

Numerical analysis.

Sugak A.M.

Spring 2016

Оглавление

1	Равновесие текучей среды	2
1.1	Равновесие текучей среды	3
1.2	Уравнение равновесия в тяжелой среде	6
1.3	Численное решение систем линейных алгебраических уравнений	9
1.4	Обусловленность СЛАУ	10
1.5	Обзор метода Гаусса	12
1.6	Решение систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки	13
1.7	Метод простых итераций. Метод Якоби.	14
1.8	Метод Зайделя	16
1.9	Метод последовательной релаксации	16
1.10	Понятия о методах спуска	17
1.10.1	Направления спуска	17

1 Равновесие текучей среды

§1.1 Равновесие текучей среды

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{V})$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \vec{f}$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{S} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho Q$$

$$\rho(\vec{r}, t), \vec{V}(\vec{r}, t), E(\vec{r}, t)$$

$$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}), \vec{q} = \vec{q}(E)$$

Определение. Текучая среда — среда, которая приходит в движение под действием сколь угодно малого касательного напряжения.

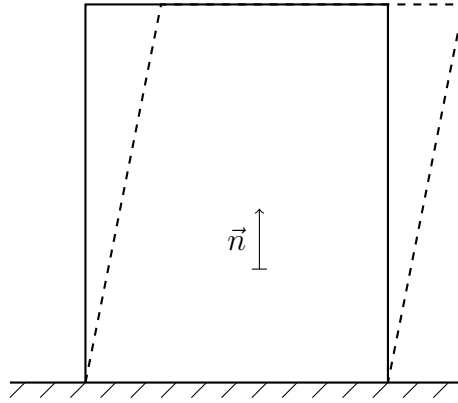


Рис. 1.1: Напряжения в твёрдом теле

Замечание. Если среда находится в состоянии покоя, значит в ней нет касательных напряжений.

pic2

$$\vec{P}_n = P_n \vec{n}$$

$$\vec{P}_1 = P_{11} \vec{e}_1$$

$$\vec{P}_2 = P_{22} \vec{e}_2$$

$$\vec{P}_3 = P_{33} \vec{e}_3$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ P_{ii}, & i = j \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

Замечание (Формула Коши).

$$\vec{p}_n = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{n}$$

$$p_n \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = \underbrace{-p}_{\text{давление}}$$

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -p \cdot \overleftrightarrow{E}$$

Замечание (Закон Паскаля). При равновесии текучей среды нормальное напряжение на произвольно выбранной площадке не зависит от ее ориентации.

Уравнение переноса импульса.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \cdot \vec{f}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x_1} \quad -\frac{\partial p}{\partial x_2} \quad -\frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = \underbrace{-\nabla p}_{\text{градиент}}$$

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = -\nabla p$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f} - \text{Уравнение Эйлера равновесия текучей среды}$$

Определение. $\rho = \rho(p)$ — **баротропность**.

$$pV = \frac{R}{\mu} MT$$

$$p dV = \frac{R}{\mu} dm T$$

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

Изотермический процесс.

$$T = T_0, \quad \rho = \frac{p\mu}{RT_0} = c p$$

Адиабатический процесс.

$$\rho = c p^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_\rho}$$

Определение.

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \text{ — потенциал давления}$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_1} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$\nabla \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\nabla \times \vec{f} = 0$$

$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$\nabla \mathcal{P} = \nabla \Pi$$

$$\nabla(\mathcal{P} + \Pi) = 0$$

$$\mathcal{P} + \Pi = \text{const}$$

Замечание. При баротропном равновесии текучей среды в потенциальном поле сил сумма потенциала давления и потенциала силы не меняется.

Следствие 1.0.1.

$$\Pi = \text{const} \implies \mathcal{P} = \text{const} \implies \begin{cases} p = \text{const} \\ \rho = \text{const} \\ T = \text{const} \end{cases}$$

§1.2 Уравнение равновесия в тяжелой среде

$$\frac{1}{\rho(p)} \nabla p = \vec{f}$$

$$\nabla \left[\frac{1}{\rho(p)} \nabla p \right] = \nabla \cdot \vec{f} = -\nabla^2 \Pi$$

$$\vec{f} = -\nabla \Pi$$

$$\nabla^2 \varphi = -\varepsilon_0 q$$

$$\vec{f}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^2 r}$$

$$\vec{f}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla^2 \Pi = 4\pi\gamma\rho$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho(p)} \nabla p \right] = -4\pi\gamma\rho(p)$$

Несжимаемая среда:

$$\rho = \rho_0 = \text{const}(p)$$

Определение. $\nabla^2 p = -4\pi\gamma\rho_0^2$ — Уравнение Пуассона

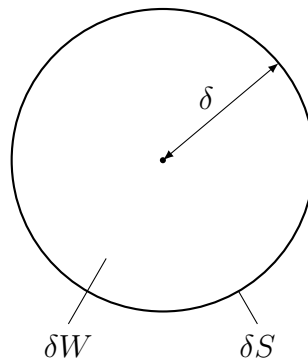


Рис. 1.2: Рассматриваемый шар обладает радиусом δ , объёмом δW и поверхностью δS

Теорема 1.1 (Обобщенная теорема Гаусса).

$$\begin{aligned}
\int_W \nabla \otimes \overleftrightarrow{T} dW &= \oint_S \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS \\
\nabla \otimes T &= \lim_{\delta W \rightarrow 0} \frac{1}{\delta W} \int_{\delta W} (\nabla \otimes \overleftrightarrow{T}) dW = \lim_{\delta W \rightarrow 0} \frac{1}{\delta W} \oint_{\delta S} \vec{n} \otimes \overleftrightarrow{T} dS \\
\nabla \cdot \vec{f} &= \lim_{\delta W \rightarrow 0} \frac{1}{\delta W} \oint_{\delta S} \vec{n} \cdot \vec{f} dS \\
\nabla \cdot \vec{f} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3} \oint_S -\gamma \frac{\rho \frac{4}{3}\pi\delta^3}{\delta^2} \delta^2 dW = -\gamma\rho 4\pi = -4\pi\gamma\rho \\
\vec{f} &= -\nabla\Pi \\
-\nabla^2\Pi &= -4\pi\gamma\rho \\
\nabla^2\Pi &= 4\pi\gamma\rho \\
\nabla^2\varphi &= -\varepsilon_0 q
\end{aligned}$$

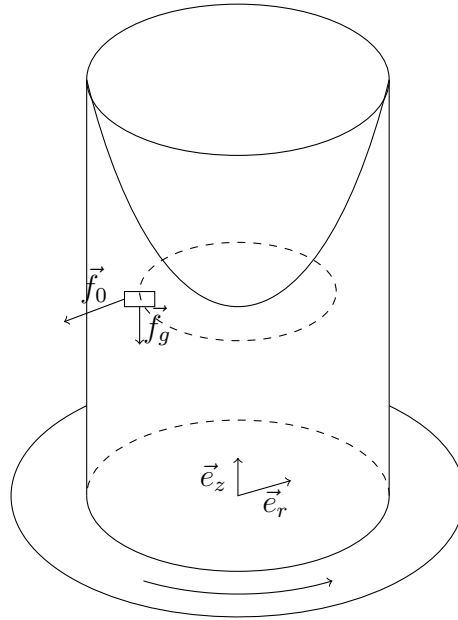


Рис. 1.3: На малый объём действует сила тяжести \vec{f}_g и центробежная сила \vec{f}_0

$$\vec{F}_c = -mw^2\vec{r}$$

$$\vec{f}_g = \vec{g} = -g\vec{e}_z$$

$$\vec{f}_0 = w^2\vec{r} = w^2r\vec{e}_r$$

$$\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_0 = -g\vec{e}_z + w^2r\vec{e}_r \iff \vec{f} = -\nabla\Pi$$

$$\Pi = gz - \frac{w^2r^2}{2} + C$$

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho_0} = \frac{p - p_0}{\rho_0}$$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + C + \frac{p - p_0}{\rho_0} = const$$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const$$

Поверхность $p = p_A$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} + \frac{p_A}{\rho_0} = const$$

$$gz - \frac{w^2r^2}{2} = const$$

$$z(r) = \frac{w^2r^2}{2g} + C$$

$$V = \pi R^2 H$$

$$\int_0^R 2\pi r z(r) dr$$

§1.3 Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Определение. $(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \geq 0 \quad \forall \vec{x}$

A — Положительно опре-я матрица

Определение. $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) \iff a_{ij} = a_{ji}, \quad A^T = A$

$$\lambda_{\min} \|\vec{x}\|^2 \leq (A\vec{x}, \vec{x}) \leq \lambda_{\max} \|\vec{x}\|^2$$

§1.4 Обусловленность СЛАУ

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\vec{x}^*) = \|\vec{x}^* - \vec{x}\|$$

$$\delta(\vec{x}^*) = \frac{\Delta \vec{x}^*}{\|vec x\|} = \frac{\|\vec{x}^* - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \approx \frac{\|\vec{x}^* - \vec{x}\|}{\|\vec{x}^*\|} \quad \Delta A^* = \|A^* - A\|$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A\vec{x}^* = \vec{b}^*$$

$$A(\vec{x}^* - \vec{x}) = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$\vec{x}^* - \vec{x} = A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b})$$

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}\| = \|A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b})\| \leq \|A^{-1}\| \|\vec{b}^* - \vec{b}\|$$

$$\Delta(\vec{x}^*) \leq \|A^{-1}\| \Delta(\vec{b}^*) \|\vec{x}\| \delta(\vec{x}^*) \leq \|A^{-1}\| \|\vec{b}\| \delta(\vec{b}^*)$$

$$\delta(\vec{x}^*) \leq \|A^{-1}\| \frac{\|vec b\|}{\|vec x\|} \delta(\vec{b}^*) = \|A^{-1}\| \frac{\|A\vec{x}\|}{\|vec x\|} \delta(\vec{b}^*) \leq \|A^{-1}\| \|A\| \delta(\vec{b}^*) = \overline{\delta(\vec{x}^*)}$$

$$\overline{\nu_\delta} = \frac{\overline{\delta(\vec{x}^*)}}{\delta(\vec{b}^*)} = \|A^{-1}\| \|A\|$$

$\text{cond } A = \|A^{-1}\| \|A\|$ — стандартное число обусловленности.

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A^*\vec{x}^* = \vec{b}^*$$

$$A^*\vec{x}^* - A\vec{x} = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$[A + (A^* - A)][\vec{x} + (\vec{x}^* - \vec{x})] - A\vec{x} = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$A\vec{x} + A(\vec{x}^* - \vec{x})(A^* - A)\vec{x} + (A^* - A)(\vec{x}^* - \vec{x}) - A\vec{x} = \vec{b}^* - \vec{b}$$

$$A(\vec{x}^* - \vec{x}) = (\vec{b}^* - \vec{b}) - (A^* - A)\vec{x}$$

$$\vec{x}^* - \vec{x} = A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b}) - A^{-1}(A^* - A)\vec{x}$$

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\vec{b}^* - \vec{b}\| + \|A^{-1}\| \|A^* - A\| \|\vec{x}\|$$

$$\|\delta(\vec{x})\| \geq \|A^{-1}\| \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|} \delta(\vec{b}^*) + \|A^{-1}\| \|A\| \delta(A^*)$$

$$\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|A\|$$

$$\delta(\vec{x}^*) \leq \|A^{-1}\| \|A\| (\delta(\vec{b}^*) + \delta(A^*)) = \overline{\delta(\vec{x}^*)}$$

$$\overline{\nu_\delta} = \frac{\overline{\delta(\vec{x}^*)}}{\delta(\vec{b}^*) + \delta(A^*)} = \|A^{-1}\| \|A\| = \text{cond } A$$

Замечание.

$$\text{cond } E = \|E^{-1}\| \|E\| = \|E\|^2 = 1$$

Замечание.

$$\begin{aligned}\operatorname{cond} A &= \|A^{-1}\| \|A\| \\ E &= A^{-1}A \\ \underbrace{\|E\|}_1 &= \|A^{-1}A\| \leq \|A^{-1}\| \|A\| = \operatorname{cond} A \\ \operatorname{cond} A &\geq 1\end{aligned}$$

Замечание.

$$\begin{aligned}\operatorname{cond} \alpha A &= \|(\alpha A)^{-1}\| \|\alpha A\| = \left\| \frac{1}{\alpha} A^{-1} \right\| \|\alpha A\| = \\ &= \left| \frac{1}{\alpha} \right| \|A^{-1}\| |\alpha| \|A\| = \|A^{-1}\| \|A\| = \operatorname{cond} A\end{aligned}$$

Определение. Прямые методы - методы, в которых решение получается за конечно число шагов, и если все операции выполняются точно, то и решение точно.

Определение. Итерационные методы - заведомо приближенные.

$$\vec{x}^1, \vec{x}^2, \dots, \vec{x}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{\bar{x}}$$

§1.5 Обзор метода Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{nn}^{(n-1)} \cdot x_n = b_n^{(n-1)}$$
$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Замечание. Процедура выбора ведущего элемента позволяет избежать накопления ошибки в методе Гаусса.

1. Выбор ведущего элемента по столбцу
2. Выбор ведущего элемента по всей матрице

Замечание. Оценка числа операций в методе Гаусса

$$N \sim \frac{2}{3}n^3$$

Решение вырожденных систем

$$\det A = 0$$

Замечание (Альтернатива Фредгольма).

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A, \vec{b}) \implies \text{решений бесконечно много}$$

$$\text{Rank}(A) \neq \text{Rank}(A, \vec{b}) \implies \text{решений не существует}$$

§1.6 Решение систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Метод прогонки

$$b_1x_1 + c_1x_2 = d_1$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

...

$$a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i$$

...

$$a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1}a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n$$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \dots & \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ & a_i & b_i & c_i \dots \\ & \dots & & \\ \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ \dots & a_n & b_n & \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \underbrace{-\frac{c_1}{b_1}}_{\alpha_1} x_2 + \underbrace{\frac{d_1}{b_1}}_{\beta_1}$$

$$a_2(\alpha_1x_2 + \beta_1) + \beta_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

$$(a_2\alpha_1 + b_2)x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2\beta_1$$

$$x_2 = \underbrace{\frac{c_2}{a_2\alpha_1 + b_2}}_{\alpha_2} + \underbrace{\frac{d_2 - a_2\beta_1}{a_2\alpha_1 + b_2}}_{\beta_2} = \alpha_2 + x_3 + \beta_2$$

⋮

$$\begin{cases} x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_i \\ \alpha_i = -\frac{c_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i} \\ \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + b_i} \end{cases}$$

Сначала прямым проходом находим коэффициенты α и β , потом обратным проходом находим неизвестные x_n, x_{n-1}, \dots

$$N \sim 6n$$

Замечание.

$$\frac{\|\vec{x}^* - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \varepsilon$$

Если данное условие не выполняется, это называется накоплением ошибки.

Замечание.

$$|b_k| \geq |a_k| + |c_k|$$

Достаточное условие ненакопления ошибки.

§1.7 Метод простых итераций. Метод Якоби.

$$\begin{aligned}
 A\vec{x} = \vec{b} &\iff \vec{x} = B\vec{x} + \vec{c} \\
 &\vec{x}^0 \\
 \vec{x}^1 &= B\vec{x}^0 + \vec{c} \\
 &\dots \\
 \vec{x}^{k+1} &= B\vec{x}^k + \vec{c} \\
 &\dots \\
 \vec{x}^k &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{\bar{x}} \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}^k - \vec{\bar{x}}\| &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x_1 = 0 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\
 x_2 = \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + 0 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\
 \dots
 \end{cases}$$

$$\vec{x} = \vec{x} - \alpha(A\vec{x} - \vec{b}) = (E - \alpha A)\text{vec}x + \alpha\vec{b}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\beta(A\vec{x} - \vec{b})$$

$$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{x}(t) \implies A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\Delta t} \approx -\beta(A\vec{x}^n - \vec{b})$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \underbrace{(\beta \Delta t)}_{\alpha}(A\vec{x}^n - \vec{b})$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n - \alpha(A\vec{x}^n - \vec{b}) = \underbrace{(E - \alpha A)}_B \vec{x}^n + \underbrace{\alpha\vec{b}}_{\vec{c}}$$

Замечание (Достаточное условие сходимости метода).

$$\begin{aligned}
 A\vec{x} = \vec{b} &\iff \vec{x} = B\vec{x} + \vec{c} \\
 \vec{x}^{n+1} &= B\vec{x}^n + \vec{c} \\
 \|B\| < 1 &\implies \|\vec{x}^n - \vec{\bar{x}}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{c}$$

$$\vec{x}^n = B\vec{x}^{n-1} + \vec{c}$$

$$\vec{x}^n - \vec{x} = B(\vec{x}^{n-1} - \vec{x})$$

$$\|\vec{x}^n - \vec{x}\| = \|B(\vec{x}^{n-1} - \vec{x})\| \leq \|B\| \|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}\| \leq \|B\|^2 \|\vec{x}^{n-2} - \vec{x}\| \leq \dots$$

■

Замечание (Апостериорная оценка).

$$\vec{x}^n - \vec{x} = B(\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n + \vec{x}^n - \vec{x}) = B(\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n) + B(\vec{x}^n - \vec{x})$$

$$\|\vec{x}^n - \vec{x}\| \leq \|B\| \|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n\| + \|B\| \|\vec{x}^n - \vec{x}\|$$

$$(1 - \|B\|) \|\vec{x}^n - \vec{x}\| \leq \|B\| \|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n\|$$

$$\|\vec{x}^n - \vec{x}\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|\vec{x}^{n-1} - \vec{x}^n\| \leq \varepsilon$$

$$\|\vec{x}^n - \vec{x}^{n-1}\| \leq \varepsilon \frac{1 - \|B\|}{\|B\|}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|B\|_\infty < 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1, \quad \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$$

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad b_{ii} = 0$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ — Условие диагонального преобладания}$$

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \alpha(A\vec{x}^k - \vec{b}) = (E - \alpha A)\vec{x}^k + \alpha \vec{b}$$

$$\|\vec{x}\|_2, \quad \|A\|_2, \quad A \text{ — симметричная положительно определенная}$$

Занумеруем собственные числа в порядке возрастания

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}} \implies \|B\|_2 < 1$$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} \implies \|B\| = \min = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

$$\lambda_{\max} \approx \lambda_{\min} \implies \|B\|_2 \approx 0$$

$$\lambda_{\min} \approx 0 \implies \|B\|_2 \approx 1$$

§1.8 Метод Зайделя

$$\vec{x}^{k+1} = B\vec{x}^k + \vec{c}$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 0 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3^k + \dots + b_{1n}x_n^k + c_1 \\ x_2^{k+1} = b_{21} \underbrace{x_1^k}_{x_1^{k+1}} + 0 + b_{23}x_3^k + \dots + b_{2n}x_n^k + c_2 \\ \dots \\ x_n^{k+1} = b_{n1} \underbrace{x_1^k}_{x_1^{k+1}} + b_{n2} \underbrace{x_2^k}_{x_2^{k+1}} + b_{n3} \underbrace{x_3^k}_{x_3^{k+1}} + \dots + 0 + c_n \end{cases}$$

Замечание (Достаточное условие сходимости).

$$\|B_1\| + \|B_2\| < 1 \implies \|\vec{x}^k - \vec{x}\| \leq q^k \|\vec{x}^0 - \vec{x}\|, \quad q = \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1$$

Замечание (Апостериорная оценка сходимости).

$$\begin{aligned} \|\vec{x}^k - \vec{x}\| &\leq \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \leq \varepsilon \\ \|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| &\leq \frac{1 - \|B\|}{\|B_2\|} \varepsilon \end{aligned}$$

Утверждение 1.8.1. Если A — симметричная, положительно определенная матрица, то метод сходится всегда.

§1.9 Метод последовательной релаксации

$$\begin{aligned} \vec{x}^k \rightarrow \vec{x}^{k+1} &= B_1 \vec{x}^k + B_2 \vec{x}^k + \vec{c} \\ \vec{x}^{k+1} &= w \vec{x}^{k+1} + (1-w) \vec{x}^k = \vec{x}^k + \underbrace{w}_{\text{релаксационный множитель, } 0 < w < 2} \underbrace{(\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k)}_{\Delta \vec{x}^{k+1}} \end{aligned}$$

Замечание. $0 < w < 1$ — нижняя релаксация (замедляет сходимость, если она есть, но может ее дать, в случае, когда ее нет), $1 < w < 2$ — верхняя релаксация (ускоряет сходимость, но может привести к ее потере).

§1.10 Понятия о методах спуска

$$A\vec{x} = b \iff F(\vec{x}) = \min_{\vec{x}} F(\vec{x})$$

A — симметричная, положительно определенная.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i = \\ &= \frac{1}{2} (A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x}) \end{aligned}$$

Для положительно определенной квадратичной формы необходимое условие минимума будет и достаточным.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i - b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - b_k = 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = b_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\vec{x}^0, \vec{p}^0 : F(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0) \underset{<}{\rightarrow} 0 F(\vec{x}^0)$$

$$F(\vec{x}^0 + \alpha^0 \vec{p}^0) < F(\vec{x}^0)$$

$$\vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \alpha_0 \vec{p}^0$$

1.10.1 Направления спуска

$$\frac{F(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0) - F(\vec{x}^0)}{\frac{d}{d\alpha} F(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0)} \alpha \underset{<}{\rightarrow} 00$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \big|_{\vec{x}^0} P_i < 0$$

$$\nabla F \big|_{\vec{x}^0} \cdot \vec{p}^0 < 0$$

Выбор шага: $F(\vec{x}^0 + \alpha^0 \vec{p}^0) = \min_{\alpha} F(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0)$

$$F(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0) = \frac{1}{2} [\text{хз что тут было}]$$

$$= \frac{1}{2} (A\vec{x}^0, \vec{x}^0) + \frac{\vec{\alpha}}{2} (A\vec{p}^0, \vec{x}^0) + \frac{\alpha^2}{2} (A\vec{x}^0, \vec{p}^0) - (\vec{b}, \vec{x}^0) - \alpha (\vec{b}, \vec{p}^0) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} (A\vec{p}^0, \vec{p}^0) + \alpha (A\vec{x}^0, \vec{p}^0) - \alpha (\vec{b}, \vec{p}^0) + \frac{1}{2} (A\vec{x}^0, \vec{x}^0) - (\vec{b}, \vec{x}^0)$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} (A\vec{p}^0, \vec{p}^0) + \alpha (A\vec{x}^0, \vec{p}^0) + \frac{1}{2} (A\vec{x}^0, \vec{x}^0) - (\vec{b}, \vec{x}^0)$$

$$\frac{dF(\vec{x}^0 + \alpha \vec{p}^0)}{d\alpha} = 0, \quad \alpha (A\vec{p}^0, \vec{p}^0) + (A\vec{x}^0 - \vec{b}, \vec{p}^0) = 0$$

$$\alpha = \alpha^0 = -\frac{(A\vec{x}^0 - \vec{b}, \vec{p}^0)}{(A\vec{p}^0, \vec{p}^0)} = -\frac{(\vec{g}^0, \vec{p}^0)}{(A\vec{p}^0, \vec{p}^0)}$$