Numerical analysis.

Sugak A.M.

Spring 2016

Оглавление

1 Равновесие текучей среды

§1.1 Равновесие текучей среды

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{V})$$
$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f}$$
$$\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{S} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho Q \qquad \rho(\vec{r}.t),\ \vec{V}(\vec{r},t), E(\vec{r},t)$$
$$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}),\ \vec{q} = \vec{q}(E)$$

Definition. Текучая среда - среда, которая приходит в движение под действием сколь угодно малого касательного напряжения.

pic

Note. Если среда находится в состоянии покая, значит в ней нет касательных напряжений.

pic2

$$\vec{P}_n = P_n\vec{(}n)$$

$$\vec{P}_1 = P_{11}\vec{e}_1$$
$$\vec{P}_2 = P_{22}\vec{e}_2$$
$$\vec{P}_3 = P_{33}\vec{e}_3$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ P_{ii}, & i = j \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

Note (Формула Коши)**.**

$$\vec{p}_n = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{n}$$
$$p_n \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}0 & \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$
$$p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = \underbrace{-P}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -p \cdot \overleftrightarrow{E}$$

Note (Закон Паскаля)**.** При равновесии текучей среды нормальное напряжение на произвольно выбранной площадке не зависит от ее ориентации.

Уравнение переноса импульса.

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{P} + \rho\cdot\vec{f}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})\cdot\begin{pmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{pmatrix} = (-\frac{\partial p}{\partial x_1}, -\frac{\partial p}{\partial x_2}, -\frac{\partial p}{\partial x_3}) = \underbrace{-\nabla p}$$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} = -\nabla P$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{f} \text{ — Уравнение Эйлера равновесия текучей среды}$$

Definition. $\rho = \rho(p)$ — **баротропность**.

$$pV = \frac{R}{\mu}MT$$

$$pdV = \frac{R}{\mu}dmT$$

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Изотермический процесс.

$$T = T_0,\ \rho = \frac{p\mu}{RT_0} = cp$$

Адиабатический процесс.

$$\rho = cp^{-\frac{1}{\gamma}},\ \gamma = \frac{c_p}{c_\rho}$$

Definition.

$$\mathscr{P}(p) = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)} \text{ — потенциал давления}$$

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x_1} = \frac{d\mathscr{P}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$\nabla\mathscr{P} = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla\times\vec{f} = 0$$

$$\vec{f} = -\nabla\Pi$$

$$\nabla\mathscr{P} = \nabla\Pi$$

$$\nabla(\mathscr{P} + \Pi) = 0$$

$$\mathscr{P} + \Pi = const$$

Note. При баротропном равновесии текучей среды в потенциальном поле сил сумма потенциала давления и потенциала силы не меняется.

Corollary 1.0.1.

$$\Pi = const \implies \mathscr{P} = const \implies \begin{cases} p = const \\ \rho = cosnt \\ T = const \end{cases}$$

§1.2 Уравнение равновесия в тяжелой среде

$$\frac{1}{\rho(p)}\nabla p = \vec{f}$$
$$\nabla[\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = \nabla \cdot \vec{f} = -\nabla^2\Pi$$
$$\vec{f} = -\nabla\Pi$$

$$\nabla^2\varphi = -\varepsilon_0 q$$
$$\vec{f}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^2 r}$$
$$\vec{f}_{1,2} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$\nabla^2\Pi = 4\pi\gamma\rho$$
$$\nabla \cdot [\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = -4\pi\gamma\rho(p)$$

Несжимаемая среда:

$$\rho = \rho_0 = const(p)$$

Definition. $\nabla^2 p = -4\pi\gamma\rho_0^2$ — Уравнение Пуассона

Theorem 1.1 (Обобщенная теорема Гаусса)**.**

$$\int_W \nabla \otimes \overleftrightarrow{T} dw = \oint_S \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$
$$\nabla \otimes T = \lim_{\delta w \to 0}\frac{1}{\delta w}\int_{\delta w}(\nabla \otimes \overleftrightarrow{T})dw = \lim_{\delta w \to 0}\frac{1}{\delta w}\oint_{\delta S}\vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$
$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta w \to 0}\frac{1}{\delta w}\oint_{\delta S}\vec{n} \cdot \vec{f} dS$$
$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta \to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}\oint_S -\gamma\frac{\rho\frac{4}{3}\pi\delta^3}{\delta^2}\delta^2 dw = -\gamma\rho 4\pi = -4\pi\gamma\rho$$
$$\vec{f} = -\nabla\Pi$$
$$-\nabla^2\Pi = -4\Pi\gamma\rho$$
$$\nabla^2\Pi = 4\pi\gamma\rho$$
$$\nabla^2\varphi = -\varepsilon_0 q$$

pic3

$$\vec{F}_c = -mw^2\vec{r}$$

$$\vec{f_g} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$$
$$\vec{f_0} = w^2\vec{r} = w^2r\vec{e}_r$$
$$\vec{f} = \vec{f_g} + \vec{f_0} = -g\vec{e}_z + w^2r\vec{e}_r \iff \vec{f} = -\nabla\Pi$$
$$\Pi = gz - \frac{w^2r^2}{2} + C$$
$$\mathscr{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho_0} = \frac{p - p_0)}{\rho_0}$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + C + \frac{p - p_0}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const$$

Поверхность $p = p_A$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p_A}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} = const$$
$$z(r) = \frac{w^2r^2}{2g} + C$$
$$V = \pi R^2 H$$
$$\int_0^R 2\pi r z(r) dr$$

§1.3 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{a}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_E = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Definition. $(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \geqslant 0 \ \forall \vec{x}$

A — **Положительно опр-я матрица**

Definition. $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) \iff a_{ij} = a_{ji}, \ A^T = A$

$$\lambda_{min}\|\vec{x}\|^2 \leqslant (A\vec{x}, \vec{x}) \leqslant \lambda_{max}\|\vec{x}\|^2$$

§1.4 Обзоор метода Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{nn}^{(n-1)} \cdot x_n = b_n^{(n-1)}$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Note. Процедура выбора ведущего элемента позволяет избежать накопления ошибки в методе Гаусса.

1. Выбор ведущего элемента по столбцу
2. Выбор ведущего элемента по всей матрице

Note. Оценка числа операций в методе Гаусса

$$N \sim \frac{2}{3}n^3$$

Решение вырожденных систем

$$\det A = 0$$

Note (Альтернатива Фредгольма)**.**

$$Rank(A) = Rank(A, \vec{b}) \implies \text{решений бесконечно много}$$

$$Rank(A \neq Rank(A, \vec{b}) \implies \text{решений не существует}$$

§1.5 Решение систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки

$$
\begin{aligned}
&b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\
&a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\
&\dots \\
&a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i \\
&\dots \\
&a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1}a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix}
b_1 & c_1 & \dots & \\
a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\
 & a_i & b_i & c_i \dots \\
 & \dots & & \\
\dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
\dots & a_n & b_n &
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \underbrace{-\frac{c_1}{b_1}}_{\alpha_1} x_2 + \underbrace{\frac{d_1}{b_1}}_{\beta_1} \\
&a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1) + \beta_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\
&(a_2\alpha_1 + b_2)x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2\beta_1 \\
&x_2 = \underbrace{\frac{c_2}{a_2\alpha_1 + b_2}}_{\alpha_2} + \underbrace{\frac{d_2 - a_2\beta_1}{a_2\alpha_1 + b_2}}_{\beta_2} = \alpha_2 + x_3 + \beta_2 \\
&\vdots \\
&\begin{cases}
x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_i \\
\alpha_i = -\frac{c_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i} \\
\beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1}b_i}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Сначала прямым проходом находим коэффициенты α и β, потом обратным проходом находим неизвестные $x_n, x_{n-1}, \dots$.

$$N \sim 6n$$

Note.

$$\frac{\|\vec{x}^* - \overline{\vec{x}}\|}{\|\vec{x}\|} \leqslant \varepsilon$$

Если данное условие не выполняется, это называется накоплением ошибки.

Note.

$$|b_k| \geqslant |a_k| + |c_k|$$

Достаточное условие ненакопления ошибки.