Numerical analysis.

Sugak A.M.

Spring 2016

Оглавление

1 Равновесие текучей среды

§1.1 Равновесие текучей среды

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{V})$$
$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f}$$
$$\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{S} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho Q \qquad \rho(\vec{r}.t),\ \vec{V}(\vec{r},t), E(\vec{r},t)$$
$$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}),\ \vec{q} = \vec{q}(E)$$

Definition. Текучая среда - среда, которая приходит в движение под действием сколь угодно малого касательного напряжения.

pic

Note. Если среда находится в состоянии покая, значит в ней нет касательных напряжений.

pic2

$$\vec{P_n} = P_n\vec{(n)}$$

$$\vec{P_1} = P_{11}\vec{e_1}$$
$$\vec{P_2} = P_{22}\vec{e_2}$$
$$\vec{P_3} = P_{33}\vec{e_3}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ P_{ii}, & i = j \end{cases}$$

matrix

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

Note (Формула Коши)**.**

$$\vec{p_n} = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{n}$$
$$p_n \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}0 & \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$
$$p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = \underbrace{-P}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -p \cdot \overleftrightarrow{E}$$

Note (Закон Паскаля)**.** При равновесии текучей среды нормальное напряжение на произвольно выбранной площадке не зависит от ее ориентации.

Уравнение переноса импульса.

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) \cdot \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = (-\frac{\partial p}{\partial x_1}, -\frac{\partial p}{\partial x_2}, -\frac{\partial p}{\partial x_3}) = \underbrace{-\nabla p}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = -\nabla P$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} \text{ — Уравнение Эйлера равновесия текучей среды}$$

Definition. $\rho = \rho(p)$ — **баротропность**.

$$pV = \frac{R}{\mu}MT$$

$$pdV = \frac{R}{\mu}dmT$$

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Изотермический процесс.

$$T = T_0,\ \rho = \frac{p\mu}{RT_0} = cp$$

Адиабатический процесс.

$$\rho = cp^{-\frac{1}{\gamma}},\ \gamma = \frac{c_p}{c_\rho}$$

Definition.

$$\mathscr{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} \text{ — потенциал давления}$$

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x_1} = \frac{d\mathscr{P}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$\nabla \mathscr{P} = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla \times \vec{f} = 0$$

$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$\nabla \mathscr{P} = \nabla \Pi$$

$$\nabla(\mathscr{P} + \Pi) = 0$$

$$\mathscr{P} + \Pi = const$$

Note. При баротропном равновесии текучей среды в потенциальном поле сил сумма потенциала давления и потенциала силы не меняется.

Corollary 1.0.1.

$$\Pi = const \implies \mathscr{P} = const \implies \begin{cases} p = const \\ \rho = cosnt \\ T = const \end{cases}$$

§1.2 Уравнение равновесия в тяжелой среде

$$\frac{1}{\rho(p)}\nabla p = \vec{f}$$
$$\nabla[\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = \nabla \cdot \vec{f} = -\nabla^2 \Pi$$
$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\varepsilon_0 q$$
$$\vec{f}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^2 r}$$
$$\vec{f}_{1,2} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$\nabla^2 \Pi = 4\pi\gamma\rho$$
$$\nabla \cdot [\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = -4\pi\gamma\rho(p)$$

Несжимаемая среда:

$$\rho = \rho_0 = const(p)$$

Definition. $\nabla^2 p = -4\pi\gamma\rho_0^2$ — Уравнение Пуассона

Theorem 1.1 (Обобщенная теорема Гаусса)**.**

$$\int_W \nabla \otimes \overleftrightarrow{T} dw = \oint_S \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$
$$\nabla \otimes T = \lim_{\delta w \to 0} \frac{1}{\delta w}\int_{\delta w} (\nabla \otimes \overleftrightarrow{T}) dw = \lim_{\delta w \to 0} \frac{1}{\delta w}\oint_{\delta S} \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$
$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta w \to 0} \frac{1}{\delta w}\oint_{\delta S} \vec{n} \cdot \vec{f} dS$$
$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}\oint_S -\gamma\frac{\rho\frac{4}{3}\pi\delta^3}{\delta^2}\delta^2 dw = -\gamma\rho 4\pi = -4\pi\gamma\rho$$
$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$
$$-\nabla^2 \Pi = -4\Pi\gamma\rho$$
$$\nabla^2 \Pi = 4\pi\gamma\rho$$
$$\nabla^2 \varphi = -\varepsilon_0 q$$

pic3

$$\vec{F}_c = -m w^2 \vec{r}$$

$$\vec{f_g} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$$
$$\vec{f_0} = w^2\vec{r} = w^2 r\vec{e}_r$$
$$\vec{f} = \vec{f_g} + \vec{f_0} = -g\vec{e}_z + w^2 r\vec{e}_r \iff \vec{f} = -\nabla\Pi$$
$$\Pi = gz - \frac{w^2r^2}{2} + C$$
$$\mathscr{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho_0} = \frac{p - p_0)}{\rho_0}$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + C + \frac{p - p_0}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const$$

Поверхность $p = p_A$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p_A}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} = const$$
$$z(r) = \frac{w^2r^2}{2g} + C$$
$$V = \pi R^2 H$$
$$\int_0^R 2\pi r z(r) dr$$