Numerical analysis.

Sugak A.M.

Spring 2016

Оглавление

1 Равновесие текучей среды **2**
1.1 Равновесие текучей среды . . . 3
1.2 Уравнение равновесия в тяжелой среде . . . 6

1 Равновесие текучей среды

§1.1 Равновесие текучей среды

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{V})$$
$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f}$$
$$\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{S} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho Q$$
$$\rho(\vec{r}.t),\ \vec{V}(\vec{r},t), E(\vec{r},t)$$
$$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}),\ \vec{q} = \vec{q}(E)$$

Определение. Текучая среда — среда, которая приходит в движение под действием сколь угодно малого касательного напряжения.

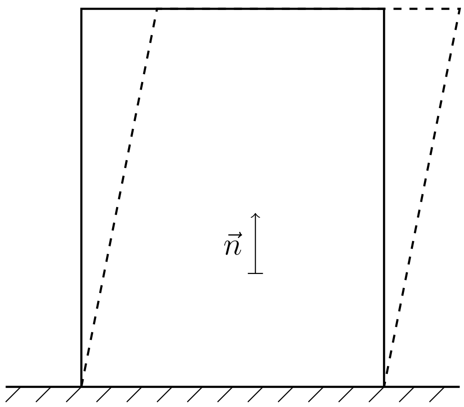

Рис. 1.1: Напряжения в твёрдом теле

Замечание. Если среда находится в состоянии покая, значит в ней нет касательных напряжений.

pic2

$$\vec{P_n} = P_n\vec{(n)}$$

$$\vec{P_1} = P_{11}\vec{e_1}$$
$$\vec{P_2} = P_{22}\vec{e_2}$$
$$\vec{P_3} = P_{33}\vec{e_3}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ P_{ii}, & i = j \end{cases}$$

matrix

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

Замечание (Формула Коши)**.**

$$\vec{p}_n = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{n}$$

$$p_n \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = \underbrace{-p}_{\text{давление}}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -p \cdot \overleftrightarrow{E}$$

Замечание (Закон Паскаля)**.** При равновесии текучей среды нормальное напряжение на произвольно выбранной площадке не зависит от ее ориентации.

Уравнение переноса импульса.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x_1} & -\frac{\partial p}{\partial x_2} & -\frac{\partial p}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{градиент}}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = -\nabla P$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f} \text{ — Уравнение Эйлера равновесия текучей среды}$$

Определение. $\rho = \rho(p)$ — **баротропность**.

$$pV = \frac{R}{\mu} MT$$

$$p\,dV = \frac{R}{\mu}\,dm\,T$$

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Изотермический процесс.

$$T = T_0,\ \rho = \frac{p\mu}{RT_0} = cp$$

Адиабатический процесс.

$$\rho = cp^{-\frac{1}{\gamma}},\ \gamma = \frac{c_p}{c_\rho}$$

Определение.

$$\mathscr{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} \text{ — потенциал давления}$$

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x_1} = \frac{d\mathscr{P}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$\nabla \mathscr{P} = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla \times \vec{f} = 0$$

$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$\nabla \mathscr{P} = \nabla \Pi$$

$$\nabla(\mathscr{P} + \Pi) = 0$$

$$\mathscr{P} + \Pi = const$$

Замечание. При баротропном равновесии текучей среды в потенциальном поле сил сумма потенциала давления и потенциала силы не меняется.

Следствие 1.0.1.

$$\Pi = const \implies \mathscr{P} = const \implies \begin{cases} p = const \\ \rho = cosnt \\ T = const \end{cases}$$

§1.2 Уравнение равновесия в тяжелой среде

$$\frac{1}{\rho(p)}\nabla p = \vec{f}$$
$$\nabla[\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = \nabla \cdot \vec{f} = -\nabla^2 \Pi$$
$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\varepsilon_0 q$$
$$\vec{f}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^2 r}$$
$$\vec{f}_{1,2} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$\nabla^2 \Pi = 4\pi\gamma\rho$$
$$\nabla \cdot [\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = -4\pi\gamma\rho(p)$$

Несжимаемая среда:

$$\rho = \rho_0 = const(p)$$

Определение. $\nabla^2 p = -4\pi\gamma\rho_0^2$ — Уравнение Пуассона

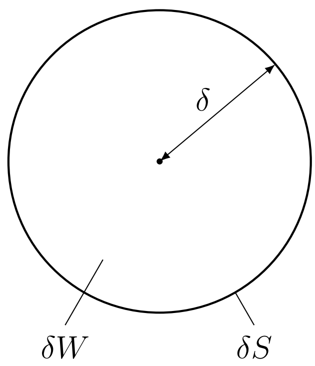

Рис. 1.2: Рассматриваемый шар обладает радиусом δ, объёмом δW и поверхностью δS

Теорема 1.1 (Обобщенная теорема Гаусса)**.**

$$\int_W \nabla \otimes \overleftrightarrow{T} dW = \oint_S \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$

$$\nabla \otimes T = \lim_{\delta W \to 0} \frac{1}{\delta W} \int_{\delta W} (\nabla \otimes \overleftrightarrow{T}) dW = \lim_{\delta W \to 0} \frac{1}{\delta W} \oint_{\delta S} \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta W \to 0} \frac{1}{\delta W} \oint_{\delta S} \vec{n} \cdot \vec{f} dS$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3} \oint_S -\gamma \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\delta^3}{\delta^2} \delta^2 dW = -\gamma\rho 4\pi = -4\pi\gamma\rho$$

$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$-\nabla^2 \Pi = -4\Pi\gamma\rho$$

$$\nabla^2 \Pi = 4\pi\gamma\rho$$

$$\nabla^2 \varphi = -\varepsilon_0 q$$

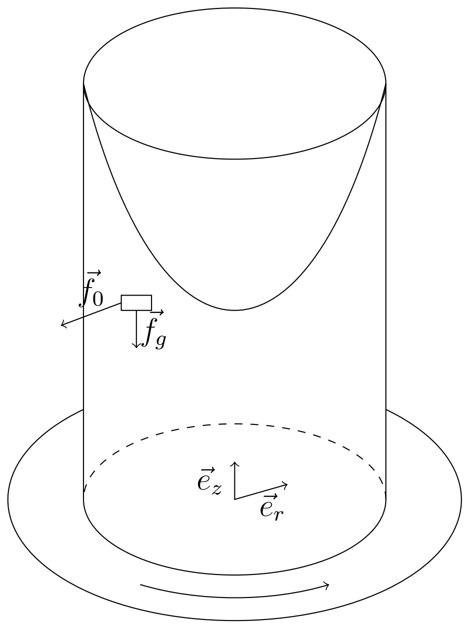

Рис. 1.3: На малый объём действует сила тяжести $\vec{f}_g$ и центробежная сила $\vec{f}_0$

$$\vec{F}_c = -mw^2\vec{r}$$

$$\vec{f_g} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$$
$$\vec{f_0} = w^2\vec{r} = w^2 r\vec{e}_r$$
$$\vec{f} = \vec{f_g} + \vec{f_0} = -g\vec{e}_z + w^2 r\vec{e}_r \iff \vec{f} = -\nabla\Pi$$
$$\Pi = gz - \frac{w^2r^2}{2} + C$$
$$\mathscr{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho_0} = \frac{p-p_0}{\rho_0}$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + C + \frac{p-p_0}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const$$

Поверхность $p = p_A$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p_A}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{w^2r^2}{2} = const$$
$$z(r) = \frac{w^2r^2}{2g} + C$$
$$V = \pi R^2 H$$
$$\int_0^R 2\pi r z(r) dr$$