Numerical analysis.

Sugak A.M.

Spring 2016

Оглавление

1 Равновесие текучей среды

§1.1 Равновесие текучей среды

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{V})$$
$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f}$$
$$\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{S} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho Q$$
$$\rho(\vec{r}.t),\ \vec{V}(\vec{r},t), E(\vec{r},t)$$
$$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}),\ \vec{q} = \vec{q}(E)$$

Определение. Текучая среда — среда, которая приходит в движение под действием сколь угодно малого касательного напряжения.

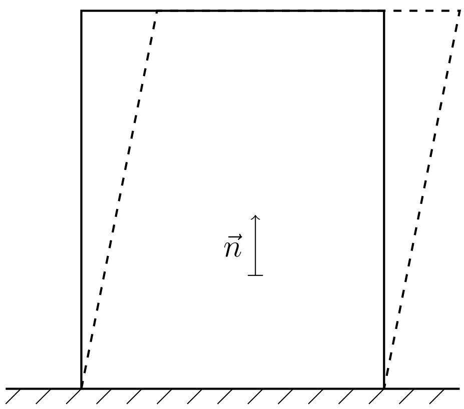

Рис. 1.1: Напряжения в твёрдом теле

Замечание. Если среда находится в состоянии покоя, значит в ней нет касательных напряжений.

pic2

$$\vec{P}_n = P_n\vec{(n)}$$

$$\vec{P}_1 = P_{11}\vec{e}_1$$
$$\vec{P}_2 = P_{22}\vec{e}_2$$
$$\vec{P}_3 = P_{33}\vec{e}_3$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ P_{ii}, & i = j \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

Замечание (Формула Коши)**.**

$$\vec{p}_n = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{n}$$

$$p_n \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = \underbrace{-p}_{\text{давление}}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -p \cdot \overleftrightarrow{E}$$

Замечание (Закон Паскаля)**.** При равновесии текучей среды нормальное напряжение на произвольно выбранной площадке не зависит от ее ориентации.

Уравнение переноса импульса.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x_1} & -\frac{\partial p}{\partial x_2} & -\frac{\partial p}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{градиент}}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = -\nabla P$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f} \text{ — Уравнение Эйлера равновесия текучей среды}$$

Определение. $\rho = \rho(p)$ — **баротропность**.

$$pV = \frac{R}{\mu} MT$$

$$p\,dV = \frac{R}{\mu}\,dm\,T$$

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Изотермический процесс.

$$T = T_0,\ \rho = \frac{p\mu}{RT_0} = cp$$

Адиабатический процесс.

$$\rho = cp^{-\frac{1}{\gamma}},\ \gamma = \frac{c_p}{c_\rho}$$

Определение.

$$\mathscr{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} \text{ — потенциал давления}$$
$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x_1} = \frac{d\mathscr{P}}{dp}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}$$
$$\nabla \mathscr{P} = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\nabla \times \vec{f} = 0$$
$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$
$$\nabla \mathscr{P} = \nabla \Pi$$
$$\nabla(\mathscr{P} + \Pi) = 0$$
$$\mathscr{P} + \Pi = const$$

Замечание. При баротропном равновесии текучей среды в потенциальном поле сил сумма потенциала давления и потенциала силы не меняется.

Следствие 1.0.1.

$$\Pi = const \implies \mathscr{P} = const \implies \begin{cases} p = const \\ \rho = cosnt \\ T = const \end{cases}$$

§1.2 Уравнение равновесия в тяжелой среде

$$\frac{1}{\rho(p)}\nabla p = \vec{f}$$

$$\nabla[\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = \nabla \cdot \vec{f} = -\nabla^2\Pi$$

$$\vec{f} = -\nabla\Pi$$

$$\nabla^2\varphi = -\varepsilon_0 q$$

$$\vec{f}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2\vec{r}}{r^2r}$$

$$\vec{f}_{1,2} = -\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla^2\Pi = 4\pi\gamma\rho$$

$$\nabla \cdot [\frac{1}{\rho(p)}\nabla p] = -4\pi\gamma\rho(p)$$

Несжимаемая среда:

$$\rho = \rho_0 = const(p)$$

Определение. $\nabla^2 p = -4\pi\gamma\rho_0^2$ — Уравнение Пуассона

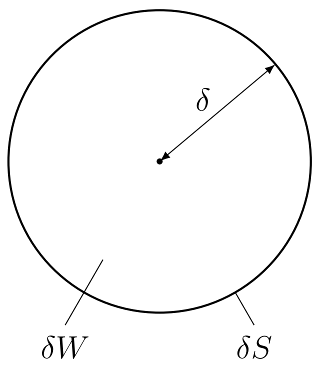

Рис. 1.2: Рассматриваемый шар обладает радиусом δ, объёмом δW и поверхностью δS

Теорема 1.1 (Обобщенная теорема Гаусса)**.**

$$\int_W \nabla \otimes \overleftrightarrow{T} dW = \oint_S \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$

$$\nabla \otimes T = \lim_{\delta W \to 0} \frac{1}{\delta W} \int_{\delta W} (\nabla \otimes \overleftrightarrow{T}) dW = \lim_{\delta W \to 0} \frac{1}{\delta W} \oint_{\delta S} \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta W \to 0} \frac{1}{\delta W} \oint_{\delta S} \vec{n} \cdot \vec{f} dS$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3} \oint_S -\gamma \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\delta^3}{\delta^2} \delta^2 dW = -\gamma\rho 4\pi = -4\pi\gamma\rho$$

$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$-\nabla^2 \Pi = -4\Pi\gamma\rho$$

$$\nabla^2 \Pi = 4\pi\gamma\rho$$

$$\nabla^2 \varphi = -\varepsilon_0 q$$

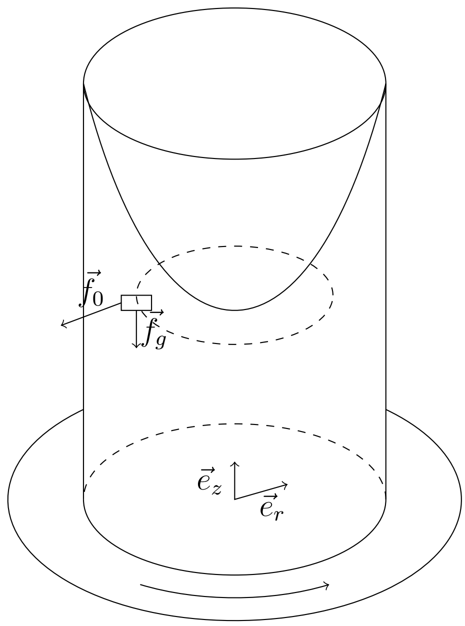

Рис. 1.3: На малый объём действует сила тяжести $\vec{f}_g$ и центробежная сила $\vec{f}_0$

$$\vec{F}_c = -m\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{f_g} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$$
$$\vec{f_0} = \omega^2\vec{r} = \omega^2 r\vec{e}_r$$
$$\vec{f} = \vec{f_g} + \vec{f_0} = -g\vec{e}_z + \omega^2 r\vec{e}_r \iff \vec{f} = -\nabla\Pi$$
$$\Pi = gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + C$$
$$\mathscr{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho_0} = \frac{p - p_0}{\rho_0}$$
$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + C + \frac{p - p_0}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const$$

Поверхность $p = p_A$

$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{p_A}{\rho_0} = const$$
$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} = const$$
$$z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$$
$$V = \pi R^2 H$$
$$\int_0^R 2\pi r z(r) dr$$

§1.3 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{a}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

$$\|A\|_2 \leqslant \|A\|_E = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Определение. $(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \geqslant 0 \ \forall \vec{x}$

A — **Положительно опр-я матрица**

Определение. $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) \iff a_{ij} = a_{ji}, \ A^T = A$

$$\lambda_{min}\|\vec{x}\|^2 \leqslant (A\vec{x}, \vec{x}) \leqslant \lambda_{max}\|\vec{x}\|^2$$

§1.4 Обусловленность СЛАУ

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\vec{x}^*) = \|\vec{x}^* - \vec{x}\|$$

$$\delta(\vec{x}^*) = \frac{\Delta\vec{x}^*}{\|\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{x}^* - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \approx \frac{\|\vec{x}^* - \vec{x}\|}{\|\vec{x}^*\|} \qquad \Delta A^* = \|A^* - A\|$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A\vec{x}^* = \vec{b}^*$$

$$A(\vec{x}^* - \vec{x}) = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$\vec{x}^* - \vec{x} = A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b})$$

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}\| = \|A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b}) \leqslant \|A^{-1}\|\|\vec{b}^* - \vec{b}\|$$

$$\Delta(\vec{x}^*) \leqslant \|\vec{A^{-1}}\|\Delta(\vec{b}^*)\|\vec{x}\|\delta(\vec{x}^*) \leqslant \|A^{-1}\|\|\vec{b}\|\delta(\vec{b}^*)$$

$$\delta(\vec{x}^*) \leqslant \|A^{-1}\|\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|}\delta(\vec{b}^*) = \|A^{-1}\|\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\delta(\vec{b}^*) \leqslant \|A^{-1}\|\|A\|\delta(\vec{b}^*) = \overline{\delta(\vec{x}^*)}$$

$$\overline{\nu_\delta} = \frac{\overline{\delta}(\vec{x}^*)}{\delta(\vec{b}^*)} = \|A^{-1}\|\|A\|$$

$\operatorname{cond} A = \|A^{-1}\|\|A\|$ — стандартное число обусловленности.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^*\vec{x}^* = \vec{b}^*$$

$$A^*\vec{x}^* - A\vec{x} = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$[A + (A^* - A)][\vec{x} + (\vec{x}^* - \vec{x})] - A\vec{x} = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$A\vec{x} + A(\vec{x}^* - \vec{x})(A^* - A)\vec{x} + (A^* - A)(\vec{x}^* - \vec{x}) - A\vec{x} = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$A(\vec{x}^* - \vec{x}) = (\vec{b}^* - \vec{b}) - (A^* - A)\vec{x}$$

$$\vec{x}^* - \vec{x} = A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b}) - A^{-1}(A^* - A)\vec{x}$$

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\vec{b}^* - \vec{b}\| + \|A^{-1}\|\|A^* - A\|\|\vec{x}\|$$

$$\|\delta(\vec{x})\| \geqslant \|A^{-1}\|\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|}\delta(\vec{b}^*) + \|A^{-1}\|\|A\|\delta(A^*)$$

$$\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leqslant \|A\|$$

$$\delta(\vec{x}^*) \leqslant \|A^{-1}\|\|A\|(\delta(\vec{b}^*) + \delta(A^*)) = \overline{\delta}(\vec{x}^*)$$

$$\overline{\nu}_\delta = \frac{\overline{\delta}(\vec{x}^*)}{\delta(\vec{b}^*) + \delta(A^*)} = \|A^{-1}\|\|A\| = \operatorname{cond} A$$

Замечание.

$$\operatorname{cond} E = \|E^{-1}\|\|E\| = \|E\|^2 = 1$$

Замечание.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cond} A = \|A^{-1}\|\|A\| \\
&E = A^{-1}A \\
&\underbrace{\|E\|}_{1} = \|A^{-1}A\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A\| = \operatorname{cond} A \\
&\operatorname{cond} A \geqslant 1
\end{aligned}$$

Замечание.

$$\begin{aligned}
\operatorname{cond} \alpha A = \|(\alpha A)^{-1}\|\|\alpha A\| = \|\frac{1}{\alpha}A^{-1}\|\|\alpha A\| = \\
= \left|\frac{1}{\alpha}\right|\|A^{-1}\||\alpha|\|A\| = \|A^{-1}\|\|A\| = \operatorname{cond} A
\end{aligned}$$

Определение. Прямые методы — методы, в которых решение получается за конечное число шагов, и если все операции выполняются точно, то и решение точно.

Определение. Итерационные методы — заведомо приближенные.

$$\vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^n \xrightarrow{n\to\infty} \overline{\vec{x}}$$

§1.5 Обзор метода Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{nn}^{(n-1)} \cdot x_n = b_n^{(n-1)}$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Замечание. Процедура выбора ведущего элемента позволяет избежать накопления ошибки в методе Гаусса.

1. Выбор ведущего элемента по столбцу
2. Выбор ведущего элемента по всей матрице

Замечание. Оценка числа операций в методе Гаусса

$$N \sim \frac{2}{3}n^3$$

Решение вырожденных систем

$$\det A = 0$$

Замечание (Альтернатива Фредгольма)**.**

$$Rank(A) = Rank(A, \vec{b}) \implies \text{решений бесконечно много}$$

$$Rank(A) \neq Rank(A, \vec{b}) \implies \text{решений не существует}$$

§1.6 Решение систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки

$b_1x_1 + c_1x_2 = d_1$
$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$
$\dots$
$a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i$
$\dots$
$a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1}a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & a_i & b_i & c_i & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \underbrace{-\frac{c_1}{b_1}}_{\alpha_1} x_2 + \underbrace{\frac{d_1}{b_1}}_{\beta_1}$$

$a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1) + \beta_2x_2 + c_2x_3 = d_2$
$(a_2\alpha_1 + b_2)x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2\beta_1$

$$x_2 = \underbrace{\frac{c_2}{a_2\alpha_1 + b_2}}_{\alpha_2} + \underbrace{\frac{d_2 - a_2\beta_1}{a_2\alpha_1 + b_2}}_{\beta_2} = \alpha_2 + x_3 + \beta_2$$

$\vdots$

$$\begin{cases} x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_i \\ \alpha_i = -\frac{c_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i} \\ \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1}b_i} \end{cases}$$

Сначала прямым проходом находим коэффициенты α и β, потом обратным проходом находим неизвестные $x_n, x_{n-1}, \dots$.

$$N \sim 6n$$

Замечание.

$$\frac{\|\vec{x}^* - \overline{\vec{x}}\|}{\|\vec{x}\|} \leqslant \varepsilon$$

Если данное условие не выполняется, это называется накоплением ошибки.

Замечание.

$$|b_k| \geqslant |a_k| + |c_k|$$

Достаточное условие ненакопления ошибки.

§1.7 Метод простых итераций. Метод Якоби.

$$
\begin{aligned}
A\vec{x} = \vec{b} \iff & \vec{x} = B\vec{x} + \vec{c} \\
& \vec{x}^0 \\
& \vec{x}^1 = B\vec{x}^0 + \vec{c} \\
& \dots \\
& \vec{x}^{k+1} = B\vec{x}^k + \vec{c} \\
& \dots \\
& \vec{x}^k \xrightarrow{k\to\infty} \overline{\vec{x}} \\
& \lim_{k\to\infty} \|\vec{x}^k - \overline{\vec{x}}\| = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = 0 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\
x_2 = \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + 0 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\
\dots
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& \vec{x} = \vec{x} - \alpha(A\vec{x} - \vec{b}) = (E - \alpha A)\vec{x} + \alpha\vec{b} \\
& \frac{d\vec{x}}{dt} = -\beta(A\vec{x} - \vec{b}) \\
& \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \\
& \lim_{t\to 0} \vec{x}(t) \implies A\vec{x} = \vec{b} \\
& \frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\triangle t} \approx -\beta(Ax^n - \vec{b}) \\
& \vec{x}^{n+1} = x^n - \underbrace{(\beta\triangle t)}_{\alpha}(A\vec{x}^n - \vec{b}) \\
& \vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \alpha(A\vec{x}^n - \vec{b}) = \underbrace{(E - \alpha A)}_{B}\vec{x}^n + \underbrace{\alpha\vec{b}}_{\vec{c}}
\end{aligned}
$$

Замечание (Достаточное условие сходимости метода)**.**

$$
\begin{aligned}
A\vec{x} = \vec{b} \iff & \vec{x} = B\vec{x} + \vec{c} \\
& \vec{x}^{n+1} = B\vec{x}^n + \vec{c} \\
& \|B\| < 1 \implies \|\vec{x}^n - \overline{\vec{x}}\| \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

Доказательство.

$$\overline{\vec{x}} = B\vec{x} + \vec{c}$$
$$\vec{x}^n = B\vec{x}^{n-1} + c$$
$$\vec{x}^n - \overline{\vec{x}} = B(\vec{x}^{n-1} - \overline{\vec{x}})$$
$$\|\vec{x}^n - \overline{\vec{x}}\| = \|B(\vec{x}^{n-1} - \overline{\vec{x}})\| \leqslant \|B\|\|\vec{x}^{n-1} - \overline{\vec{x}}\| \leqslant \|B\|^2\|\vec{x}^{n-2} - \overline{\vec{x}}\| \leqslant \dots \qquad \blacksquare$$

Замечание (Апостариорная оценка)**.**

$$\vec{x}^n - \overline{\vec{x}} = B(\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n + \vec{x}^n - \overline{\vec{x}}) = B(\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n) + B(\vec{x}^n - \overline{\vec{x}})$$
$$\|\vec{x}^n - \vec{x}\| \leqslant \|B\|\|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n\| + \|B\|\|\vec{x}^n - \overline{\vec{x}}\|$$
$$(1 - \|B\|)\|\vec{x}^n - \vec{x}\| \leqslant \|B\|\|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n\|$$
$$\|\vec{x}^n - \overline{\vec{x}}\| \leqslant \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n\| \leqslant \varepsilon$$
$$\|\vec{x}^n - \vec{x}^{n-1}\| \leqslant \varepsilon\frac{1 - \|B\|}{\|B\|}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|,\ \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$
$$\|B\|_\infty < 1, \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1,\ \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$$
$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ b_{ii} = 0$$
$$\sum_{j=1, j\neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ — Условие диагонального преобладания}$$

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \alpha(A\vec{x}^k - \vec{b}) = (E - \alpha A)\vec{x}^k + \alpha\vec{b}$$

$\|\vec{x}\|_2,\ \|A\|_2,\ A$ — симметричная положительно определенная

Занумеруем собственные числа в порядке возрастания

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$$
$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}} \implies \|B\|_2 < 1$$
$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \implies \|B\| = \min = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$
$$\lambda_{max} \approx \lambda_{min} \implies \|B\|_2 \approx 0$$
$$\lambda_{min} \approx 0 \implies \|B\|_2 \approx 1$$

§1.8 Метод Зайделя

$\vec{x}^{k+1} = B\vec{x}^k + \vec{c}$

$$
\begin{cases}
x_!^{k+1} = 0 + b_{12}x_2 + +b_{13}x_3^k + \cdots + b_{1n}x_n^k + c_1 \\
x_2^{k+1} = b_{21}\underbrace{x_1^k}_{x_1^{k+1}} +0 + b_{23}x_3^k + \cdots + b_{2n}x_n^k + c_2 \\
\dots \\
x_n^{k+1} = b_{n1}\underbrace{x_1^k}_{x_1^{k+1}} +b_{n2} \\
\underbrace{x_2^k}_{x_2^{k+1}} +b_{n3}\underbrace{x_3^k}_{x_3^{k+1}} + \cdots + 0 + c_n
\end{cases}
$$

Замечание (Достаточное условие сходимости)**.**

$$\|B_1\| + \|B_2\| < 1 \implies \|\vec{x}^k - \overline{\vec{x}}\| \leqslant q^k\|\vec{x}^0 - \overline{\vec{x}}\|,\ q = \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1$$

Замечание (Апостариорная оценка сходимости)**.**

$$\|\vec{x}^k - \overline{\vec{x}}\| \leqslant \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|}\|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \leqslant \varepsilon$$

$$\|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \leqslant \frac{1 - \|B\|}{\|B_2\|}\varepsilon$$

Утверждение 1.8.1. Если A — симметричная, положительно определнная матрица, то метод сходится всегда.

§1.9 Метод последовательной релаксации

$$\vec{x}^k \to \overset{\to\tilde{k}+1}{x} = B_1 \overset{\to\tilde{k}=1}{x} + B_2\vec{x}^k + \vec{c}$$

$$\vec{x}^{k+1} = w\overset{\to\tilde{k}+1}{x} + (1-w)\vec{x}^k = \vec{x}^k + \underbrace{w}_{\text{релаксационный множитель},0<w<2}\underbrace{(\overset{\to\tilde{k}+1}{x} - \vec{x}^k)}_{\triangle\vec{x}^{k+1}}$$

Замечание. $0 < w < 1$ — нижняя релаксация (замедляет сходимость, если она есть, но может ее дать, в случае, когда ее нет), $1 < w < 2$ — верхняя релаксация (ускоряет сходимость, но может привести к ее потере).

§1.10 Понятия о методах спуска

$A\overline{\vec{x}} = b \iff F(\overline{\vec{x}}) = \min\limits_{\vec{x}} F(\vec{x})$

A — симметричная, положительно определенная.

$$F(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - sum_{i=1}^{n} b_ix_i =$$
$$= \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$$

Для положительно определенной квадратичной формы необходимое условие минимумма будет и достаточным.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0,\ k = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i - b_k = 0,\ k = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k = 0,\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k,\ k = 1, \ldots, n$$

$$\vec{x}^0, \vec{p}^0 : F(\vec{x}^0 + \alpha\vec{p}^0)\alpha \underset{<}{\rightarrow} 0F(\vec{x}^0)$$
$$F(\vec{x}^0 + \alpha^0\vec{p}^0) < F(\vec{x}^0) \qquad \vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \alpha_0\vec{p}^0$$

1.10.1 Направления спуска

$$\frac{F(\vec{x}^0 + \alpha\vec{p}^0) - F(x^0)}{\frac{d}{d\alpha}F(\vec{x}^0 + \alpha\vec{p}^0)}\alpha \underset{<}{\rightarrow} 00$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}|_{\vec{x}^0} P_i < 0$$
$$\nabla F|_{\vec{x}^0} \cdot \vec{p}^0 < 0$$

Выбор шага: $F(\vec{x}^0 + \alpha^0\vec{p}^0) = \min\limits_{\alpha} F(\vec{x}^0 + \alpha p^0)$

$$F(x^0 + \alpha\vec{p}^0) = \frac{1}{2}\text{[хз что тут было]}$$
$$= \frac{1}{2}(A\vec{x}^0, \vec{x}^0) + \frac{\vec{\alpha}}{2}(A\vec{p}^0, \vec{x}^0) + \frac{\alpha^2}{2}(A\vec{x}^0, \vec{p}^0) - (\vec{b}, \vec{x}^0) - \alpha(\vec{b}, \vec{p}^0) =$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}(A\vec{p}^0, \vec{p}^0) + \alpha(A\vec{x}^0, \vec{p}^0) - \alpha(\vec{b}, \vec{p}^0) + \frac{1}{2}(A\vec{x}^0, \vec{x}^0) - (\vec{b}, \vec{x}^0)$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}(A\vec{p}^0, \vec{p}^0) + \alpha(A\vec{x}^0, p^0) + \frac{1}{2}(A\vec{x}^0, \vec{x}^0) - (\vec{b}, \vec{x}^0)$$

$$\frac{dF(x^0 + \alpha\vec{p}^0}{d\alpha} = 0, \quad \alpha(A\vec{p}^0, \vec{p}^0) + (A\vec{x}^0 - \vec{b}, \vec{p}^0) = 0$$
$$\alpha = \alpha^0 = -\frac{(A\vec{x}^0 - \vec{b}, \vec{p}^0)}{(A\vec{p}^0, \vec{p}^0)} = -\frac{(\vec{g}^0, \vec{p}^0)}{(A\vec{p}^0, \vec{p}^0)}$$