

# **Quantum Mechanics Notes**

by Ham Kittichet

April 14, 2025

## ► Table of Contents

<b>บทที่ 1. ฟังก์ชันคลื่น</b>	<b>1</b>
► 1.1. ฟังก์ชันคลื่น . . . . .	1
► 1.2. ตำแหน่ง . . . . .	1
► 1.3. โมเมนตัม . . . . .	3
► 1.4. หลักความไม่แน่นอนของ Heisenberg . . . . .	4
<b>บทที่ 2. สมการ Schrödinger ที่ไม่ขึ้นกับเวลา</b>	<b>5</b>
► 2.1. สมการ Schrödinger ที่ไม่ขึ้นกับเวลา . . . . .	5

# บทที่ 1 | ฟังก์ชันคลื่น

## ► 1.1. ฟังก์ชันคลื่น

### ► ฟังก์ชันคลื่นและสมการ Schrödinger

ในกลศาสตร์ดั้งเดิม เราจะอธิบายอนุภาคหนึ่ง ๆ ด้วยตำแหน่งและโมเมนตัม แต่ในกลศาสตร์ควอนตัม เราจะใช้สิ่งที่เรียกว่าฟังก์ชันคลื่น (wavefunction:  $\Psi(x, t)$  ในหนึ่งมิติ) ซึ่งมีโดเมนเป็น  $\mathbb{C}$

การเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งและโมเมนตัมเมื่อเวลาผ่านไปในกลศาสตร์ดั้งเดิมจะถูกอธิบายด้วยกฎของนิวตัน แต่ในกลศาสตร์ควอนตัม เราจะอธิบายวิวัฒนาการของฟังก์ชันคลื่นด้วยสมการ Schrödinger:

**สมการ Schrödinger.** อนุภาคที่มีฟังก์ชันคลื่น  $\Psi$  จะมีวิวัฒนาการเป็นไปตามสมการ

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (1.1)$$

เมื่อ  $\hbar = h/2\pi \approx 1.055 \times 10^{-34}$  Js คือค่าคงที่ของ Planck แบบลดรูป (และ  $h \approx 6.626 \times 10^{-34}$  Js คือค่าคงที่ของ Planck)

## ► 1.2. ตำแหน่ง

### ► การวัดตำแหน่งและการ Normalize

ในกลศาสตร์ควอนตัม อนุภาคไม่ได้มีตำแหน่งที่แน่นอนเหมือนกับกลศาสตร์ดั้งเดิม แต่จะถูกอธิบายด้วยความน่าจะเป็น โดยมี  $|\Psi(x, t)| = \Psi \cdot \Psi^*$  เป็นความหนาแน่นความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคที่  $x$  หรือก็คือ

**ฟังก์ชันคลื่นกับการวัดตำแหน่ง.**

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = P(a \leq x \leq b) \quad (1.2)$$

โดยเมื่อมีการวัดเกิดขึ้นแล้ววัดได้ตำแหน่ง  $x = d$  ที่  $t = 0$  ฟังก์ชันคลื่นจะยุบตัว (*collapse*) ให้ในครั้งถัดไป ถ้าวัดตำแหน่งของอนุภาคทันทีหลังจากการวัดครั้งแรก ก็จะวัดได้ตำแหน่งเดิม หรือก็คือจะได้ว่า  $\Psi$  ใหม่จะมีบริเวณที่  $|\Psi| \neq 0$  ที่เดียวคือที่  $x = d$  เป็น  $\infty$

สังเกตว่าจาก (1.2) ถ้าอยากให้  $|\Psi(x, t)|^2$  มีความหมายเชิงสถิติ เราจะต้องทำให้การอินทิเกรตฟังก์ชันนี้ทั่วทุกบริเวณเป็น 1 ซึ่งเรียกว่าเป็นการ *normalize* ฟังก์ชันคลื่น:

**เงื่อนไขการ Normalize.**

$$\oint |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (1.3)$$

หมายเหตุ: จะนิยามให้  $\oint$  เป็นการอินทิเกรตทั่วทุกบริเวณ

โดยเราสามารถทำเช่นนี้ได้กับทุก ๆ ฟังก์ชันคลื่นโดยการคูณด้วยค่าคงที่เข้าไป (จริง ๆ แล้วยังมีฟังก์ชันที่ทำให้อินทิกรัลออกมาที่ไม่สามารถ normalize ได้ แต่เราจะสมมติว่าฟังก์ชันคลื่นเหล่านั้นไม่สามารถพบได้หรือ *non-physical* โดยจากเงื่อนไขว่าทุก ๆ ฟังก์ชันคลื่นสามารถ normalize ได้ทำให้  $|\Psi| \sim o(1/\sqrt{x})$  ด้วยที่  $\infty$  เพราะมิฉะนั้นอินทิกรัลจะลู่ออก) และเมื่อ normalize แล้ว ยังได้อีกว่าวิวัฒนาการของฟังก์ชันคลื่นจะไม่ทำให้อินทิกรัลใน (1.3) เปลี่ยนค่าซึ่งพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

**บทตั้ง.**

$$\frac{d}{dt} \oint |\Psi(x, t)|^2 dx = 0 \quad (1.4)$$

พิสูจน์. เริ่มจากการหา  $\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \Psi = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \quad (*)$$

แต่จากสมการ Schrödinger (1.1) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi \\ \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^* \end{aligned}$$

นำไปแทนใน (\*) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 &= \Psi^* \left( \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V \Psi \right) + \Psi \left( -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^* \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dt} \oint |\Psi|^2 dx = \oint \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \oint \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx = 0$$

(เพราะ  $\Psi$  ที่  $\infty$  ต้องเป็น 0 มิฉะนั้นจะไม่สามารถ normalize ได้) ตามต้องการ □

### ► 1.3. โมเมนตัม

เมื่อเวลาผ่านไป ฟังก์ชันคลื่น  $\Psi$  จะวิวัฒนาการไปเรื่อย ๆ ตามสมการ (1.1) ก็จะทำให้  $\langle x \rangle$  เปลี่ยนไปตามเวลาด้วย เราจึงอาจจะอยากทราบ “ความเร็ว” ของอนุภาคนี้:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \oint \frac{\partial}{\partial t} (x |\Psi|^2) dx = \oint x \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 dx \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \frac{i\hbar}{2m} \oint x \frac{\partial}{\partial x} \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx \\ &\stackrel{\text{IBP}}{=} \frac{i\hbar}{2m} \left( x \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) - \oint \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \oint \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) dx \\ &\stackrel{\text{IBP}}{=} -\frac{i\hbar}{m} \oint \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \end{aligned}$$

โดยเราจะเรียกอนุพันธ์นี้ว่าเป็นค่าคาดหวังของความเร็ว  $\langle v \rangle$  และจะได้โมเมนตัม

**ค่าคาดหวังของโมเมนตัม.**

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -i\hbar \oint \left( \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx \quad (1.6)$$

สังเกตว่าค่าคาดหวังของตำแหน่งและโมเมนตัมอยู่ในรูปคล้าย ๆ กันคือเป็นอินทิกรัลทั่วทุกบริเวณของ  $\Psi^*$  คูณกับการกระทำบางอย่างกับฟังก์ชันคลื่น  $\Psi$  เราจึงนิยามโอเปอเรเตอร์ตำแหน่ง ( $\hat{x}$ ) และโมเมนตัม ( $\hat{p}$ ):

**นิยามโอเปอเรเตอร์ตำแหน่ง (ในหนึ่งมิติ).**

$$\hat{x} \equiv x \quad (1.7)$$

**นิยามโอเปอเรเตอร์โมเมนตัม (ในหนึ่งมิติ).**

$$\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.8)$$

เราสามารถหาโอเปอเรเตอร์ของค่าทางกลศาสตร์ต่าง ๆ (เช่น  $Q(x, p)$ ) ได้โดยการนำโอเปอเรเตอร์  $\hat{p}$  และ  $\hat{x}$  มาประกอบกัน จึงจะตั้งข้อสมมติไปก่อนว่า

การหาค่าคาดหวังสำหรับค่าทางกลศาสตร์.

$$\langle Q(x, p) \rangle = \oint \Psi^* \hat{Q} \Psi \, dx = \oint \Psi^* (Q(\hat{x}, \hat{p})) \Psi \, dx \quad (1.9)$$

## ► 1.4. หลักความไม่แน่นอนของ Heisenberg

ในคลื่นเชือกปกติ ถ้าเราสั่นมันให้มีความยาวคลื่นที่แน่นอน เราจะไม่สามารถตำแหน่งของคลื่นได้ชัดเจน แต่ในทางกลับกัน ถ้าเราสั่นมันให้เกิดลูกคลื่นลูกเดียวที่มีตำแหน่งแน่นอน เราจะไม่สามารถหาความยาวคลื่นได้ ฟังก์ชันคลื่นก็เป็นเช่นนั้นเดียวกัน โดยโมเมนตัมกับความยาวคลื่นมีความสัมพันธ์กันด้วยสูตรความยาวคลื่น De Broglie:

ความยาวคลื่น De Broglie.

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (1.10)$$

และ Heisenberg ก็ได้พบว่าความไม่แน่นอนของความยาวคลื่น (โมเมนตัม) และตำแหน่งนั้น มีขอบเขตล่างดังนี้:

หลักความไม่แน่นอนของ Heisenberg.

$$\Delta x \Delta p = \sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.11)$$

(ซึ่งจะพิสูจน์ในบทที่ 3)

## บทที่ 2 | สมการ Schrödinger ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

### ► 2.1. สมการ Schrödinger ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

#### ► การแยกตัวแปร