรงกระบอก. สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d}{ds} \left(s \frac{dS}{ds} \right) = \frac{k^2}{s} S \quad (2.14)$$

มีคำตอบคือ

$$S(s) = As^k + Bs^{-k} \quad (2.15)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

แต่เมื่อ $k = 0$ จะได้คำตอบเดียวคือค่าคงที่ ซึ่งไม่ตรงกับอันดับของสมการ (เมื่อนำมารวมกันตอนสุดท้ายอาจทำให้ได้คำตอบไม่ครบได้ แต่กรณีของ Φ เหตุผลที่ไม่นำ $A\phi + B$ ที่เป็นผลเฉลยในกรณี $k = 0$ มาใช้เพราะว่าเห็นชัดว่า A ต้องเป็น 0 ซึ่งรวมอยู่ในกรณี $k = 0$ ของ $A \sin k\phi + B \cos k\phi$ อยู่แล้ว) จึงต้องคิดแยกกรณี:

กรณี $k = 0$. สมการ (2.14) ถ้า $k = 0$ จะได้คำตอบคือ

$$S(s) = A \log s + B \quad (2.16)$$

เมื่อ A และ B คือค่าคงที่

โดยในการหาสัมประสิทธิ์ของคำตอบต่อไปให้ใช้การวิเคราะห์ Fourier แบบเดียวกับพิกัดคาร์ทีเซียน

► 2.4. การกระจาย Multipole

► การประมาณศักย์ไฟฟ้าระยะไกล

พิจารณา *electric dipole* ที่ประกอบด้วยจุดประจุ $+q$ และ $-q$ ที่ห่างกัน d โดยสมมติให้ dipole นี้ตั้งในแกน z โดยมีประจุบวกอยู่ในทิศ $+z$ และจุดศูนย์กลางของ dipole อยู่ที่จุดกำเนิด และให้ \mathbf{r}_+ , \mathbf{r}_- เป็นเวกเตอร์จากขั้วบวกและลบมายัง \mathbf{r} ตามลำดับ จะได้ว่า

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

และจากกฎของ cos จะได้

$$r_{\pm}^2 = r^2 + (d/2)^2 \mp rd \cos \theta = r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2} \right)$$

ดังนั้นเมื่อ $r \gg d$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{r_{\pm}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

ก็จะได้ว่าที่ระยะ r ไกล ๆ จาก dipole:

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} \quad (2.17)$$

และเช่นเดียวกัน quadrupole, octopole, ... จะมีศักย์ที่โตแบบ $1/r^3, 1/r^4, \dots$ ตามลำดับ ที่ระยะไกล ๆ

ดังนั้นเราจึงอาจหาวิธีเขียนศักย์ของการกระจายตัวของประจุแบบใด ๆ ให้อยู่ในรูปอนุกรมของพจน์ multipole ($1/r, 1/r^2, 1/r^3, \dots$) เพื่อที่จะประมาณค่าศักย์ไกล ๆ ด้วยพจน์ monopole และ dipole ได้:

พิจารณการให้ \mathbf{r} และ α เป็นมุมและระยะระหว่าง \mathbf{r} และ \mathbf{r}' ตามลำดับ จะได้

$$r^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha = r^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha \right)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \alpha \right) \right)^{-1/2} \quad (2.18)$$

จากนั้นใช้ทฤษฎีบททวินามกับ (2.18) และ (2.11) จะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) \quad (2.19)$$

นำไปแทนใน (1.17) ก็จะได้ว่า

การกระจาย Multipole.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.20)$$

► พจน์ Monopole และ Dipole

สำหรับพจน์ monopole ($n = 0$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int P_0(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

ดังนั้น

พจน์ Monopole.

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.21)$$

ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะค่าศักย์ที่ระยะไกล ๆ ก็ควรจะโตคล้ายประจุรวม Q ในระบบ (เรียก Q นี้ว่า *monopole moment*) โดยพจน์ monopole นี้จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิด ต่างจากพจน์อื่น ๆ ที่ขึ้นกับตำแหน่งที่ใช้เป็นจุดกำเนิดในระบบ

ต่อมาพจน์ dipole ($n = 1$) จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' P_1(\cos \alpha) \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r \cos \alpha \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

แต่ว่า $r' \cos \alpha = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$ ดังนั้น

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'$$

อินทิกรัลในด้านขวาไม่ขึ้นกับ \mathbf{r} ดังนั้นเราจะนิยาม *dipole moment* \mathbf{p} รอบจุด ๆ หนึ่งว่า:

นิยาม Electric Dipole Moment.

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (2.22)$$

ก็จะได้ว่าพจน์ dipole คือ:

พจน์ Dipole.

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.23)$$

โดยพจน์ dipole จะไม่ขึ้นกับตำแหน่งของจุดกำเนิดเมื่อประจุรวม $Q = 0$ (พิสูจน์จากการแทน $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$)

► Dipole บริสุทธิ์

จาก (2.17) จะได้ว่า dipole จะเหลือแค่พจน์ dipole ในการกระจาย multipole ถ้าระยะ \mathbf{r} ไกลมาก ๆ หรืออาจมองกลับกันว่าถ้าระยะ d น้อยมาก ๆ ก็เหลือแค่พจน์ dipole เช่นกัน ดังนั้นถ้าเรามองในลิมิต $q \rightarrow \infty$ และ $d \rightarrow 0$ โดยให้ $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ คงที่ตลอด จะได้จุด *dipole บริสุทธิ์* ที่มีสนามศักย์เป็นเพียง

$$V(\mathbf{r}) = V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \alpha}{r^2} \quad (2.24)$$

ถ้ากำหนดว่า \mathbf{p} ชี้ในทิศ $+z$ ก็จะได้

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

ดังนั้นเมื่อใช้ (1.13) จะได้สนามไฟฟ้า:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.25)$$

แสดงว่าสนามไฟฟ้าของ dipole โดแบบ $1/r^3$ (และเช่นเดียวกัน สนามไฟฟ้าของ quadrupole, octopole, ... ก็จะมีโดแบบ $1/r^4, 1/r^5, \dots$ เพราะในการใช้ gradient หาสนามไฟฟ้าจะเพิ่ม $1/r$ ขึ้นมาอีกหนึ่งตัว) แต่สูตรด้านบนยังเป็นสูตรที่ขึ้นกับระบบพิกัดทรงกลม เราสามารถหาสูตรที่ไม่ขึ้นกับระบบพิกัดได้ดังนี้:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{dip}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2p \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + p \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3p \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + p \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} - p \cos \theta \hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3 (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p})\end{aligned}$$

สนามไฟฟ้าของ Dipole บริสุทธิ์.

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (3 (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) \quad (2.26)$$

บทที่ 3 | สนามไฟฟ้าในสสาร

► 3.1. โพลาริเซชัน

► การเหนี่ยวนำ Dipole

เมื่อนำอะตอมที่เป็นกลางไปไว้ในสนามไฟฟ้า E จะทำให้นิวเคลียสเคลื่อนที่ไปในทิศของ E และกลุ่มหมอกอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในทิศตรงข้าม ถ้า E มีค่ามากพอจะทำให้อิเล็กตรอนหลุดจากอะตอมทำให้อะตอมนั้นกลายเป็นไอออน แต่ถ้า E มีค่าไม่มากนักจะทำให้กลุ่มหมอกอิเล็กตรอนและนิวเคลียสเลื่อนกันเล็กน้อยจึงเหนี่ยวนำให้เกิด dipole moment \mathbf{p} ขึ้น (จะเรียกว่าอะตอมนี้โดนโพลาไรซ์) โดยปกติเมื่อ E เล็ก ๆ เราจะประมาณ dipole moment ที่เกิดขึ้นได้ว่าแปรผันตรงกับสนาม:

Dipole เหนี่ยวนำ.

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (3.1)$$

จะเรียก α นี้ว่า สภาพมีขั้วได้ของอะตอม (atomic polarizability)

สำหรับการปล่อยสนาม E นี้ไปบนโมเลกุล การเหนี่ยวนำ dipole จะต่างกันเล็กน้อย เพราะโมเลกุลนี้อาจจะถูกโพลาไรซ์ได้ง่ายไม่เท่ากันในแกนที่ต่างกัน เช่นในตัวอย่างง่าย ๆ อย่าง CO_2 ที่โมเลกุลมีรูปร่างเป็นเส้นตรง เมื่อปล่อยสนามผ่านโมเลกุลในทิศเอียงจะต้องคิด dipole moment แยกเป็นสองพจน์:

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$$

แต่ถ้าเป็นโมเลกุลที่ซับซ้อนกว่านี้จะต้องใช้เทนเซอร์สภาพโพลาไรซ์ได้ (polarizability tensor) α_{ij} ซึ่งเป็นเทนเซอร์สามมิติที่มีแรงก์ 2 โดยมีความสัมพันธ์ระหว่าง \mathbf{E} , \mathbf{p} , และ α_{ij} ดังนี้:

Dipole เหนี่ยวนำในโมเลกุล.

$$p_i = \alpha_{ij} E_j \quad (3.2)$$

หรือก็คือ

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(ถ้าเลือกแกนดี ๆ จะทำให้เหลือแค่พจน์ α_{xx} , α_{yy} , และ α_{zz} ได้)

► การหมุนของโมเลกุลมีขั้ว

พิจารณาโมเลกุลน้ำ (H_2O) รูปร่างของโมเลกุลนี้มีออกซิเจนอยู่ตรงกลางที่เชื่อมอยู่กับไฮโดรเจน 2 อะตอม โดยจะมีมุมบิดไป 105° การที่โมเลกุลน้ำมีลักษณะแบบนี้จะทำให้ฝั่งหนึ่งของโมเลกุลมีประจุบวกและอีกฝั่งหนึ่งมีประจุลบ จึงทำให้โมเลกุลน้ำนี้เป็น dipole อยู่แล้ว (โดยจะเรียกโมเลกุลแบบนี้ว่ามีขั้ว) ถ้าโมเลกุลนี้อยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ \mathbf{E} (หรือเปลี่ยนแปลงไม่มาก) แรงลัพธ์ของโมเลกุลจะเป็น 0 ก็จริง แต่ฝั่งบวกจะเกิดแรงกระทำในทิศเดียวกับ \mathbf{E} ส่วนฝั่งลบจะเกิดแรงในทิศตรงข้าม จึงทำให้เกิดทอร์กบนโมเลกุล ถ้ากำหนดให้ \mathbf{d} เป็นเวกเตอร์จากจุดศูนย์กลางของฝั่งลบไปยังฝั่งบวก จะหาทอร์กได้ดังนี้:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+) + (\mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-) \\ &= \left(\frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E}) \right) + \left(\frac{-\mathbf{d}}{2} \times (-q\mathbf{E}) \right) \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

(ซึ่งในสนามไม่สม่ำเสมอก็ยังใช้ได้อยู่เพราะเนื่องจาก d เล็กมากจะได้ว่า $|\Delta\mathbf{E}| \ll E$ ดังนั้น $\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \approx 2\mathbf{E}$) ดังนั้นจะได้ว่า

ทอร์กของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (3.4)$$

ก็คือเมื่อนำโมเลกุลมีขั้วนี้ไปไว้ในสนามไฟฟ้า โมเลกุลจะหมุนไปเรื่อย ๆ จนกว่า dipole moment จะมีทิศตรงกับสนาม

แต่ถ้าสนามเปลี่ยนแปลงในช่วงเล็ก ๆ จะเกิดแรงลัพธ์ด้วยทำให้โมเลกุลเคลื่อนที่:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \Delta\mathbf{E} \\ &\approx q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E} \end{aligned}$$

เพราะระยะ d เล็กมาก ๆ ดังนั้น

แรงลัพธ์ของ Dipole ในสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (3.5)$$

► เวกเตอร์โพลาริเซชัน

สองหัวข้อด้านต้นเป็นตัวอย่างของการโพลาริเซชันไดอิเล็กทริก โดยทั้งสองกรณีมีสิ่งที่เหมือนกันก็คือ: ทำให้เกิด dipole เล็ก ๆ จำนวนมากขึ้นในทิศเดียวกับสนามไฟฟ้า ซึ่งเราจะนิยามโพลาริเซชัน \mathbf{P} คือ:

นิยามโพลาริเซชัน.

$$\mathbf{P} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \text{dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร} \quad (3.6)$$

จริง ๆ แล้วโพลาริเซชันนี้ซับซ้อนกว่าสองกรณีที่กล่าวมาและวัตถุที่ถูกโพลาริเซชันสามารถทำให้คงสภาพโพลาริเซชันนี้ไว้ได้ด้วย เพราะฉะนั้นจากนี้เราจึงจะเลิกสนใจแหล่งกำเนิดของเวกเตอร์โพลาริเซชันและใช้ตามนิยามไปเลย

► 3.2. สนามไฟฟ้าของวัตถุที่ถูกโพลาริเซชัน

► Bound Charges

พิจารณาปริมาตร \mathcal{V} ที่ถูกโพลาริเซชันให้มีโพลาริเซชัน \mathbf{P} จาก (2.23) จะได้ว่าศักย์ที่ตำแหน่ง \mathbf{r} จาก dipole ในปริมาตรเล็ก ๆ ณ ตำแหน่ง \mathbf{r}' เท่ากับ

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} d\tau' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

ดังนั้น

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau'$$

เมื่อ ∇' คือ gradient เทียบพิกัด \mathbf{r}' ต่อมาใช้ integration by parts จะได้:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\mathcal{V}} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau' - \int_{\mathcal{V}} (\nabla' \cdot \mathbf{P}) \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P}}{r} \cdot d\mathbf{a}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} d\tau' \end{aligned}$$

ซึ่งหน้าตาคล้าย ๆ ศักย์ของประจุบนปริมาตรรวมกับประจุในปริมาตร ดังนั้นเราจะนิยาม

นิยาม Bound Charges. Bound surface charge σ_b คือ:

$$\sigma_b \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.7)$$

และ bound volume charge ρ_b คือ:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.8)$$

ก็จะได้ว่า:

ศักย์ของวัตถุที่ถูกโพลารไรซ์.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\sigma_b}{r} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{r} d\tau' \quad (3.9)$$

โดยจาก (1.13) เราจึงหาสนามได้เช่นกัน

หมายเหตุ: ไดโพลีกริฟจริง ๆ ตามในส่วนที่แล้วไม่ได้เป็นเนื้อ dipole บริสุทธิ์ที่ต่อเนื่อง โดยสำหรับสนามและศักย์นอกไดโพลีกริฟสามารถใช้การประมาณนี้ได้โดยไม่มีปัญหาเพราะระยะ r ใหญ่มากเมื่อเทียบกับ d แต่ถ้าเป็นสนามและศักย์ภายในเนื้อตัวนำ ถ้าจะให้การประมาณ dipole แบบต่อเนื่องใช้ได้ จะต้องเป็นศักย์หรือสนามเฉลี่ยในระดับ macroscopic เท่านั้น (เฉลี่ยในปริมาตรที่มีโมเลกุลมาก ๆ แต่ยังคงเล็กเมื่อเทียบกับปริมาตรของไดโพลีกริฟอยู่พอสมควร)

อีกวิธีหนึ่งที่จะมีประโยชน์ในการหาศักย์หรือสนามของวัตถุที่ถูกโพลารไรซ์คือการนำวัตถุ 1 และ 2 ที่มีความหนาแน่นประจุ $+\rho$ และ $-\rho$ มาวางเหลื่อมกันด้วยระยะเล็ก ๆ d แล้วคำนวณศักย์หรือสนามตามปกติ (ถ้าระบบนี้ง่ายพอ เช่น ทรงกลมที่มีโพลารไรเซชันสม่ำเสมอ)

► 3.3. การกระจัดไฟฟ้า

► กฎของ Gauss เมื่อมีไดโพลีกริฟ

เราสามารถแบ่งส่วนที่ทำให้เกิด \mathbf{E} ในกรณีที่มีไดโพลีกริฟออกเป็นสองส่วนคือส่วนที่มาจาก bound charge และส่วนที่ไม่ได้มาจากโพลารไรเซชัน (เรียกว่า free charge) หรือก็คือ

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_b + \rho_f \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) &= -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f \end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าเรานิยาม

นิยามการกระจัดไฟฟ้า. การกระจัดไฟฟ้า (electric displacement: \mathbf{D}) นิยามดังนี้:

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.10)$$

ก็จะได้ว่า

กฎของ Gauss สำหรับระบบที่มีไดโพลีกริฟ.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{และ} \quad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f \text{ enc}} \quad (3.11)$$

เวกเตอร์การกระจายไฟฟ้าที่มีสมบัติคล้าย ๆ \mathbf{E} แต่ต้องระวังเพราะสนาม \mathbf{E} ที่หาได้จากเพียง ρ (ด้วยกฎของ Gauss) เป็นเพราะว่ายังมีอีกเงื่อนไขที่ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ด้วย แต่ในกรณีของการกระจายไฟฟ้า

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \epsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P} \quad (3.12)$$

ไม่จำเป็นต้องเป็น 0 ดังนั้น \mathbf{D} จึงไม่ได้กำหนดโดยเพียง ρ_f

► รอยต่อแผ่นประจุสำหรับการกระจายไฟฟ้า

ต่อมาเช่นเดียวกับ \mathbf{E} และ V เรามาดูสมบัติของ \mathbf{D} ในบริเวณแผ่นประจุบาง ๆ ที่มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ σ_f :

1. โดย (3.11) จะได้ว่า

$$D_{\text{above}}^{\perp} - D_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_f \quad (3.13)$$

2. โดย (3.12) จะได้ว่า

$$D_{\text{above}}^{\parallel} - D_{\text{below}}^{\parallel} = P_{\text{above}}^{\parallel} - P_{\text{below}}^{\parallel} \quad (3.14)$$

► 3.4. ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

► สภาพอ่อนไหว, สภาพยอม, ค่าคงที่ไดอิเล็กทริก

เราสามารถประมาณเวกเตอร์โพลาไรเซชันในไดอิเล็กทริกได้คล้ายกับ (3.1) ดังนี้:

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (3.15)$$

หมายเหตุ: \mathbf{E} ในที่นี้คือสนามทั้งหมด ดังนั้นสมการนี้ไม่ได้ใช้อย่างที่คิด เพราะการโพลาไรซ์ด้วยสนามภายนอก \mathbf{E}^{ext} จะทำให้เกิดสนามมาเพิ่มจาก \mathbf{P} ที่เกิดขึ้นอีกที วนไปวนมาเรื่อย ๆ วิธีที่ง่ายที่สุดในการคำนวณก็คือควรพิจารณา \mathbf{D} ก่อนและใช้กฎของ Gauss

โดยเราจะเรียกไดอิเล็กทริกที่เป็นไปตามสมการด้านบนว่าไดอิเล็กทริกเชิงเส้น และเราจะเรียก χ_e ว่าสภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า (electric susceptibility) ของไดอิเล็กทริกนั้น ๆ ต่อมาพิจารณา

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}$$

จึงได้ว่า $\mathbf{D} \propto \mathbf{E}$ ด้วย เราจึงนิยามสภาพยอมทางไฟฟ้า (electric permittivity) ว่า

นิยามสภาพยอมทางไฟฟ้า.

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (3.16)$$

ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.17)$$

และนิยามสภาพยอมสัมพัทธ์หรือค่าคงที่ไดอิเล็กทริกว่า

นิยามค่าคงที่ไดอิเล็กทริก.

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (3.18)$$

พิจารณาภายในบริเวณที่มี χ_e คงที่ จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{และ} \quad \nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

โดย Helmholtz's theorem จึงได้ว่า

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{vac}} \quad (3.19)$$

เมื่อ \mathbf{E}_{vac} คือสนามไฟฟ้าเมื่อระบบอยู่ในสุญญากาศ ก็จะได้

สภาพยอมทางไฟฟ้าในไดอิเล็กทริกเชิงเส้น.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_{\text{vac}} \quad (3.20)$$

ซึ่งเปรียบเสมือนการเปลี่ยนค่าจาก ϵ_0 เป็น ϵ ในสมการต่าง ๆ คล้าย ๆ เป็นการ “ต้าน” สนาม \mathbf{E} ให้มีค่าลดลง

ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นด้านบนไม่ได้เป็นไดอิเล็กทริกเชิงเส้นแบบ “ทั่วไป” จริง ๆ แต่จะเรียกว่าเป็น *isotropic linear dielectric* แต่ถ้าไม่ isotropic ไดอิเล็กทริกอาจถูกโพลาริซ์ได้ยากง่ายไม่เท่ากันในแต่ละทิศจึงทำให้สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้าจะถูกอธิบายด้วยเทนเซอร์:

เทนเซอร์สภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้า.

$$P_i = \epsilon_0 \chi_{e,ij} E_j \quad (3.21)$$

หรือก็คือ

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{e,xx} E_x + \chi_{e,xy} E_y + \chi_{e,xz} E_z) \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{e,yx} E_x + \chi_{e,yy} E_y + \chi_{e,yz} E_z) \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{e,zx} E_x + \chi_{e,zy} E_y + \chi_{e,zz} E_z) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

► ปัญหาสภาวะขอบเขตเกี่ยวกับไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เนื่องจาก

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = (\text{const.}) \rho_f$$

ดังนั้นในบริเวณที่ไม่มีประจุอิสระ จะได้ว่า $\rho = \rho_b + \rho_f = 0$ ทำให้สามารถใช้สมการ Laplace แก่หา V ได้โดยวิธีจากบทที่แล้ว โดยมีสภาวะขอบเขตดังนี้ (พิสูจน์โดย (3.11)):

สภาวะขอบเขตของรอยต่อไดอิเล็กทริก. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นของประจุอิสระเชิงพื้นที่ σ_f จะได้ว่า

$$\varepsilon_{\text{above}} E_{\text{above}}^\perp - \varepsilon_{\text{below}} E_{\text{below}}^\perp = \sigma_f \quad (3.23)$$

หรือ

$$\varepsilon_{\text{above}} \frac{\partial V_{\text{above}}}{\partial n} - \varepsilon_{\text{below}} \frac{\partial V_{\text{below}}}{\partial n} = -\sigma_f \quad (3.24)$$

เมื่อ \hat{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นประจุที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน และสำหรับ V จะต่อเนื่องเช่นเคย:

$$V_{\text{above}} = V_{\text{below}} \quad (3.25)$$

ตัวอย่าง. ทรงกลมไดอิเล็กทริกเชิงเส้นรัศมี R ที่มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริก ε_r ถูกวางไว้ที่จุด $(0, 0, 0)$ โดยมีสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ (เมื่อไม่รวมสนามจากไดอิเล็กทริก) E_0 ไหลผ่านในทิศ $+z$ จงหาสนามไฟฟ้าภายในไดอิเล็กทริก

วิธีทำ. เห็นชัดว่าระบบนี้ในพิกัดทรงกลมจะสมมาตรแบบ azimuth ดังนั้นใช้คำตอบของสมการ Laplace จาก (2.8) และ (2.10) ได้ว่าข้างในไดอิเล็กทริก ($r < R$):

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (*1)$$

ข้างนอกไดอิเล็กทริกจะต้องมี $V(r, \theta)$ เมื่อ $r \rightarrow \infty$ เป็น

$$V(r, \theta) \approx -E_0 r \cos \theta$$

ก็จะได้ว่าที่ $r > R$:

$$V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (*2)$$

เนื่องจาก V ต้องต่อเนื่องที่ $r = R$ จาก (*1) และ (*2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 R &= -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} & \text{เมื่อ } l = 1 \\ A_l R^l &= \frac{B_l}{R^{l+1}} & \text{เมื่อ } l \neq 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_l = B_l = 0$ สำหรับทุก $l \neq 1$ ก็จะได้

$$V(r, \theta) = \begin{cases} A_1 r \cos \theta & \text{เมื่อ } r < R \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{(A_1 + E_0)R^3}{r^2} \cos \theta & \text{เมื่อ } r > R \end{cases}$$

ต่อมาใช้ (3.24) จะแก้หา A_1 ได้

$$A_1 = \frac{-3E_0}{2 + \varepsilon_r}$$

ก็จะได้ V เมื่อ $r < R$:

$$V(r, \theta) = -\frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0 r \cos \theta$$

$$V(x, y, z) = -\frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0 z$$

ดังนั้นก็จะได้ $\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \mathbf{E}_0$

□

► พลังงานในระบบที่มีไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

เราสามารถหาพลังงานของระบบไดอิเล็กทริกโดยการ “ประกอบ” ระบบของประจุอิสระ ρ_f ทีละนิด แล้วปล่อยให้ไดอิเล็กทริกเกิดการโพลาไรซ์ก่อนที่จะประกอบต่อไป งานที่ต้องใช้บนประจุ $\Delta\rho_f$ ในการนำมาประกอบจะเท่ากับ

$$\Delta U = \int (\Delta\rho_f) V \, d\tau$$

แต่ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ดังนั้น $\Delta\rho_f = \nabla \cdot (\Delta\mathbf{D})$ นำไปแทนแล้วใช้ integration by parts และ Stokes' theorem จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int (\nabla \cdot (\Delta\mathbf{D})) V \, d\tau \\ &= \int \nabla \cdot (V \Delta\mathbf{D}) \, d\tau + \int \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \\ &= \oint V \Delta\mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} + \int \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \\ &= \int \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \end{aligned}$$

ต่อมาพิจารณา

$$\Delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = \epsilon \Delta(E^2) = 2\epsilon E \Delta E = 2 \Delta\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

ก็จะได้ว่า

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int \Delta(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, d\tau$$

หรือก็คือ

พลังงานในสนามไฟฟ้าที่มีไดอิเล็กทริก.

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, d\tau \quad (3.26)$$

หมายเหตุ: สังเกตว่า (3.26) \geq (1.27) เหตุผลเป็นเพราะว่า (1.27) จะเป็นพลังงานเนื่องจากสนามไฟฟ้าโดยตรง ไม่รวมพลังงานในการ “แยก” ขั้วของไดอิเล็กทริกในการโพลาไรซ์ (อาจมองเหมือนเป็นสปริงที่เชื่อมขั้วทั้งสองเข้าด้วยกัน) ดังนั้นก็จะได้อีกว่าพลังงานภายในของ “สปริง” นี้เท่ากับ $\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, d\tau - \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau$

► แรงบนไดอิเล็กทริกเชิงเส้น

พิจารณาไดอิเล็กทริกที่ขึ้นในตัวเก็บประจุแผ่นตัวนำคู่ขนานกว้าง w ยาว l หนา d (ให้แนวยาวขนานกับแกน x และตัวเก็บประจุนี้ชิดกับระนาบ yz) โดยที่ไดอิเล็กทริกเคลื่อนกับตัวเก็บประจุไประยะ $+x$ ถัดไดอิเล็กทริกออกมาอีก dx จะได้ว่างานที่กระทำ:

$$dU = dW = F_{\text{ext}} dx$$

ดังนั้นแรงที่สนามกระทำเท่ากับ

$$F = -F_{\text{ext}} = -\frac{dU}{dx} \quad (\diamond 1)$$

พิจารณาความจุไฟฟ้ารวมของตัวเก็บประจุที่มีระยะเคลื่อน x ใด ๆ:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{wx}{d}\epsilon_0 + \frac{w(l-x)}{d}\epsilon_r\epsilon_0 = \frac{\epsilon_0 w}{d}(\epsilon_r l - \chi_e x) \quad (\diamond 2)$$

จะได้พลังงานสะสมในตัวเก็บประจุที่มีระยะเคลื่อน x ใด ๆ เท่ากับ

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ดังนั้น

$$dU = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC = -\frac{1}{2} V^2 dC \stackrel{(\diamond 2)}{=} \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 \chi_e w}{d} dx$$

นำกลับไปแทนใน $(\diamond 1)$ จะได้ว่า

แรงบนไดอิเล็กทริกระหว่างแผ่นตัวนำ.

$$F = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2 \quad (3.27)$$

หมายเหตุ: เมื่อ $x = 0$ ไม่ได้ทำให้ $F = 0$ เพราะการใช้ U เป็นค่านั้นเป็นการประมาณสำหรับ x ที่มีค่ามาก ๆ

บทที่ 4 | แม่เหล็กสถิต

► 4.1. กฎแรง Lorentz

► แรงแม่เหล็ก

แรง Lorentz. ประจุ Q ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \mathbf{v} ในสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} จะถูกแรงแม่เหล็กกระทำดังนี้:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1)$$

โดยถ้ามีทั้งสนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \quad (4.2)$$

สนามแม่เหล็ก \mathbf{B} นี้มีหน่วยเป็น T (tesla) โดยการเคลื่อนที่ใน \mathbf{B} สม่าเสมอที่น่าสนใจมีดังนี้:

1. ถ้าประจุ Q เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \mathbf{v} ในสนาม \mathbf{B} เพียงอย่างเดียว ส่วนของ \mathbf{v}_\perp จะทำให้เกิดการเคลื่อนที่วงกลมตามสมการ

$$QBR = mv = p$$

เมื่อ p คือโมเมนตัม และได้

$$\omega = \frac{QB}{R}$$

จะเรียกว่าความถี่ cyclotron

2. ถ้าประจุ Q เริ่มจากหยุดนิ่งในสนาม \mathbf{E} และ \mathbf{B} ที่ตั้งฉากกัน ถ้าแก้สมการมาจะได้ว่าประจุจะเคลื่อนที่เป็นรูป cycloid ที่มีรัศมี

$$R = \frac{E}{\omega B}$$

เมื่อ ω คือความถี่ cyclotron และศูนย์กลางวงกลมที่ทำให้เกิดรูป cycloid จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$u = \omega R = \frac{E}{B}$$

ต่อมาพิจารณาจากแรงแม่เหล็ก:

$$dW_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{\ell} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

ดังนั้นได้ว่า

งานของแรงแม่เหล็ก. แรงแม่เหล็กไม่ทำงาน:

$$W_{\text{mag}} = 0 \quad (4.3)$$

► กระแสไฟฟ้า

นิยามกระแสไฟฟ้า. กระแสไฟฟ้า (I) ของจุดหนึ่งในสายไฟคือปริมาณประจุที่เคลื่อนที่ผ่านจุด ๆ นั้นต่อหน่วยเวลา หรือก็คือ

$$I = \lambda v \quad (4.4)$$

โดยกระแสไฟฟ้านี้มีหน่วย SI คือ A (ampere หรือ amp)

พิจารณา

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq$$

ดังนั้นในสายไฟจะได้

แรงแม่เหล็กบนสายไฟ.

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) d\mathbf{\ell} \quad (4.5)$$

หรือก็คือ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (I d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B}) \quad (4.6)$$

ต่อมา หากประจุที่เคลื่อนที่เป็นประจุจากความหนาแน่นในสองหรือสามมิติ เราจะนิยาม:

นิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า. สำหรับประจุที่ไหลบนผิวในสองมิติ ถ้าในแถบเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $d\mathbf{I}$ กว้าง $d\mathbf{\ell}_\perp$ เราจะนิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงพื้นที่ (\mathbf{K}) ว่า

$$\mathbf{K} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{d\mathbf{\ell}_\perp} = \sigma \mathbf{v} \quad (4.7)$$

สำหรับประจุที่ไหลในปริมาตรสามมิติ ถ้าในท่อเล็ก ๆ ที่ขนานกับทิศในการไหลของกระแส $d\mathbf{I}$ มีพื้นที่ $d\mathbf{a}_\perp$ เรา จะนิยามความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงปริมาตร (\mathbf{J}) ว่า

$$\mathbf{J} \equiv \frac{d\mathbf{I}}{d\mathbf{a}_\perp} = \rho \mathbf{v} \quad (4.8)$$

โดยเราจึงสามารถหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านผิว ๆ หนึ่งหรือเส้น ๆ หนึ่งได้จาก

$$I = \int \mathbf{K} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad \text{และ} \quad I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.9)$$

และเช่นเดียวกับ (4.5) จะได้ว่า

แรงแม่เหล็กบนกระแสในสองและสามมิติ.

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) da \quad (4.10)$$

และ

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau \quad (4.11)$$

จากสมการ (4.8) จะได้ว่า

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.12)$$

และเนื่องจากประจุที่ไหลออก (I) จะต้องเท่ากับประจุที่หายไป ดังนั้น

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{J}) d\tau = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I = -\frac{dQ_{\text{enc}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau$$

ก็จะได้ว่า

สมการความต่อเนื่อง.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.13)$$

► 4.2. กฎของ Biot-Savart

► ระบบกระแสคงที่

ในบทก่อน ๆ เราได้หาสนามไฟฟ้าในระบบที่เป็นประจุหยุดนิ่งไปแล้วหรือก็คือเป็นระบบไฟฟ้าสถิต (*electrostatics*) ต่อมาในกรณีสนามแม่เหล็ก ในการที่ระบบจะเป็นแม่เหล็กสถิต (*magnetostatics*) ระบบจะต้องมีกระแสคงเดิมตลอดเวลา หรือก็คือ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad (4.14)$$

เมื่อนำไปแทนใน (4.13) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.15)$$

โดยในระบบกระแสคงที่นี้เราจะหาสนามแม่เหล็กได้จาก:

กฎของ Biot-Savart. สนามแม่เหล็ก \mathbf{B} ที่ตำแหน่ง \mathbf{r} ในระบบที่เป็นแม่เหล็กสถิต หาได้จาก

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\ell' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\ell' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.16)$$

เมื่อ $\mu_0 \approx 1.257 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2} \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ คือสภาพซึมผ่านได้ของสุญญากาศ (permeability of free space) โดยในกรณีความหนาแน่นกระแส:

กฎของ Biot-Savart ของกระแสในสองและสามมิติ.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} da' \quad \text{และ} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (4.17)$$

► 4.3. Divergence และ Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

► Divergence ของสนามแม่เหล็กสถิต

พิจารณา (4.17) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) \right) d\tau' \end{aligned}$$

เนื่องจาก \mathbf{J} อยู่ในพิกัด (x', y', z') จึงได้ว่า $\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{0}$ และจาก

$$\nabla \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \mathbf{0}$$

ดังนั้น

กฎของ Gauss สำหรับสนามแม่เหล็ก.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.18)$$

► Curl ของสนามแม่เหล็กสถิต

เช่นเดิม จาก (4.17) จะได้ว่า

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \left(\mathbf{J} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\left(\frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} \cdot \nabla \right) \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} + \mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} \right) - \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \right) d\tau'$$

เนื่องจาก \mathbf{J} ขึ้นกับพิกัด (x', y', z') :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} \right) - (\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} \right) d\tau' \quad (\dagger)$$

พิจารณาพจน์ด้านหลัง เนื่องจาก $\mathbf{\hat{r}}/r^2 = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ดังนั้น $\nabla = -\nabla'$ จะได้ว่า

$$\int -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} d\tau' = \int (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} d\tau'$$

คิดแยกแกน โดยให้ V คือปริมาตรที่อินทิเกรต (ปริมาตรที่ใหญ่มาก ๆ):

$$\begin{aligned} \left(\int_V -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} d\tau' \right)_x &= \int_V (\mathbf{J} \cdot \nabla') \frac{x - x'}{r^2} d\tau' \\ &= \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{x - x'}{r^2} \mathbf{J} \right) d\tau' - \int_V (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \frac{x - x'}{r^2} d\tau' \\ &= \oint_{\partial V} \left(\frac{x - x'}{r^2} \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

เนื่องจาก V ใหญ่มาก ดังนั้นจะได้ว่าไม่มีกระแสไหลออกจากระบบเลย ดังนั้น

$$\int_V -(\mathbf{J} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} d\tau' = 0$$

นำไปแทนใน (†) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{\hat{r}}}{r^2} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J} (4\pi \delta^3(\mathbf{r})) d\tau' \end{aligned}$$

ดังนั้น

กฎของ Ampère (Differential Form).

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.19)$$

ต่อมาอินทิเกรตบนผิวใด ๆ:

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

โดย Stokes' Theorem จะได้ว่า

กฎของ Ampère (Integral Form).

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (4.20)$$

► 4.4. เวกเตอร์ศักย์แม่เหล็ก

► นิยามศักย์แม่เหล็ก

ในบทสนามไฟฟ้า เนื่องจาก $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ทำให้เราสามารถนิยามสนามสเกลาร์ V (ศักย์ไฟฟ้า) ซึ่ง

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

ในกรณีของสนามแม่เหล็ก เรามี (4.18) ที่กล่าวว่า $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ จึงทำให้เราสามารถนิยามศักย์แม่เหล็กซึ่งเป็นสนามเวกเตอร์ได้ว่า

นิยามศักย์แม่เหล็ก.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.21)$$

พิจารณา (4.19):

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

สังเกตว่าถ้า \mathbf{A}_0 สอดคล้องกับ (4.21) แล้ว $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \lambda$ ก็สอดคล้องด้วย พิจารณา $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda$$

ดังนั้นเราจึงสามารถเลือกสนามศักย์แม่เหล็กให้มี $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ได้เสมอ (เพราะเรารู้ว่าสมการ Poisson $\nabla^2 \lambda = -f(x) = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0$ มีคำตอบ) ก็จะได้ว่า

สมการ Poisson ของศักย์แม่เหล็ก.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.22)$$

ในบทไฟฟ้าสถิตเรามีคำตอบของสมการ $\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$ อยู่แล้ว (เมื่อ $\rho \rightarrow 0$ เมื่อ $\mathbf{r} \rightarrow \infty$) คือ

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} d\tau'$$

จึงดัดแปลงให้เป็นคำตอบของ (4.22) ได้ว่า

ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแส.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad (4.23)$$

หรือสำหรับหนึ่งและสองมิติ:

ศักย์แม่เหล็กจากสนามกระแสในหนึ่งและสองมิติ.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{r} da' \quad \text{และ} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r})}{r} d\ell' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{r} d\ell' \quad (4.24)$$

โดยสมการศักย์นี้ใช้ได้เมื่อ $\mathbf{J} \rightarrow 0$ เมื่อ $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ แต่ถ้าไม่ใช่ อาจต้องหาศักย์โดยใช้วิธีอื่น วิธีหนึ่งคือสังเกตว่า

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

โดยเราจะเรียกพจน์ฝั่งขวาว่าฟลักซ์แม่เหล็ก (Φ_B):

นิยามฟลักซ์แม่เหล็ก. ฟลักซ์ของ \mathbf{B} ที่ผ่านผิว S คือ

$$\Phi_B \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.25)$$

ดังนั้นสมการด้านบนก็จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \Phi_B \quad (4.26)$$

ซึ่งสามารถนำมาใช้หา \mathbf{A} ได้เช่นเดียวกับการใช้ (4.20) ในการหา \mathbf{B} ในระบบที่มีความสมมาตร

► สภาวะขอบเขต

ต่อมาเรามาหาสภาวะขอบเขตของสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} และศักย์แม่เหล็ก \mathbf{A} เช่นเดียวกับในบทไฟฟ้าสถิต โดยพิจารณาที่บริเวณแผ่นที่มีกระแส \mathbf{K} ไหลอยู่:

1. พิจารณาผิว Gaussian ทรงกระบอกที่บางมาก ๆ ดังในตอนหาสภาวะขอบเขตของ \mathbf{E} และใช้ (4.18) จะได้ว่า

$$B_{\text{above}}^\perp - B_{\text{below}}^\perp = 0$$

ดังนั้นส่วนของ \mathbf{B} ที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสจะต่อเนื่อง

2. พิจารณารูป Amperian รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแคบ ๆ ที่มีด้านขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ \mathbf{K} จะได้ว่า

$$B_{\text{above}}^\parallel - B_{\text{below}}^\parallel = \mu_0 K$$

ดังนั้นส่วนของ \mathbf{B} ที่ขนานกับแผ่นกระแสแต่ตั้งฉากกับ \mathbf{K} จะไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดด้วยผลต่าง $\mu_0 K$

3. เนื่องจาก $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ จะได้ว่า A^\perp ต่อเนื่อง และจาก (4.26) ก็จะได้ว่า A^\parallel ก็ต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}}$$

หรือก็คือ \mathbf{A} ต่อเนื่องเมื่อผ่านแนวแผ่นกระแส

4. กำหนดให้ $\Delta \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}$, $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{K}}$, และ $\hat{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$ จากข้อ 1. และ 2. จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) &= \mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} \\ \mu_0 K \hat{\mathbf{p}} &= \nabla \times (\mathbf{A}_{\text{above}} - \mathbf{A}_{\text{below}}) \\ &= \nabla \times \Delta \mathbf{A} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{n}} & \hat{\mathbf{p}} \\ D_k & D_n & D_p \\ \Delta A_k & \Delta A_n & \Delta A_p \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{p}} \left(\frac{\partial}{\partial k} \Delta A_n - \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_k \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_p - \frac{\partial}{\partial p} \Delta A_n \right)\end{aligned}$$

(เนื่องจาก \mathbf{A} ต่อเนื่อง $\partial/\partial k$ และ $\partial/\partial p$ ของข้างบนและข้างล่างจึงเท่ากัน) ดังนั้นก็จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_k = -\mu_0 K \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_p = 0 \quad (\heartsuit 1)$$

ต่อมา จาก

$$0 = \nabla \cdot \Delta \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial k} \Delta A_k + \frac{\partial}{\partial n} \Delta A_n + \frac{\partial}{\partial p} \Delta A_p$$

ก็จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta A_n = 0 \quad (\heartsuit 2)$$

จาก ($\heartsuit 1$) และ ($\heartsuit 2$) ก็จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K}$$

สรุปก็คือ

สภาวะขอบเขตของ \mathbf{B} และ \mathbf{A} เมื่อผ่านแผ่นกระแส. บนแผ่นประจุที่มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ σ จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{above}} = \mathbf{A}_{\text{below}} \quad (4.27)$$

และ

$$\mathbf{B}_{\text{above}} - \mathbf{B}_{\text{below}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (4.28)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับแผ่นกระแสที่ชี้จากด้านล่างไปด้านบน หรือก็จะได้

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{above}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{below}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K} \quad (4.29)$$

► การกระจาย Multipole ของศักย์แม่เหล็ก

พิจารณาการกระจาย multipole ของ \mathbf{A} (อนุกรมกำลังในรูป $1/r$) โดยใช้ (2.19) และ (4.24):

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} d\ell' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \alpha) d\ell'\end{aligned}$$

ก็จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint d\ell' = 0$$

ตามที่คาด (เพราะจาก (4.18) เราสมมติไม่มี magnetic monopole)

ก่อนที่จะไปดูพจน์ dipole เราจะต้องพิสูจน์เอกลักษณ์หนึ่งที่ต้องใช้ก่อน:

Claim.

$$\oint_{\partial S} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\ell = \int_S d\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (4.30)$$

พิสูจน์. พิจารณา Stokes' Theorem บน $\mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{c}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})) \cdot d\mathbf{a}$$

จากนั้นสลับการคูณของสเกลาร์ในฝั่งซ้ายและใช้กฎการคูณในฝั่งขวา จะได้

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\ell &= \int_S (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})(\nabla \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{a} - \int_S (\mathbf{c} \times \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})) \cdot d\mathbf{a} \\ &= - \int_S (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{a} \\ &= - \int_S \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \times d\mathbf{a})\end{aligned}$$

ตัด \mathbf{c} ทั้งสองฝั่ง ก็จะได้

$$\oint_{\partial S} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\ell = \int_S d\mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

ตามต้องการ □

ต่อมารามาพิจารณาพจน์ dipole:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \alpha d\ell' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\ell'\end{aligned}$$

แต่จาก claim (4.30) ก็จะได้ว่า $\oint_{\partial S} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\ell' = \int_S d\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}$ ดังนั้น

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

เราจึงนิยาม *magnetic dipole moment* (\mathbf{m}):

นิยาม Magnetic Dipole Moment.

$$\mathbf{m} \equiv I \int d\mathbf{a} = I\mathbf{a} \quad (4.31)$$

ก็จะได้ว่า

พจน์ Dipole.

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (4.32)$$

โดยสังเกตว่า \mathbf{m} นี้ไม่ขึ้นกับจุดกำเนิด

► Dipole บริสุทธิ์

เช่นเดียวกับ electric dipole บริสุทธิ์ เราสามารถสร้างจุดที่เป็น magnetic dipole บริสุทธิ์ได้ถ้ามองในลิมิต $I \rightarrow \infty$ และ $a \rightarrow 0$ โดยให้ $\mathbf{m} = I\mathbf{a}$ คงที่

สมมติให้ \mathbf{m} ของ dipole บริสุทธิ์นี้ชี้ในทิศ $+z$ จะได้ว่า

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

ดังนั้นจึงได้สนามแม่เหล็กของ dipole บริสุทธิ์:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right)$$

เมื่อคำนวณออกมาจะได้ว่า

สนามแม่เหล็กของ Dipole บริสุทธิ์ในพิกัดทรงกลม.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \left(2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (4.33)$$

ได้เหมือนกับสนามของ electric dipole บริสุทธิ์พอดี เราจึงหาสูตรในรูปทั่วไปที่ไม่ขึ้นกับพิกัดทรงกลมได้ในแบบเดียวกับ (2.26) ก็จะได้ว่า

สนามแม่เหล็กของ Dipole บริสุทธิ์.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(3 (\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m} \right) \quad (4.34)$$

บทที่ 5 | สนามแม่เหล็กในสสาร (TO-DO)

► 5.1. แมกเนไทเซชัน (TO-DO)

► Diamagnet, Paramagnet, Ferromagnet

บทที่ 6 | พลศาสตร์ไฟฟ้า

► 6.1. แรงเคลื่อนไฟฟ้า

► กฎของ Ohm

ในการเคลื่อนย้ายประจุให้เกิดกระแสก็ต้องออกแรง เราจึงมาหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับกระแสกันก่อน

พิจารณาสายไฟที่มีอิเล็กตรอนอิสระอยู่ n อนุภาคต่อหน่วยปริมาตรและแต่ละอิเล็กตรอนมีมวล m_e ประจุ e และสมมติมีสนามแรง f (ต่อหน่วยประจุ) กระทำอยู่กับทั้งสาย แรง f จะทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่ง a ก่อนที่จะชนกับอิเล็กตรอนอีกอนุภาคจนทำให้อัตราเร็ว (โดยเฉลี่ยทั้งหมดแล้ว) กลับมาเป็น 0 อีกครั้ง โดยถ้าสมมติว่าอัตราเร็วของอิเล็กตรอนเนื่องจากความร้อนเท่ากับ v_{thermal} และมีระยะทางเฉลี่ย λ ระหว่างการชน เนื่องจาก v_{thermal} มีค่าสูงมาก จึงประมาณได้ว่าความเร่งที่เกิดขึ้นนั้นมีผลน้อยมาก จึงได้เวลาโดยเฉลี่ยก่อนที่จะชนกับอิเล็กตรอนอีกอนุภาคคือ

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{thermal}}}$$

ก็จะได้ขนาดของความเร็วเฉลี่ยหรืออัตราเร็วลอยเลื่อน (drift velocity) เท่ากับ

$$v_d = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{\text{thermal}}} \quad (6.1)$$

ดังนั้นกระแสจึงเท่ากับ

$$\mathbf{J} = nev_d = ne \frac{\lambda \mathbf{a}}{2v_{\text{thermal}}} = \left(\frac{ne\lambda}{2v_{\text{thermal}}m_e} \right) \mathbf{F} = \left(\frac{ne^2\lambda}{2v_{\text{thermal}}m_e} \right) \mathbf{f} \quad (6.2)$$

จะเห็นว่าโดยปกติแล้วสำหรับวัสดุทั่วไป \mathbf{J} จึงแปรผันตรงกับ \mathbf{f} :

สมการการแปรผันตรงของกระแสกับแรง.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} \quad (6.3)$$

โดยที่ σ เป็นค่าคงที่ที่เรียกว่าสภาพนำไฟฟ้า (conductivity) ของสสารนั้น (ถ้าสสารเป็นตัวนำในอุดมคติก็จะมี $\sigma = \infty$) และ $\rho \equiv 1/\sigma$ เรียกว่าสภาพต้านทาน (resistivity) โดยถ้าแรงที่ใช้เป็นแรงทางไฟฟ้าเท่านั้นโดยมีส่วนของแรงแม่เหล็กน้อยมาก ๆ ก็จะได้

กฎของ Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (6.4)$$

และจาก (6.1) จะได้ว่า

อัตราเร็วลอยเลื่อน.

$$v_d = \frac{a\lambda}{2v_{\text{thermal}}} = \frac{eE}{2m_e v_{\text{thermal}}} \lambda = \frac{eE}{2m_e} \tau' = \frac{eE}{m_e} \tau \quad (6.5)$$

เมื่อ τ' คือเวลาเฉลี่ยระหว่างการชนสองครั้งที่ติดกันและ τ คือเวลาเฉลี่ยหลังการชนครั้งก่อนหน้า (โดยใช้เวลาเฉลี่ยบนการสุ่มเลือกอิเล็กตรอน)

หมายเหตุ: สมการ (6.2) และ (6.5) เป็นเพียงการประมาณหยาบ ๆ แบบกลศาสตร์ดั้งเดิมเท่านั้น จึงไม่สามารถนำมาใช้หา σ และ v_d ได้ในสสารจริง ๆ และยิ่งไปกว่านั้น ในความเป็นจริงแล้วยังมีวัสดุบางชนิดที่ไม่เป็นไปตามกฎการแปรผันตรงนี้อีกด้วย เราจะเรียกวัสดุที่เป็นไปตามกฎของ Ohm ว่าเป็นวัสดุ Ohmic

สังเกตว่าในการทำให้ความต่างศักย์มากขึ้น k เท่าระหว่างขั้วอิเล็กโทรด เราจะต้องเพิ่ม Q ไป k เท่า ทำให้ E เพิ่ม k เท่าและจาก (6.4) จะได้ว่า \mathbf{J} และ I ก็เพิ่ม k เท่าเช่นกัน ก็จะได้กฎของ Ohm ในอีกรูปแบบ:

กฎของ Ohm ในรูปกระแสและความต่างศักย์.

$$V = IR \quad (6.6)$$

เมื่อ R เป็นค่าคงที่ความต้านทานระหว่างสองจุดนั้น (ในการคำนวณหาความต้านทานใช้ (6.4) ตามในแต่ละระบบได้เลย) โดย R นี้มีหน่วย SI คือ Ω (ohm)

ในกรณีที่กระแสไหลแบบคงที่ในสสารเนื้อเดียวกันที่เป็นไปตามกฎของ Ohm จาก (4.15) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.7)$$

ดังนั้นในบริเวณที่สสารเป็นไปตามกฎของ Ohm ก็จะไม่ประจุตกค้างอยู่ภายในเลย จึงทำให้สามารถใช้ทริคในการแก้ศักย์และสนามจากสมการ Laplace ได้ตามปกติ

สุดท้าย จาก (6.2) เนื่องจากแรงที่ออกนั้นไม่ส่งผลในอัตราเร็วลอยเลื่อนเพิ่มขึ้นเลย ดังนั้นพลังงานส่วนมากจากการชนจะถูกเปลี่ยนเป็นความร้อน โดยถ้ามีประจุไหลต่อเวลาเท่ากับ I โดยศักย์ของประจุลดลง V ก็จะได้

กฎการให้ความร้อนของ Joule.

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} = \frac{dQ}{dt} \quad (6.8)$$

► แรงเคลื่อนไฟฟ้า

โดยปกติแล้วในวงจรไฟฟ้าจะมีแรงสองแรงในการทำให้ประจุเคลื่อนที่คือแรงจากแหล่งกำเนิด (f_s) ซึ่งโดยปกติแล้วแรงนี้จะอยู่แค่ในบริเวณแหล่งกำเนิดเท่านั้น และอีกแรงคือแรงจากสนามไฟฟ้าที่จะเป็นตัวที่ช่วยให้กระแสไหลด้วย I คงที่ตลอดทั้งสาย ดังนั้นแรงต่อประจุโดยรวมจะเท่ากับ

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$$

แต่แรง \mathbf{E} ที่ช่วยให้กระแสไหลคงที่มาจากไหนล่ะ? เราลองพิจารณาทีละขั้นตอน ดังนี้:

1. เมื่อเริ่มต่อสายไฟกับแบตเตอรี่ จะเกิดแรง f_s ทำให้เกิดกระแสไหลออก โดยถ้ากระแสในสายไฟเหล่านี้เริ่มไหลไม่คงที่ จะทำให้มีประจุสะสมเกิดขึ้นจึงมี \mathbf{E} ด้านกระแสส่วนที่เร็วเกินไปและเสริมในส่วนที่ช้าเกินไป
2. ที่บริเวณตัวต้านทานก็เช่นเดียวกัน จะต้องมีการเสกเท่ากับนอกตัวต้านทาน แต่คราวนี้ประจุจะสะสมไปเรื่อย ๆ จนกว่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะมากพอที่จะผลักประจุผ่านตัวต้านทานไปได้ด้วยกระแสเท่ากับข้างนอก (ตาม (6.4)) โดยกระแสเกิดประจุสะสมที่ฝั่งหนึ่งของตัวต้านทานก็จะทำให้เกิดประจุสะสมที่หัวของแบตเตอรี่ด้วย
3. อีกหัวของแบตเตอรี่ก็จะเกิดกระบวนการเช่นเดียวกับ 1. และ 2. แต่ในทิศและหัวตรงข้าม

เราจึงนิยามผลของแรงทั้งหมดภายในวงจรว่าแรงเคลื่อนไฟฟ้าหรือ *emf* (electromotive force: \mathcal{E}):

นิยามแรงเคลื่อนไฟฟ้า.

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (6.9)$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าสถิต $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$ โดย \mathcal{E} นี้มีหน่วยเป็น V เช่นเดียวกับศักย์ไฟฟ้า

หมายเหตุ: *emf* นี้ใช้นิยามเป็นค่า ณ ขณะหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นเมื่อสายไฟขยับ เราจะใช้ $d\boldsymbol{\ell}$ เป็นทิศเดียวกับสายไฟจริง ๆ ไม่ต้องคำนึงถึงความเร็ว

พิจารณาในสภาวะสมดุลหลังจากต่อแบตเตอรี่: สมมติแหล่งกำเนิดเป็นแบตเตอรี่ไร้ความต้านทาน ($\sigma = \infty$) ก็จะได้ว่าแรงที่ออกในการเคลื่อนประจุเป็น 0 ดังนั้น $0 = \mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$ ก็จะได้

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} \quad (6.10)$$

แต่ถ้าแบตเตอรี่นี้มีความต้านทาน r (หมายความว่าถ้าตัดแรง f_s ออกแล้วความต่างศักย์ $V_{\text{off}} = \int \mathbf{E}_{\text{off}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = Ir$) สมการด้านบนจะไม่เป็นจริง โดยจะได้

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \left(\mathbf{f}_s - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} + \int_a^b \mathbf{E}_{\text{off}} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E} - V_{\text{off}} = \mathcal{E} - Ir \quad (6.11)$$

► แรงเคลื่อนไฟฟ้าจากสายไฟเคลื่อนที่

เราสามารถเหนี่ยวนำเส้นลวดให้เกิด emf ได้โดยอาศัยสนามแม่เหล็ก ซึ่งเป็นวิธีที่เครื่องกำเนิดไฟฟ้า (generator) ใช้ในการสร้างกระแสไฟฟ้า โดยยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราเอาสายไฟรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่กว้าง h ไปวางในสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} ที่มีทิศตั้งฉากกับสายไฟ แล้วทำการดึงสายไฟออกด้วยอัตราเร็ว v ในทิศตั้งฉากกับทั้งสายไฟและ \mathbf{B} ก็จะได้

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{\ell} = vBh$$

แต่เพราะในขณะที่สายไฟมีความเร็ว v กระแสที่เกิดขึ้นก็จะทำให้มีแรงแม่เหล็กต้านไว้ แรงที่ดึงจึงต้องต้านแรงแม่เหล็กนี้ด้วย โดยถ้าสมมติว่าอิเล็กตรอนไหลด้วยอัตราเร็ว u เทียบกับสายไฟ จะได้แรงที่ต้องดึง $\mathbf{f}_{\text{pull}} = u\mathbf{B}$ จึงได้ว่างานที่สายไฟนี้ทำต่อประจุเท่ากับ

$$\int \mathbf{f}_{\text{pull}} \cdot d\mathbf{\ell} = uB \left(\frac{h}{\cos \theta} \right) \sin \theta = vBh$$

ดังนั้นจริง ๆ แล้วงานที่เกิดขึ้นนั้นมาจากแรงดึงทั้งหมด ไม่ได้มาจากแรงแม่เหล็ก (ซึ่งก็ไม่น่าแปลกใจเพราะแรงแม่เหล็กไม่ทำงาน) ต่อมาเราจะมาพิสูจน์กฎที่สำคัญในการหา emf จากการสนามแม่เหล็กดังกระบวนการก่อนหน้านี้

พิจารณาสายไฟวงปิดที่เกิดการเคลื่อนที่หรือบิด ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านผิวที่กำหนดเส้นขอบโดยสายไฟ เมื่อเวลาผ่านไป dt ก็จะทำให้เกิด “ริบบิ้น” ของพื้นที่ส่วนที่เปลี่ยนแปลงขึ้น ก็จะได้

$$d\Phi_B = \int_{\text{ribbon}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{๐1})$$

ถ้าพิจารณา $d\mathbf{a}$ ที่จุด ๆ หนึ่งโดยให้ความเร็วของอิเล็กตรอน \mathbf{w} มาจากสองส่วนคือส่วน \mathbf{v} ที่เป็นความเร็วของสายไฟ และ \mathbf{u} ที่เป็นความเร็วของกระแส ก็จะได้ว่า

$$d\mathbf{a} = \mathbf{v} dt \times d\mathbf{\ell} = (\mathbf{w} - \mathbf{u}) dt \times d\mathbf{\ell} = \mathbf{w} dt \times d\mathbf{\ell} \quad (\text{๐2})$$

นำ (๐2) ไปแทนใน (๐1) จะได้

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} dt \times d\mathbf{\ell}) = - \int (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{\ell} = -\mathcal{E}$$

ดังนั้น

กฎฟลักซ์แม่เหล็กสำหรับสายไฟเคลื่อนที่.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.12)$$

หมายเหตุ: กฎนี้เห็นชัดจากการพิสูจน์ว่าต้องเกิดจากการเคลื่อนที่ของสายไฟ ดังนั้นการสับสวิตช์ที่ทำให้วงสายไฟใหญ่ขึ้นจึงไม่ทำให้เกิด emf เป็นอันใด

► 6.2. การเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า

► กฎของ Faraday

ต่อมา Michael Faraday ได้ทำการทดลองเพิ่มจาก (6.12) โดยแทนที่จะขยับสายไฟ เขาทำการขยับแม่เหล็กและปรับขนาดของฟลักซ์แม่เหล็กแทน ปรากฏว่า emf ที่เกิดขึ้นก็ยังคงเป็นไปตาม (6.12) อยู่ดี โดยไม่ต้องขยับสายไฟเลย โดยแรงที่เกิดขึ้นนี้เป็นแรงไฟฟ้าไม่ใช่แรงแม่เหล็ก ดังนั้น

กฎของ Faraday (Integral Form).

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.13)$$

โดยถ้าใช้ Stokes' theorem ต่อก็จะได้

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

หรือก็คือ

กฎของ Faraday (Differential Form).

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.14)$$

เราสามารถรวมกฎของ Faraday (6.13) และกฎฟลักซ์แม่เหล็กสำหรับสายไฟเคลื่อนที่ (6.12) ได้เป็นกฎฟลักซ์แม่เหล็กรวม (หรือบางคนเรียกว่ากฎของ Faraday) ดังนี้:

กฎฟลักซ์แม่เหล็กรวม.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (6.15)$$

โดยทิศของกระแสอาจจะมันจึงมีกฎของ Lenz มาช่วยให้คิดทิศของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำง่ายขึ้น:

กฎของ Lenz. ธรรมชาติต่อต้านการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กโดยสร้างกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำในทิศที่จะเกิดสนามแม่เหล็กต้านการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์

► สนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ

เราสามารถสังเกตว่าในกฎของ Faraday ถ้าพิจารณาในบริเวณที่ไม่มีประจุแล้ว

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{และ} \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ซึ่งเหมือนกับสมการของแม่เหล็กสถิต ดังนั้นเราสามารถใช้ทริคต่าง ๆ คล้ายในบทแม่เหล็กสถิต เช่นจะได้ “กฎ Biot-Savart” ว่า:

กฎ Biot-Savart ของสนามไฟฟ้า.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.16)$$

หรือเราอาจจะใช้ (6.13) เพื่อสร้างรูป Amperian ในการคำนวณสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำได้เช่นกัน

ตัวอย่าง. ประจุที่มีความหนาแน่นเชิงเส้น λ ถูกนำกวาดไว้ที่ริมของลวดรัศมี b ที่วางในระนาบ xy และหมุนได้อย่างอิสระ ข้างในลวดมีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอ \mathbf{B}_0 ชี้ในทิศ $+z$ ที่กระจายอยู่ทั่วในทรงกระบอกที่มีศูนย์กลางเดียวกับลวดและมีรัศมี $a < b$ ถ้าเกิดว่าปิดสนามแม่เหล็กนี้แล้วจะเกิดอะไรขึ้นกับลวด

วิธีทำ. การปิดสนามนี้จะเกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กในลวด จึงจะเกิดสนามไฟฟ้าวนในทิศทวนเข็มนาฬิกา (โดยกฎของ Lenz) เพื่อต้านการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็ก โดยจะได้ทอร์กจากสนามไฟฟ้า ณ เวลาใด ๆ เท่ากับ

$$\tau = b \int dF = b \int E dq = bE\lambda(2\pi b)$$

จาก (4.20) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot d\ell &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ E(2\pi b) &= -\pi a^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

นำไปแทนในทอร์กจะได้

$$\tau = -\lambda\pi a^2 b \frac{dB}{dt}$$

ดังนั้น

$$\Delta L = \int \tau dt = -\lambda\pi a^2 b \int \frac{dB}{dt} dt = \lambda\pi a^2 b (B_{\text{before}} - B_{\text{after}}) = \lambda\pi a^2 b B_0$$

จึงได้ว่าไม่ว่าจะปิดสนามแม่เหล็กนี้เร็วแค่ไหน จะเกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากันเสมอ □

ปัญหาหนึ่งของการใช้กฎของ Faraday คือสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นนี้จะต้องเกิดจากสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นตามทฤษฎีแล้วเราจึงไม่สามารถคำนวณหาสนามแม่เหล็กที่นำมาใส่ในสมการได้ด้วยสมการเดียวกับบทแม่เหล็กสถิต แต่ในความเป็นจริง ถ้าสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงนี้เปลี่ยนช้าพอ (เราจะเรียกว่าเปลี่ยนแบบ *quasistatic*) error ที่เกิดขึ้นจากการใช้กฎจากแม่เหล็กสถิตในการคำนวณนี้จะถือว่าน้อยมาก ๆ ในบริเวณที่อยู่ใกล้ ๆ กับแหล่งกำเนิดของการเปลี่ยนแปลงนี้

► ความเหนี่ยวนำ

พิจารณาขดลวดสายไฟสองขดลวดที่วางไว้อยู่หนึ่ง ถ้าลวดเส้นที่หนึ่งมีกระแส I_1 ไหลผ่านจะทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก B_1 และจะเกิดฟลักซ์แม่เหล็ก Φ_2 ผ่านขดลวดที่สอง เนื่องจากกฎ Biot-Savart จะได้ว่า $B_1 \propto I_1$ ดังนั้น $\Phi_2 \propto I_1$ โดยเราจะเรียกค่าคงที่การแปรผันนี้ว่าความเหนี่ยวนำร่วมกัน (mutual inductance: M_{21}) ของขดลวดทั้งสอง:

นิยามความเหนี่ยวนำร่วมกัน.

$$M_{21} \equiv \frac{\Phi_2}{I_1} \quad \text{หรือ} \quad \Phi_2 = M_{21} I_1 \quad (6.17)$$

พิจารณาการหา M_{21} โดยเราจะเริ่มจาก Φ_2 และใช้ Stokes' theorem:

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{r} d\boldsymbol{\ell}_1 d\boldsymbol{\ell}_2$$

ก็จะได้ $M_{21} = M_{12} \equiv M$ และจะได้

สูตรของ Neumann.

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\boldsymbol{\ell}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell}_2}{r} \quad (6.18)$$

จริง ๆ แล้วการเหนี่ยวนำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็กของสายไฟ ไม่จำเป็นต้องใช้สายไฟสองเส้นก็ได้ เราจึงนิยามความเหนี่ยวนำตัวเอง (self inductance: L) หรืออาจจะเรียกสั้น ๆ ว่าความเหนี่ยวนำ ดังนี้

นิยามความเหนี่ยวนำ.

$$L \equiv \frac{\Phi_B}{I} \quad \text{หรือ} \quad \Phi_B = LI \quad (6.19)$$

ความเหนี่ยวนำมีหน่วยเป็น H (henry) และโดยกฎของ Faraday ก็จะได้ว่าเมื่อพยายามจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของกระแสในวงจรแบบ quasistatic แล้วจะเกิด emf ในทิศย้อนศร (back emf) เป็นแรงเคลื่อนไฟฟ้าต้านการเปลี่ยนแปลงของกระแส:

Back Emf.

$$\mathcal{E}_{\text{back}} = -L \frac{dI}{dt} \quad (6.20)$$

ในวงจรหนึ่ง เราสามารถสร้างขดลวดโซลินอยด์เพื่อให้มีความเหนี่ยวนำตามที่ต้องการได้ เราจะเรียกขดลวดนี้ว่าตัวเหนี่ยวนำ (inductor)

▶ พลังงานในสนามแม่เหล็ก

จาก (6.20) จะเห็นได้ว่าเราจะต้องใช้พลังงานมากกว่าปกติเพื่อที่จะทำให้เกิดกระแสที่ต้องการในตัวเหนี่ยวนำ (หรือในวงจร) โดยงานที่จะต้องต้าน back emf นี้เพื่อให้เกิดกระแส I เท่ากับ

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}$$

ดังนั้นจะได้ว่างานที่ต้องใช้ในการสร้างกระแสในตัวเหนี่ยวนำเท่ากับ

พลังงานสะสมในตัวเหนี่ยวนำ.

$$U = \frac{1}{2} \Phi_B I = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_B^2}{L} \quad (6.21)$$

เราสามารถเขียน (6.21) ได้ในอีกรูป พิจารณา

$$U = \frac{1}{2} \Phi_B I = \frac{1}{2} I \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} I \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) d\ell$$

ขยายมาในสามมิติจะได้

$$U = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (6.22)$$

ใช้ (4.19) ก็จะได้

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V (\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})) d\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\int_V B^2 d\tau - \oint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right) \end{aligned}$$

เนื่องจากที่ระยะไกล ๆ \mathbf{B} และ \mathbf{A} เข้าใกล้ 0 ดังนั้นพจน์หลังจึงหายไป ก็จะได้

พลังงานในสนามแม่เหล็ก.

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \quad (6.23)$$

โดยเราสามารถใช้ (6.23) และ (6.21) เพื่อนิยามความเหนี่ยวนำที่เป็นระบบสายไฟเชิงพื้นที่หรือเชิงปริมาตรได้ (การหาฟลักซ์จากระบบเหล่านี้อาจไม่มีนิยามตายตัว) ดังนี้

นิยามความเหนี่ยวนำจากพลังงาน.

$$L \equiv \frac{1}{\mu_0 I^2} \int B^2 d\tau \quad (6.24)$$

► 6.3. สมการ Maxwell

► ข้อบกพร่องของกฎของ Ampère

ตอนนี้เรามีสมการสี่สมการที่อธิบายแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนี้

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{กฎของ Gauss})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{กฎของ Faraday})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{กฎของ Ampère})$$

แต่ยังมีข้อบกพร่องอยู่ในกฎของ Ampère เพราะว่ากฎนี้เราอธิบายมาจากกฎ Biot-Savart ซึ่งใช้ได้เฉพาะระบบที่เป็นแม่เหล็กสถิตหรือมีกระแสคงที่ ข้อบกพร่องนี้เห็นได้ชัดถ้าเราพิจารณา divergence ของสมการกฎของ Ampère:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J})$$

$$0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J})$$

ซึ่งไม่ได้เป็นจริงเสมอไป

ต่อมา James Clerk Maxwell จึงได้ทำการแก้ข้อบกพร่องนี้โดยอาศัยสมการความต่อเนื่อง:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

นำไปเพิ่มในกฎของ Ampère จากสมการด้านบนจะได้

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mu_0 \epsilon_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

ดังนั้นถ้าแก้ไขสมการกฎของ Ampère เป็นดังต่อไปนี้ จะได้กฎที่ไร้ข้อขัดแย้ง:

กฎของ Ampère-Maxwell.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.25)$$

และเราจะเรียกพจน์ $\epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ ว่ากระแสแทนที่ (displacement current)

โดยนำสมการทั้งสี่มารวมกันทั้งหมดจะได้สมการ Maxwell (Maxwell's equations):

สมการ Maxwell. การเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้า \mathbf{E} และสนามแม่เหล็ก \mathbf{B} ทั้งหมดถูกอธิบายได้ด้วยสี่สมการ:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{กฎของ Gauss})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{กฎของ Faraday})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{กฎของ Ampère-Maxwell})$$

โดยแรงที่ทำให้เกิดกระแสและการเคลื่อนที่ทั้งหมดอธิบายโดยกฎแรง Lorentz (4.2)

► 6.4. สมการ Maxwell ในสสาร (TO-DO)

บทที่ 7 | ไฟฟ้ากระแสตรง

► 7.1. การวิเคราะห์วงจร

► กฎของ Kirchhoff

เรามี “กฎของ Ohm” สำหรับแต่ละ *passive component* (อุปกรณ์ที่ไม่สร้างพลังงาน) ดังนี้

ความสัมพันธ์ของ V และ I สำหรับ Passive Component. สำหรับตัวต้านทาน:

$$v = iR \quad (7.1)$$

และสำหรับตัวเหนี่ยวนำ:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (7.2)$$

สำหรับตัวเก็บประจุ:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (7.3)$$

(ในบทนี้เราจะใช้ตัวอักษร v และ i ที่เป็นตัวพิมพ์เล็กเพื่อแทนความต่างศักย์และกระแสที่อาจขึ้นกับเวลา) ซึ่งสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์วงจรได้ด้วยกฎของ Kirchhoff:

พิจารณาวงจร ณ จุด ๆ หนึ่ง ถ้าที่จุดนั้นไม่มีประจุสะสมอยู่เลยโดย 4.13 จะได้ว่า

Kirchhoff's Current Law (KCL).

$$\sum_{\text{junction}} i = 0 \quad (7.4)$$

โดยกฎนี้ใช้ในการวิเคราะห์วงจรแบบโนด (*nodal analysis*) โดยเริ่มจากการตั้งศักย์ไฟฟ้าบนแต่ละโนดและกระแสที่ไหลเข้าและออกจากแต่ละโนด จากนั้นใช้ (7.4) และ (7.3) ถึง (7.2) ในการเขียนทุกตัวแปรให้อยู่ในรูป V

ต่อมาพิจารณาวงจรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงสนามแม่เหล็ก จะได้ว่า \mathbf{E} เป็นสนามอนุรักษ์ ดังนั้น

Kirchhoff's Voltage Law (KVL).

$$\sum_{\text{loop}} v = 0 \quad (7.5)$$

กฎนี้ใช้ในการวิเคราะห์วงจรแบบลูป (mesh analysis) โดยเริ่มจากกำหนดกระแสที่วนอยู่ในแต่ละลูปที่กำหนดขึ้น จากนั้นใช้ (7.5) และ (7.3) ถึง (7.2) ตั้งสมการตามจำนวนลูปที่กำหนดไว้เพื่อแก้หา I ในแต่ละลูป

► การต่อตัวต้านทาน, ตัวเก็บประจุ, และตัวเหนี่ยวนำอย่างง่าย

พิจารณาการต่อตัวต้านทาน R_1 และ R_2 แบบอนุกรม จะได้ว่ากระแส i บนตัวต้านทาน R_1 จะเท่ากับ I บนตัวต้านทาน R_2 ดังนั้น

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2$$

จึงได้ความต้านทานรวมเท่ากับ

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2$$

โดยเราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวต้านทานกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวต้านทานแบบอนุกรม.

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (7.6)$$

และพิจารณาการต่อตัวต้านทาน R_1 และ R_2 แบบขนาน จะได้ว่าความต่างศักย์ของตัวต้านทานทั้งสองจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$i_{\text{total}} = i_1 + i_2 = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2}$$

จึงได้ความต้านทานรวมเท่ากับ

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

โดยเช่นเดียวกับการต่อแบบอนุกรม เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวต้านทานกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวต้านทานแบบขนาน.

$$\frac{1}{R_{\text{total}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (7.7)$$

ต่อมาเช่นเดียวกับตัวต้านทาน พิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ C_1 และ C_2 แบบอนุกรม จะได้ว่า q บนตัวเก็บประจุ C_1 จะเท่ากับ q บนตัวเก็บประจุ C_2 ดังนั้น

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุกี่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรม.

$$\frac{1}{C_{\text{total}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (7.8)$$

และพิจารณาการต่อตัวเก็บประจุ C_1 และ C_2 แบบขนาน จะได้ว่าความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุทั้งสองจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 = C_1 v + C_2 v$$

เราสามารถทำแบบนี้ไปได้เรื่อย ๆ ด้วยตัวเก็บประจุที่ตัวก็ได้ ดังนั้น

การต่อตัวเก็บประจุแบบขนาน.

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (7.9)$$

สุดท้าย พิจารณาการต่อตัวเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 แบบอนุกรม จะได้ว่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำทั้งสองจะต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$v_{\text{total}} = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}$$

ก็จะได้

การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรม.

$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad (7.10)$$

และพิจารณาการต่อตัวเหนี่ยวนำ L_1 และ L_2 แบบขนาน จะได้ความต่างศักย์บนตัวเหนี่ยวนำทั้งสองเท่ากัน ดังนั้น

$$\frac{di_{\text{total}}}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{v}{L_1} + \frac{v}{L_2}$$

ก็จะได้

การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนาน.

$$\frac{1}{L_{\text{total}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \quad (7.11)$$

► 7.2. วงจรอันดับหนึ่ง

► อันดับของวงจร

นิยาม อันดับ ของ วงจร. อันดับ ของ วงจรคือ อันดับ ของ สมการ เชิง อนุพันธ์ ที่ อธิบาย วงจร เช่น วงจร ไฟฟ้ากระแสตรงที่มีแค่แบตเตอรี่และตัวต้านทานไม่มีอนุพันธ์อะไรเลย จึงเป็นวงจรอันดับศูนย์

โดยวงจรอันดับหนึ่งได้แก่ วงจรที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุ (วงจร RC) และวงจรที่มีตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำ (วงจร RL) และวงจรอันดับสองได้แก่วงจรที่มีตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ (วงจร LC และ RLC)

► วงจร RC

วงจร RC เป็นวงจรอันดับหนึ่ง โดยจะยกตัวอย่างโจทย์การปล่อยประจุ (*discharge*) จากตัวเก็บประจุ:

ตัวอย่าง. จงหา $v(t)$ คร่อมตัวเก็บประจุของวงจรที่มีการต่อตัวเก็บประจุ C และตัวต้านทาน R แบบอนุกรม โดยที่ C มีประจุเริ่มต้น Q_0

วิธีทำ. ให้ i_R และ i_C คือกระแสที่ไหลออกจากจุด ๆ หนึ่งที่อยู่ฝั่งบวกของตัวเก็บประจุ จากนั้นใช้ KCL จะได้

$$\begin{aligned} i_R + i_C &= 0 \\ \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} &= 0 \\ -\frac{1}{RC} dt &= \frac{1}{v} dv \\ -\int_0^t \frac{1}{RC} dt' &= \int_{V_0}^{v(t)} \frac{1}{v} dv \\ -\frac{1}{RC} t &= \log\left(\frac{v(t)}{V_0}\right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $V_0 = Q_0/C$ ก็จะได้

$$v(t) = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{1}{RC} t}$$

โยเราจะเรียก $\tau \equiv RC$ ว่าค่าคงที่เวลา (*time constant*) □

พิจารณาวงจรที่มี C ที่ *steady state* (เมื่อวงจรเป็น *steady current*) ก็จะได้ว่า

$$i_C = C \frac{dv}{dt} = 0$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

ตัวเก็บประจุในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงที่ Steady State. เมื่อ $t \rightarrow \infty$ จะสามารถมองได้ว่าตัวเก็บประจุ C เปรียบเสมือนสายไฟขาด

► วงจร RL

วงจร RL เป็นวงจรอันดับหนึ่ง โดยจะยกตัวอย่างโจทย์การต่อแบตเตอรี่กับวงจรที่มี L :

ตัวอย่าง. จงหา $i(t)$ และค่าคงที่เวลา τ ของการต่อแบตเตอรี่ที่มีแรงเคลื่อนไฟฟ้า \mathcal{E} ในวงจรที่มีการต่อตัวต้านทาน R และตัวเหนี่ยวนำ L แบบอนุกรม โดยที่ ณ เวลา $t = 0$ ไม่มีกระแสไหลอยู่เลย

วิธีทำ. วนลูปที่มีกระแส $i(t)$ รอบวงจร จากนั้นใช้ KVL จะได้

$$\begin{aligned} v_R + v_L - \mathcal{E} &= 0 \\ iR + L \frac{di}{dt} &= \mathcal{E} \\ -\frac{1}{L} dt &= \frac{1}{iR - \mathcal{E}} di \\ -\int_0^t \frac{1}{L} dt' &= \int_0^{i(t)} \frac{1}{iR - \mathcal{E}} di \\ -\frac{R}{L} t &= \log\left(\frac{\mathcal{E} - Ri(t)}{\mathcal{E}}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นก็จะได้

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

และค่าคงที่เวลา $\tau = L/R$

□

พิจารณาวงจรที่มี L ที่ steady state ก็จะได้ว่า

$$v = L \frac{di}{dt} = 0$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

ตัวเหนี่ยวนำในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงที่ Steady State. เมื่อ $t \rightarrow \infty$ จะสามารถมองได้ว่าตัวเหนี่ยวนำ L เปรียบเสมือนสายไฟเปล่า

► วงจรอันดับหนึ่งในรูปทั่วไป

โดยทั่วไปแล้วสมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรอันดับหนึ่งจะอยู่ในรูป

$$A \frac{di}{dt} + Bi = C$$

(หรือบางครั้งอาจติดอยู่ในรูป v) โดยเมื่อเราแก้สมการออกมาจะได้

คำตอบทั่วไปของวงจรอันดับหนึ่ง.

$$i(t) = \frac{C}{A} + \left(I_0 - \frac{C}{A}\right) e^{-\frac{B}{A}t} \quad (7.12)$$

ก็จะได้ว่าโดยทั่วไปแล้ว ค่าคงที่เวลา τ จะเท่ากับ

ค่าคงที่เวลาโดยทั่วไป.

$$\tau = \frac{A}{B} \quad (7.13)$$

เราจะเรียกช่วงแรกที่เกิดการปรับตัวของกระแสหรือความต่างศักย์อย่างรวดเร็ว (ก่อน steady state) ว่า *transient response*

► 7.3. วงจรอันดับสอง

► วงจร RLC แบบอนุกรม

พิจารณาการแก้มการของวงจรที่เป็น RLC ที่ต่อแบบอนุกรมโดยไม่มีแบตเตอรี่ โดย KVL จะได้ (ให้กระแสไหลออกจากฝั่งลบของตัวเก็บประจุ)

$$\begin{aligned} v_R + v_L + v_C &= 0 \\ \frac{d}{dt}(v_R + v_L + v_C) &= 0 \\ L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

เราสามารถแก้สมการนี้ได้โดยการใช้ราก $s_{1,2}$ ของ characteristic equation:

$$x^2 + (R/L)x + 1/LC = 0$$

ก็จะได้คำตอบคือ

คำตอบของ Characteristic Equation ของ RLC แบบอนุกรม.

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7.15)$$

โดยเราจะนิยามราก $s_{1,2}$ ของสมการว่าเป็น *ความถี่ธรรมชาติ* ของวงจร และก็จะนิยาม *damping factor* (α) และ *ความถี่ resonant* (ω_0) (*undamped natural frequency*) ดังนี้:

นิยาม Damping Factor และความถี่ Resonant.

$$s_{1,2} \equiv -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.16)$$

หมายเหตุ: โดยเราจะใช้หน่วย Np/s สำหรับ α แต่จริง ๆ แล้วหน่วย Np (neper) นี้เป็นหน่วยที่ไม่มีมิติเหมือนกับ rad และเราจะนิยามอัตราส่วนระหว่าง α และ ω_0 ว่า *damping ratio* (ζ) ซึ่งเป็นค่าที่บ่งบอกว่าระบบถูก damp ไปแค่ไหน:

นิยาม Damping Ratio.

$$\zeta \equiv \frac{\alpha}{\omega_0} \quad (7.17)$$

ในที่นี้เราก็จะได้

Damping Factor, ความถี่ Resonant, และ Damping Ratio ของ RLC แบบอนุกรม.

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (7.18)$$

เมื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ถ้าราก $s_{1,2}$ เป็นจำนวนจริง ($\zeta > 1$) จะได้ว่า

วงจร RLC อนุกรมแบบ Overdamped.

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (7.19)$$

โดยเราจะเรียกว่าเป็นวงจร *overdamped* ซึ่งจะมีกราฟเป็นการลดลงของกระแส

แต่ถ้าราก $s_{1,2}$ เป็นรากซ้ำ ($\zeta = 0$) โดยให้เป็น s จะได้ว่า

วงจร RLC อนุกรมแบบ Critically Damped.

$$i(t) = (A_2 + A_1 t) e^{st} \quad (7.20)$$

โดยเราจะเรียกว่าเป็นวงจร *critically damped* ซึ่งจะมีกราฟเป็นการลดลงของกระแสที่มากที่สุดที่ยังไม่เกิดการสั่นขึ้นลงของกราฟ (decay แบบยังไม่มี oscillatory behavior)

และสุดท้าย ถ้าราก $s_{1,2}$ ไม่เป็นจำนวนจริง ($\zeta < 1$) เราจะนิยามความถี่ *damped* (damped natural frequency):

นิยามความถี่ Damped.

$$\omega_d \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (7.21)$$

และก็จะได้คำตอบของสมการว่า

วงจร RLC อนุกรมแบบ Underdamped.

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)) \quad (7.22)$$

โดยเราจะเรียกว่าเป็นวงจร *underdamped* ซึ่งกราฟจะมีการสั่นขึ้นลงของกระแสโดยมีแอมพลิจูดลดลงเรื่อย ๆ (decay แบบ oscillatory)

ในกรณีที่ป็นวงจร LC ($R = 0, \zeta = 0$) จะได้ว่า $\alpha = 0$ และคำตอบของสมการอยู่ในกรณี *underdamped* โดยจะคำตอบเป็นดังนี้:

วงจร LC แบบอนุกรม.

$$i(t) = A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t) \quad (7.23)$$

โดยเราอาจจะเรียกว่าเป็น RLC แบบ *undamped* ซึ่งกราฟจะมีแค่การสั่นขึ้นลงแต่ไม่มีการลดลงของแอมพลิจูด (completely oscillatory)

► วงจร RLC แบบขนาน

พิจารณาการแก่งสมการของวงจรที่เป็น RLC ที่ต่อแบบขนานโดยไม่มีแบตเตอรี่ โดย KCL จะได้ (ให้กระแสไหลออกจากฝั่งลบของตัวเก็บประจุ)

$$\begin{aligned} i_R + i_L + i_C &= 0 \\ \frac{d}{dt}(i_R + i_L + i_C) &= 0 \\ C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v &= 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

ก็จะได้ characteristic equation:

$$x^2 + (1/RC)x + 1/LC = 0$$

มีคำตอบ $s_{1,2}$ คือ

คำตอบของ Characteristic Equation ของ RLC แบบขนาน.

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7.25)$$

ก็จะได้ว่า

Damping Factor, ความถี่ Resonant, และ Damping Ratio ของ RLC แบบขนาน.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.26)$$

ต่อมาเมื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (เช่นเดียวกับในกรณีต่อแบบอนุกรมแต่ที่นี้หา v แทน i) ก็จะได้

วงจร RLC ขนานแบบ Overdamped.

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (7.27)$$

ในกรณี overdamped,

วงจร RLC ขนานแบบ Critically Damped.

$$v(t) = (A_2 + A_1 t) e^{s t} \quad (7.28)$$

ในกรณี critically damped, และ

วงจร RLC ขนานแบบ Underdamped.

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)) \quad (7.29)$$

ในกรณี underdamped

ส่วนในกรณีที่เป็วงจร LC แบบขนาน ($R \rightarrow \infty, \zeta = 0$) หรือ RLC ขนานแบบ undamped จะได้ว่า $\alpha = 0$ และมีคำตอบคือ

วงจร LC แบบขนาน.

$$v(t) = A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t) \quad (7.30)$$

► วงจรอันดับสองในรูปทั่วไป

โดยทั่วไปแล้วสมการเชิงอนุพันธ์ของวงจรอันดับสองจะอยู่ในรูป

$$A \frac{d^2 i}{dt^2} + B \frac{di}{dt} + Ci = D$$

(หรืออาจติดอยู่ในรูป v) โดยจะได้

Damping Factor, ความถี่ Resonant, และ Damping Ratio โดยทั่วไป.

$$\alpha = \frac{B}{2A} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{A}} \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{AC}} \quad (7.31)$$

และจะได้ homogeneous solution เป็น (7.19), (7.20), (7.22), และ (7.23) เมื่อ $\zeta > 1$, $\zeta = 1$, $0 < \zeta < 1$, และ $\zeta = 0$ ตามลำดับ และเมื่อแก้ particular solution ก็จะได้

คำตอบทั่วไปของวงจรอันดับสอง.

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = i_h(t) + \frac{D}{C} \quad (7.32)$$

► 7.4. กำลังไฟฟ้า

► กำลังไฟฟ้าและประสิทธิภาพ

จาก (6.8) เราจะสามารถคำนวณกำลังไฟฟ้า P ได้จาก

กำลังไฟฟ้า.

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} = \frac{dQ}{dt} \quad (7.33)$$

(Q คือความร้อนที่ได้จากวงจร) ซึ่งเราจะสามารถนำมาใช้คำนวณพลังงานที่เครื่องใช้ไฟฟ้านั้นถูกกระทำ โดยเนื่องจากพลังงานที่เครื่องใช้ไฟฟ้านี้ได้รับเป็นพลังงานความร้อน เราจึงต้องอาศัย *heat engine* ในการเปลี่ยนความร้อนมาเป็นพลังงานที่เราสามารถนำไปใช้ประโยชน์ต่อได้ จึงนิยามประสิทธิภาพ (efficiency: η) ของเครื่องใช้ไฟฟ้า (heat engine) นี้ว่า

นิยามประสิทธิภาพ.

$$\eta \equiv \frac{W}{Q} \quad (7.34)$$

หมายเหตุ: $Q_C = Q - W$ เป็นความร้อนที่ถูกปล่อยทิ้งลงใน *cold sink* ซึ่งโดยกฎข้อที่สองของ thermodynamics จะได้ว่า $Q_C > 0$ ดังนั้น $\eta < 1$

บทที่ 8 | ไฟฟ้ากระแสสลับ

► 8.1. นิยามของไฟฟ้ากระแสสลับ

► แหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ

วงจรทั้งหมดที่เราเจอมาเรียกว่าวงจรไฟฟ้ากระแสตรง (direct current หรือ DC) ซึ่งเกิดจากแหล่งกำเนิดที่ให้ความต่างศักย์คงที่ (หรือกระแสคงที่) ตลอดเวลา แต่วงจรไฟฟ้าที่เราใช้ในบ้านจะเป็นวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ (alternating current หรือ AC) ซึ่งเป็นวงจรที่แหล่งกำเนิดมี emf สลับทิศไปมาเป็นฟังก์ชันคาบ โดยไฟฟ้ากระแสสลับที่เราจะมาดูกันเราจะสมมติมาเป็นไฟฟ้ากระแสสลับรูปไซน์ (sinusoidal) ก็คือ

ไฟฟ้ากระแสสลับ.

$$(i \text{ or } v)(t) = (I \text{ or } V)_m \cos \omega t \quad (8.1)$$

เมื่อ I_m และ V_m คือแอมพลิจูดของกราฟไซน์และ ω เรียกว่าความถี่เชิงมุม โดย argument ที่อยู่ในฟังก์ชันเราจะเรียกว่าเฟส ณ ขณะนั้น และเราจะนิยามคาบ (T) และความถี่ (f) ตามปกติ:

นิยามคาบและความถี่.

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{และ} \quad f \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (8.2)$$

โดยยกตัวอย่างแหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับเช่น ลองพิจารณาสายไฟที่หมุนรอบแกน x และมีสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอขนาด B ชี้ในแกน $+y$ ก็จะได้ว่าถ้าเราหมุนลูปสายไฟนี้ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω แล้วก็จะได้ว่า

$$\Phi_B = BA \cos \omega t$$

ดังนั้น

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\omega \sin \omega t$$

แหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสสลับ.

$$\mathcal{E} = BA\omega \sin \omega t = BA\omega \cos(\omega t + \pi/2) \quad (8.3)$$

► ตัวต้านทาน, ตัวเก็บประจุ, และตัวเหนี่ยวนำ

ต่อมาเรามาพิจารณาอุปกรณ์ที่เราคุ้นเคยกัน เริ่มจากตัวต้านทานเมื่อให้กระแสที่ไหลผ่าน $i(t) = I_m \cos \omega t$ เนื่องจาก $v = iR$ จะได้ว่า

$$v(t) = Ri(t) = I_m R \cos \omega t = V_m \cos \omega t$$

ดังนั้น

เฟสของ v และ i บนตัวต้านทาน. เฟสของ v และ i จะตรงกันบนตัวต้านทาน R โดยที่

$$V_m = RI_m \quad (8.4)$$

พิจารณาตัวเก็บประจุเมื่อให้ $v(t) = V_m \cos \omega t$ จะได้ว่า

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = CV_m \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega CV_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

ดังนั้น

เฟสของ v และ i บนตัวเก็บประจุ. เฟสของ i จะนำ v อยู่ $\pi/2$ บนตัวเก็บประจุ C โดยที่

$$V_m = \left(\frac{1}{\omega C} \right) I_m \quad (8.5)$$

สุดท้าย พิจารณาตัวเหนี่ยวนำเมื่อให้ $i(t) = I_m \cos \omega t$ จะได้ว่า

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = LI_m \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega LI_m \sin \omega t = V_m \cos(\omega t + \pi/2)$$

ดังนั้น

เฟสของ v และ i บนตัวเหนี่ยวนำ. เฟสของ v จะนำ i อยู่ $\pi/2$ บนตัวเหนี่ยวนำ L โดยที่

$$V_m = (\omega L) I_m \quad (8.6)$$

สังเกตว่าสมการ (8.4) ถึง (8.6) หน้าตาคล้ายกับกฎของ Ohm เราจึงนิยามค่าความต้านทานเสมือนของตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำว่า รีแอกแตนซ์เชิงประจุและรีแอกแตนซ์เชิงเหนี่ยวนำ (capacitive/inductive reactance: X_C และ X_L) ดังนี้:

นิยาม Reactance.

$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C} \quad \text{และ} \quad X_L \equiv \omega L \quad (8.7)$$

► 8.2. เฟสเซอร์

► Steady State และ Frequency Domain

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ เช่นเดียวกับไฟฟ้ากระแสตรง ก็จะมี transient response ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นของวงจร แต่เมื่อเวลาผ่านไปเรื่อย ๆ ที่ steady state เราจะได้ว่าแอมพลิจูดจะคงที่และความถี่ของทั้งวงจรจะเท่ากันหมด โดยเราจะมาดูปรากฏการณ์ที่ steady state ดังนั้นต่อไปนี้จะสมมติว่า ω คงที่ทั้งวงจร

เราสามารถแทนฟังก์ชันไซน์ด้วยส่วนจริงของฟังก์ชัน exponential เชิงซ้อน:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(A_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) \equiv \text{Re}(\tilde{A} e^{j\omega t})$$

(ในการวิเคราะห์วงจรเราจะใช้ j แทนหน่วยจินตภาพเพราะ i ช้ำกับกระแส) โดยจำนวนเชิงซ้อน \tilde{A} เรียกว่าเป็นรูปในโดเมนเฟสเซอร์/ความถี่ (phasor/frequency domain) ของ $a(t)$ (โดยจะเรียก $a(t)$ ว่ารูป time domain) โดยเราจะแทน $\tilde{A} = A_m e^{j\phi}$ ด้วยสัญลักษณ์

นิยามสัญลักษณ์แทนจำนวนเชิงซ้อนในการวิเคราะห์วงจร.

$$A_m \angle \phi \equiv A_m e^{j\phi} = \tilde{A} \quad (8.8)$$

ซึ่งเป็นรูปที่มีประโยชน์ในการวิเคราะห์ steady state ของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ เพราะเราสามารถที่จะดำเนินการบวกและลบใน frequency domain เพื่อหา \tilde{I}_{total} หรือ \tilde{V}_{total} ได้เลย (เนื่องจากที่ steady state มี ω คงที่)

► Impedance และ Admittance

ต่อมาเรามาดู “กฎของ Ohm” ของแต่ละอุปกรณ์ใน frequency domain, จาก (8.4) ถึง (8.6) ก็จะได้

อุปกรณ์ต่าง ๆ ใน Frequency Domain. สำหรับตัวต้านทาน R :

$$\tilde{V} = R \tilde{I} \quad (8.9)$$

สำหรับตัวเก็บประจุ C :

$$\tilde{V} = \left(\frac{1}{j\omega C} \right) \tilde{I} \quad (8.10)$$

สำหรับตัวเหนี่ยวนำ L :

$$\tilde{V} = (j\omega L) \tilde{I} \quad (8.11)$$

เราจึงจะนิยามค่าอิมพีแดนซ์ (impedance: Z) และแอดมิตแทนซ์ (admittance: Y) ว่า

นิยาม Impedance และ Admittance.

$$Z \equiv \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} \quad \text{และ} \quad Y \equiv \frac{1}{Z} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}} \quad (8.12)$$

โดยที่ในส่วนของจริงและส่วนจินตภาพของ impedance จะเป็นส่วนความต้านทาน (resistance: R) และส่วน reactance (X) ตามลำดับ:

ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ Impedance.

$$\text{Re}(Z) = R \quad \text{และ} \quad \text{Im}(Z) = X \quad \text{หรือก็คือ} \quad Z = R + jX \quad (8.13)$$

และส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ admittance จะเป็นส่วนความนำไฟฟ้า (conductance: G) และส่วน susceptance (B) ตามลำดับ:

ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ Impedance.

$$\text{Re}(Y) = G \quad \text{และ} \quad \text{Im}(Y) = B \quad \text{หรือก็คือ} \quad Y = G + jB \quad (8.14)$$

และเราจะได้ impedance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ:

Impedance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ.

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (8.15)$$

admittance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ:

Admittance ของอุปกรณ์ต่าง ๆ.

$$Y_R = \frac{1}{R} \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L} \quad Y_C = j\omega C \quad (8.16)$$

► 8.3. การวิเคราะห์วงจรใน Frequency Domain

► กฎของ Kirchhoff ใน Frequency Domain

เนื่องจากฟังก์ชัน Re และ Im มีสมบัติเชิงเส้น การแทนฟังก์ชันรูปไซน์ใน frequency domain จึงมีประโยชน์ต่อการคำนวณด้วย เพราะกฎที่สำคัญต่าง ๆ ใน time domain ยังคงเป็นจริงใน frequency domain โดยที่สำคัญที่สุดเลยก็คือกฎของ Kirchhoff:

KCL ใน Frequency Domain.

$$\sum_{\text{junction}} \tilde{I} = 0 \quad (8.17)$$

และ

KVL ใน Frequency Domain.

$$\sum_{\text{loop}} \tilde{V} = 0 \quad (8.18)$$

► การรวม Impedance

พิจารณาการต่อวงจรแบบอนุกรม โดยมีอุปกรณ์อยู่สองชิ้นที่มี impedance Z_1 และ Z_2 จะได้ว่ากระแส \tilde{I} ที่ไหลผ่านอุปกรณ์ทั้งสองต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$\begin{aligned} v_{\text{total}}(t) &= \text{Re}(\tilde{V}_1 e^{j\omega t}) + \text{Re}(\tilde{V}_2 e^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}(\tilde{I} Z_1 e^{j\omega t}) + \text{Re}(\tilde{I} Z_2 e^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}(\tilde{I} (Z_1 + Z_2) e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\tilde{V}_{\text{total}} = \tilde{I} (Z_1 + Z_2)$ แล้วก็จะได้

$$Z_{\text{total}} = Z_1 + Z_2$$

ขยายเป็น n อุปกรณ์จะได้

การรวม Impedance แบบอนุกรม.

$$Z_{\text{total}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n \quad (8.19)$$

ต่อมาพิจารณาการต่อวงจรแบบขนาน โดยมีอุปกรณ์สองชิ้นเดิม จะได้ว่าความต่างศักย์ \tilde{V} คร่อมอุปกรณ์ทั้งสองต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$\begin{aligned} i_{\text{total}}(t) &= \text{Re}(\tilde{I}_1 e^{j\omega t}) + \text{Re}(\tilde{I}_2 e^{j\omega t}) \\ &= \text{Re}\left(\frac{\tilde{V}}{Z_1} e^{j\omega t}\right) + \text{Re}\left(\frac{\tilde{V}}{Z_2} e^{j\omega t}\right) \\ &= \text{Re}\left(\tilde{V} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\tilde{I}_{\text{total}} = \tilde{V} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)$ และจะได้

$$Y_{\text{total}} = \frac{1}{Z_{\text{total}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

ขยายเป็น n อุปกรณ์จะได้

การรวม Impedance แบบขนาน.

$$\frac{1}{Z_{\text{total}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \quad (8.20)$$

หรือ

การรวม Admittance แบบขนาน.

$$Y_{\text{total}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \quad (8.21)$$

► Resonance ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

จากในส่วนของวงจรอันดับสองในบทไฟฟ้ากระแสตรง เราได้ดูผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$A \frac{d^2 i}{dt^2} + B \frac{di}{dt} + Ci = D$$

ซึ่งจะมี particular solution เป็น $i_p(t) = \frac{D}{C}$ แต่ถ้าเราเปลี่ยนแหล่งกำเนิดเป็นแหล่งกำเนิดกระแสสลับก็ได้ (โดยพิจารณา KVL และให้ emf ที่แหล่งกำเนิด $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$)

$$A \frac{d^2 i}{dt^2} + B \frac{di}{dt} + Ci = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_m \sin \omega t = \mathcal{E}_m \omega \cos \omega t$$

โดยถ้าเดาคำตอบให้อยู่ในรูป $I_m \cos(\omega t - \phi)$ จะแก้ particular solution ได้เป็น

Particular Solution ของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ.

$$i_p(t) = I_m \cos(\omega t - \phi) \quad (8.22)$$

เมื่อ

$$\frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{B^2 + (A\omega - C/\omega)^2}} \quad \text{และ} \quad \phi = \arctan\left(\frac{B\omega}{C - A\omega^2}\right) \quad (8.23)$$

แต่เพราะส่วนที่เป็น homogeneous solution มีการ decay ลงเรื่อย ๆ จนที่ $t \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $i_h(t) \rightarrow 0$ ดังนั้น particular solution นี้จึงเป็น steady state ของวงจร ต่อมาสังเกตว่าความถี่ resonant ใน (7.31) เป็นค่าที่ทำให้เฟสของ driving emf และเฟสของกระแสตรงกัน (จะได้ $\phi = \pi/2$ ซึ่งตรงกับค่าต่างเฟสของ \cos ในกระแสและ \sin ใน emf) ดังนั้นเราอาจนิยามความถี่ resonant ใหม่ได้ดังนี้

นิยามความถี่ Resonant (แบบเฟส). ความถี่ resonant (ω_0) คือความถี่เชิงมุมที่ทำให้เฟสของกระแสและ emf ตรงกัน

หมายเหตุ: บางครั้งเราอาจจะนิยามความถี่ resonant เป็นความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดสูงสุด (ซึ่งสำหรับหลาย ๆ ระบบ นิยามแบบเฟสก็จะทำให้เกิดแอมพลิจูดสูงสุด) แต่เพื่อให้นิยามตรงกับ (7.31) จึงขอใช้นิยามแบบเฟส

เนื่องจาก $\tilde{V} = Z\tilde{I}$ ถ้าอยากให้เฟสตรงกัน Z ต้องมีแต่ส่วนความต้านทาน (reactance เป็น 0) ดังนั้น

ความถี่ Resonant. ความถี่ resonant (ω_0) คือความถี่เชิงมุมที่ทำให้

$$\text{Im}(Z) = 0 \quad (8.24)$$

ยกตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง. จงหาความถี่ resonant ของวงจรที่มีตัวต้านทาน R ต่อแบบอนุกรมกับวงจรที่มีตัวเหนี่ยวนำ L , ตัวเก็บประจุ C ต่อกันแบบขนาน โดยที่ตัวเก็บประจุ C มีความต้านทานภายใน r

วิธีทำ. เริ่มจากหา impedance รวมของวงจร LC แบบขนาน จะได้

$$\begin{aligned} Z_{LC} &= \frac{Z_L(Z_C + r)}{Z_L + Z_C + r} = \frac{j\omega L(\frac{1}{j\omega C} + r)}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + r} \\ &= \frac{1}{\text{const.}} \left(\text{const.} + j \left(-\frac{\omega L^2}{C} + \frac{L}{\omega C^2} + r^2 \omega L \right) \right) \end{aligned}$$

เนื่องจาก R ที่ต่อออกมามี impedance เป็นจำนวนจริงอยู่แล้ว จึงสามารถพิจารณาแค่ $\text{Im}(Z_{LC}) = 0$ ได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_0 L^2}{C} + \frac{L}{\omega_0 C^2} + r^2 \omega_0 L &= 0 \\ -\frac{L^2}{C} \omega_0^2 + \frac{L}{C^2} + r^2 L \omega_0^2 &= 0 \\ \left(r^2 L - \frac{L^2}{C} \right) \omega_0^2 &= -\frac{L}{C^2} \end{aligned}$$

ก็จะได้

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - r^2 C^2}}$$

เป็นความถี่ resonant □

► 8.4. กำลังไฟฟ้าและค่ายังผล

► กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย

ในไฟฟ้ากระแสตรงเราสามารถใช้นำกำลังไฟฟ้าในรูปของ \tilde{I} และ \tilde{V} ที่คงที่ ณ steady state ได้เลย แต่ไฟฟ้ากระแสสลับ ณ steady state เรายังมี $i(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันรูปไซน์ เราจึงพิจารณาการหากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยบนอุปกรณ์

โดยมีกระแส $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_1)$ และความต่างศักย์คร่อม $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_2)$ โดยเริ่มจากการหา กำลัง ณ เวลาใด ๆ:

$$\begin{aligned} p(t) &= i(t)v(t) = I_m V_m \cos(\omega t + \phi_i) \cos(\omega t + \phi_v) \\ &= \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\phi_i - \phi_v) + \frac{1}{2} I_m V_m \cos(2\omega t + \phi_i + \phi_v) \end{aligned}$$

จะได้กำลังเฉลี่ยในหนึ่งคาบเท่ากับ

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \frac{1}{2} I_m V_m \cos(\phi_i - \phi_v) \int_0^T dt + \frac{1}{T} \frac{1}{2} I_m V_m \int_0^T \cos(2\omega t + \phi_i + \phi_v) dt \end{aligned}$$

เนื่องจากพจน์หลังเป็นฟังก์ชัน \cos คาบ $T/2$ จึงเหลือ 0 ดังนั้น

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย.

$$P = \frac{1}{2} I_m V_m \cos \Delta\phi \quad (8.25)$$

โดยเราจะเรียก $\cos \Delta\phi$ ว่าอัตราส่วนกำลัง (power factor)

► กระแสและความต่างศักย์ยังผล

เวลามากระแสผ่านโหลดต้านทาน R เราอาจต้องการกระแสนี้ยังผล (effective current: I_{eff}) เพื่อที่จะนำมาคำนวณ กำลังไฟฟ้าแบบไฟฟ้ากระแสปกติ โดยพิจารณาโดยทั่วไป กระแสสลับ $i(t)$ ที่มีคาบ T (ไม่จำเป็นต้องเป็นรูปไซน์) จะได้

$$\begin{aligned} P &= I_{\text{eff}}^2 R \\ R \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt &= I_{\text{eff}}^2 R \\ I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \\ I_{\text{eff}} &= \sqrt{\langle i^2 \rangle} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ความต่างศักย์ยังผล (effective voltage: V_{eff}) เท่ากับ

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

ก็จะได้

กระแสและความต่างศักย์ยังผล.

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}} = \sqrt{\langle i^2 \rangle} \quad \text{และ} \quad V_{\text{eff}} = V_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \quad (8.26)$$

โดยถ้า $i(t)$ และ $v(t)$ เป็นฟังก์ชันรูปไซน์ เมื่ออินทิเกรตออกมาจะได้ว่า

กระแสและความต่าง rms ของไฟฟ้ากระแสสลับรูปไซน์.

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{และ} \quad V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (8.27)$$

และเราจะนิยาม \tilde{I}_{rms} และ \tilde{V}_{rms} ว่า

นิยามกระแสและความต่างศักย์ rms ในรูปเฟสเซอร์.

$$\tilde{I}_{\text{rms}} \equiv I_{\text{rms}} \angle \phi_i \quad \text{และ} \quad \tilde{V}_{\text{rms}} \equiv V_{\text{rms}} \angle \phi_v \quad (8.28)$$

► กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

สังเกตว่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยนี้เราสามารถหาได้จาก

$$P = \text{Re}(\tilde{I}_{\text{rms}}^* \tilde{V}_{\text{rms}}) = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{I}^* \tilde{V}) \quad (8.29)$$

(เมื่อ * แทน complex conjugate) ดังนั้นจึงนิยามกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน (complex power: \tilde{P}) ว่า

นิยามกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน.

$$\tilde{S} \equiv \tilde{I}_{\text{rms}}^* \tilde{V}_{\text{rms}} \quad (8.30)$$

หรือสำหรับไฟฟ้ากระแสสลับรูปไซน์:

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \tilde{I}^* \tilde{V} \quad (8.31)$$

ซึ่งจะมีหน่วย SI เป็น VA (volt-ampere) เพื่อแสดงให้เห็นว่าไม่ใช่กำลังจริง ๆ โดยจะเรียกขนาดของมันว่ากำลังปรากฏ (apparent power: S), ส่วนจริงของมัน (P) ตามด้านบน คือกำลังจริง (P), และส่วนจินตภาพเรียกว่ากำลังเชิงรีแอค (reactive power: Q) ซึ่งมีหน่วย SI เป็น VA เช่นกัน สรุปก็คือ

นิยามกำลังปรากฏ.

$$S \equiv |\tilde{S}| = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \quad (8.32)$$

(เหตุผลที่เรียกกำลังปรากฏเพราะเป็นค่าที่ดูเหมือนจะเป็นกำลังจริง ๆ แต่ไม่ใช่) และ

นิยามกำลังเชิงรีแอค.

$$Q \equiv \text{Im}(\tilde{S}) = I_{\text{rms}} V_{\text{rms}} \sin(\phi_v - \phi_i) \quad (8.33)$$

โดยกำลังเชิงซ้อนนี้ยังคงเป็นค่าที่อนุรักษ์เหมือนกับกำลังจริง กล่าวคือ

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \cdots + \tilde{S}_n \quad (8.34)$$

► การคิดค่าไฟ

ไฟฟ้าที่ใช้กันทั่วไปตามบ้านเรือนนั้นเป็นไฟฟ้ากระแสสลับที่มีค่า emf ยังผลประมาณ 220 V โดยการคิดค่าไฟนั้นอาจมีหรือไม่มีส่วนแรกที่ตั้งที่และมีอีกส่วนหลังที่แปรผันตามพลังงานที่ใช้ (นับเป็นเงินต่อหน่วยหรือต่อ kWh) เช่นในประเทศไทยมีอัตราค่าไฟดังนี้:

หน่วยที่ใช้ (หน่วย)	อัตราค่าไฟ (บาท/หน่วย)
1 – 15	2.3488
16 – 25	2.9882
26 – 35	3.2405
36 – 100	3.6237
101 – 150	3.7171
151 – 400	4.2218
401 ขึ้นไป	4.4217

บทที่ 9 | กฎอนุรักษ์

► 9.1. ประจุและพลังงาน

► ทฤษฎีบท Poynting

พิจารณางานที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้ากระทำกับประจุหนึ่ง:

$$dW = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{E} \cdot q\mathbf{v} dt$$

ดังนั้นกำลังเท่ากับ

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (9.1)$$

จาก

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

เมื่อนำไปแทนใน $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ แล้วใช้ product rule ก็จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (9.2)$$

เราจึงนิยาม Poynting vector:

นิยาม Poynting Vector.

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9.3)$$

นำ (9.2) แทนใน (9.1) และใช้ divergence theorem จะได้

ทฤษฎีบทของ Poynting.

$$P = \frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V u \, d\tau - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (9.4)$$

และถ้าสมมติว่าระบบไม่ได้นองานมากกระทำเลย (แต่โดยปกติแล้วไม่สามารถทำได้) จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (9.5)$$

คล้ายกับเป็น “สมการความต่อเนื่อง” ของพลังงาน

โดยสมการนี้ก็คือสมการอนุรักษ์พลังงานของแม่เหล็กไฟฟ้านั่นเอง เพราะเมื่ออินทิเกรตบน V ที่ใหญ่มาก ๆ (หรือก็คืออินทิเกรตทั่วทุกพื้นที่) จะได้ว่าอินทิกรัลลัพธ์พลังงาน (อินทิกรัลที่มี Poynting vector)

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dU_{em}}{dt} \quad (9.6)$$

กล่าวคือ พลังงานที่หายไปจากสนาม จะถูกถ่ายทอดมาเป็นงานที่กระทำกับประจุ

► 9.2. โมเมนตัม

► เทนเซอร์ความเค้นของ Maxwell

ประจุที่เคลื่อนที่จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าพุ่งออกจากประจุและสนามแม่เหล็กเป็นไปตามกฎมือขวา (จะพิสูจน์ในบทการแผ่รังสี) เราจะได้เห็นว่าแรงแม่เหล็กบนสองประจุที่เคลื่อนที่เข้าหากันในแนวตั้งฉากจะไม่เป็นไปตามกฎข้อที่สามของนิวตัน ดังนั้นจริง ๆ แล้วกฎข้อที่สามไม่เป็นจริงสำหรับแม่เหล็กไฟฟ้า จึงทำให้โมเมนตัมแบบดั้งเดิมไม่อนุรักษ์เช่นกัน เราจึงอาจจะหาวิธีเพิ่มพจน์โมเมนตัมบางอย่างที่เกิดจากสนามเพื่อให้โมเมนตัมอนุรักษ์

พิจารณาแรงทั้งหมดที่สนามกระทำใน V :

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau \quad (*)$$

พิจารณาการเขียนแรงต่อปริมาตร $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ ในรูปที่ติดแค่ \mathbf{E} และ \mathbf{B} จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (*1)$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

แทนใน (★1) จะได้ (บวกเข้าด้วย $1/\mu_0(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$)

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 \left((\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) + \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (\star 2)$$

ต่อมา เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) &= (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ \nabla(E^2) &= 2(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \end{aligned}$$

แทนใน (★2) ก็จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \varepsilon_0 \left((\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \nabla \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\star 3)$$

สามารถเขียนได้อยู่ในรูปที่ง่ายกว่าโดยเราจะนิยามเทนเซอร์ความเค้นของ Maxwell (Maxwell's stress tensor) ดังนี้

นิยามเทนเซอร์ความเค้นของ Maxwell.

$$T_{ij} \equiv \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (9.7)$$

เมื่อ δ_{ij} คือ Kronecker delta ซึ่งเท่ากับ 1 เมื่อ $i = j$ มิฉะนั้นเป็น 0

โดยสังเกตว่า

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{T}})_j &= \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial}{\partial i} T_{ij} \\ &= \varepsilon_0 \left((\nabla \cdot \mathbf{E})E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left((\nabla \cdot \mathbf{B})B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right) \end{aligned}$$

(เมื่อ $\mathbf{a} \cdot \vec{\mathbf{T}} = a_i T_{ij} \hat{\mathbf{j}}$ คือ column-wise dot product) จาก (★3) จึงได้ว่า

แรงต่อปริมาตร.

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (9.8)$$

ดังนั้นแทนกลับใน (★) จะได้

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau \quad (9.9)$$

โดยถ้าระบบเป็นระบบสนามสถิตก็จะได้ว่า

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad (9.10)$$

► กฎอนุรักษ์โมเมนตัม

ถ้าเรานิยามโมเมนตัมจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าว่า

นิยามโมเมนตัมจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า.

$$\mathbf{p}_{\text{em}} \equiv \mu_0 \epsilon_0 \int \mathbf{S} d\tau \quad (9.11)$$

โดยมีความหนาแน่นโมเมนตัม (\mathbf{g})

นิยามความหนาแน่นโมเมนตัม.

$$\mathbf{g} \equiv \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (9.12)$$

จาก (9.9) ก็จะได้

แรงลัพธ์ในรูปเทนเซอร์ความเค้น.

$$\mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g} d\tau + \oint_{\partial V} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad (9.13)$$

และจะได้เป็นกฎอนุรักษ์โมเมนตัม:

กฎอนุรักษ์โมเมนตัม.

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_{\text{em}}}{dt} + \oint \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad (9.14)$$

และถ้าไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงกล จะได้ “สมการความต่อเนื่อง” ของโมเมนตัม:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \quad (9.15)$$

สุดท้าย เช่นเดียวกับกฎอนุรักษ์พลังงาน พจน์ฟลักซ์โมเมนตัม (คือพจน์ที่มี stress tensor, โดยในกรณีนี้ flux density จะเป็น $-\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ เพราะในสมการเป็นบวก) จะเข้าใกล้ศูนย์ถ้าอินทิเกรตบนพื้นที่ที่ใหญ่มาก ๆ (อินทิเกรตทั่วทุกพื้นที่) ทำให้เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_{\text{em}}}{dt} \quad (9.16)$$

► โมเมนตัมเชิงมุม

เราสามารถนิยามโมเมนตัมเชิงมุมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้ารอบจุด ๆ หนึ่งได้เช่นกัน

นิยามความหนาแน่นโมเมนตัมเชิงมุม.

$$\mathbf{l} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \varepsilon_0 (\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \quad (9.17)$$

ก็จะได้

นิยามโมเมนตัมเชิงมุมจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า.

$$\mathbf{L}_{\text{em}} \equiv \int \mathbf{l} d\tau \quad (9.18)$$

โดยโมเมนตัมเชิงมุมนี้ก็อนุรักษ์กับ counterpart ของมันเช่นเดียวกับพลังงานและโมเมนตัมเชิงเส้น โดยจากทอร์ก:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} d\tau \\ &= \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) d\tau - \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{g} d\tau \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) d\tau = - \int_V (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} d\tau + \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot d\tau = \oint_{\partial V} (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot d\mathbf{a}$$

(เมื่อ $\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ เป็น column-wise cross product) ก็จะได้ว่า

ทอร์กในรูปเทนเซอร์ความเค้น.

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{l} d\tau + \oint_{\partial V} (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot d\mathbf{a} \quad (9.19)$$

หรือ

กฏอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม.

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{mech}}}{dt} = -\frac{d\mathbf{L}_{\text{em}}}{dt} + \oint (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot d\mathbf{a} \quad (9.20)$$

ถ้าไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม (เชิงกล) จะได้ “สมการความต่อเนื่อง” ของโมเมนตัมเชิงมุม:

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \quad (9.21)$$

และเนื่องจากพจน์ฟลักซ์โมเมนตัมเชิงมุม $(-\oint (\mathbf{r} \times \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot d\mathbf{a})$ จะเข้าใกล้ศูนย์ถ้าอินทิเกรตบนทุกพื้นที่ ทำให้เกิดการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{mech}}}{dt} = -\frac{d\mathbf{L}_{\text{em}}}{dt} \quad (9.22)$$

บทที่ 10 | สัมพัทธภาพกับแม่เหล็กไฟฟ้า

► 10.1. ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ

► สัจพจน์ของ Einstein

ในบทคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเราจะเห็นว่าแสงเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ แต่ความเร็วนี้เทียบกับอะไรล่ะ? นั่นเป็นคำถามที่นักฟิสิกส์ในยุคก่อน Einstein ได้ถกเถียงกันและได้ตั้งทฤษฎีต่าง ๆ มากมาย จนกระทั่ง Einstein ได้ลองคิดว่า จริง ๆ แล้วความเร็วแสงนี้อาจเท่ากันหมดไม่ว่าจะเป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อยใด ๆ ก็ตาม และความคิดเรื่องสัมพัทธภาพแบบดั้งเดิม (Galilean relativity) ที่เป็นการนำความเร็วมาบวกกันและ simultaneity ของทุกรอบอ้างอิงเหมือนกัน อาจไม่เป็นจริงก็ได้ โดย Einstein ได้ตั้งข้อสมมติไว้ดังนี้:

สัจพจน์ของ Einstein (Einstein's Postulates).

1. กฎของฟิสิกส์สามารถใช้ได้บนกรอบอ้างอิงเฉื่อยทุกรอบ
2. ความเร็วแสงในสุญญากาศมีค่าเท่ากันสำหรับผู้สังเกตในทุก ๆ กรอบอ้างอิงเฉื่อย

► เรขาคณิตของสัมพัทธภาพ

จาก postulate แด่สองข้อนั้น เราสามารถได้ผลลัพธ์ต่าง ๆ มากมาย

ลองพิจารณารถบรรทุกคันหนึ่งที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ไปทางขวาเทียบกับพื้น โดยมีแหล่งกำเนิดแสงอยู่ตรงกลาง เมื่อให้แหล่งกำเนิดปล่อยแสงมาในทุกทิศ ในมุมมองผู้สังเกตบนพื้นจะเห็นแสงกระทบกับผนังด้านซ้ายก่อนด้านขวา แต่ในมุมมองผู้สังเกตบนรถ แสงจะกระทบทั้งสองฝั่งพร้อม ๆ กัน จึงสรุปได้ว่า

ความไม่คงที่ของความเป็นพร้อมกัน (Simultaneity). เหตุการณ์สองเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นพร้อมกันในกรอบอ้างอิงหนึ่ง อาจเกิดขึ้นไม่พร้อมกันในอีกกรอบอ้างอิง

ต่อมา พิจารณารถคันเดิมโดยสมมติว่าสูง h แต่คราวนี้มาลองดูเวลาที่แสงใช้ในการเดินทางจากเพดานลงมาถึงพื้น สำหรับผู้สังเกตบนรถ แสงเคลื่อนที่จากบนลงล่างเป็นเส้นตรงในแนวดิ่ง จะได้ว่าเวลา

$$\Delta \bar{t} = \frac{h}{c}$$

แต่สำหรับผู้สังเกตบนพื้น พื้นของรถเคลื่อนที่ออกไปแล้ว $v\Delta t$ ดังนั้นแสงจะต้องเคลื่อนที่แบบเอียง ๆ ก็จะได้

$$c\Delta t = \sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{h}{c}$$

ดังนั้นถ้าเรานิยาม

นิยาม Lorentz Factor.

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.1)$$

ก็จะได้ว่า

การขยายขนาดของเวลา (Time Dilation).

$$\Delta \bar{t} = (1/\gamma) \Delta t \quad (10.2)$$

หมายเหตุ: สมการนี้ใช้ได้เฉพาะผลต่างเวลาที่สองเหตุการณ์เกิดขึ้นที่ตำแหน่งเดียวกันเทียบกับกรอบอ้างอิงรถ โดยเหตุผลจะได้อีกที

ต่อมา ให้รถนี้ยาว $\Delta \bar{x}$ และ Δx สำหรับผู้สังเกตบนรถและบนพื้น ตามลำดับ เราจะแสดงว่าความยาวทั้งสองนี้ไม่เท่ากัน พิจารณาเวลาที่ใช้ในการที่ปล่อยแสงจากฝั่งซ้ายของรถให้เคลื่อนที่ไปทางขวาของรถที่มีกระจกวางไว้อยู่แล้วให้สะท้อนกลับมาที่ฝั่งซ้าย สำหรับผู้สังเกตบนรถ จะต้องใช้เวลา

$$\Delta \bar{t} = 2 \frac{\Delta \bar{x}}{c}$$

สำหรับผู้สังเกตบนพื้น แบ่งเป็นเวลา Δt_1 และ Δt_2 คือเวลาที่แสงใช้เคลื่อนที่ไปและกลับ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c} \quad \text{และ} \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c}$$

ก็จะได้ว่า

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v} \quad \text{และ} \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}$$

ดังนั้น

$$\Delta t = 2 \frac{\Delta x}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

จาก (10.2) จึงได้ว่า

การหดตัวของความยาว (Length Contraction).

$$\Delta \bar{x} = \gamma \Delta x \quad (10.3)$$

สุดท้าย สมมติข้าง ๆ ถนนมีกำแพงที่มีแถบสีน้ำเงินถูกทาไว้ 1 เมตรเหนือถนนสำหรับผู้สังเกตบนพื้น สมมติมีคน ๆ หนึ่งอยู่บนรถ ถ้าคนนั้นโผล่หัวออกมาจากหน้าต่างแล้วใช้ฟูกันทาสีแดงบนกำแพงเหนือถนน 1 เมตรสำหรับเขา ถ้าสรุปแล้วแถบสีแดงไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับแถบสีน้ำเงินจะเกิดข้อขัดแย้ง เพราะโดยสัญพจน์ของ Einstein ในมุมมองผู้สังเกตบนพื้นจะได้ผลลัพธ์ตรงกันข้าม จึงสรุปได้ว่า

การแปลงของมิติตั้งฉากกับความเร็ว. มิติตั้งฉากกับความเร็วมิได้เกิดการหดหรือขยาย

► การแปลง Lorentz

เราจะนิยามเหตุการณ์ (event) คือชุดของตำแหน่ง (x, y, z) และเวลา t โดยสัมพัทธภาพแบบ Galilean การแปลงพิกัดของเหตุการณ์ $E(x, y, z, t)$ จากกรอบอ้างอิง S เป็น $E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ ในกรอบ \bar{S} ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v\hat{x}$ เทียบ S สามารถทำได้โดย

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x - vt \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= t \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

ซึ่งจะเรียกว่าการแปลง Galilean (Galilean transformation)

แต่ถ้าเป็นการแปลงแบบสัมพัทธภาพพิเศษ เราจะได้ว่า

$$x = d + vt$$

เมื่อ d คือระยะจาก \bar{O} ไปยัง \bar{A} (ซึ่งคือจุดในแนวแกน \bar{x} ที่เกิด E) ณ เวลา t (ซึ่งเป็นระยะที่วัดในกรอบ S) โดยถ้าเป็นสัมพัทธภาพ Galilean เราจะได้พจน์ d นี้ก็คือ \bar{x} และได้ดัง (10.4) แต่จาก (10.3) เรารู้แล้วว่าจริง ๆ แล้ว

$$d = \frac{1}{\gamma} \bar{x}$$

ดังนั้น

$$\bar{x} = \gamma(x - vt) \quad (\diamond 1)$$

แต่ถ้าเราคิดในทางกลับกันโดยวัด \bar{d} ในกรอบ \bar{S} จะได้ว่า

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \quad (\diamond 2)$$

จาก $(\diamond 1)$ และ $(\diamond 2)$ จะได้แก่ว่า

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (\diamond 3)$$

ดังนั้นโดยสมการ $(\diamond 1)$ และ $(\diamond 3)$ เราจะได้การแปลงที่สมบูรณ์ ซึ่งเรียกว่าเป็นการแปลง Lorentz (Lorentz transformation) ดังนี้

การแปลง Lorentz (Lorentz Transformation).

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \gamma(x - vt) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

พิจารณานาฬิกาหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u ในกรอบ S จะได้ว่า

$$u = \frac{dx}{dt}$$

แต่ใน S' จาก (10.5) จะได้ว่า

$$d\bar{x} = \gamma(dx - v dt)$$

และ

$$d\bar{t} = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)$$

ก็จะได้อัตราเร็วของนาฬิกาใน S' เท่ากับ

$$\bar{u} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - v/c^2 dx)} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

ได้เป็นสมการรวมความเร็วสัมพัทธ์แบบสัมพัทธภาพพิเศษ

กฎการรวมความเร็วของ Einstein.

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2} \quad (10.6)$$

► 10.2. โครงสร้างของปริภูมิเวลา

► โฟร์เวกเตอร์

การแปลง Lorentz สามารถเขียนได้อยู่ในรูปที่อ่านง่ายขึ้นถ้าเรานิยาม

$$x^0 \equiv ct, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$$

และ $x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$ จะได้

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ \bar{x}^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ \bar{x}^2 &= x^2 \\ \bar{x}^3 &= x^3 \end{aligned} \right\}$$

หรือก็คือ

การแปลง Lorentz ในรูปเมทริกซ์.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

ถ้าเรานิยามเมทริกซ์ตรงกลางว่าเป็น Λ จะได้ว่า

การแปลงของการกระจัด.

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (10.8)$$

โดยการคำนวณใน Einstein summation ให้รวมทุก ๆ ค่าที่เป็นไปได้ของทุก index ที่ปรากฏอยู่สองตัวต่อพจน์ เรา
จะเรียกชุดของตัวเลขสี่ตัวที่แปลงในแบบเดียวกับ (x^0, x^1, x^2, x^3) ว่า **โพร์เวกเตอร์ (4-vector)**

โดยเราจะมีผลคูณเชิงสเกลาร์ของโพร์เวกเตอร์ดังนี้

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของโพร์เวกเตอร์.

$$-a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \quad (10.9)$$

โดยลองพิจารณาการแปลงพิกัดจาก S ไปเป็น S' ซึ่งเป็นการแปลง Lorentz ในแนวแกน x เช่นเดิม จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -\bar{a}^0\bar{b}^0 + \bar{a}^1\bar{b}^1 + \bar{a}^2\bar{b}^2 + \bar{a}^3\bar{b}^3 &= -\gamma^2(a^0 - \beta a^1)(b^0 - \beta b^1) + \gamma^2(a^1 - \beta a^0)(b^1 - \beta b^0) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= \gamma^2(-(1 - \beta^2)a^0b^0 + (1 - \beta^2)a^1b^1) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \end{aligned}$$

เนื่องจากพจน์สามพจน์ด้านหลังเป็นเพียง dot product ของทรีเวกเตอร์ (3-vector) จึงทำให้สมการนี้ก็ต้องเป็นจริง
เมื่อ S' เคลื่อนที่ในแนวอื่นด้วย จึงได้ว่าผลคูณเชิงสเกลาร์นี้ *invariant* ภายใต้การแปลง Lorentz

โดยเพื่อให้ง่ายต่อการดูเครื่องหมายติดลบตรงพิกัดเวลา เราจะนิยามเวกเตอร์ *covariant* a_μ ดังนี้

นิยามเวกเตอร์ Covariant.

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \equiv (-a^0, a^1, a^2, a^3) \quad (10.10)$$

โดยเราจะเรียกโพร์เวกเตอร์ a^μ ปกติว่าเป็นเวกเตอร์ *contravariant* เราจะเรียกเทนเซอร์ที่อธิบายการแปลงจาก
contravariant เป็น covariant vector ว่าเป็นเทนเซอร์เทนเซอร์เมทริก Minkowski (Minkowski metric: $g_{\mu\nu}$)

นิยาม Minkowski Metric.

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

หมายเหตุ: บางที่อาจนิยาม $g_{\mu\nu}$ แบบกลับเครื่องหมาย แต่สุดท้ายแล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ก็จะ *invariant* อยู่ดี
ดังนั้นเราสามารถเขียนผลคูณเชิงสเกลาร์ได้ว่า

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของโฟร์เวกเตอร์.

$$a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \quad (10.12)$$

คือผลคูณเชิงสเกลาร์ของโฟร์เวกเตอร์ a^μ และ b^μ ซึ่งจะ *invariant* ภายใต้การแปลง Lorentz

สุดท้ายเราจะนิยามค่าที่เกี่ยวข้องกับความเร็วเพิ่มเติมอีกค่าคือ *rapidity* (θ)

นิยาม Rapidity.

$$\theta \equiv \text{artanh}(v/c) \quad (10.13)$$

ซึ่งบางครั้งอาจมีประโยชน์กว่าความเร็ว เพราะจะได้

$$\beta = \tanh \theta \quad \text{และ} \quad \gamma = \cosh \theta$$

จาก (10.7) จะเห็นว่าการแปลง Lorentz คล้ายกับการหมุนเลย โดยเฉพาะถ้าปริภูมิเวลาเป็นสองมิติจะได้

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}$$

และจาก (10.6) จะได้

กฎการรวม Rapidity.

$$\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC} \quad (10.14)$$

► Invariant Interval

เช่นเดียวกับเวกเตอร์ปกติ เราสามารถนิยาม “ขนาด” ของโฟร์เวกเตอร์ได้จากการนำเวกเตอร์มาคูณเชิงสเกลาร์กับตัวมันเอง

$$a^\mu a_\mu$$

โดยเราจะแบ่งเป็น 3 กรณี

นิยาม Spacelike, Timelike, Lightlike. เราจะเรียกโฟร์เวกเตอร์ a^μ ว่าเหมือนปริภูมิ (spacelike) ถ้า

$$a^\mu a_\mu > 0$$

จะเรียกว่าเหมือนเวลา (timelike) ถ้า

$$a^\mu a_\mu < 0$$

และจะเรียกว่าเหมือนแสง (lightlike) ถ้า

$$a^\mu a_\mu = 0$$

สมมติเรามีเหตุการณ์ A และ B ซึ่งมีโฟร์เวกเตอร์ที่อธิบายตำแหน่งในปริภูมิเวลา x_A^μ และ x_B^μ ตามลำดับ และให้ $\Delta x^\mu \equiv x_A^\mu - x_B^\mu$ เราจะนิยาม *invariant interval* ของการกระจัดระหว่างสองเหตุการณ์นั้นว่า

นิยาม Invariant Interval.

$$I \equiv \Delta x^\mu \Delta x_\mu = -c^2 t^2 + d^2 \quad (10.15)$$

เมื่อ t เวลากระจัดระหว่างสองเหตุการณ์นั้น และ d คือระยะระหว่างสองเหตุการณ์นั้น

▶ แผนภาพปริภูมิเวลา

ถ้าอยากวาด trajectory ของอนุภาคหนึ่งออกมา เราสามารถนำมันมาพล็อตในแผนภาพปริภูมิเวลา (หรือแผนภาพ Minkowski) ได้ โดยให้แกนตั้งเป็นแกน ct และแกนนอน (หรือระนาบนอน) เป็นแกน x (และ y) เราจะเรียกเส้นที่ระบุการเดินทางของอนุภาคนั้นว่าเป็น *world line* ของอนุภาค กรวยที่กวาดโดยแสงจากจุดกำเนิดในทิศเวลาเป็นบวก จะเรียกว่า *forward light cone* และกรวยที่ไปในฝั่งเวลาติดลบเรียกว่า *backward light cone* โดยภายใน forward light cone เราจะเรียกว่าเป็นอนาคตของอนุภาค ภายใน backward light cone เรียกว่าเป็นอดีตของอนุภาค และบริเวณนอกเหนือจากนั้นทั้งหมดเรียกว่าเป็นปัจจุบันของอนุภาค สังเกตว่าไม่ว่าอนุภาคนั้นจะเดินทางอย่างไรก็ตาม อนุภาคนั้นไม่มีทางที่จะส่งผลกระทบใด ๆ ต่อเหตุการณ์ทุกเหตุการณ์ในบริเวณปัจจุบันของอนุภาคเลย

เนื่องจาก interval $I = x^2 - c^2 t^2$ invariant บนการแปลง Lorentz ดังนั้นไม่เราจะแปลง Lorentz ด้วยกรอบอ้างอิงเฉื่อยใด ๆ เหตุการณ์ทุกเหตุการณ์จะต้องอยู่บน hyperboloid (หรือ hyperbola ในกรณีมีแค่แกน x) เดียวกันในปริภูมิเวลา ถ้า interval จาก O ไปที่เหตุการณ์เหมือนเวลา เหตุการณ์จะอยู่บน *hyperboloid of two sheets* แต่ถ้าเหมือนปริภูมิ เหตุการณ์นั้นจะอยู่บน *hyperboloid of one sheet* จึงทำให้ถ้าการกระจัดระหว่างเหตุการณ์สองเหตุการณ์เหมือนเวลา ถ้าให้เหตุการณ์หนึ่งเป็นจุดกำเนิด ไม่ว่าจะแปลง Lorentz ยังไง เหตุการณ์อีกเหตุการณ์ก็จะต้องอยู่ใน light cone เดิม (เพราะจะต้องอยู่บน hyperboloid of two sheets เดียวกันกับตอนก่อนที่จะ transform และเหตุการณ์ไม่สามารถ teleport ไปอีกฝั่งของ hyperboloid ได้ภายใต้การแปลง Lorentz) จึงทำให้เรานิยามความสัมพันธ์แบบเกิดก่อน-เกิดหลัง (causality) ระหว่างสองเหตุการณ์ได้ เมื่อการกระจัดระหว่างสองเหตุการณ์เหมือนเวลา (หรือเหมือนแสง) (แต่ในทางกลับกัน ถ้าการกระจัดเหมือนปริภูมิ จะทำให้ความเกิดก่อน-หลังของเหตุการณ์ขึ้นอยู่กับกรอบอ้างอิงที่เราพิจารณา)

► 10.3. กลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

► เวลาแท้และความเร็วแท้

เราจะนิยามเวลาแท้ (proper time: τ) คือเวลาจริง ๆ ที่ผ่านไป เมื่อวัดโดยกรอบอ้างอิงของอนุภาคนั้น ๆ หรือ

นิยามเวลาแท้.

$$d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt \quad (10.16)$$

โดยจะเห็นได้ว่าเวลาแท้ invariant บนการแปลง Lorentz

และจะนิยามความเร็วแท้ (proper velocity: η) คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ต่อหน่วยเวลาแท้ของวัตถุนั้น ๆ หรือก็คือ

นิยามความเร็วแท้.

$$\eta \equiv \frac{d\ell}{d\tau} \quad (10.17)$$

โดยจะเร็วความเร็ว u ปกติ ($d\ell/dt$) ว่าความเร็วสามัญ (ordinary velocity) และได้

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u \quad (10.18)$$

โดยเราจะนิยามโฟร์เวกเตอร์ของความเร็วแท้ (4-velocity) คือ

นิยามโฟร์เวกเตอร์ของความเร็วแท้.

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (10.19)$$

ซึ่งมี component เวลา (η^0) เท่ากับ

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.20)$$

เราสามารถเห็นได้ว่าความเร็วแท้เป็นโฟร์เวกเตอร์จริง ๆ เพราะเวกเตอร์นี้แปลงแบบ Lorentz ภายใต้การเปลี่ยนกรอบอ้างอิงเช่นเดียวกับการกระจัด:

การแปลงของความเร็วแท้.

$$\bar{\eta}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \eta^\nu \quad (10.21)$$

หมายเหตุ: จะเห็นว่าความเร็วแท้เหมือนเวลาเสมอเพราะ

$$\eta^\mu \eta_\mu = \frac{-c^2}{1 - u^2/c^2} + \eta \cdot \eta = \frac{-c^2}{1 - u^2/c^2} + \frac{u^2}{1 - u^2/c^2} = -c^2 < 0 \quad (10.22)$$

► โมเมนตัมและพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ

เราจะนิยามโมเมนตัมตามที่ใช้ในสัมพัทธภาพพิเศษด้วยความเร็วแทนความเร็วสามัญ:

นิยามโมเมนตัมเชิงสัมพัทธภาพ.

$$\mathbf{p} \equiv m\boldsymbol{\eta} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.23)$$

ซึ่งเป็น component ปริภูมิของโฟร์เวกเตอร์พลังงาน-โมเมนตัม (เรียกสั้น ๆ ว่าโฟร์เวกเตอร์โมเมนตัม)

นิยามโฟร์เวกเตอร์โมเมนตัม.

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu \quad (10.24)$$

โดยที่ component เวลาของโฟร์เวกเตอร์นี้คือ

$$p^0 = m\eta^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.25)$$

ซึ่ง Einstein ได้ระบุไว้ว่า $p^0 c$ นี้คือพลังงาน:

นิยามพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ.

$$E \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (10.26)$$

จะเห็นว่าพลังงานนี้ไม่เป็นศูนย์แม้มองในกรอบอ้างอิงที่ทำให้อนุภาคอยู่นิ่ง โดยเราจะเรียกพลังงานนี้ว่าพลังงานนิ่ง (rest energy):

นิยามพลังงานนิ่ง.

$$E_{\text{rest}} \equiv mc^2 \quad (10.27)$$

และส่วนที่เหลือของพลังงานเมื่อนำ rest energy ออกจะเป็นพลังงานจลน์

นิยามพลังงานจลน์เชิงสัมพัทธภาพ.

$$E_{\text{kin}} \equiv E - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) \quad (10.28)$$

ซึ่งจากการทดลองต่าง ๆ โดยนักฟิสิกส์ สรุปออกมาได้ว่า

กฎอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม. ในทุก ๆ ระบบปิด พลังงานและโมเมนตัมเชิงสัมพัทธภาพจะอนุรักษ์

หมายเหตุ: มวลในที่นี้จะไม่อนุรักษ์ แต่จะอนุรักษ์ร่วมกับพลังงานในรูป rest energy

ต่อมา พิจารณาผลคูณของสเกลาร์ของ p^μ กับตัวมันเอง:

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -E^2/c^2 + p^2$$

แต่จาก (10.22) จะได้ว่า $p^\mu p_\mu = m^2 \eta^\mu \eta_\mu = -m^2 c^2$ ดังนั้น

สมการพลังงาน-โมเมนตัม.

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \quad (10.29)$$

ซึ่งสามารถนำมาใช้หาพลังงานเมื่อรู้โมเมนตัมและหาโมเมนตัมเมื่อรู้พลังงานได้

► กลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

สังเกตว่าในกลศาสตร์ดั้งเดิม ถ้าอนุภาคไม่มีมวล พลังงานและโมเมนตัมจะเป็น 0 แต่ในสัมพัทธภาพพิเศษเราสามารถมีอนุภาคไร้มวลที่มีพลังงานและโมเมนตัมได้ (เพราะจาก (10.23) และ (10.26) ถ้า $u = c$ จะได้ $0/0$ ซึ่งเป็นรูปไม่กำหนด) โดยจาก (10.29) ก็จะได้ว่า

สมการพลังงาน-โมเมนตัมของอนุภาคไร้มวล.

$$E = pc \quad (10.30)$$

และจากกลศาสตร์ควอนตัมเราสามารถใส่สูตรของ Planck มาใช้ร่วมกันในโจทย์ปัญหาได้:

สูตรของ Planck.

$$E = h\nu \quad (10.31)$$

เมื่อ h คือค่าคงที่ Planck (Planck's constant) มีค่าประมาณ 6.626×10^{-34} J s

และสุดท้าย เช่นเดียวกับกลศาสตร์ดั้งเดิม เราจะเรียกการชนที่อนุรักษ์พลังงานจลน์ (และสุดท้ายจะอนุรักษ์มวลด้วย) ว่าเป็นการชนแบบยืดหยุ่น

ตัวอย่าง (การกระเจิง Compton). โฟตอนที่มีความยาวคลื่น λ_0 พุ่งเข้าไปในแนวแกน $+x$ เข้าชนกับอิเล็กตรอนซึ่งอยู่นิ่ง ทำให้โฟตอน “แดง” ออกจากอิเล็กตรอนด้วยมุมที่เบนออกไปจากแกน x ขนาด θ ขึ้นไปในแนวแกน y จงหาความยาวคลื่น λ ของโฟตอนหลังชนในรูป θ

วิธีทำ. เริ่มจากการหา E ในรูป θ ก่อน กำหนดให้ก่อนชนโฟตอนมีพลังงาน $E_0 = hc/\lambda_0$ และมุมที่อิเล็กตรอนเบนออกไปจากแกน x คือ ϕ พิจารณากฎอนุรักษ์โมเมนตัมในแกน y จะได้

$$\begin{aligned} p_e \sin \phi &= p_\gamma \sin \theta \\ \sin \phi &= \frac{E}{p_e c} \sin \theta \end{aligned} \quad (\oplus 1)$$

ในแนวแกน x ได้

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{E_0}{c} = p_\gamma \cos \theta + p_e \cos \phi \\
 &\stackrel{①}{=} \frac{E}{c} \cos \theta + p_e \sqrt{1 - \left(\frac{E}{p_e c} \sin \theta \right)^2} \\
 (E_0 - E \cos \theta)^2 &= p_e^2 c^2 - E^2 \sin^2 \theta \\
 p_e^2 c^2 &= E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2 \quad (\otimes 2)
 \end{aligned}$$

สุดท้าย พิจารณาอนุรักษพลังงาน

$$\begin{aligned}
 E_0 + m_e c^2 &= E + E_e \\
 &= E + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} \\
 &\stackrel{②}{=} E + \sqrt{m_e^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2} \\
 (E_0 + m_e c^2 - E)^2 &= m_e^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E \cos \theta + E^2 \\
 \cancel{E_0^2} + \cancel{m_e^2 c^4} + \cancel{E^2} + 2E_0 m_e c^2 - 2E_0 E - 2E m_e c^2 &= \cancel{m_e^2 c^4} + \cancel{E_0^2} - 2E_0 E \cos \theta + \cancel{E^2} \\
 E_0 m_e c^2 &= E(E_0 + m_e c^2 - E \cos \theta) \\
 E &= \frac{1}{(1 - \cos \theta)/m_e c^2 + 1/E_0} \quad (10.32)
 \end{aligned}$$

เมื่อนำ (10.31) แทนเข้าไปจะได้ว่า

การกระเจิง Compton.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (10.33)$$

โดยเราจะเรียกพจน์ $\lambda_c = h/m_e c \approx 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ ว่าความยาวคลื่น Compton ของอิเล็กตรอน □

► พลศาสตร์เชิงสัมพัทธภาพ

เนื่องจากอนุรักษโมเมนตัมและพลังงานเป็นจริงเมื่อใช้โมเมนตัมและพลังงานเชิงสัมพัทธภาพ กฎข้อที่สองของนิวตันก็เป็นจริงเช่นกัน:

กฎข้อที่สองของนิวตัน.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (10.34)$$