

人工知能課題8

機械情報工学科 3 年 120292 若田部亮

平成 28 年 9 月 6 日

1 概要

この資料は幾何の自動証明に用いられる Wu の定理のプログラム課題の説明, 及びレポートである. 今回, 数式処理プログラムを使用することなく, 多項式の四則演算及び剰余の計算は全て自分で実装した.

2 プログラム説明

それぞれのファイルの役割を記述する.

- monopoly.cpp 単項式の実装
- poly.cpp 多項式の定義
- polyinfrastructure.cpp 多項式の環境の定義
- wumethod.cpp 三角化及び Wu の手続きの実装
- main.cpp Wu の手続きに inputs するための幾何問題を記述

実行方法は

```
make
./a.out
```

による.

3 実行結果

出力結果を以下に貼り付ける.

```

/***** WuMethod *****/
/**** Wu 1 ****/
Vars: x y
Hyp: y-x -1.5 -1.5 = 0
Hyp: x^2 + 2 y = 0
Conc: 4 y = 0
Tri: y-x -1.5 -1.5 = 0
Tri: -y + y^2 + 2.25 2.25 = 0
failed for unexpected reminder at the end.
4 y
Tri: y-x -1.5 -1.5 = 0
Tri: x^2 + 2 x + 3 3 = 0
failed for unexpected reminder at the end.
4 x + 6 6
failed triangulation.
Tri: x^2 + 2 y = 0
Tri: -x -1.5 -1.5-0.5 x^2 = 0
failed for unexpected reminder at the end.
4 x + 6 6
FALSE
/**** Wu 2 ****/
Vars: x y
Hyp: 3 x y^2 = 0
Hyp: 2 x^2 y = 0
Conc: 4 y = 0
failed triangulation.
failed triangulation.
failed triangulation.
failed triangulation.
FALSE
/**** Wu 3 ****/
Vars: x y
Hyp: 3 x y = 0
Hyp: 2 x^2 y = 0
Conc: 4 y = 0
failed for 0 poly in tripoly.
failed for 0 poly in tripoly.
failed triangulation.
failed triangulation.
FALSE
/**** Wu 4 ****/
Vars: x y
Hyp: x^2 + 2 y = 0
Hyp: 3 x = 0
Conc: 4 y = 0
failed triangulation.
Tri: x^2 + 2 y = 0
Tri: 3 x = 0
TRUE
/**** Wu 5 ****/
Vars: x y
Hyp: x + y + z = 0
Hyp: x + y = 0
Conc: 4 z = 0

```

```

Tri: x + y + z = 0
Tri: -z = 0
TRUE
/**** Wu 7-1 ****/
Vars: a b
Hyp: e-2 a = 0
Hyp: 2 a -b -d = 0
Conc: -2 a b + b\^2 + 2 a d -d\^2 = 0
Tri: e-2 a = 0
Tri: -b -d + e = 0
TRUE
/**** Wu 7-2 ****/
Vars: a b
Hyp: e-2 a = 0
Hyp: d -b = 0
Conc: -2 a b + b\^2 + 2 a d -d\^2 = 0
Tri: e-2 a = 0
Tri: d -b = 0
TRUE

```

実際にはここに書かれているものよりも上に出力があるが、これは多項式演算のテスト関数であるため、課題には無関係である。この出力の Vars は証明に際して有効な独立変数の列挙であり、Hyp は前提条件を示し、Conc が示したい対象を表し、Tri が三角化された前提条件となっている。TRUE または FALSE が真偽となるが、FALSE は正確には偽ではなく、「わからない」ことを意味している。

Wu 7-1 は高校受験数学掲示板から探してきた幾何の問題を解いた。

<http://www.inter-edu.com/forum/read.php?908,359105>

M は線分 AB の中点、 $AB \parallel BD$ 、 $CM = DM$ $AC = BC$ を証明せよ。

この問題に対して、点 A を原点、点 B 方向を x 軸とする。点 $A = (0, 0)$ 、点 $M = (a, 0)$ 、点 $B = (e, 0)$ 、点 $C = (b, c)$ 、点 $D = (d, c)$ と置いて、 $CM = DM$ の条件と加えて書き下すと、前提条件と証明すべき式を列挙すると、

中点条件: $Hyp_1 : e = 2a$

距離一致条件: $Hyp_2 := (a - b)^2 - (a - d)^2 = (2a - b - d)(d - b)$

証明すべき式: $b^2 + c^2 = (e - d)^2 + c^2$

今、距離一致条件が因数分解可能な形となっている。因数分解可能な場合は予め因数分解をして、その条件を 2 つに分解し、その両方で証明できなければならない。従って、この問題を解くためには、以下の 2 つの問題を両方解く必要がある。

問題 1

中点条件: $Hyp_1 : e = 2a$

距離一致条件: $Hyp_2 := 2a - b - d$

証明すべき式: $b^2 + c^2 = (e - d)^2 + c^2$

問題 2

中点条件: $Hyp_1 : e = 2a$

距離一致条件: $Hyp_2 := d - b$

証明すべき式: $b^2 + c^2 = (e - d)^2 + c^2$

出力の Wu 7-1 が上の問題 1 に相当し, Wu 7-2 が問題 2 に相当している. そしてこの結果, 両方で TRUE であるため, 本問題は真であることがわかる.

4 感想

今回 Wu の定理を実装するにあたって資料が極めて少なく, 一般に報告されている Wu の定理の性能をはるかに下回るものしか作ることが出来なかった. Wu の定理の Reminder などの記法に戸惑い, 理解に相当苦しんだが, 何とか雰囲気から理解した. しかし, この課題を提出した今でも, 多項式の三角化に関する知識は不十分である. 多項式の三角化に関する資料はグレブナー基底のものを除いて, 一切見つからなかった. そのため今回の課題では, パーミュテーションで前提条件の関数を並べて, 貪欲に前提条件同士を割っていった結果, うまく三角化されてくれたらそれを使い, そうでなければ FALSE を返す, という乱暴な処理を行なってしまうている.

今回の課題のコード数を数えてみたところ, 全てあわせて 2668 行, Wu の定理に関わる部分に限ると 342 行とかなり多項式演算クラスに時間が取られてしまった. おとなしく数式処理ソフトにパイプを繋いでいれば, と後悔するばかりである.