

Intégrales multiples & intégrales curvilignes

applications en physique

Polycopié de cours MA212
Année universitaire : 2020/2021
Département de Mathématiques
Institut Polytechnique spatiale et l'aéronautique, Paris, France

Hammou El-Otmany

Avant de commencer

Ce document a été rédigé pour accompagner l'enseignement du module "Intégrales multiples et courbes paramétrées" au semestre du printemps 2020-2021. Il a été préparé en partie en prévision de possibles difficultés liées à la situation sanitaire, mais n'a pas pour vocation de se substituer aux cours magistraux ni aux séances de travaux dirigés.

Le contenu est plus vaste que ce que nous pourrions couvrir en un semestre ; certains chapitres sont explicitement annoncés comme étant des rappels, mais ce sera certainement aussi le cas d'autres paragraphes de ce polycopié.

Les premières sections de chaque chapitre, intitulées "rappels", rappellent brièvement des notions importantes pour pouvoir bien comprendre ce qui est présenté dans le reste du cours. Il est important de les lire, de vous assurer que vous les comprenez, et le cas échéant de pallier à d'éventuelles lacunes.

L'état d'avancement du cours, au fil du semestre, pourra être suivi en ligne via ma page web : [http :/hamoelotmany.github.io](http://hamoelotmany.github.io).

Bonne lecture.

Version 0 du 15 avril 2021.

Hammou El-Otmamy

Plan du polycopié

Le polycopié est scindé en cinq chapitres. les connaissances requises sont les notions de base d'intégration d'une fonction numérique à variable réelle, de limites et étude d'une fonction, de calcul différentielle, des équations paramétriques et d'algèbre linéaire.

Le chapitre 1 présente les intégrales d'une fonction réelle et les méthodes de calcul : intégration par parties, changement de variables, calcul d'aires,

Le chapitre 2 est consacré aux intégrales multiples et leurs applications. Dans la première section, on introduit l'intégrale multiple en présentant d'abord les intégrales doubles sur un rectangle et un domaine bornée. Ensuite, on présente les propriétés des intégrales doubles et les techniques de calcul telles que : Théorème de Fubini, changement de variables. Dans la deuxième section, on présente les intégrales triples sur un parallélépipède et un domaine borné, ainsi que les techniques de calcul. Enfin, on présente des exemples en physique qui prouvent l'utilité des intégrale multiples : calcul du centre de masse ou de gravité, moment d'inertie, volume, ...

Le chapitre 3 introduit les fonctions vectorielles et les différentes opérations telles que : la continuité, la dérivée, les limites, le développement limité,... afin de mieux comprendre l'étude pratique des courbes paramétriques.

Le chapitre 5 aborde les courbes paramétrées et les propriétés métriques. Ce chapitre est divisé en deux parties essentielles. La première partie concerne les courbes planes (paramétrée en coordonnées cartésiennes) dont laquelle on présente un plan d'étude complet en évoquant les notions suivantes : domaine définition, tangentes, branches infinies, points singuliers, On évoque également le lien entre les courbes cartésiennes et la cinématique en physique avec quelques exemples. La deuxième partie est consacrée aux courbes polaires (paramétrées en coordonnées polaires) et la présentation d'un plan d'étude pratique et un exemple d'illustration. Enfin, on présente les propriétés métriques associées aux courbes paramétriques. On y introduit les notions de longueur de la courbe, courbure, rayon de courbure et le repère de Serret-Frenet.

Le chapitre ?? est dédié aux formes différentielles et intégrales curvilignes. On introduit d'abord les formes différentielles et ses propriétés. Ensuite, on évoque le lien des formes différentielles et les champs de vecteurs. Enfin, on traite les intégrales curvilignes en présentant les formules de Green-Riemann et de Stokes.

Hammou El-Otmamy

Table des matières

1	Rappels sur les intégrales simples dans \mathbb{R}	11
1-1	Rappel intensif : calcul d'intégrales simples dans \mathbb{R}	11
1-1.1	Quelques techniques de calcul	11
1-1.2	Intégration par parties	12
1-1.3	Intégration par changement de variable	13
2	Intégrales multiples	15
2-1	Intégrales doubles	15
2-1.1	Définition succincte de l'intégrale de f sur \mathcal{R}	16
2-1.2	Propriétés élémentaires et attendues de l'intégrale double	17
2-2	Procédés de calcul d'intégrale double	20
2-2.1	Intégration sur un rectangle	20
2-2.2	Intégration par couches (successives)	20
2-2.3	Simplification de calcul en présence de symétries	23
2-2.4	Intégration par changement de variables, jacobien	24
2-2.5	Applications en physique	28
2-3	Intégrales triples	30

2-3.1	Intégration sur parallélépipède	31
2-3.2	Intégration par piles (tranches verticales)	31
2-3.3	Intégration par changement de variables	32
2-4	Applications en physique	35
3	Fonctions vectorielles	39
3-1	Fonctions vectorielles à variable réelle	40
3-1.1	Définitions et généralités	40
3-1.2	Limite, Continuité, Dérivée	41
3-1.3	Dérivées élémentaires	43
3-2	Formule de Taylor-Young et Développement limité d'une fonction vectorielle . . .	46
4	Courbes paramétrées et les propriétés métriques	47
4-1	Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes	48
4-1.1	Orientation d'un arc	49
4-1.2	Interprétation cinématique : vitesse et accélération	52
4-2	Étude complète d'une courbe plane	54
4-2.1	Réduction de domaine domaine de définition	55
4-2.2	Points particuliers et tangentes à la courbe paramétrée	56
4-2.3	Branches infinies	61
4-2.4	Applications pratiques	64
4-3	Courbes paramétrées en coordonnées polaires	67
4-3.1	Généralités et définitions	67
4-3.2	Vitesse et accélération dans le repère polaire	68
4-4	Étude complète d'une courbe polaire	69

4-4.1	Réduction de domaine domaine de définition	69
4-4.2	Points particuliers et tangente à la courbe	70
4-4.3	Branches infinies	72
4-4.4	Études des points multiples	73
4-4.5	Applications pratiques	74
4-5	Propriétés métriques d'une courbe paramétrée	74
5	Formes différentielles et intégrales curvilignes	79
5-1	Formes différentielles	80
5-1.1	Rappels et définitions	80
5-1.2	Différentielle totale du premier ordre d'une fonction	81
5-1.3	Écriture d'une forme différentielle	81
5-2	Formes différentielles exactes et fermées	82
5-2.1	Formes différentielles exactes	82
5-2.2	Comment reconnaître une forme différentielle exacte	84
5-2.3	Formes différentielles fermées	86
5-2.4	Facteur intégrant	89
5-3	Relation entre champs de vecteurs et formes différentielles	89
5-4	Intégrale curviligne et méthodes de calcul	91
5-4.1	Intégrale curviligne	92
5-4.2	Changements de coordonnées	94
5-4.3	Circulation d'un champ de vecteurs	95
5-4.4	Propriétés de l'intégrale curviligne	96
5-4.5	Formule de Green-Riemann et de Stokes-Ampère	96
5-5	Applications en physique	98

5-5.1	Système équilibré en thermodynamique	98
5-5.2	Travail d'un champ de vecteurs	99
5-5.3	Résolution de certaines équations différentielles	100
Annexes		100
A Rappels mathématiques		101
1-1	Ensembles pavables et quarrables	101
1-1.1	Les pavés et leurs mesures	101
1-1.2	Ensembles pavables de \mathbb{R}^2	102
1-1.3	Ensembles quarrables de \mathbb{R}^2	102
1-2	Complément sur les surfaces dans l'espace et leurs équations cartésiennes	103
1-3	Développements limités usuels	104
Bibliographie		104
Références		105
Index		106

Rappels sur les intégrales simples dans \mathbb{R}

Dans ce chapitre, on présente intensivement les méthodes de calcul d'intégrale d'une fonction numérique réelle à une seule variable qui nous serviront même en dimension plus grande.

1-1 Rappel intensif : calcul d'intégrales simples dans \mathbb{R}

Toutes les fonctions considérées dans ce paragraphe seront supposées continues. Quelques rappels de base en théorie de l'intégration d'une fonction d'une variable réelle sont fournis en annexe. Le lecteur intéressé pourra s'y reporter. Je redonne ci-dessous quelques principes généraux.

Que faut-il retenir et comment doit-on procéder si l'on souhaite calculer $\int_a^b f(x)dx$.

1-1.1 Quelques techniques de calcul

Supposons que a et b sont deux réels donnés tels que $a < b$, et f est une **fonction continue** sur $[a, b]$, alors f admet une primitive sur $[a, b]$, notée F ; c'est-à-dire une fonction telle que $F' = f$ sur $[a, b]$ et nous avons

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (1.1)$$

Lorsque f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'aire du domaine délimité par C_f la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, voir Fig. 1-1.1.

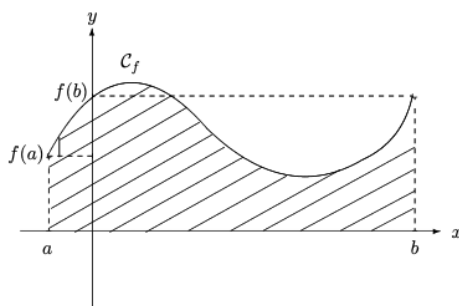


Fig. 1-1.1 – Visualisation graphique de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Pour plus de détails sur les calculs de primitives, le lecteur pourra se reporter au tableau fourni à la fin du document. Supposons que f est une fonction continue sur I . Le tableau ci-dessous illustre quelques exemples de primitives pour $x \in I$.

Conditions	$n \in \mathbb{N}$	$n \geq 2$ et $u(x) \neq 0$	$u(x) > 0$	$u(x) \in \mathbb{R}$	$u(x) \in \mathbb{R}$
Fonction f	$u' \cdot u^n$	$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u' \cos(u)$	$-u' \sin(u) \in \mathbb{R}$
Primitive F de f	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	\sqrt{u}	$\sin(u)$	$\cos(u)$

1-1.2 Intégration par parties

Théorème 1.

Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées sont continues sur I , et a et b deux réels de I . Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (1.2)$$

Démonstration. Pour démontrer (1.2), il suffit d'utiliser la relation $(uv)' = u'v + uv'$ et d'intégrer chaque membre de l'égalité. ■

Exemple 2.

On s'intéresse à calculer la primitive de $t \mapsto t \cos t$ qui s'annule en 0. C'est la fonction $\varphi(x) = \int_0^x t \cos t dt$. La fonction $t \mapsto t \cos t$ est continue sur \mathbb{R} , donc intégrable. Utilisons maintenant un calcul par parties :

Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos t$, alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin t$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^x t \cos t dt = \int_0^x u(t)v'(t)dt = [t \sin t]_0^x - \int_0^x \sin t dt \\ &= x \sin x - [-\cos t]_0^x = x \sin x - \cos x + 1.\end{aligned}$$

1-1.3 Intégration par changement de variable

Rappelons ici la formule de changement de variable dans \mathbb{R} pour une fonction d'une seule variable.

Théorème 3.

Soient I et J , deux intervalles de \mathbb{R} . On appelle a et b les extrémités de J . Soit φ , un C^1 -difféomorphisme (bijection) de J dans I . Alors :

$$\int_a^b f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \quad (1.3)$$

Exemple 4.

- calcul de l'intégrale de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ entre 0 et 1. Posons $\varphi(t) = \cos t$. On a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$. Puis,

$$\int_{\varphi(\frac{\pi}{2})}^{\varphi(0)} \sqrt{1-x^2}dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

- calcul de l'intégrale de $x \mapsto x \cos x^2$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Indication : choisir $\varphi(t) = t^2$ et $f(t) = \cos t$.

Hammou El-Otmamy

Intégrales multiples

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre au calcul pratique d'intégrales doubles, très utiles dans de nombreux domaines de la Physique tels que la Mécanique du solide, la mécanique des fluides, ...

Je m'attacherai donc à fournir quelques recettes générales permettant de traiter les cas usuels. Nous nous placerons systématiquement dans le cas où la fonction à intégrer est continue, le plus souvent sur un domaine borné. Des résultats plus généraux appartenant à la théorie développée par Lebesgue au tout début du vingtième siècle, relatifs aux théorèmes de convergence d'intégrales, ne seront pas développés dans ce chapitre

Sommaire

2-1	Intégrales doubles	15
2-1.1	Définition succincte de l'intégrale de f sur \mathcal{R}	16
2-1.2	Propriétés élémentaires et attendues de l'intégrale double	17
2-2	Procédés de calcul d'intégrale double	20
2-2.1	Intégration sur un rectangle	20
2-2.2	Intégration par couches (successives)	20
2-2.3	Simplification de calcul en présence de symétries	23
2-2.4	Intégration par changement de variables, jacobien	24
2-2.5	Applications en physique	28
2-3	Intégrales triples	30
2-3.1	Intégration sur parallélépipède	31
2-3.2	Intégration par piles (tranches verticales)	31
2-3.3	Intégration par changement de variables	32
2-4	Applications en physique	35

2-1 Intégrales doubles

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable $x \in [a, b] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ où a été définie l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ et où ont été étudiées les techniques de calcul correspondantes, il

nous incombe le travail de définir l'intégrale d'une fonction de deux variables $(x, y) \in \mathcal{R} \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et de lister les différentes manières de les calculer.

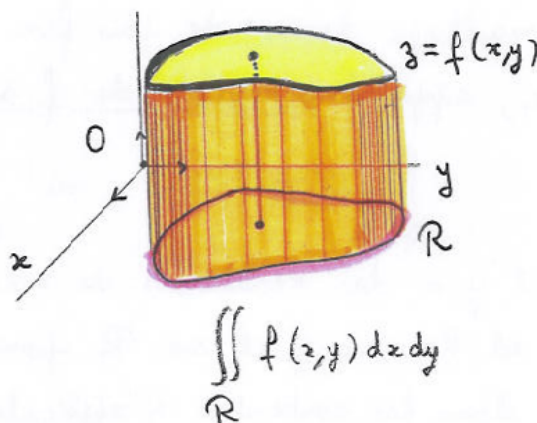
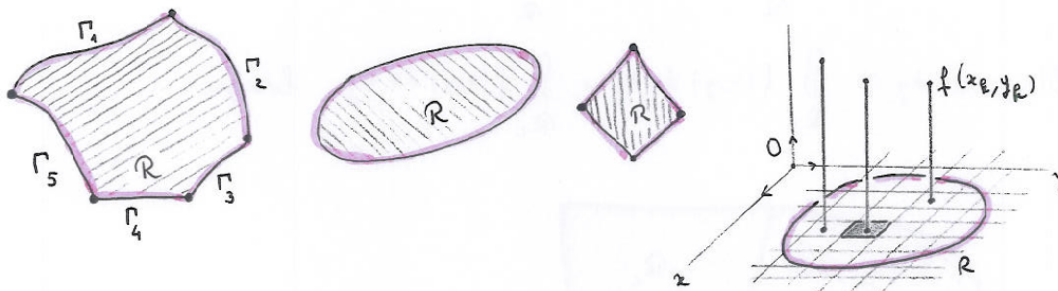


Fig. 2-1.1 – Illustration d'intégrale double $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$

Nous ne passerons pas de temps sur la (ou les) manières à définir convenablement "l'intégrale de f sur \mathcal{R} ", mais plus sur les **techniques de calcul** de ces intégrales.

Dans les exemples d'application qui seront les vôtres :

- \mathcal{R} sera **une partie fermée bornée**¹ de \mathbb{R}^2 , dont la frontière (=le bord) sera constitué d'un nombre fini de courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ du type celles vue au chapitre précédent.
- f sera une fonction continue (au moins) sur \mathcal{R} .



2-1.1 Définition succincte de l'intégrale de f sur \mathcal{R}

Soit f la fonction réelle de deux variables x et y , continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Sa représentation est une surface S dans l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

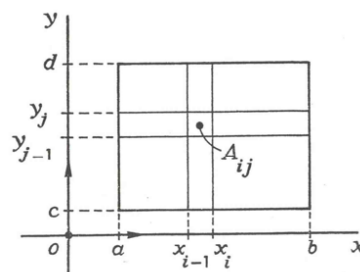
On procède d'abord à un maillage de \mathcal{R} en petits rectangles $A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ en

1. \mathcal{R} est dite fermée si elle contient toutes les limites de suites convergentes de \mathcal{R} . i.e. : $((P_n) \subset \mathcal{R}, \text{ et } P_n \rightarrow P) \Rightarrow (P \in \mathcal{R})$. Bref, le bord de \mathcal{R} fait partie de \mathcal{R} . \mathcal{R} est dite bornée s'il existe M tel que : $\forall P \in \mathcal{R}, \|OP\| \leq M, M \in \mathbb{R}$. Bref, \mathcal{R} est contenue dans une boule $B(O, M)$

tirant des parallèles aux axes (OX) et (OY). On donne des numéros 1 à n à ces rectangles, puis dans chacun de ces rectangles A_{ij} on choisit un point (x_i, y_j) .

Ensuite, on forme la somme

$$I_n := \sum_{i,j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A_{ij} \quad (2.1)$$



où ΔA_{ij} est l'aire du rectangle A_{ij} . Ainsi, I_n représente le volume d'une succession de petits buildings de base A_{ij} et de hauteur $f(x_i, y_j)$.

Quand le maillage devient de plus fine (donc $n \rightarrow +\infty$), la somme I_n de (2.1) a une limite, appelée intégrale de f sur \mathcal{R} (ou intégrale double de f sur \mathcal{R}) et notée

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dA. \quad (2.2)$$

Bien sûr, il y a des résultats de mathématiques derrières tout ça. Il faut des hypothèses ad hoc sur la fonction f et la partie de calcul \mathcal{R} pour que ce procédé marche. Mais, rassurez-vous, c'est le cas dans le contexte d'applications qui vous seront proposées.

$I = \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ est, comme on s'y attendait, le volume de solide de base \mathcal{R} et de toiture le graphe de la fonction f , revoir Fig. 2-1.1.

Exemple 5.

En utilisant la définition, calculer l'intégrale double $\int \int_{[0,1] \times [0,1]} (x + 2y) dx dy$.

2-1.2 Propriétés élémentaires et attendues de l'intégrale double

Les propriétés classiques de l'intégrale simple sont aussi vraies pour les intégrales doubles. Soient f et g deux fonctions continues sur un domaine fermé borné régulier $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles et soit λ un nombre réel.

Propriétés algébriques et monotonie

Proposition 6.

1. Linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_D \int_D (f + g)(x, y) dx dy &= \int_D \int_D f(x, y) dx dy + \int_D \int_D g(x, y) dx dy, \\ \int_D \int_D (kf)(x, y) dx dy &= k \int_D \int_D f(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

2. Monotonie de l'intégrale par rapport à la fonction :

$$\begin{aligned}f \leq g &\implies \int_D \int_D f(x, y) dx dy \leq \int_D \int_D g(x, y) dx dy, \\ f \geq g &\implies \int_D \int_D f(x, y) dx dy \geq \int_D \int_D g(x, y) dx dy.\end{aligned}$$

Comme conséquence de la propriété de la monotonie, on obtient par exemple :

Corollaire 7.

1. Si $f \geq 0$ alors $\int_D \int_D f(x, y) dx dy \geq 0$.
2. $\left| \int_D \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int_D \int_D |f(x, y)| dx dy$.
3. $\min_{(x,y) \in \mathcal{R}} f(x, y) \times \mathcal{A}(\mathcal{R}) \leq \int_D \int_D f(x, y) dx dy \leq \max_{(x,y) \in \mathcal{R}} f(x, y) \times \mathcal{A}(\mathcal{R})$

Dans la propriété (1), si f est une fonction nulle ($f = 0$) alors $\int_D \int_D f(x, y) dx dy = 0$. On peut se demander quand est-ce que l'implication réciproque est vraie : $\int_D \int_D f(x, y) dx dy = 0 \implies f = 0$.

Proposition 8.

Dans un domaine \mathcal{R} fermé borné régulier, les propriétés suivantes sont vérifiées :

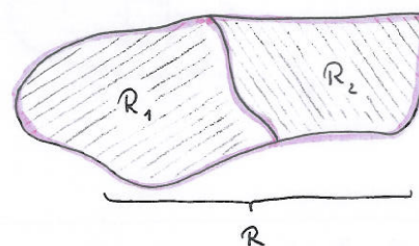
1. Si f est continue et positive sur \mathcal{R} , alors $f = 0 \Leftrightarrow \int_D \int_D f(x, y) dx dy = 0$.
2. Si f est continue de signe quelconque sur \mathcal{R} , alors

$$f = 0 \Leftrightarrow \int_D \int_D |f(x, y)| dx dy = 0 \tag{2.3}$$

Découpage des domaines

Il s'agit ici de généraliser la relation de Chasles pour les intégrales simples dans \mathbb{R} au cas des intégrales doubles dans le plan \mathbb{R}^2 .

Considérons un domaine \mathcal{R} régulier borné fermé contenu dans \mathbb{R}^2 , et soit f une fonction continue définie sur \mathcal{R} à valeur dans \mathbb{R} . Soient \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 deux domaines disjoints ($\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$) inclus dans \mathcal{R} . Le théorème suivant est alors valide.



Théorème 9.

Sous les hypothèses des domaines \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , on a

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dx dy \quad (2.4)$$

Mais, l'essentiel reste à faire et à comprendre, ce sont les techniques de calcul des intégrales doubles.

Remarque 10.

Il importe de noter que les intégrales double permettent également de calculer les surfaces. Le principe est le même qu'en dimension 1. En effet, si \mathcal{R} est un domaine borné de \mathbb{R}^2 , si nous notons $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, son aire, alors on écrit :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int \int_{\mathcal{R}} dx dy. \quad (2.5)$$

Exemple 11.

On considère D , l'ensemble des points (x, y) tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$. On souhaite déterminer l'aire du domaine D , qui correspond à la lunule illustrée dans la figure ci-dessous.

Notons \mathcal{A} cette aire. Nous avons

$$\mathcal{A}(D) = \int \int_{\mathcal{R}} dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{15}.$$

2-2 Procédés de calcul d'intégrale double

2-2.1 Intégration sur un rectangle

Théorème 12.

Théorème de Fubini

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b$ et $c < d$). Alors, on a

$$\int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemple 13.

1. On souhaite calculer l'intégrale double $I = \int \int_{[0,1] \times [3,6]} 2xy dx dy$. D'après le Théorème de Fubini, on a

$$I = \int_0^1 \left(\int_3^6 2xy dy \right) dx = \int_3^6 \left(\int_0^1 2xy dx \right) dy = \int_3^6 y dy = \frac{27}{2}.$$

2. On souhaite calculer l'intégrale double $J = \int \int_{[0,1] \times [2,5]} \frac{1}{(1+x+2y)^2} dx dy$. D'après le Théorème de Fubini, on a

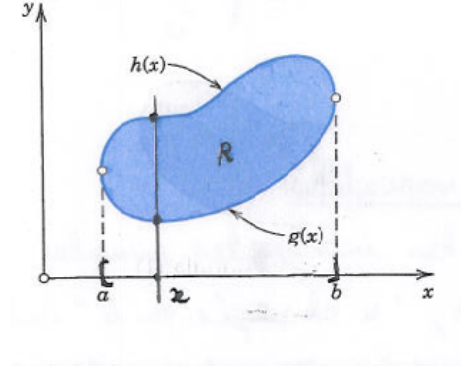
$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \left(\int_2^5 \frac{1}{(1+x+2y)^2} dy \right) dx = \int_2^5 \left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x+2y)^2} dx \right) dy \\ &= - \int_2^5 \left[\frac{1}{1+x+2y} \right]_0^1 dy = \frac{1}{2} [\ln(1+2y) - \ln(2+2y)]_2^5 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{11}{10} \right). \end{aligned}$$

2-2.2 Intégration par couches (successives)

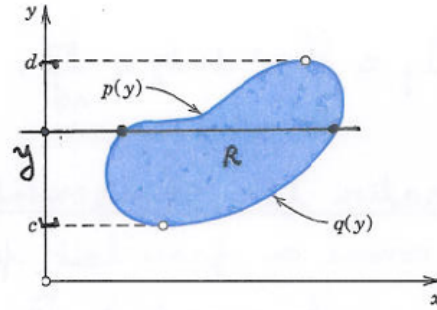
Des dessins sont plus explicites que de longs discours.... Voyons le premier cas ci-dessous. Pour balayer (ou paramétrer) $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ délimité par a et b (en x) et par $g(x)$ et $h(x)$ (en y), et intégrer f sur \mathcal{R} , on procède en deux étapes :

1. on intègre f comme fonction de y entre $g(x)$ et $h(x)$ (c'est la première couche) ;
2. on intègre le résultat (qui est une fonction de x) entre a et b (c'est la deuxième couche).

On peut aussi inverser les étapes 1 et 2. C'est-à-dire : on intègre d'abord f comme une fonction de x (seule) entre $p(y)$ et $q(y)$, voir Fig. ci-dessous. Un théorème de mathématiques de Fubini nous assure que le résultat obtenu est l'intégrale double $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$.



$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Théorème 14.

Soit f une fonction continue sur un domaine borné \mathcal{R} . L'intégrale double $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ se calcule par l'une ou l'autre des manières suivantes :

— Si l'on peut représenter le domaine \mathcal{R} sous la forme

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

où h et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors, on a

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (2.6)$$

— Si le domaine le permet, on peut permuter les rôles de x et de y : on peut représenter le domaine \mathcal{R} sous la forme

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, q(y) \leq x \leq p(y)\}$$

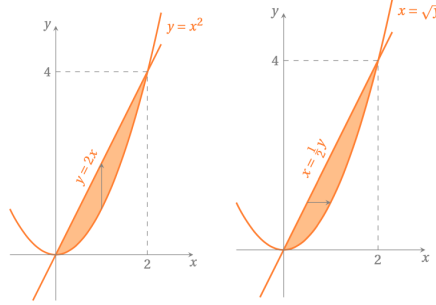
où p et q sont deux fonctions continues sur $[c, d]$. Alors, on a

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{q(y)}^{p(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (2.7)$$

Si les deux représentations sont possibles, les résultats (2.6) et (2.7) sont évidemment égaux.

Exemple 15.

On veut calculer le volume du solide qui s'élève sur le domaine Ω du plan (Oxy) délimité par la droite $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couverte par le parabolôide $z = x^2 + y^2$. Il existe deux manières pour déterminer le volume du solide Ω .



Méthode 1. Le domaine Ω peut être décrite par $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$. Le volume s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{14}{3} x^3 - x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{7}{6} x^4 - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

Méthode 2. Le domaine Ω peut être décrite par $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq \frac{y}{2}\}$. Le volume est donné alors par

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^{y/2} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=y/2} dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13y^3}{24} \right) dy = \left[\frac{2y^{5/2}}{15} + \frac{2y^{7/2}}{7} - \frac{13y^4}{96} \right]_{y=0}^{y=4} = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

Exemple 16 (Centre de gravité, moments d'inertie).

Soit \mathcal{R} une plaque définie par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ (=un quart de disque). On suppose que la densité de masse sur \mathcal{R} est $f(x, y) = 1$ partout. Déterminons le centre de gravité et les moments d'inertie par rapport aux axes (OX) et (OY).

Remarque 17 (Fonction à variables séparées).

Si $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b$, $c < d$), et si $f(x, y) = g(x)h(y)$, où g et h sont deux fonctions continues d'une seule variable. Alors, on a :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d g(x)h(y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Exemple 18.

Soit $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$. On souhaite calculer l'intégrale double $\int_{\mathcal{R}} x^2 y dx dy$. On a

$$\int_{\mathcal{R}} xy dx dy = \int_0^1 \int_0^2 x^2 y dx dy = \left(\int_0^1 x dx \right) \left(\int_0^2 y dy \right) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

2-2.3 Simplification de calcul en présence de symétries

En physique, le domaine sur lequel on intègre possède très souvent une symétrie visible à l'oeil nu. C'est-à-dire, il existe une application S qui involutive au sens $S \circ S = Id$:

$$S : A \longrightarrow A, \quad (x, y) \longmapsto S(x, y). \quad (2.8)$$

telle que $f(x, y) = f(S(x, y))$, pour tout $(x, y) \in A$. Il en découle que $A = A_1 \cup A_2$ se décompose en deux ensembles quarrables : $A_2 = S(A_1)$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Par l'additivité des intégrales, on obtient

$$\int \int_A f(x, y) dx dy = 2 \int \int_{A_1} f(x, y) dx dy. \quad (2.9)$$

Si, à l'opposé on a : $-f(x, y) = f(S(x, y))$, alors

$$\int \int_A f(x, y) dx dy = 0. \quad (2.10)$$

Exemple 19.

Nous nous intéressons à calculer l'intégrale double $I = \iint_A (x^2 - y^2) dx dy$ où A est le disque elliptique défini par

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad 0 < b < a.$$

D'après la figure, les applications (les pliages autour de (Ox) et autour de (Oy)) : $(x, y) \mapsto (x, -y)$ et $(x, y) \mapsto (-x, y)$ laissent le domaine A invariant, et ne changent pas non plus les valeurs de la fonction $x^2 - y^2$.

Par conséquent, en considérant le quart supérieur droit du disque A (voir Fig. ??)

$$A^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} = \left\{ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\},$$

il vient que

$$I = \iint_A (x^2 - y^2) dx dy = 4 \iint_{A^+} (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} (x^2 - y^2) dy \right) dx$$

Dans la pratique les calculs sont plus compliqués et nécessitent le plus souvent des changements de variables. Ceux-ci sont plus complexes que dans le cas d'une intégrale simple et font intervenir la notion de Jacobien.

2-2.4 Intégration par changement de variables, jacobien

Pour ne pas surcharger les notations nous nous limiterons à l'énoncé du théorème dans le cas d'un changement de variables dans \mathbb{R}^2 , mais le théorème se généralise à la dimension n .

On rappelle d'abord la définition d'un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$).

Définition 20.

Une fonction $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k si

- φ est dérivable de classe \mathcal{C}^k sur D .
- φ est inversible, c'est-à-dire qu'il admet la réciproque $\varphi^{-1} : \Delta \rightarrow D$.
- la réciproque φ^{-1} est dérivable de classe \mathcal{C}^k sur Δ .

En particulier, une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 est un difféomorphisme si et seulement si $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.

On introduit ensuite la fonction

$$\begin{aligned} f : \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \end{aligned}$$

où le domaine Δ est fermé et borné. Cette transformation est supposée vérifier des propriétés qui rendent possible le changement de variable de type :

$$\begin{cases} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v). \end{cases} \quad (2.11)$$

En l'occurrence, il faut que cette transformation corresponde à une transformation physique réversible. Pour cela, on suppose que les fonctions φ et ψ sont dérivables par rapport à chacune des variables u, v .

Définition 21.

Dans ces conditions, on appelle matrice jacobienne de f au point (u, v) , la matrice $J(u, v)$ définie par :

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

et on appelle jacobien de f et on note $\det J$ le déterminant de la matrice jacobienne $J(u, v)$, i.e.

$$\det J(u, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v). \quad (2.13)$$

Exemple 22.

Donner la matrice jacobienne associée au changement de variable ci-dessous et son jacobien

$$(r, \theta) \longmapsto \begin{cases} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{cases}$$

Calcul des intégrales doubles par changement de variables

Rappelons maintenant comme on procédait pour les intégrales simples (i.e. intégrales de fonctions d'une seule variable). En gros, " x changée en u " induit :

$$x = \varphi(u), \quad x \in [a, b] \text{ devient } u \in [\alpha, \beta], \quad dx = \varphi'(u)du$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)]\varphi'(u)du.$$

Voici un procédé similaire pour les intégrales doubles : "les variables x et y sont changées en u et v , c'est-à-dire, avec $\det(J)$ est le déterminant jacobien de la transformation, on a

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} ; (x, y) \in \mathcal{R} \text{ devient } (u, v) \in \Delta \mapsto \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} ; dxdy = |\det(J)|dudv$$

Théorème 23 (Changement de variables en \mathbb{R}^2).

En reprenant les notations ci-dessus, on a

$$\int_{\mathcal{R}} \int f(x, y) dxdy = \int_{\Delta} \int f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |\det(J)| dudv.$$

Ce qui peut être délicat dans cette technique :

- Déterminer Δ : la transformation $(u, v) \mapsto \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ est bijective (un point pour un point), sauf peut-être sur des morceaux du bord de Δ (et de \mathcal{R}) qu'on pourra négliger car cela n'affecte pas le résultat de l'intégration. Connaissons \mathcal{R} (qui est le domaine d'intégration proposé), il peut y avoir du travail à déterminer Δ, \dots
- Ne pas oublier de changer $dxdy$ en $|\det(J)|dudv$. On parle ici du changement des éléments différentiels.

Exemple 24.

Calculer l'intégrale double $I = \int_{\mathcal{R}} (x-1)^2 dxdy$ où \mathcal{R} est défini par

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x+y \leq 1, -2 \leq x-y \leq 2\}.$$

En utilisant le changement de variable $u = x+y$ et $v = x-y$, le domaine Δ en (u, v) est donc le rectangle tel que $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2\}$. En plus, on a $(u, v) \mapsto \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$. Par conséquent, la matrice jacobienne est donnée par

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En calculant le déterminant de $J(u, v) = \frac{1}{2}$, on a

$$I = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 \left(\int_{-1}^1 (u+v-2)^2 du \right) dv = \frac{136}{3}.$$

Remarque 25.

— Si $|\det(J)| = 1$, on obtient

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) du dv.$$

— $|\det(J)| = 1$ permet d'utiliser les symétries afin de simplifier les calcul d'intégrale. En effet, si $\forall (x, y) \in \mathcal{R}$, $(-x, y) \in \mathcal{R}$ et $f(-x, y) = f(x, y)$ alors

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = 2 \int \int_{\mathcal{R}'} f(x, y) dx dy, \quad \mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

Dans le plan \mathbb{R}^2 , les changements classiques sont le passage en coordonnées polaires et le passage en coordonnées elliptiques.

Proposition 26.

1. **Cas des coordonnées polaires :** Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par la transformation

$$(r, \theta) \mapsto \begin{cases} x &= a + r \cos \theta \\ y &= b + r \sin \theta \end{cases}$$

où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ sont les coordonnées du point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$. Cette transformation a jacobien

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Ainsi,

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

2. **Cas des coordonnées elliptiques :** Le changement de variables en coordonnées elliptiques est donné par la transformation

$$(r, \theta) \mapsto \begin{cases} x &= a + r\alpha \cos \theta \\ y &= b + r\beta \sin \theta \end{cases}$$

où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ sont les coordonnées du point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$. Cette transformation a jacobien

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \alpha \cos \theta & -r\alpha \sin \theta \\ \beta \sin \theta & r\beta \cos \theta \end{pmatrix} = \alpha\beta r \cos^2 \theta + \alpha\beta r \sin^2 \theta = \alpha\beta r.$$

Ainsi, $\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\Delta} f(\alpha r \cos \theta, \beta r \sin \theta) \alpha\beta r dr d\theta.$

Exemple 27.

- On souhaite calculer l'intégrale $I = \iint_{\mathcal{R}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ où $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \alpha^2 \leq x^2 + y^2 \leq \beta^2\}$. Un passage en coordonnées polaires donne immédiatement

$$I = \int_{\Delta} \int_{\Delta} r^2 \cos \theta \sin \theta dr d\theta \quad (2.14)$$

où $(r, \theta) \in \Delta = [\alpha, \beta] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Par conséquent

$$I = \left(\int_{\alpha}^{\beta} r^2 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{6}. \quad (2.15)$$

- On veut calculer l'intégrale double (volume d'une sphère) $V = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$. Comme $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ est une fonction paire par rapport aux deux variables x et y , alors par passage en coordonnées polaire, on a

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2-2.5 Applications en physique

A- Aire d'un domaine \mathcal{R} : D'après ce qui précède, l'intégrale double $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ mesure le volume sous la représentation de f et au dessus du domaine \mathcal{R} , voir Fig.2-1.1. L'intégrale double peut être utilisée pour calculer l'aire du domaine \mathcal{R} . En effet, il suffit de prendre $f(x, y) = 1$. Par conséquent :

$$\text{Aire}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} dx dy = \int_{\Delta} \int_{\Delta} r dr d\theta$$

Exemple 28.

Calculer l'aire délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On a donc

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \iint_{\mathcal{E}} dx dy, \quad \mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

En utilisant la symétrie et en passant aux coordonnées polaires ($x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$), il vient que $\text{Aire}(\mathcal{E}) = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 ab r dr d\theta = ab\pi$.

B- Aire d'une surface : On appelle \mathcal{R} la région du plan (OXY) délimitée par la projection sur le plan (OXY) de la surface représentative d'une fonction f , notée Σ . L'aire de la surface de Σ délimitée par sa projection \mathcal{R} sur le plan (OXY) est définie par

$$Aire(\mathcal{R}) = \int \int_{\mathcal{R}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

Exemple 29.

Calculer l'aire du parabolôide $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h\}$ ($h > 0$). Comme la surface Σ est égale au graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ définie au-dessus du domaine $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq h\}$, on a donc, av

$$Aire(\Sigma) = \int \int_{\mathcal{R}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

Par passage aux coordonnées polaires ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$), on obtient $Aire(\Sigma) = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} \sqrt{4r^2 + 1} r dr = \frac{\pi}{6} (4h + 1)^{3/2}$.

C- Masse et centre d'inertie ou de gravité : On on considère une plaque \mathcal{P} ayant une densité surfacique $\rho(x, y)$. Alors la masse de \mathcal{P} est donnée par la formule $\int \int_{\mathcal{P}} \rho(x, y) dx dy$ et son centre d'inertie ou de gravité $G(x_G, y_G)$ est tel que

$$x_G = \frac{1}{M} \int \int_{\mathcal{P}} x \rho(x, y) dx dy, \quad y_G = \frac{1}{M} \int \int_{\mathcal{P}} y \rho(x, y) dx dy.$$

Exemple 30.

On souhaite déterminer la masse et le centre d'inertie d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 2)$, sachant que sa densité est $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

$$\begin{aligned} m &= \int \int_{\mathcal{P}} \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) dx dy = \frac{8}{3} \\ x_G &= \frac{1}{m} \int \int_{\mathcal{P}} x \rho(x, y) dx dy = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} x(1 + 3x + y) dx dy = .. \\ y_G &= \frac{1}{m} \int \int_{\mathcal{P}} y \rho(x, y) dx dy = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} y(1 + 3x + y) dx dy = .. \end{aligned}$$

D- Moment d'inertie : On définit Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle M par rapport

à un axe par la relation $Md^2(M, OX)$, où $d(M, (OX))$ représente la distance entre la masse M et l'axe (OX) . Pour une plaque de métal de densité $\rho(x, y)$, qui occupe une région \mathcal{R} , on définit

1. I_x le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe des abscisses (OX) par $I_x = \int \int_{\mathcal{P}} x^2 \rho(x, y) dx dy$.
2. I_y le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe des ordonnées (OY) par $I_y = \int \int_{\mathcal{P}} y^2 \rho(x, y) dx dy$.
3. I_o le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'origine du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) par $I_o = \int \int_{\mathcal{P}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$.

Exemple 31.

On reprend les données de l'exemple 30, on a

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x^2 (1 + 3x + y) dx dy = \dots\dots\dots,$$

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2-2x} y^2 (1 + 3x + y) dx dy = \dots\dots\dots,$$

$$I_o = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2 + y^2) (1 + 3x + y) dx dy = \dots\dots\dots$$

2-3 Intégrales triples

La définition que nous avons présentée dans les sections précédentes s'étend sans difficulté supplémentaire aux intégrales triples. On considère une fonction f continue de trois variables sur un domaine \mathcal{R} de \mathbb{R}^3 . En utilisant le même procédé, l'intégrale triple $\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz$ est comme suit :

$$\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \lim \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(x_i, y_j, z_k) V_{ijk}$$

où $V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$.

Remarque 32.

Toutes les propriétés algébriques vues dans le paragraphe 2-1.2 pour les intégrales doubles, telles que : la linéarité, la symétrie, la monotonie,.... restent valable pour les intégrales triples.

2-3.1 Intégration sur parallélépipède

Comme illustré précédemment pour le calcul des intégrales doubles sur un domaine rectangulaire, il s'ensuit que le théorème de Fubini s'applique de façon naturelle pour l'intégrale triple.

Théorème 33.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ ($a < b$, $c < d$ et $e < f$). Alors, on a

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy dz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x, y) dz \right) dy \right) dx = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_e^f \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \right) dz = \dots \end{aligned}$$

Exemple 34.

On souhaite calculer $\iiint_{\mathcal{R}} (x + 3yz) dx dy dz$ où $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2] \times [1, 3]$. On a

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_1^3 (x + 3yz) dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\left[xz + 3yz^2/2 \right]_{z=1}^{z=3} \right) dy \right) dx = \dots = 7.$$

2-3.2 Intégration par piles (tranches verticales)

La technique d'intégration successive d'une intégrale double illustrée dans le paragraphe 2-2.2 s'étend facilement au calcul d'intégrale triple.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine \mathcal{R} quelconque borné. Pour un certain x fixe, variant entre x_{min} et x_{max} , on découpe dans \mathcal{R} une surface \mathcal{R}_x . On représente alors \mathcal{R}_x dans le plan (YOZ) , puis on se ramène au calcul d'intégrale double pour traiter \mathcal{R}_x . On peut aussi intervertir les rôles de x , y et z . Soit par exemple

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}.$$

Le calcul d'intégrale triple s'écrit ainsi

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

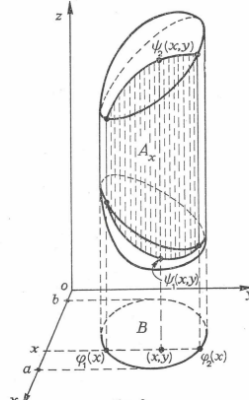


Fig. 2-3.2 – Configuration pour illustration les paramètres d'intégration.

Exemple 35.

Supposons qu'on veuille calculer le volume de la boule limitée par la sphère. On considère la boule fermée de \mathbb{R}^3 de centre O et rayon R telle que

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

et son volume $\mathcal{V} = \int \int \int_{\mathcal{B}} dx dy dz$. On se ramène ici à une intégrale double

$$\mathcal{V} = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy = 2 \int \int_{\mathcal{R}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad (2.16)$$

où \mathcal{R} désigne le disque de \mathbb{R}^2 de centre O et rayon R . En utilisons les coordonnées polaires, on arrive à

$$\mathcal{V} = \int \int_{D'} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = -\frac{4\pi}{3} \left[(R^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}. \quad (2.17)$$

2-3.3 Intégration par changement de variables

Plus généralement, énonçons le théorème de changement de coordonnées en dimension $d = 3$, dont le meilleur exemple d'application est le calcul du volume de la sphère de centre O et rayon R effectué ci-dessus :

Théorème 36 (Changement de variables en \mathbb{R}^3).

Soit $\Phi : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^3$, un C^1 -difféomorphisme tel que

$$\Phi(u, v, w) = (P(u, v, w), Q(u, v, w), R(u, v, w)).$$

Si $\mathcal{R} \subset U$, on note $\Delta = \Phi(\mathcal{R})$ (ou $\mathcal{R} = \Phi^{-1}(\Delta)$). Supposons que f est une fonction continue de U dans \mathbb{R} alors on a

$$\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(\Phi(u, v, w)) |\det J_{\Phi}| du dv dw \quad (2.18)$$

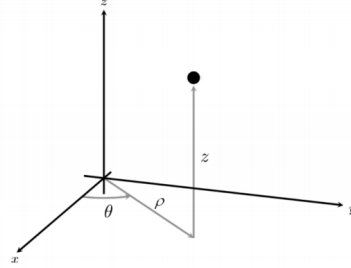
où $\det J_{\Phi}$ est le déterminant de la matrice jacobienne associée à Φ ;

$$J_{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} & \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , les changements classiques sont le passage en coordonnées cylindriques et le passage en coordonnées sphériques.

1. **Cas des coordonnées cylindriques** : ici le changement de variables en co-

ordonnées cylindriques est donné par



$(r, \theta, z) \mapsto \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ où $(r, \theta, z) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ sont les coordonnées du point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b, z)\}$. Cette transformation a jacobien r et nous avons :

$$\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz &= \int \int_{\Delta} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) r dr dy d\theta, \\ \int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz &= \int \int_{\Delta} f(x, a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) r dx dr d\theta. \end{aligned}$$

Remarque 37.

Pour convertir des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques, on utilise les formules ci-dessous :

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2, \quad \tan(\theta) = \frac{y - b}{x - a}, \quad z = z.$$

Exemple 38.

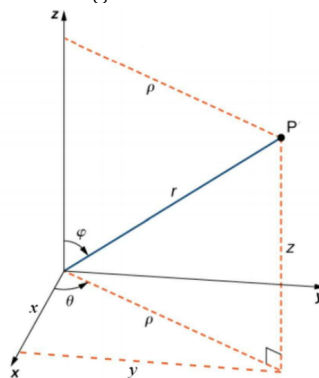
On souhaite calculer l'intégrale $I = \iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2) dx dy dz$ où le solide Ω de l'espace \mathbb{R}^3 est défini par $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$. Un passage en coordonnées cylindriques donne immédiatement

$$I = \int \int \int_{\Delta} (1 + r^2) r dr d\theta dz, \quad (r, \theta, z) \in \Delta = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

Par conséquent

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r^2) r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \int_0^1 (1 + r^2) r dr = 4\pi.$$

2. Cas des coordonnées sphériques : le changement de variables en coordonnées sphériques est donné par



$$(r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{cases} x = a + r \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + r \sin \varphi \sin \theta \\ z = c + r \cos \varphi \end{cases}$$

où $(r, \theta, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ sont les coordonnées du point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a, b, c)\}$. Cette transformation a jacobien $\det J = r^2 \sin \varphi$ et nous avons

$$\int \int \int_{\mathcal{R}} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(a + r \sin \varphi \cos \theta, b + r \sin \varphi \sin \theta, c + r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Ici la valeur absolue du Jacobien est égale à $r \sin \varphi$ car $\sin \varphi \geq 0$ puisque $\varphi \in [0, \pi]$.

Remarque 39.

- Il existe plusieurs conventions pour les coordonnées sphériques (mathématiciens, physiciens, astronomes ...) On suit ici la convention présentée par Wikipédia. Pour s'adapter au contexte, il vaut mieux se rappeler de la méthode plutôt que d'apprendre les formules par coeur !
- Pour convertir des coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques, on utilise les formules ci-dessous :

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2, \quad \tan(\theta) = \frac{y - b}{x - a}, \quad \cos \varphi = \frac{z - c}{r}.$$

Exemple 40.

On souhaite calculer l'intégrale $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ où le solide Ω de l'espace \mathbb{R}^3 est défini par $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ ($R > 0$). Un passage en coordonnées sphériques donne immédiatement

$$I = \int \int \int_{\Delta} r \cos \varphi dr d\theta d\varphi, \quad (r, \theta, \varphi) \in \Delta = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/2].$$

Par conséquent

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \cos \varphi \sin \varphi r^3 dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} R^4$$

2-4 Applications en physique

A- Volume d'un solide : En mécanique de solide, le volume est défini par $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ où Ω est le domaine délimité par ce solide dans l'espace \mathbb{R}^3 . On souhaite calculer le volume d'une sphère de centre O et de rayon $R > 0$ telle que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Par définition, le volume de S est $V(S) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ avec $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

En utilisant la symétrie, on a

$$V(S) = 8 \int \int \int_{\mathcal{R}} dx dy dz, \quad \mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Par passage en coordonnées sphériques, on obtient

$$V(S) = 8 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

B- Centre de masse ou de gravité d'une demi-boule : En mécanique du solide, on peut être amené à chercher le centre de gravité d'une demi-boule homogène $\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

On désigne par m et $\mu(x, y, z)$ la masse et la masse volumique de la demi-boule respectivement, et on considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace \mathbb{R}^3 . Le centre de gravité G du solide s'écrit

$$m\vec{OG} = \int \int \int_{\mathcal{B}} \mu(x, y, z) \vec{OM} dx dy dz. \quad (2.20)$$

où M est un point de \mathcal{B} ayant les coordonnées (x, y, z) . Prenons $G = M$, l'équation (2.20) permet d'identifier la masse du solide \mathcal{B} .

$$m = \int \int \int_{\mathcal{B}} \mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (2.21)$$

Afin de simplifier les calculs, on considère $\mu(x, y, z) = \mu$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant des propriétés de symétrie de \mathcal{B} , on montre facilement que $x_G = y_G = 0$. Il nous reste à calculer z_G . Passons en coordonnées dans (2.20), on a

$$mz_G = \mu \int \int \int_{\mathcal{B}} z dx dy dz.$$

En utilisant les coordonnées sphériques, on obtient

$$mz_G = \mu \int \int \int_{(r, \theta, \varphi) \in \Omega} (r \cos \varphi) (r^2 \sin \varphi) dr d\theta d\varphi$$

avec $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$.

Le calcul de l'intégrale est immédiat en effet la fonction à intégrer est une fonction à variables séparées :

$$z_G = \frac{\mu}{m} \left(\int_0^R r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right).$$

Considérons $\mu = \frac{3m}{2\pi R^3}$ (calcul d'une masse volumique), on obtient finalement $z_G = \frac{3}{8}R$.

B- Centre de masse et moments d'inertie : Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère un solide ayant une densité $\mu(x, y, z)$ qui occupe une région Ω . Les moments d'inertie par rapport aux trois axes du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} I_x &= \int \int \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz & (\text{axe } (OX)) \\ I_y &= \int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz & (\text{axe } (OY)) \\ I_z &= \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz & (\text{axe } (OZ)) \end{aligned}$$

Exemple 41.

Reprenons les données de l'exemple 2-4 et déterminons les moments d'inertie par rapport aux axes (OX) , (OY) et (OZ) .

Hammou El-Otmamy

Fonctions vectorielles

Le but de ce chapitre est de présenter les fonctions vectorielles. Tout d'abord, nous présentons les notations mises en jeu pour définir une courbe paramétrée et le lien avec la cinématique. Ensuite, nous présentons le plan d'étude d'une courbe paramétrée, l'étude locale au voisinage d'un point et l'étude des branches infinies. Ensuite, nous nous intéressons à l'étude des courbes polaires et ses applications (étude des coniques).

Sommaire

3-1 Fonctions vectorielles à variable réelle	40
3-1.1 Définitions et généralités	40
3-1.2 Limite, Continuité, Dérivée	41
3-1.3 Dérivées élémentaires	43
3-2 Formule de Taylor-Young et Développement limité d'une fonction vectorielle	46

Dans tout le chapitre, on utilise les consignes ci-dessous :

- On se place dans un plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé¹ (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base associée à \mathcal{P} et on écrit, pour tout point M du plan \mathcal{P} , $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. C'est-à-dire un intervalle qui contient au moins deux points.
- On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Les vecteur \vec{i} et \vec{j} sont orthonormaux si et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

3-1 Fonctions vectorielles à variable réelle

3-1.1 Définitions et généralités

Définition 42.

Soit $n \geq 2$. Une fonction vectorielle à variable réelle est une application définie de I dans \mathbb{R}^n . Autrement dit, une fonction vectorielle \vec{f} est la donnée de n fonctions f_1, f_2, \dots, f_n définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R} telles que :

$$\begin{aligned}\vec{f} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))\end{aligned}$$

où f_1, f_2, \dots, f_n désignent les composantes de la fonction \vec{f} . Si on se place dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on écrit $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ où $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions représentant les coordonnées de \vec{f} dans la base (canonique) (\vec{i}, \vec{j}) .

Interprétation cinématique : la variable t représente le temps et $(x(t), y(t))$ les coordonnées d'un point $M(t)$ à l'instant t . Ainsi $\vec{f}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$ et la fonction vectorielle \vec{f} représente le mouvement (la position) du point mobile M dans le temps t . Ce mouvement peut aussi être représenté par la fonction ponctuelle ou la loi horaire $t \in I \longmapsto M(t)$.

Dans la suite, par souci de simplification, on note f au lieu \vec{f} et on considère le plan \mathbb{R}^2 . On De plus, on s'intéresse uniquement à l'étude des fonctions vectorielles à valeur dans \mathbb{R}^2 et on écrit

$$f(t) = (x(t), y(t)). \quad (3.1)$$

Exemple 43.

On considère deux solides en mouvement repérés par les points M et N dans le plan \mathcal{P} de \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) tels que

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto M(t) = \left(\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right), \quad \theta \in]-\pi, \pi[\longmapsto N(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Montrer que M et N possèdent la même trajectoire, à déterminer (Indication : on pourra poser $t = \tan \frac{\theta}{2}$).

Toutes les propriétés vues pour les fonctions à une seule variable s'étendent aux fonction vectorielles à valeur \mathbb{R}^2 .

3-1.2 Limite, Continuité, Dérivée

Dans ce paragraphe, on considère une fonction vectorielle f définie sur I dont on note $x(t)$ et $y(t)$ les fonctions coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit $t_0 \in I$ fixé.

Définition 44.

On dit que $f(t)$ converge vers le vecteur $l = (l_x, l_y)$ lorsque t tend vers t_0 si, et seulement si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - l\| = 0$. On écrit ainsi $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = l$.

On note que la limite de f ne peut être "infinie" : on n'a pas donné de sens à cette notion dans le plan.

Proposition 45.

Soit $l = (l_x, l_y) \in \mathbb{R}^2$. Les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes

- (i) $f(t)$ converge vers l lorsque t tend vers t_0 .
- (ii) $x(t)$ et $y(t)$ convergent respectivement vers l_x et l_y lorsque t tend vers t_0 .

Démonstration. Montrons que (i) \implies (ii) : supposons que $f(t)$ converge vers l lorsque t tend vers t_0 . Alors, nous avons $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - l\| = 0$. Donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - l_x)^2 + (y(t) - l_y)^2 = 0.$$

Or, pour tout $t \in I$ nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x(t) - l_x)^2 \leq (x(t) - l_x)^2 + (y(t) - l_y)^2 \\ 0 &\leq (y(t) - l_y)^2 \leq (x(t) - l_x)^2 + (y(t) - l_y)^2 \end{aligned}$$

Par application du théorème de comparaison (théorème des gendarmes), il vient que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - l_x)^2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - l_y)^2 = 0. \quad (3.2)$$

Par conséquent, $x(t) \rightarrow l_x$ et $y(t) \rightarrow l_y$ lorsque t tend vers t_0 .

Montrons que (ii) \implies (i) : supposons que $x(t)$ converge vers l_x et $y(t)$ converge vers l_y lorsque t tend vers t_0 . Nous avons alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = l_x, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = l_y. \quad (3.3)$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - l_x)^2 = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - l_y)^2 = 0. \quad (3.4)$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (x(t) - l_x)^2 + (y(t) - l_y)^2 = 0.$$

On en déduit que $f(t) \rightarrow l = (l_x, l_y)$ lorsque t tend vers t_0 . □

Exemple 46.

Déterminer si la fonction f définie par $f(t) = (x(t), y(t))$ possède une limite en 0 dans chacun des cas suivants :

1. $x(t) = t, y(t) = \frac{1}{t}$.
2. $x(t) = \frac{\tan(t)}{t}, y(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.
3. $x(t) = \frac{\cos(t)}{t}, y(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.
4. $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Notons que les fonctions obtenues sont toujours définies au voisinage de 0. Dans les deux premiers cas, l'une des deux composantes diverge en 0 et f n'a donc pas de limite en 0. Dans le dernier cas, les deux composantes convergent vers 1 et $f(t)$ admet donc $(1, 1)$ pour limite en 0.

On définit maintenant la continuité et la dérivée d'une fonction vectorielle en terme de limite, comme pour une fonction à valeurs réelles.

Définition 47.

On dit que la fonction vectorielle $f(t)$ est continue en t_0 si et seulement si $f(t)$ possède une limite finie lorsque t tend vers t_0 . Cette limite s'écrit ainsi $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

Proposition 48.

La fonction vectorielle $f(t)$ est continue en t_0 si et seulement si ses fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont continues en t_0 .

Démonstration. La démonstration de la Prop. 48 découle immédiatement de la Prop. 45. □

Définition 49.

On dit que la fonction vectorielle f est dérivable en t_0 si le vecteur $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, défini pour $t \neq t_0$, tend vers un vecteur limite finie lorsque t tend vers t_0 . Ce vecteur limite est appelé vecteur dérivé de f en t_0 et on écrit ainsi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0).$$

Proposition 50.

La fonction vectorielle f est dérivable en t_0 si et seulement si ses les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables en t_0 et le vecteur dérivé $f'(t_0)$ a pour coordonnées $(x'(t_0), y'(t_0))$ dans la base canonique \mathcal{B} .

Démonstration. Appliquer la définition et la propriété de dérivée de fonctions réelles au coordonnées de la fonction vectorielle f . \square

Exemple 51.

Supposons que l'on veuille démontrer que la fonction vectorielle $f(t) = (t^2 - t, t^3)$ est dérivable en tout point de \mathbb{R} . On a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = (2t_0 - 1, 3t_0^2).$$

On en déduit que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f est dérivable en t_0 .

3-1.3 Dérivées élémentaires

Les définitions et les propriétés des dérivées élémentaires de fonctions réelles s'étendent aux fonctions vectorielles. Ici, on donne d'abord les propriétés en dimension 2, mais s'étendent automatiquement en dimension 3.

Proposition 52.

Soit f et g deux fonctions vectorielles dérivables sur un intervalle I , et λ une fonction réelle dérivable sur I . Les fonctions suivantes sont dérivables sur I .

— Dérivée d'une somme : $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t) + g(t)$ est dérivable sur I et

$$(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t).$$

— Dérivée d'un produit par une fonction réelle : $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \lambda(t)f(t)$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f)'(t) = \lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t).$$

— Dérivée d'un produit scalaire : $f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ est dérivable sur I et

$$(f \cdot g)'(t) = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t).$$

— Dérivée d'un déterminant : $\det_{\mathcal{B}}(f, g) : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f(t), g(t))$ est dérivable sur I et

$$\left(\det_{\mathcal{B}}(f, g) \right)'(t) = \det_{\mathcal{B}}(f'(t), g(t)) + \det_{\mathcal{B}}(f(t), g'(t)).$$

— Dérivée d'une norme : si f ne s'annule pas sur I , $\|f\| : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable sur I et

$$(\|f\|)'(t) = \frac{f'(t) \cdot f(t)}{\|f(t)\|}.$$

Démonstration. Pour démontrer les propriétés de la proposition 52, il suffit de rappeler les définitions et les propriétés des dérivées de fonctions réelles. \square

Exemple 53.

On considère deux fonctions f et g telles que $f(t) = (t + t^2, \frac{1}{t-1})$ et $g(t) = (t^2, e^{-t})$. Calculer les dérivées de fonctions suivantes : $f + g$, $f \cdot g$, $e^t g(t)$, $\det_{\mathcal{B}}(f, g)$, $\|g\|$.

Pour terminer ce paragraphe nous allons définir la notion de classe d'une fonction vectorielle.

Définition 54.

- Une fonction vectorielle $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est dite de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$ sur I si f est k fois dérivable sur I et que sa dérivée k -ième (notée $f^{(k)}$) est continue sur I . On note $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I et à valeurs dans \mathbb{R} .
- Une fonction vectorielle $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I . On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I et à valeurs dans \mathbb{R} .

Proposition 55.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une fonction vectorielle $f : I \mapsto \mathbb{R}^2$ est dite de classe \mathcal{C}^k sur I si et seulement si ses fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont elles-mêmes de classe \mathcal{C}^k . Dans ce cas, on a

$$f^{(k)}(t) = \left(x^{(k)}(t), y^{(k)}(t) \right).$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la définition et la propriété d'une fonction réelle de classe \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N}$. \square

Exemple 56.

La fonction vectorielle $f(t) = (t^2 - t, t^3)$ est infiniment dérivable en tout point de \mathbb{R} . Donc f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Remarque 57.

- Attention de ne pas confondre f^k et $f^{(k)}$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ est dérivable, cependant la réciproque est fausse si f' n'est pas continue.

3-2 Formule de Taylor-Young et Développement limité d'une fonction vectorielle

Définition 58.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en t_0 si et seulement si les composantes de f admettent un développement limité à l'ordre n en t_0 .

Théorème 59.

Soit f une fonction vectorielle de classe C^k ($k \geq 1$) au voisinage de t_0 . Alors f admet un développement limité d'ordre k au voisinage de t_0 (formule de Taylor-Young). De plus, on a

$$f(t) = f(t_0) + \sum_{i=1}^k \frac{(t-t_0)^i}{i!} f^{(i)}(t_0) + (t-t_0)^k \varepsilon(t-t_0)$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t-t_0) = 0$.

Démonstration. f est de classe C^k au voisinage de t_0 , d'où les composantes de f sont de classe C^k au voisinage de t_0 . Donc, chaque composante admet un développement limité au voisinage de t_0 . Par conséquent, f admet un développement limité au voisinage de t_0 . \square

Exemple 60.

Supposons que l'on veuille déterminer le DL au voisinage de 0 à l'ordre 5 de la fonction vectorielle $f(t) = (\sin t, \cos(3t))$. En utilisant le DL des fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos(3t)$ au voisinage de 0, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5), \\ y(t) &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5). \end{aligned}$$

Courbes paramétrées et les propriétés métriques

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les courbes et ses paramétrisations cartésiennes et polaires. On commence d'abord par les courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes. Ici, on introduit plusieurs notions liées à cette courbe : définitions, lien avec la cinématique, pratique de l'étude des variations, définition d'une tangente à une courbe, théorème d'existence d'une tangente, branches infinies, étude des points stationnaires. Ensuite, on s'intéresse aux courbes polaires en présentant leurs paramétrisations, tangentes en un point, plan pratique d'étude et applications numériques. Enfin, on présente les propriétés métriques d'une courbe paramétrée (planes ou polaires) et ses applications en physique.

Sommaire

4-1	Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes	48
4-1.1	Orientation d'un arc	49
4-1.2	Interprétation cinématique : vitesse et accélération	52
4-2	Étude complète d'une courbe plane	54
4-2.1	Réduction de domaine domaine de définition	55
4-2.2	Points particuliers et tangentes à la courbe paramétrée	56
4-2.3	Branches infinies	61
4-2.4	Applications pratiques	64
4-3	Courbes paramétrées en coordonnées polaires	67
4-3.1	Généralités et définitions	67
4-3.2	Vitesse et accélération dans le repère polaire	68
4-4	Étude complète d'une courbe polaire	69
4-4.1	Réduction de domaine domaine de définition	69
4-4.2	Points particuliers et tangente à la courbe	70
4-4.3	Branches infinies	72
4-4.4	Études des points multiples	73
4-4.5	Applications pratiques	74
4-5	Propriétés métriques d'une courbe paramétrée	74

Dans la suite du chapitre, on utilise les consignes ci-dessous :

- on considère un plan affine euclidien \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé¹ (O, \vec{i}, \vec{j}) et ainsi identifié \mathbb{R}^2 .
- Dans le cas des coordonnées cartésiennes, on note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base associée à \mathcal{P} et on écrit, pour tout point M du plan \mathcal{P} , $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- Dans le cas des coordonnées polaires, on définit le vecteur unitaire \mathbf{u}_θ tel que $\mathbf{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$.
- On utilise \mathbf{u}_θ pour repérer un point M du plan \mathcal{P} par rapport à l'origine O du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) : $\overrightarrow{OM}(t) = r\mathbf{u}_\theta = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$, où le couple (r, θ) désigne les coordonnées polaires.
- I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. C'est-à-dire un intervalle qui contient au moins deux points.
- On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4-1 Courbes paramétrées en coordonnées cartésiennes

Comme nous avons vu dans le cas d'une fonction d'une seule variable, l'ordonnée était une fonction des abscisses, i.e. $y = f(x)$. Une courbe paramétrée est une courbe dont l'abscisse et l'ordonnée sont toutes les deux des fonctions d'un paramètre t .

Définition 61.

Soit $d = 2, 3$ et k un entier positif. On appelle courbe paramétrée (arc paramétré) C , tout triplet (I, γ, Γ) où

1. I est un intervalle ou une réunion d'intervalle de \mathbb{R} .
2. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ est continue, qui mène à un ensemble de points $M(t)$ quand t décrit l'intervalle I .
3. $\Gamma = \{\gamma(t), t \in I\}$.

On dit que la courbe C est de classe \mathcal{C}^k lorsque les coordonnées de γ sont de classe \mathcal{C}^k . On appelle (I, γ) le paramétrage de la courbe C , et on appelle Γ le support géométrique de la courbe ou aussi la trajectoire de C_f l'ensemble des points de la courbe $\Gamma = \gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$ et γ est une paramétrisation de Γ .

On dit que la courbe $(I = [a, b], \gamma)$ est fermée si en la parcourant on revient au point de départ, c'est-à-dire $\gamma(a) = \gamma(b)$.

1. Les vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont orthonormaux si et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

Remarque 62.

- Si $d = 2$, $\Gamma = \gamma(I) = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in I\}$ est la courbe plane.
- Si $d = 3$, $\Gamma = \gamma(I) = \{\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I\}$ s'appelle la courbe gauche si la courbe n'est pas plane.

Pour certaines des notions qui vont suivre, nous avons besoin de connaître les différentes paramétrisations des coordonnées :

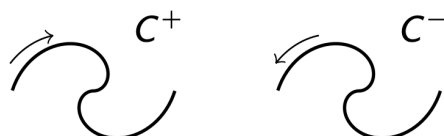
- Cartésiennes : $\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t))$.
- Cylindriques : $\gamma(t) = \rho\vec{e}_\rho(t) + z(t)\vec{k}$.
- Sphériques : $\gamma(t) = r\vec{e}_r(t)$.

4-1.1 Orientation d'un arc

Pour certaines des notions qui vont suivre, nous avons besoin d'orienter l'arc paramétré Γ , c'est-à-dire de donner un sens de parcours indiqué par une petite flèche sur la trajectoire.

Définition 63.

On dit qu'une courbe $(I = [a, b], \gamma)$ est orienté et notée C^+ si on fixe un sens de parcours (il en existe toujours deux sens). Dans ce cas, on note C^- la courbe orientée dans le sens opposé. On prend le plus souvent, et c'est ce que nous faisons par la suite, l'orientation de $(I = [a, b], \gamma)$ est donnée par le sens croissant de t .

**Remarque 64.**

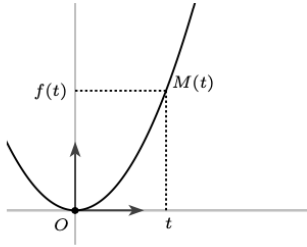
- L'orientation d'un arc paramétré n'est pas invariante par tout changement de paramètre admissible. Elle est invariante par les changements de paramètre admissibles qui sont strictement croissants.
- Plusieurs courbes paramétrées différentes peuvent avoir le même support (de plus, certaines peuvent être extrêmement irrégulières et d'autres plus régulières). Ceci traduit simplement le fait qu'il y a plusieurs manières de parcourir le même trajet. En cinématique, une même trajectoire peut être décrite par des mouvements différents (sens, vitesse, accélération, ...).

Exemple 65.

On connaît déjà les courbes paramétrées suivantes :

Courbe d'une fonction f
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

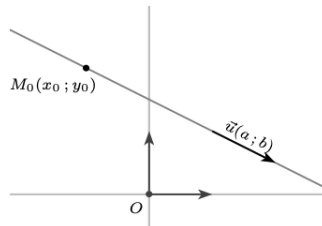
$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$



Droite

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

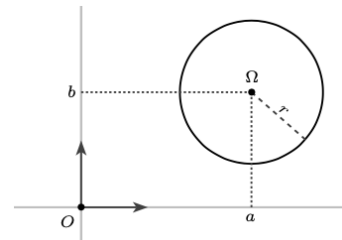
$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases}$$



Cercle

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = a + r \cos(t) \\ y(t) = b + r \sin(t) \end{cases}$$

**Exemple 66.**

1. Illustration de la deuxième remarque 64 : on considère deux courbes paramétrées C_1 et C_2 définies respectivement par

$$C_1 \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi[; \quad C_2 \begin{cases} x(\theta) = \cos(2\theta) \\ y(\theta) = -\sin(2\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0; 4\pi[$$

La courbe C_1 représente le cercle unité (cercle de rayon $r = 1$ et d'origine $O(0, 0)$) parcouru une seule fois dans le sens direct. Cependant, la courbe C_2 représente le cercle unité parcouru quatre fois dans le sens indirect.

2. Soient $r > 0$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée C_1 donnée par :

$$C_1 : \quad \gamma(t) = \begin{cases} x(t) = rt \\ y(t) = r\sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (4.1)$$

De l'équation $(x(t))^2 + (y(t))^2 = r^2$, on déduit que $\gamma(t)$ est l'arc du cercle de rayon r et de centre $O(0, 0)$. Plus précisément, le support géométrique de γ est le quart de cercle entre les points $(r, 0)$ et $(0, r)$. Or ce support géométrique admet aussi une autre paramétrisation $\tilde{\gamma} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$C_2 : \quad g(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = r \cos(\theta) \\ y(\theta) = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Ainsi, une même courbe géométrique peut avoir plusieurs paramétrisations. La version complexe de cet arc est l'application $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$.

Interprétation cinématique :

- Si on considère la variable (paramètre) t comme le temps, $M(t)$ donne la position à l'instant t d'un point mobile du plan, cette position étant repérée en coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ dans le repère fixe (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- L'étude de $\gamma(t)$ (i.e. de M) est donc l'étude du mouvement du mobile en fonction du temps.
- La courbe $\mathcal{C} = (I, \gamma, \Gamma)$ est appelée mouvement. Ce mouvement peut aussi être représenté par la fonction ponctuelle ou la loi horaire $t \in I \mapsto M(t)$.
- Le support $\gamma(I) = \Gamma$ de la courbe est appelé trajectoire d'un point mobile au cours de temps t .
- Le vecteur $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est appelé vecteur position du point mobile M dans le temps t . Si on se place dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on écrit $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Définition 67.

Une fonction $\varphi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) si

- φ est dérivable de classe \mathcal{C}^k sur J .
- φ est inversible, c'est-à-dire qu'il admet la réciproque $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$.
- la réciproque φ^{-1} est dérivable de classe \mathcal{C}^k sur I .

En particulier, une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 est un difféomorphisme si et seulement si $\varphi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$.

Définition 68.

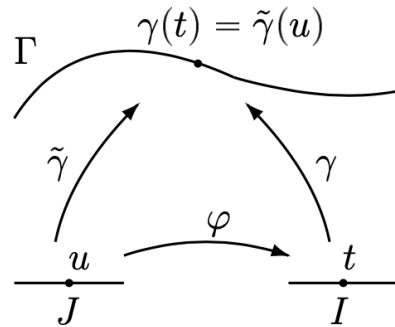
Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Un reparamétrage (ou reparamétrisation) de classe \mathcal{C}^k de γ est une nouvelle paramétrisation $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtenue en composant γ avec un difféomorphisme $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$), i.e. telle que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$

Le nouveau paramètre $u \in J$ est l'antécédent du vieux paramètre $t \in I$:

$$u = \varphi^{-1}(t) \quad t = \varphi(u).$$

En omettant φ et φ^{-1} , on note aussi

$$u = u(t) \quad t = t(u).$$



Exemple 69 (Définition 67).

- La fonction $\varphi(x) = x^3$, avec $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un difféomorphisme car $\varphi'(0) = 0$. Cela entraîne que sa réciproque $\varphi^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en $y = 0$.
- Par contre, la fonction $\varphi(x) = x^3$, avec $x > 0$, est bien un difféomorphisme.

Exemple 70 (Définition 68).

On considère les paramétrisations suivantes pour le cercle privé d'un point :

$$\gamma(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[,$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

sont l'une un reparamétrage de l'autre, car $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ où $\varphi(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est difféomorphisme.

Le support d'une courbe γ coïncide avec celui d'un reparamétrage $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, car un difféomorphisme φ est en particulier une fonction bijective. Le contraire n'est pas vrai : si un même support admet deux paramétrisations, celles-ci ne sont pas forcément l'une un reparamétrage de l'autre.

Exemple 71.

Le support $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^3\}$ admet les deux paramétrisations

$$\gamma(u) = (u^2, u^9), \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{\gamma}(t) = (t, t^3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mais, elles ne sont pas l'une un reparamétrage de l'autre, car $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$ où $\varphi(u) = u^3$ n'est pas un difféomorphisme sur \mathbb{R} .

4-1.2 Interprétation cinématique : vitesse et accélération

En cinématique, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (respectivement dans l'espace $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$) sont les coordonnées d'un point mobile $M(t)$ à l'instant t . Si $t \neq t_0$, alors la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et t_0 est donnée par le vecteur

$$\frac{1}{t-t_0} \overrightarrow{M(t)M(t_0)}, \quad (4.2)$$

qui a pour coordonnées $\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (resp. dans \mathbb{R}^3 , $\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}\right)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

Définition 72.

Soit $t_0 \in I$ fixé et γ une fonction vectorielle définie sur I à valeur dans \mathbb{R}^2 .

- Si γ est **dérivable** en t_0 , $\gamma'(t_0)$ est appelé le vecteur vitesse à l'instant t_0 .
- Si γ est **2 fois dérivable** en t_0 , $\gamma''(t_0)$ est le vecteur accélération à l'instant t_0 .

Interprétation cinématique :

- Pour $t \in I$, on note $M(t)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \gamma(t)$ où γ est de classe \mathcal{C}^2 , alors

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}, \quad \gamma''(t_0) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}$$

sont respectivement les vecteurs vitesses et accélérations à l'instant t_0 . Par exemple, on dit que $\gamma'(t_0)$ est la vitesse instantanée en $t = t_0$ d'un mobile de coordonnées $(x(t), y(t))$ se déplaçant dans le plan \mathbb{R}^2 en fonction du temps t .

- Si $\|\gamma'(t)\|$ est constante (i.e. il existe un réel v_0 tel que $\|\gamma'(t)\| = v_0, \forall t \in I$), on dit que le mouvement est **uniforme**, et si le support est une droite alors le mouvement est **rectiligne**.
- S'il existe un point fixe A et une application continue $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, $\vec{a}(t) = \lambda \overrightarrow{AM}(t)$, alors le mouvement est à **accélération centrale**.

Exemple 73.

Droites : une droite passant par $A(a, b)$ et dirigée par le vecteur $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$ est paramétrée

par $\begin{matrix} \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) \end{matrix}$ où $x(t) = a + \alpha t$ et $y(t) = b + \beta t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} = \mathbf{v}.$$

La même droite peut être parcourue trois fois plus vite puisque elle admet également la représentation paramétrique $\begin{matrix} \tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto N(t) = g(t) = (X(t), Y(t)) \end{matrix}$ où $X(t) = a + 3\alpha t$ et $Y(t) = b + 3\beta t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\frac{d\overrightarrow{ON}}{dt}(t) = 3\alpha \vec{i} + 3\beta \vec{j} = 3\mathbf{v}.$$

Exemple 74.

Courbe d'une fonction numérique réelle : La représentation graphique d'une fonction numérique f est la courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$. Si l'on désigne par D_f le domaine de définition de f , le graphe de f est le support de la courbe paramétrée définie par $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$ avec $t \in D_f$.

Si f est une fonction dérivable en $t \in D_f$, on a alors $\frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j} = \mathbf{v}$. Ici, il est possible de parcourir la courbe à différentes vitesses.

Exercice 4.1 Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$.

- Donner une expression de vitesse $\gamma'(t)$ et d'accélération $\gamma''(t)$ au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.
- Vérifier que $\gamma'(t) \perp \gamma''(t)$, que $\|\gamma''(t)\| = c \in \mathbb{R}$, et que $\gamma''(t)$ est colinéaire et de sens contraire au vecteur $\vec{OM}(t)$.

4-2 Étude complète d'une courbe plane

Il s'agit ici de présenter le plan d'étude d'une courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes $\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, et de détailler certains axes pour tracer une courbe.

Plan d'étude d'une courbe plane.

1. **Détermination du domaine de définition de la courbe D_γ :** c'est l'ensemble des points en lesquels $x(t)$ et $y(t)$: $D_\gamma = D_x \cap D_y$.
2. **Étude des symétries éventuelles et réduction de D_γ ,** voir Sec. 4-2.1.
3. **Étude simultanée des variations de x et y sur l'intervalle d'étude.**
4. **Étude des tangentes particulières à la courbe,** voir Sec. 4-2.2.
5. **Étude des éventuelles branches infinies,** voir Sec. 4-2.3.
6. **Intersection avec les axes :** trouver $t \in D_\gamma$ qui vérifie $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$.
7. **Recherche des éventuels points multiples ou doubles.**
8. **Tracé définitif de la courbe :** on utilise les résultats précédents en représentant avant tout les asymptotes, les points stationnaires, les points à tangente verticale et horizontale et on ébauche le tracé de la courbe en prenant une échelle adaptée si elle ne nous est pas imposée. Tout est alors en place pour la construction et on peut tracer la courbe grâce aux règles suivantes :
 - Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut.
 - Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas.
 - Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut.
 - Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.

4-2.1 Réduction de domaine de définition

On considère toujours la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes (plane) sur un domaine $D_\gamma := D_x \cap D_y$ telle que $\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ où D_x et D_y désignent respectivement l'ensemble des points en lesquels les composantes $x(t)$ et $y(t)$ sont définies.

On donne ici une liste non exhaustive pour réduire le domaine de définition D en s'appuyant sur une périodicité ou/et des éventuelles symétries. Plusieurs cas sont possibles :

- S'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t+T) = \gamma(t)$, γ est T -périodique (i.e. $x(t+T) = x(t)$ et $y(t+T) = y(t)$) ; on peut alors réduire l'étude de γ à l'intersection de D_γ avec un intervalle de longueur T (en général $D_\gamma \cap [0, T]$ ou $D_\gamma \cap [-T/2, T/2]$, et on déduit ainsi toute la courbe.
- Si D_γ est symétrique et on a une des symétries suivantes :
 - i. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x et y fonctions paires de t),
 - ii. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x impaire et y paire),
 - iii. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x paire et y impaire),
 - iv. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x et y impaires).
 alors, on peut réduire l'étude à l'intervalle $D_\gamma \cap \mathbb{R}^+$, et on déduit toute la courbe
 - i. qui est parcourue deux fois,
 - ii. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe (OY) ,
 - iii. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe (OX) ,
 - iv. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'origine O du repère.

Remarque 75.

Certains domaine d'étude peut faire appel au changement de variable suivant :

- $D_\gamma = [a, b]$, $t \mapsto a + b - t$ permet de restreindre à $[a, \frac{a+b}{2}]$.
- $D_\gamma \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/t$ pour les fonctions logarithmiques et à fractions rationnelles.

Exemple 76.

On considère la courbe paramétrée (astroïde) par $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$ on a : $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t) = y(t+2\pi)$ par périodicité de cosinus et sinus . Donc on limite l'étude à $[-\pi, \pi]$.
- $\forall t \in [-\pi, \pi]$ on a : $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ car cosinus est paire et sinus est impaire. Donc γ est symétrique par rapport à (OX) et on étudie γ sur $[0, \pi]$.
- $\forall t \in [0, \pi]$ on a : $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ car $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. Donc, γ est symétrique par rapport à (OY) et on étudie γ sur $[0, \pi/2]$.
- $\forall t \in [0, \pi/2]$ on a : $x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$ car $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ et $\sin(\pi - t) = \sin(t)$. Donc, γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ et on étudie γ sur $[0, \pi/4]$.

Notons que le fait d'oublier une symétrie n'empêche pas de réaliser l'étude, mais peut la compliquer et mener à des incohérences sur la courbe finale.

4-2.2 Points particuliers et tangentes à la courbe paramétrée

Soit $t_0 \in I$ fixé et γ une courbe définie sur I à valeur dans \mathbb{R}^2 et deux fois dérivable en t_0 . Pour $t \in I$, on note $M(t)$ le point tel que $M(t) = \gamma(t) = (x(t), y(t))$ et on désigne par $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ le vecteur vitesse de γ à l'instant t_0 . Avant d'énoncer la tangente en un point à la courbe paramétrée, on introduit quelques définitions mises en jeu.

Points particuliers

Définition 77.

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On dit que

- $M(t_0)$ est un point **régulier** si $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$ (i.e. si et seulement si $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$).
- $M(t_0)$ est point **stationnaire** ou singulier si $\gamma'(t_0) = (0, 0)$ (i.e. si et seulement si $\|\gamma'(t_0)\| = 0$).
- $M(t_0)$ est un point **birégulier** si $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont libres ou linéairement indépendants ou **non colinéaires**, c'est-à-dire

$$\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) \neq 0.$$

- $M(t_0)$ est un point d'**inflexion** si $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont liés ou linéairement dépendants ou **colinéaires**.
- $M(t)$ est point **multiple** ou double s'il existe $t_1 \neq t_2$ pour lesquels $M(t_1) = M(t_2)$; i.e. la courbe coupe lui-même en un point.

Remarque 78.

En cinématique, un point **stationnaire** ou un point **d'arrêt** sur la trajectoire est un point où la vitesse du mobile est nulle.

Proposition 79.

Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière, alors tout reparamétrage de γ est aussi régulier.

Démonstration. Soit $\tilde{\gamma}(u) = \gamma \circ \varphi(u)$ un reparamétrage de γ , donnée par le difféomorphisme $\varphi : J \rightarrow I$. On a toujours

$$\tilde{\gamma}'(u) = \gamma'(\varphi(u))\varphi'(u)$$

avec $\varphi'(u)$ car φ est un difféomorphisme. Si γ est régulière on a aussi $\gamma'(u) \neq 0$ pour tout $t = \varphi(u)$, donc $\tilde{\gamma}'(u) \neq 0$. \square

Corollaire 80.

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. On dit que

- la courbe (I, γ) est régulière si tous les points sont réguliers, c'est-à-dire si $\gamma'(t) \neq (0, 0)$, $\forall t \in I$.
- la courbe (I, γ) est birégulière si tous les points sont biréguliers, c'est-à-dire si $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Exemple 81.

- La courbe d'un cercle $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $r > 0$ avec $t \in \mathbb{R}$ est régulière partout car $\|\gamma'(t)\| = r \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- La courbe $\gamma(t) = (t, t^3)$, est régulière partout, car $\gamma'(t) = (1, 3t^2) \neq (0, 0)$, $\forall t$.
- La courbe d'une fonction réelle continue $\gamma(t) = (t, f(t))$, avec $t \in \mathbb{R}$, est régulière partout, car $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- La courbe $\gamma(t) = (t^3, t^9)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est singulière au point $(0, 0)$ car $\gamma'(t) = (3t^2, 9t^8) = (0, 0)$ si et seulement si $t = 0$.
- La courbe $\gamma(t) = (t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2})$ avec $t \in \mathbb{R}^*$ admet le point double $M(t_1) = (5, 6)$. En effet, pour $t_1 \neq t_2$, on trouve $t_1 = -1 + \sqrt{2}$ et $t_2 = -1 - \sqrt{2}$.

Remarque 82.

- On note que $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont colinéaires ou linéairement dépendants ou liées si et seulement si $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) = 0$
- On dit que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dit régulière si $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si le produit vectoriel de $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ est non nul pour tout $t \in I$ et on écrit $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \neq (0, 0, 0)$.

Exemple 83.

La courbe $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, avec $t \in \mathbb{R}$, est birégulière car les deux vecteurs $\gamma'(t) = (1, 1, 2t)$ et $\gamma''(t) = (0, 0, 2)$ sont libres en effet leur produit vectoriel $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$.

Tangente au point de la courbe

Soit (I, γ, Γ) une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k , $g \geq 1$ et soit $t_0 \in I$.

Définition 84.

On dit que la courbe (I, γ, Γ) admet une tangente au point $M(t_0)$ lorsque la droite $(M(t_0)M(t))$ admet une position limite quand t tend vers t_0 . La droite limite est alors la tangente au point $M(t_0)$.

Théorème 85.

Soit (I, γ, Γ) une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k , $g \geq 1$ et soit $M(t_0)$ un point régulier de Γ . Alors la courbe Γ admet en $M(t_0)$ une tangente dirigée par $\gamma'(t_0)$

D'après le théorème, la tangente en $M(t_0)$ admet la représentation paramétrique suivante

$$\begin{cases} x(\theta) &= x(t_0) + x'(t_0)\theta \\ y(\theta) &= x(t_0) + y'(t_0)\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R}), \quad (4.3)$$

et l'équation cartésienne $y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$.

Proposition 86.

Soit (I, γ, Γ) une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k , $g \geq 1$ et soit $M(t_0)$ un point régulier (i.e. $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$) de Γ . Alors, on a

- si $x'(t) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ a pour pente $m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$.
- si $y'(t) = 0$, la tangente en $M(t_0)$ est horizontale.
- si $x'(t) = 0$, la tangente en $M(t_0)$ est verticale.

Proposition 87.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leq p \leq q$. Soit (I, γ, Γ) une courbe paramétrée \mathcal{C}^n avec $n \geq q$, et soit $M(t_0)$ un point stationnaire (i.e. $\|\gamma'(t_0)\| = 0$) de Γ . On suppose que $\gamma^{(k)}(t_0) = (0, 0)$, $1 \leq k \leq p-1$, que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq (0, 0)$ et que q le plus petit entier tel que $\det(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)) \neq 0$. Alors, la branche de la courbe Γ admet une tangente en $M(t_0)$ dirigé par le vecteur $\gamma^{(p)}(t_0)$.

Exemple 88.

On considère la courbe paramétrée $\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = -2t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$. On a $x'(0) = y'(0) = 0$, donc $M(0)$ est un point stationnaire. On calcule alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{-2t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{t}{2} = 0.$$

Donc l'axe (OX) est la tangente en ce point à la courbe $\gamma(t)$ (il s'agit d'un point de rebroussement).

Position de la courbe par rapport à la tangente

On note ici

- $p = \min\{p \in \mathbb{N}^* : \gamma^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)\}$.
- $q = \min\{q > p, p \in \mathbb{N}^* : \det(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)) \neq 0\}$.

D'après la formule de Taylor-Young (appliquée aux fonctions coordonnées de γ), on a le développement limité à l'ordre q de γ en t_0 :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p \frac{\gamma^{(p)}(t_0)}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} (t - t_0)^k \frac{\gamma^{(k)}(t_0)}{k!} + (t - t_0)^q \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{q!} + o((t - t_0)^q).$$

Puisque les vecteurs de la famille $\{\gamma^{(p+1)}(t_0), \dots, \gamma^{(q-1)}(t_0)\}$ sont colinéaires, on a

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + [(t - t_0)^p \circ (t - t_0)] \frac{\gamma^{(p)}(t_0)}{p!} + (t - t_0)^q \frac{\gamma^{(q)}(t_0)}{q!} + o((t - t_0)^q).$$

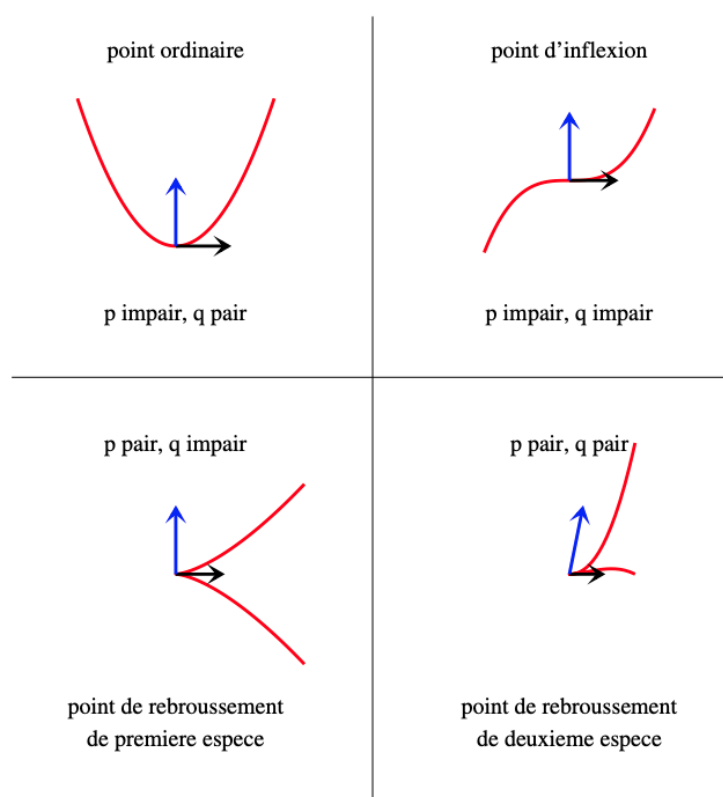
Ainsi, on écrit composantes de $\gamma(t)$ dans la base $(\gamma(t_0), \gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0))$, on a les équivalences suivantes au voisinage de t_0 :

$$x(t) \sim \frac{(t - t_0)^p}{p!}, \quad y(t) \sim \frac{(t - t_0)^q}{q!}.$$

Ce qui explique qu'au voisinage de t_0 , la courbe γ présente les allures suivantes, selon les parités de p et de q . On a plusieurs cas possibles (voir figure ci-dessous où les vecteurs $\gamma^{(p)}(t_0)$ et $\gamma^{(q)}(t_0)$

sont représentés respectivement par la flèche noire et bleue) :

1. Si p est impair et q pair, la courbe γ touche la tangente en $M(t_0)$: un méplat ou un point ordinaire.
2. Si p est impair et q impair, la courbe γ traverse la tangente en $M(t_0)$: un point d'inflexion.
3. Si p est pair et q impair, la courbe γ traverse la tangente en $M(t_0)$: un point de rebroussement de première espèce.
4. Si p est pair et q pair, la courbe γ ne traverse pas la tangente en $M(t_0)$: un point de rebroussement de deuxième espèce.



Remarque 89.

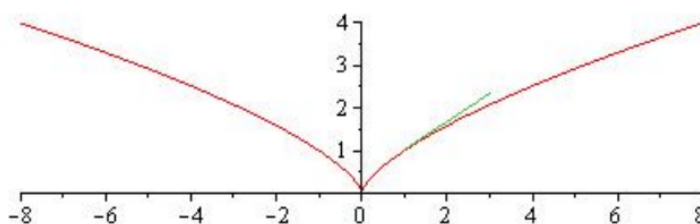
- Il est inutile d'apprendre cela par coeur. Il suffit de retenir que localement (i.e. pour t assez proche de t_0), les signes des composantes de γ dans le repère $(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0))$ sont exactement ceux de $((t - t_0)^p, (t - t_0)^q)$.
- En pratique, pour étudier un point stationnaire $M(t_0)$, on effectue un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ en t_0 et on adapte la démarche précédente. Puisque le point $M(t_0)$ est stationnaire, et donc le coefficient de $(t - t_0)$ sera nul dans les développements limités de x et y . Puisqu'il nous faut deux vecteurs indépendants $\gamma^{(p)}$ et $\gamma^{(q)}$, il faut au moins un DL à l'ordre 3 de x et y .

Exemple 90.

Supposons que l'on veuille déterminer la tangente au point singulier $O(0,0)$ de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (ici $\gamma'(0) = (0,0)$). On a

$$\gamma(t) = t^2 \frac{\gamma^{(2)}(0)}{2!} + t^3 \frac{\gamma^{(3)}(0)}{3!} + \mathcal{O}(t^3).$$

Ainsi $p = 2$ pair et $q = 3$ impair, donc $O(0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

**Remarque 91.**

Lorsque $M(t_0)$ est un point birégulier, le signe $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) = x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)$ donne la concavité de la courbe γ au point $M(t_0)$. Plus précisément, on a

- $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) < 0$, alors la courbe tourne en $M(t_0)$ dans le sens indirect (dans une orientation directe classique, la courbe tourne à droite), elle tourne sa concavité vers le bas.
- $\det(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) > 0$, alors la courbe tourne en $M(t_0)$ dans le sens direct (dans une orientation directe classique, la courbe tourne à gauche), elle tourne sa concavité vers le haut.

4-2.3 Branches infinies

On considère la courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $t_0 \in \bar{I}$.

Définition 92.

On dit que γ possède une branche infinie lorsque t tends vers t_0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\gamma(t)\| = +\infty$, i.e. la distance de $\gamma(t)$ à l'origine tend vers $+\infty$.

Exemple 93.

Supposons qu'on veuille démontrer que la courbe $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ possède une branche infinie quand $t \rightarrow \pm\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\|\gamma(t)\|^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t = t^2$. Donc

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\gamma(t)\|^2 = +\infty.$$

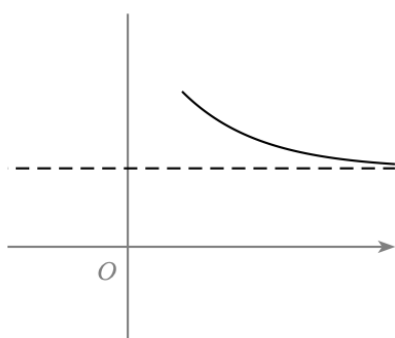
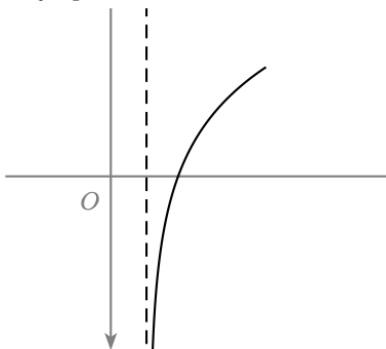
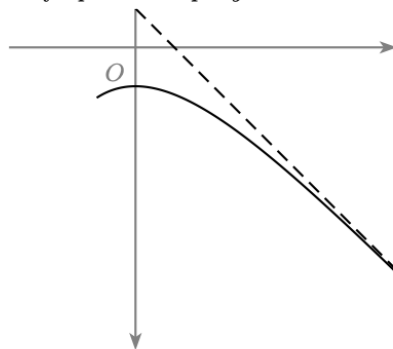
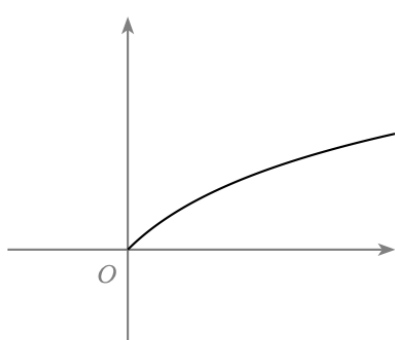
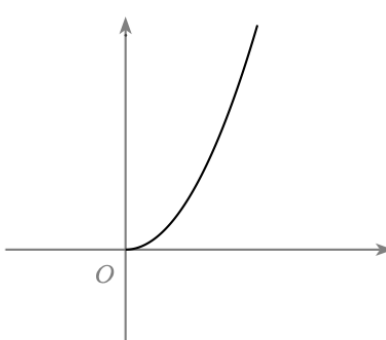
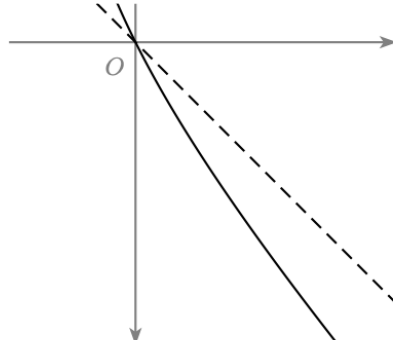
Ici, la limite de x et celle de y n'existent pas lorsque t tend vers $\pm\infty$.

Il est très utile de chercher dans la suite si ces branches infinies possèdent des asymptotes, tout en restreignant notre étude à l'un des cas suivants :

1. **Premier cas :** l'une des composantes de γ tend vers $\pm\infty$, tandis que l'autre possède une limite finie, c'est-à-dire
 - i. $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$, la droite $x = x_0$ est asymptote à la courbe γ .
 - ii. $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$, la droite $y = y_0$ est asymptote à la courbe γ .
2. **Deuxième cas :** les composantes x et/ou y de γ tendent vers $\pm\infty$ lorsque t tend vers t_0 , c'est-à-dire : $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. On utilise la méthode suivante pour étudier l'existence des asymptotes en étudiant la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$:
 - i. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ n'existe pas, on ne peut rien dire.
 - ii. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, il y a une branche parabolique de direction (OX) .
 - iii. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, il y a une branche parabolique de direction (OY) .
 - iv. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$, il y a une éventuelle branche asymptotique et on traite la différence $y(t) - ax(t)$:
 - a. si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$, il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$.
 - b. si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = \infty$, il y a une branche parabolique de pente a .
 - c. si $\lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - ax(t))$ n'existe pas, on ne peut rien dire.

Remarque 94.

On note qu'il est tout à fait possible qu'une courbe paramétrée γ présente une branche infinie sans que ses composantes n'ont pas de limite (voir l'exemple 93).

Asymptote horizontale $y = y_0$ Asymptote verticale en $x = x_0$ Asymptote oblique $y = ax + b$ Branche parabolique dir. par (Ox) Branche parabolique dir. (Oy) Branche parabolique dir. $y = ax$ **Exemple 95.**

Supposons que l'on veuille déterminer les branches infinies de la courbe paramétrée par $x(t) = t + \frac{1}{t}$ et $y(t) = t + \frac{1}{2t^2}$, $t \in \mathbb{R}^*$. On a $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $\pm\infty$ si $t \rightarrow \pm\infty$ ou $t \rightarrow 0$. On étudie donc les deux cas :

1. On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \pm\infty$, on étudie alors le rapport $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$. On a donc une asymptote de pente $a = 1$. On étudie alors $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) - x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} = 0$ et donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote.

En étudiant le signe $y(t) - x(t)$ quand $t \rightarrow \pm\infty$, on remarque que c'est positif lorsque $t \rightarrow -\infty$ et négatif lorsque $t \rightarrow +\infty$ ($\frac{1}{t^2}$ négligeable devant $-\frac{1}{t}$). La courbe est donc au dessous de l'asymptote lorsque $t \rightarrow +\infty$ et que dessus lorsque $t \rightarrow -\infty$.

2. On a $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} y(t) = +\infty$, on étudie alors le rapport $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$. Donc, la courbe admet une branche parabolique dans la direction (OY) .

4-2.4 Applications pratiques

On souhaite étudier la courbe paramétrée $\gamma(t) = (x, y)$ définie par : $\begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = t^3 - 3t + \frac{4}{3t}. \end{cases}$

1. **Domaine de définition** : cherchons les ensembles de définition de x et y ;

$$t \in D_y \Leftrightarrow t \neq 0$$

Donc $D_y = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De même, on a $D_x = \mathbb{R}$. En conclusion $D_\gamma = D_x \cap D_y = \mathbb{R}^*$.

2. **Réduction du domaine** : on a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. En effectuant au moment du tracé une symétrie de la courbe obtenue par rapport à l'origine O .

3. **Dérivées et tableau de variations de x et y** : les fonctions x et y sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* , et on a

$$x'(t) = 3t^2 - 2, \quad y'(t) = 3t^2 - 3 - \frac{4}{3t^2}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Leftrightarrow 3t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ car } t > 0, \\ y'(t) = 0 &\Leftrightarrow 3t^2 - 3 - \frac{4}{3t^2} = 0 \Leftrightarrow 3t^4 - 3t^2 - \frac{4}{3} = 0. \end{aligned}$$

Pour trouver les valeurs où s'annule y' , on pose $z = t^2$ et on résout l'équation $3z^2 - 3z^2 - \frac{4}{3} = 0$. Le discriminant est $\Delta = 25 > 0$, donc l'équation en z admet deux solutions : $z_1 = \frac{4}{3}$ et $z_2 = -\frac{1}{3}$. Donc

$$t^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ car } t > 0.$$

On constate que x' et y' ne s'annulent jamais simultanément, donc γ est régulière sur \mathbb{R}^* . En étudiant le signe de x' et y' , on obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞
$x'(t)$		-	0	+
$x(t)$	0	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{4}{3\sqrt{3}}$	∞
$y'(t)$		-	0	+
$y(t)$	∞	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{4}{3\sqrt{3}}$	∞
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	∞	$-\frac{9}{4}$	0	3

4. **Études des tangentes aux points particuliers** : D'après le tableau de variation, on constate qu'il existe deux tangentes :

$$\begin{aligned} - & x'(\sqrt{\frac{2}{3}}) = 0 \text{ et } y(\sqrt{\frac{2}{3}}) \neq 0, \text{ la courbe a une tangente verticale au point } (-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}). \\ - & y'(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 0 \text{ et } x'(\frac{2}{\sqrt{3}}) \neq 0, \text{ la courbe a une tangente horizontale au point } (-\frac{4}{3\sqrt{3}}, -\frac{4}{3\sqrt{3}}). \end{aligned}$$

5. **Études des branches infinies** : le tableau de variation nous confirme qu'il existe deux branches infinies : une au voisinage de 0 et une au voisinage de ∞ .

- Au voisinage de 0, on a $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \infty$. Donc la droite d'équation $x = 0$ (i.e. axe des ordonnées (Oy)) est asymptote à la courbe.
- Au voisinage de ∞ , on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$, on étudie la limite du rapport $\frac{y}{x}$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3 - 3t + \frac{4}{3t}}{t^3 - 2t} = 1$$

Jusqu'ici, on ne sait pas si une asymptote ou une branche parabolique ou rien du tout. On remarque que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} -t + \frac{4}{3t} = -\infty.$$

Par conséquent, γ admet une branche parabolique de direction $y = x$. Enfin

$$y(t) - x(t) = -t + \frac{4}{3t} \begin{cases} \rightarrow -\infty, & t \sim +\infty \\ \rightarrow +\infty, & t \sim -\infty \end{cases}$$

Ce qui prouve que la courbe γ est au dessous de l'asymptote lorsque t est au voisinage de $+\infty$, et que la courbe γ est au dessus de l'asymptote lorsque t est au voisinage de $-\infty$.

6. **Intersection avec les axes** : on constate aisément, en observant les variations de x , qu'il existe deux points d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (Oy). Déterminons leurs ordonnées :

$$x(t) = 0 \implies t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \implies t = \pm\sqrt{2}$$

Les valeurs de $y(t)$ correspondantes sont donc : $\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$. De même, en observant les variations de y , on constate qu'il existe quatre points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (Ox). Déterminons leurs abscisses :

$$y(t) = 0 \implies t^3 - 3t + \frac{4}{3t} = 0 \implies t = \pm \sqrt{\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}, \text{ ou } t = \pm \sqrt{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}$$

On cherche les valeurs de $x(t)$ associées à différentes valeurs de t .

7. **Recherche des points multiples** : on cherche à déterminer $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^*$, $t_1 \neq t_2$ tels que

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. On a donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1^3 - 2t_1 = t_2^3 - 2t_2 \\ t_1^3 - 3t_1 + \frac{4}{3t_1} = t_2^3 - 3t_2 + \frac{4}{3t_2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1^3 - t_2^3 = 2(t_1 - t_2) \\ t_1^3 - t_2^3 = 3(t_1 - t_2) + \frac{4(t_1 - t_2)}{3t_1 t_2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1^3 - t_2^3 = 2(t_1 - t_2) \\ t_1^3 - t_2^3 = 3(t_1 - t_2) + \frac{4(t_1 - t_2)}{3t_1 t_2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En divisant par $t_1 - t_2$, on obtient

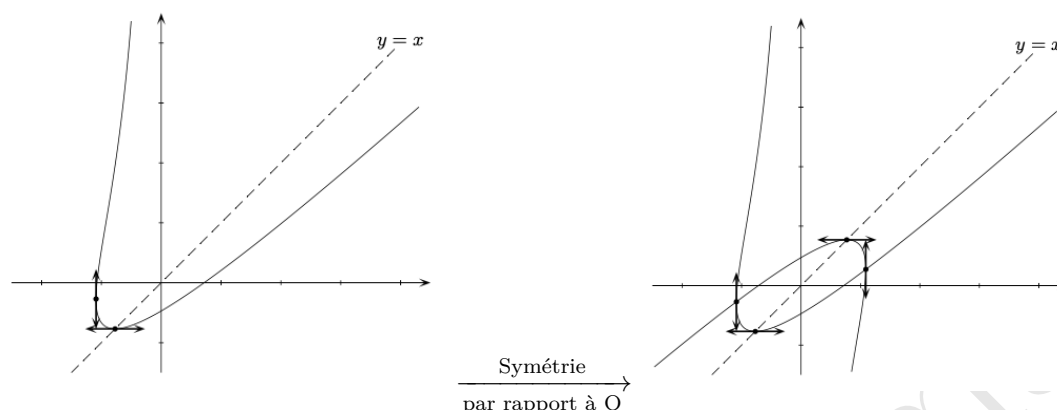
$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = 0 \\ t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = 3 + \frac{4}{3t_1 t_2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = 0 \\ t_1 t_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 + t_2)^2 = \frac{2}{3} \\ t_1 t_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2)^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ t_1 t_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t_1 + t_2)^2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ t_1 t_2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que t_1 et t_2 sont les racines de l'équation $(E_1) : t^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}t - \frac{4}{3} = 0$ ou de l'équation $(E_2) : t^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}t - \frac{4}{3} = 0$. Par calcul de discriminant, on obtient respectivement les solutions de

- $(E_1) : t_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, t_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $t_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}, t_2 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$; premier point multiple.
- $(E_2) : t_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, t_2 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $t_1 = -2\sqrt{\frac{2}{3}}, t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$; deuxième point multiple.

8. Tracé de la courbe γ :

- On place les points de $\gamma(t)$ pour $t \in \{\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\}$.
- On trace la tangente à la courbe en chacun de ces points.
- On trace les asymptotes à la courbe.
- De $t = 0$ à $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$, la courbe va de $\gamma(0)$ à $\gamma(\sqrt{\frac{2}{3}})$. De plus, sur cet intervalle, les fonctions x et y sont décroissantes, donc la courbe se dirige vers le bas à gauche. Puis, on relie le point $\gamma(0)$ au point $\gamma(\sqrt{\frac{2}{3}})$ en respectant les tangentes et la direction que suit la courbe. Ensuite, on répète l'opération sur les intervalles suivants. Enfin, on complète par la symétrie par rapport à l'origine O pour obtenir l'intégralité de la courbe.



4-3 Courbes paramétrées en coordonnées polaires

Jusqu'à maintenant les points de \mathbb{R}^2 étaient repérés par les coordonnées cartésiennes (x, y) . Mais vous savez également que l'on peut adopter un autre système de coordonnées, déterminé par un angle θ et un rayon r , que l'on appelle coordonnées polaires telles que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Notons qu'à tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ correspond un unique point M de plan \mathcal{P} . À un point $M \in \mathcal{P}$ distinct du pôle correspond une double infinité de coordonnées polaires. En effet, si (r_1, θ_1) et (r_2, θ_2) sont deux systèmes de coordonnées polaires de M , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r_2 = (-1)^k r_1$ et $\theta_2 = \theta_1 + k\pi$.

4-3.1 Généralités et définitions

Une courbe paramétrée de \mathcal{P} peut être représentée par des coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$ en fonction du paramètre réel t . Ici, la fonction vectorielle correspondante est

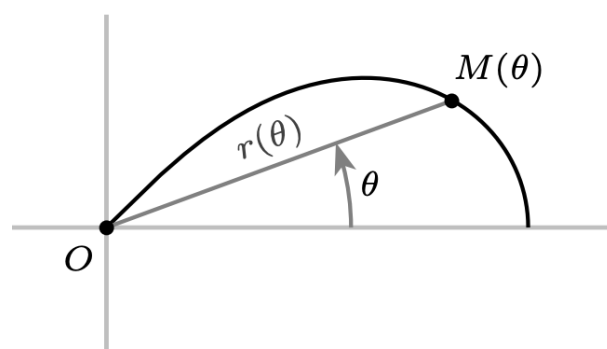
$$f(t) = r(t)\mathbf{u}(\theta(t)),$$

où

$$\mathbf{u}(\theta(t)) = \cos(\theta(t))\vec{i} + \sin(\theta(t))\vec{j}$$

et

$$\mathbf{v}(\theta(t)) = -\sin(\theta(t))\vec{i} + \cos(\theta(t))\vec{j}.$$



Définition 96.

Soit une fonction $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$ (parfois $h(r, \theta) = 0$) est la courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta \mapsto r(\theta)\mathbf{u}(\theta)$ où $(O, \mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta))$ est le repère polaire.

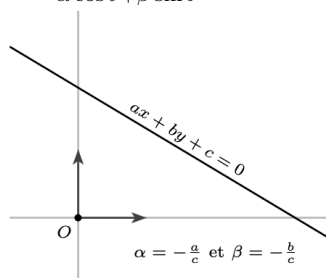
Une courbe polaire est une courbe plane particulière $\theta \mapsto \gamma(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$, mais il est plus commode de les étudier directement. Toutes les propriétés de la courbe vont dépendre de $r(\theta)$. Lors de l'étude d'une courbe polaire ainsi défini, on utilise souvent le repère mobile $(M(\theta), \mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta))$ ainsi que la base polaire mobile $B := (\mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta))$.

Exemple 97.

On a déjà rencontré les courbes polaires suivantes :

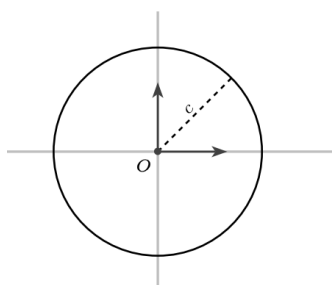
Droite ne passe pas par O

$$r = \frac{1}{\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta}$$



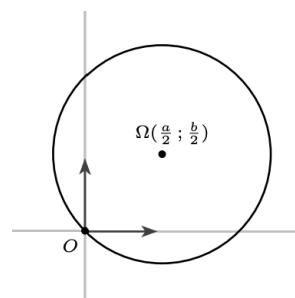
Cercle de centre O

$$r = c, c > 0 \text{ est fixé}$$



Cercle passe par O

$$r = a \cos \theta + b \sin \theta$$

**4-3.2 Vitesse et accélération dans le repère polaire**

On note que $\mathbf{v}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \mathbf{u}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ (rotation d'angle $\pi/2$). Donc, les fonctions $\theta \mapsto \mathbf{u}(\theta)$ et $\theta \mapsto \mathbf{v}(\theta)$ sont dérivables et on a

$$\mathbf{u}'(\theta) = \frac{d\mathbf{u}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{v}(\theta), \quad \mathbf{v}'(\theta) = \frac{d\mathbf{v}(\theta)}{d\theta} = -\mathbf{u}(\theta).$$

Les vecteurs vitesse et accélération sont donnés ainsi par la proposition suivante :

Proposition 98.

Supposons que r est de classe C^2 sur D , alors

- vecteur vitesse est $\gamma'(\theta) = r'(\theta)\mathbf{u}(\theta) + r(\theta)\mathbf{v}(\theta)$.
- le vecteur accélération est $\gamma''(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\mathbf{u}(\theta) + 2r'(\theta)\mathbf{v}(\theta)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les formules de dérivation usuelle et d'utiliser les relations $\frac{d\mathbf{u}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{v}(\theta)$ et $\frac{d\mathbf{v}(\theta)}{d\theta} = -\mathbf{u}(\theta)$. \square

4-4 Étude complète d'une courbe polaire

Pour tracer une courbe polaire $\rho(\theta)$, on suit les étapes décrites dans le plan suivant :

Plan d'étude d'une courbe plane.

1. Détermination du domaine de définition de la courbe D_r .
2. Étude des symétries éventuelles et réduction de D_r , voir Sec. 4-4.1.
3. Étude du signe et des variations de $r(\theta)$ sur l'intervalle d'étude.
4. Étude des tangentes particulières, voir Sec. 4-4.2.
5. Étude des éventuelles branches infinies, voir Section 4-4.3.
6. Recherche des éventuels points multiples ou doubles, voir Sec.4-4.4.
7. Tracé définitif de la courbe :
 - On trace d'abord les asymptotes s'il y en a.
 - On place les points (stationnaires, réguliers, inflexion,...) et les tangentes
 - On complète le tracé en utilisant le tableau de variation pour délimiter dans quel secteur angulaire est tracée la courbe.
 - On ébache le tracé de la courbe en utilisant les symétries éventuelles.

4-4.1 Réduction de domaine domaine de définition

On considère toujours la courbe polaire sur un domaine D_r telle que $r = r(\theta)$. Il est très important avant de commencer l'étude d'une courbe polaire de réduire (quand cela est possible) l'intervalle d'étude. Plusieurs situations possibles :

1. Périodicité de $r(\theta)$ (i.e. $r(\theta + T) = r(\theta)$) :
 - Si $T = 2\pi$, on travaille sur un intervalle de longueur 2π , puis on en déduit la courbe complète.
 - Si $T = \pi$, on travaille sur un intervalle de longueur π , puis en effectuant la **symétrie centrale de centre O** et on a l'intégralité de la courbe.

- Si $T = \frac{\pi}{2}$, on travaille sur un intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$, puis en effectuant la **rotation de centre O et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$** , puis la **rotation de centre O et d'angle π** , on obtient l'intégralité de la courbe.
 - Si $T = 3\pi$, on travaille sur un intervalle de longueur 3π , puis en effectuant la **symétrie centrale de centre O** et on obtient l'intégralité de la courbe.
2. Parité de $r(\theta)$ (i.e. $r(\alpha - \theta) = \pm r(\theta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$) :
- Si $r(-\theta) = r(\theta)$ (paire), on étudie pour les valeurs de $\theta \geq 0$ puis en effectuant la **symétrie par rapport à l'axe des abscisses (OX)**.
 - Si $r(-\theta) = -r(\theta)$ (impaire), on étudie pour les valeurs de $\theta \geq 0$ puis en effectuant la **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (OY)**.
 - Si $r(\alpha - \theta) = r(\theta)$, on réduit l'intervalle aux valeurs de $\theta \geq \frac{\alpha}{2}$, puis en effectuant la **symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et d'angle $\frac{\alpha}{2}$** .
3. Anti-périodicité de $r(\theta)$ (i.e. $r(\theta + T) = -r(\theta)$) : on travaille sur un intervalle de longueur T , puis en effectuant la rotation de centre O et d'angle $\pi + T$ pour déduire l'intégralité de la courbe.

Exemple 99.

Supposons que l'on veuille déterminer l'ensemble d'étude de la courbe $r(\theta) = 1 + \sin(2\theta)$. On a

- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $r(\theta + \pi) = r(\theta)$, donc la fonction est π -périodique. On étudie donc sur l'intervalle de longueur π , puis on effectue la symétrie par rapport à l'origine pour obtenir l'intégralité de la courbe.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $r(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1 + \sin(\pi - 2\theta) = r(\theta)$, ce qui trouve que les points $M(\theta)$ et $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ sont symétriques par rapport à la droite ($y = x$) passant par O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Finalement, on étudie la courbe sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, puis on déduit l'ensemble de la courbe par deux symétries successives.

4-4.2 Points particuliers et tangente à la courbe

Soit \mathcal{C} la courbe du plan d'équation polaire $r = r(\theta)$ et $M(\theta) \in \mathcal{C}$. Supposons que $r(\theta)$ est de classe C^k , $k > 1$.

Points particuliers

Définition 100 (Point stationnaire, régulier et birégulier).

- $M(\theta)$ est dit un point pôle (i.e. à l'origine O) si et seulement si $r(\theta) = 0$.
- $M(\theta)$ est dit point stationnaire si et seulement si $r'(\theta) = r(\theta) = 0$, si et seulement si $M(\theta)$ est au pôle et $r'(\theta) = 0$. Ainsi les points stationnaires de la courbe sont nécessairement en O , et $O = M(\theta)$ est un point stationnaire lorsque $r'(\theta) = 0$.
- $M(\theta)$ est dit un point régulier si $M(\theta) \neq O$ ou $M(\theta) = O$ et $r'(\theta) \neq 0$.
- $M(\theta)$ est dit un point birégulier si et seulement si $\det_B(r'(\theta), r''(\theta)) \neq 0$.

On en déduit directement le résultat pour la courbe polaire.

Proposition 101.

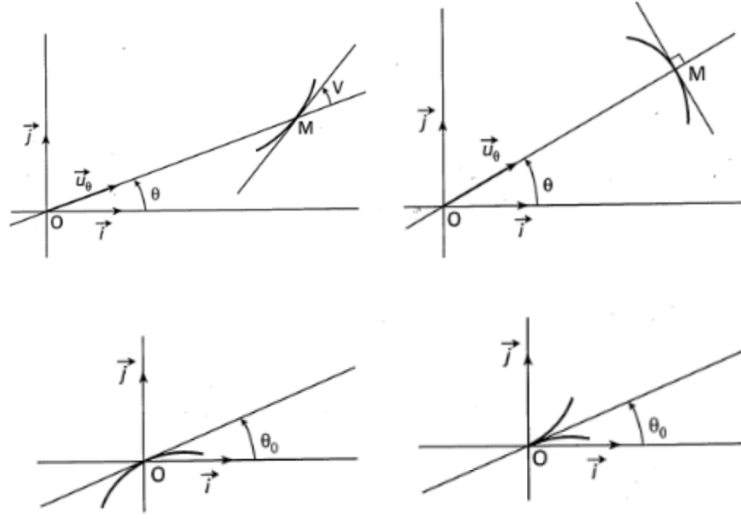
Une courbe polaire $r = r(\theta)$ est régulière si et seulement si $r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2 \neq 0$. En particulier, une courbe polaire a, au plus, un point singulier qui est nécessairement à l'origine du repère.

Démonstration. Un calcul direct montre que $\|\gamma'(\theta)\| = r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2 = 0$. En utilisant la définition du point singulier : $\gamma'(\theta) = 0$, on obtient $r(\theta) = 0$. Par conséquent le point singulier est à l'origine. \square

Tangente au point de la courbe

Il s'agit ici de définir les tangentes à la courbe polaire \mathcal{C} d'équation $r = r(\theta)$ en un point $M(\theta) \in \mathcal{C}$. Pour simplifier les notations, on rappelle que $\gamma'(\theta) = r'(\theta)\mathbf{u}(\theta) + r(\theta)\mathbf{v}(\theta)$.

1. $r(\theta) \neq 0$ (i.e. $M \neq O$), la tangente à la courbe est dirigée par le vecteur $r'(\theta)\mathbf{u}(\theta) + r(\theta)\mathbf{v}(\theta)$.
 - $r'(\theta) \neq 0$, la tangente à la courbe au point $M(\theta)$ a pour pente $\tan(V) = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ où $V = \widehat{(\mathbf{u}(\theta), \gamma'(\theta))}$.
 - Si $r'(\theta) = 0$, alors la tangente est parallèle au vecteur $\mathbf{v}(\theta)$ et perpendiculaire à la droite (OM) (ici $V = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$). On dit aussi que $M(\theta)$ est orthoradiale.
2. $r(\theta) = r(\theta_0) = 0$ et r est continue en θ_0 , la tangente à la courbe en $M = O$ est la droite passant par O et d'angle polaire θ_0 .
 - r change de signe en θ_0 , on a un point ordinaire.
 - r ne change pas de signe en θ_0 , on a un point de rebroussement de première espèce.

**Remarque 102.**

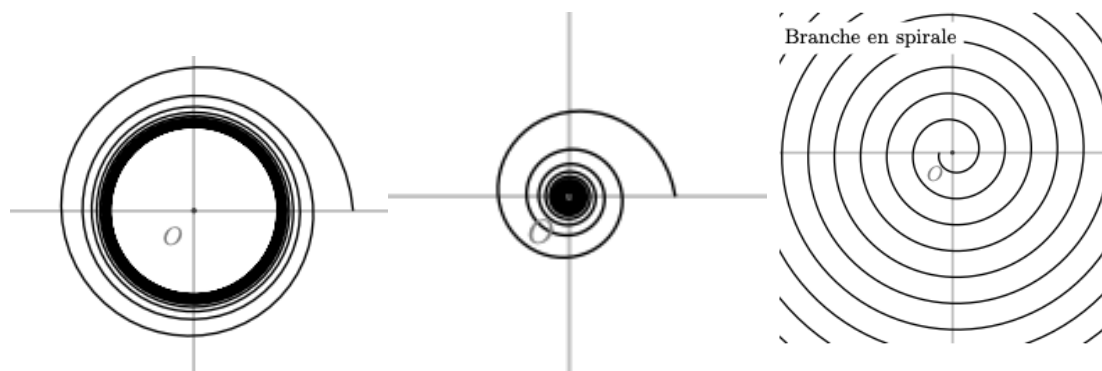
En un point birégulier $M(\theta)$, la concavité est donnée par le signe de $\det_B(r'(\theta), r''(\theta))$:

- $\det_B(r'(\theta), r''(\theta)) > 0$, la concavité est tournée vers l'origine O .
- $\det_B(r'(\theta), r''(\theta)) < 0$, la concavité est tournée à l'opposé de l'origine O .

4-4.3 Branches infinies

Soit la courbe \mathcal{C} d'équation polaire $r = r(\theta)$. On dit qu'une courbe \mathcal{C} admet une branche infinie si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} |r(\theta)| = +\infty$. Trois cas se présentent

1. $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r(\theta) = r_0 \neq 0$, le cercle de centre O et de rayon $|r_0|$ est un cercle asymptote à la courbe \mathcal{C} .
2. $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r(\theta) = 0$, O est un point asymptote de la courbe \mathcal{C} .
3. $\lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} r(\theta) = \pm\infty$, la courbe \mathcal{C} présente une branche en spirale (pas de direction asymptotique).
4. $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) = \pm\infty$, la courbe admet une branche infinie de direction asymptotique la droite de vecteur directeur $\mathbf{u}(\theta_0)$. On passe donc au paramétrage cartésien du point $M(\theta)$ dans le repère $(O, \mathbf{u}(\theta_0), \mathbf{v}(\theta_0))$ tel que $x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta - \theta_0)$ et $y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$. Quand θ tend vers θ_0 , on a $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} x(\theta) = \pm\infty$.
 - $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} y(\theta) = \pm\infty$, la courbe \mathcal{C} a une branche parabolique de direction $\mathbf{u}(\theta_0)$.
 - $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} y(\theta) = l \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} . La position de \mathcal{C} par rapport à la droite $y = l$ est déduite du signe de $r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) - l$. En pratique, on cherche le développement limité en 0 de $r(\theta_0 + h) \sin(h) = l + ah + h\varepsilon(h)$.
 - $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} y(\theta)$ n'existe pas, on ne peut rien dire.

**Exemple 103.**

Supposons que l'on veuille déterminer les branches infinies de la courbe polaire $r(\theta) = \frac{\theta+1}{\theta-1}$. Le domaine de définition est $D_r = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ici, on cherche les branches infinies.

- $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{\theta+1}{\theta-1} = 1$, le cercle unité de centre O est cercle asymptote à la courbe polaire. On étudie la position de l'asymptote par rapport à la courbe : pour tout $\theta \in D_r$, on a

$$r(\theta) - 1 = \frac{2}{\theta - 1}.$$

au voisinage de $+\infty$, il vient que $r(\theta) - 1 \geq 0$, donc la courbe va se rapprocher du cercle asymptote par l'extérieur.

- De même, au voisinage de $-\infty$, le cercle unité de centre O est cercle asymptote à la courbe polaire mais la courbe va se rapprocher du cercle asymptote par l'intérieur.
- On a $\lim_{\theta \rightarrow 1} r(\theta) = \pm\infty$, on a une branche infinie. On étudie le comportement de $r(\theta) \sin(\theta - 1)$, en posant $h = \theta - 1$, il vient que

$$r(\theta) \sin(\theta - 1) = \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \sin(\theta - 1) = \frac{2 + h}{h} \sin(h) \sim_{h \rightarrow 0} 2.$$

Donc la droite d'équation $y = 2$ dans le repère $(0, \mathbf{u}(1), \mathbf{v}(1))$ est asymptote à la courbe.

4-4.4 Études des points multiples

Il s'agit ici de trouver les couples de réels θ_1 et θ_2 appartenant à D_r (ou $[\theta_0, \theta_0 + T[\cap D_r$ si $r(\theta)$ est T -périodique), $\theta_1 \neq \theta_2$ vérifiant :

- Soit $r(\theta_1) = r(\theta_2) = 0$.
- Soit $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ et $r(\theta_1) = r(\theta_2) \neq 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$).
- Soit $\theta_1 = \theta_2 + (2k + 1)\pi$ et $r(\theta_1) = -r(\theta_2) \neq 0$ ($k \in \mathbb{N}$).

4-4.5 Applications pratiques

Supposons que l'on veuille étudier la courbe polaire d'équation $r(\theta) = \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

1. **Domaine de définition ;**
2. **Réduction de domaine :**
3. **Dérivée et tableau de variations de $r(\theta)$:**
4. **Études des tangentes aux points particuliers :**
5. **Études des branches infinies :**
6. **Intersection avec les axes :**
7. **Recherche des points multiples :**
8. **Tracé de la courbe polaire :**

4-5 Propriétés métriques d'une courbe paramétrée

Dans la suite du chapitre, on considère $I = [a, b]$ avec $a < b$ réels, et un arc paramétré (I, γ) de classe C^k , de support Γ , régulier, orienté dans le sens de t croissant. On choisit un point de Γ comme origine : $M_0 = M(t_0)$.

Cette section est applicable aux courbes paramétrées de l'espace \mathbb{R}^3 où la courbe est paramétrée par (I, γ) dont $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Définition 104 (Longueur d'arc).

On considère $I = [a, b]$ avec $a < b$ réels, et un arc paramétré (I, γ) de classe C^1 (i.e. $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1) sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, de support Γ , régulier, orienté dans le sens de t croissant. On appelle longueur d'arc, l'intégrale

$$L(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \quad (\text{courbe plane})$$

$$L(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt, \quad (\text{courbe gauche})$$

$$L(\gamma, \theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta. \quad (\text{courbe polaire})$$

D'un point de vue physique, il s'agit simplement d'intégrer la vitesse entre a et b ; normal que cela donne la distance entre a et b .

Exemple 105.

— La longueur d'arc d'une fonction réelle $f \in C^1([a, b])$ où $\gamma(t) = (t, (f(t)))$, est

$$L(\gamma, a, b) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

— La longueur d'arc d'un cercle $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ d'angle α :

$$L(\gamma, 0, \alpha) = \int_0^\alpha \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = r\alpha.$$

Proposition 106.

La longueur d'une courbe régulière ne dépend pas du paramétrage.

Démonstration. Le résultat découle du changement de variable dans l'intégrale. En effet, si $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont deux paramétrages réguliers, on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ayant une dérivée strictement positive. On a sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \int_c^d \sqrt{[x'_1(u)]^2 + [y'_1(u)]^2} du &= \int_a^b \sqrt{[x'_1(\varphi(t))]^2 + [y'_1(\varphi(t))]^2} \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[x'_1(\varphi(t))\varphi'(t)]^2 + [y'_1(\varphi(t))\varphi'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{[x'_1(t)]^2 + [y'_1(t)]^2} dt. \end{aligned}$$

□

Exemple 107.

Soit $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$. L'abscisse curviligne $s_0 :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est :

$$s_0(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \frac{1}{1-u^2} du = \arcsin(t).$$

$\arcsin : [0, 1[\rightarrow]0, \pi/2[$ est une bijection. La reparamétrisation $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_0^{-1} :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\sin s) = (\sin s, \sqrt{1-\sin^2 s}) = (\sin s, \cos s)$.

On remarque que cela correspond à une paramétrisation du quart de cercle de rayon 1 entre les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Le paramètre s est l'angle entre $\vec{O}\tilde{\gamma}(s)$ et le vecteur de coordonnées $(0, 1)$.

Il est très utile de connaître les notions suivantes qui seront utilisées dans les problèmes de la physique (mécanique de fluide, électromagnétisme, électricité, ...)

Définition 108.

On considère $I = [a, b]$ avec $a < b$ réels, et un arc paramétré (I, γ) de classe C^1 (i.e. $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1) sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, de support Γ , régulier, orienté dans le sens de t croissant. On appelle

- élément de ligne, le vecteur $dl = \gamma'(t)dt$.
- abscisse curviligne, la primitive de $\|\gamma'(t)\|$, notée $s = s(t)$ et on a $s(t) = \|\gamma'(t)\|$.
- élément d'arc, la différentielle $ds = \|\gamma'(t)\|dt$.

Remarque 109.

À défaut de savoir calculer facilement une abscisse curviligne, on sait déterminer facilement sa dérivée :

- pour une courbe cartésienne : $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.
- pour une courbe polaire : $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}$.

Exemple 110.

Calculer l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

On définit maintenant le repère de Serret-Frenet. Il s'agit d'un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée (mobile centré en $M(t)$ de $\gamma(t)$).

Définition 111 (Repère de Frenet).

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 . Le repère de Serret-Frenet de γ est le repère orthonormé $(M(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ où $\vec{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe en $M(t)$, et $\vec{N}(t)$ est le vecteur normal unitaire à la courbe. Autrement dit, $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ forme une base orthonormée directe du plan affine.

Il est utile de noter que la droite tangente à la courbe γ au point $M(t)$ ne dépend pas de la paramétrisation. Par contre, $\vec{T}(t)$ en dépend : si on change le sens de parcours de γ , alors $\vec{T}(t)$ sera remplacé par son opposé. Le repère de Serret-Frenet dépend ainsi du sens de parcours de la paramétrisation ainsi que de l'orientation du plan affine.

Proposition 112.

En coordonnées cartésiennes, $\vec{T}(t) = \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$ et $\vec{N}(t) = \frac{-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$.
 En coordonnées polaires, $\vec{T}(\theta) = \frac{r'(\theta)}{\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}}\mathbf{u}(\theta) + \frac{r(\theta)}{\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}}\mathbf{v}(\theta)$ et $\vec{N}(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}}\mathbf{u}(\theta) + \frac{r'(\theta)}{\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}}\mathbf{v}(\theta)$

Démonstration. La démonstration découle automatiquement de la définition. \square

Définition 113 (Courbure et rayon de courbure).

On considère $I = [a, b]$ avec $a < b$ réels, et un arc paramétré (I, γ) de classe C^1 (i.e. $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1) sur $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, de support Γ , régulier, orienté dans le sens de t croissant. On appelle

- courbure de la courbe γ au point $M(t) : c(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.
- rayon de courbure au point $M(t) : R(t) = \frac{1}{c(t)}$.
- cercle osculateur à la courbe au point $M(t)$ est le cercle de centre Ω tel que $\vec{O\Omega}(t) := \vec{OM}(t) + R(t)\vec{N}(t)$ (Ce cercle épouse la forme de la courbe au voisinage de $M(t)$).

Exemple 114.

Supposons que l'on veuille déterminer le vecteur tangent, le vecteur normal et le rayon de courbure de la courbe paramétrée en coordonnées cartésiennes : $x(t) = 3t - t^3$ et $y(t) = 3t^2$. Par définition, on a

- $\vec{T}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{j}$.
- $\vec{N}(t) = \frac{-2t}{1+t^2}\vec{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{j}$.
- $R(t) = \frac{3}{2}(1+t^2)^2$.

Remarque 115.

Pour chercher la courbure d'une courbe quand $\theta = 0$, il est très important d'utiliser le développement limité de la courbe paramétrée $r(\theta)$ ou $\gamma(t)$. En effet, le DL nous fournit facilement les valeurs nécessaires pour calculer la courbure : $x'(0), x''(0), y'(0), y''(0)$ pour une courbe cartésienne et $r(0), r'(0), r''(0)$ pour une courbe polaire.

Exemple 116.

Supposons que l'on veuille chercher la courbure d'équation polaire $r(\theta) = \frac{\cos \theta - 2 \sin \theta}{1 + \sin^3 \theta}$ au point $M(0)$. On a

$$r(\theta) = \frac{1 - 2\theta - \theta^2/2 + o(\theta^2)}{1 + o(\theta^2)} = 1 - 2\theta - \theta^2/2 + o(\theta^2).$$

On obtient facilement $r(0) = 1$, $r'(0) = -2$ et $r''(0) = 1$ et on a $\kappa(0) = \frac{\sqrt[3]{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

On admet un résultat essentiel pour une courbe de classe \mathcal{C}^k qui détermine l'angle entre la tangente à l'arc et l'horizontale.

Théorème 117.

Si f est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k , il existe une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{k-1} telle que

$$\vec{T}(t) = \cos(\alpha(t)) \vec{i} + \sin(\alpha(t)) \vec{j}, \quad \vec{N}(t) = -\sin(\alpha(t)) \vec{i} + \cos(\alpha(t)) \vec{j}.$$

Proposition 118 (Relations de Frenet).

On a les relations suivantes : $\frac{d\vec{T}}{ds} = c(t)\vec{N}$ et $\frac{d\vec{N}}{ds} = -c(t)\vec{T}$.

Démonstration. En utilisant un paramétrage normal, $\vec{T}(s) = \cos(\alpha(s)) \vec{i} + \sin(\alpha(s)) \vec{j}$, il vient que $\vec{T}'(s) = -\alpha'(s) \sin(\alpha(s)) \vec{i} + \alpha'(s) \cos(\alpha(s)) \vec{j} = \alpha'(s) \vec{N}(s) = c(s) \vec{N}(s)$. \square

Formes différentielles et intégrales curvilignes

L'objectif de ce chapitre est de comprendre les notions : formes différentielles, exactes et fermées, champs vectoriels dont le but de calculer par exemple le travail mécanique fournit par le champ de force via une intégrale curviligne le long d'une trajectoire parcourue.

Sommaire

5-1	Formes différentielles	80
5-1.1	Rappels et définitions	80
5-1.2	Différentielle totale du premier ordre d'une fonction	81
5-1.3	Écriture d'une forme différentielle	81
5-2	Formes différentielles exactes et fermées	82
5-2.1	Formes différentielles exactes	82
5-2.2	Comment reconnaître une forme différentielle exacte	84
5-2.3	Formes différentielles fermées	86
5-2.4	Facteur intégrant	89
5-3	Relation entre champs de vecteurs et formes différentielles	89
5-4	Intégrale curviligne et méthodes de calcul	91
5-4.1	Intégrale curviligne	92
5-4.2	Changements de coordonnées	94
5-4.3	Circulation d'un champ de vecteurs	95
5-4.4	Propriétés de l'intégrale curviligne	96
5-4.5	Formule de Green-Riemann et de Stokes-Ampère	96
5-5	Applications en physique	98
5-5.1	Système équilibré en thermodynamique	98
5-5.2	Travail d'un champ de vecteurs	99
5-5.3	Résolution de certaines équations différentielles	100

5-1 Formes différentielles

5-1.1 Rappels et définitions

Avant de commencer, on rappelle la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle. On considère une fonction f définie sur un domaine D_f , dérivable en $x_0 \in D_f$. Pour une variation $\Delta x := x - x_0$ petite mais finie de la variable x à partir de x_0 , f subit la variation

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Définition 119.

On définit la dérivée de la fonction f au point $(f(x_0), x_0)$ par :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$f'(x_0)$ est un nombre, c'est le rapport de la hauteur $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ sur la largeur Δx . C'est donc la tangente de l'angle que fait la tangente à la fonction f en $(f(x_0), x_0)$ avec l'horizontale.

Pour une variation Δx petite mais finie de la variable x à partir de x_0 (ce Δx n'est pas le même que celui qui tend vers 0 dans la définition 119), on a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x)$$

avec ε une fonction de Δx qui tend vers 0 quand $\Delta x \rightarrow 0$. Passant Δx à 0, on a d'après la Fig. 5-1.1 :

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)dx + dx \varepsilon(dx).$$

Par conséquent, nous avons la première définition d'une forme différentielle

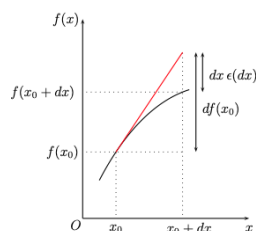


Fig. 5-1.1 – Différentielle $df(x_0)$ de la fonction f en x_0 .

Définition 120.

On définit la différentielle de f au point $(f(x_0), x_0)$ par :

$$df(x_0) := f'(x_0)dx$$

où la notation "d" de Leibniz désigne la différentielle ou la petite différence.

Il est facile de voir que $df(x_0)$ est la partie linéaire en dx de l'accroissement de la fonction f entre les points x_0 et $x_0 + dx$; i.e. l'approximation linéaire d'ordre un de la fonction f en x_0 . C'est donc une application qui prend ses valeurs dans un espace de formes linéaires. D'où, la définition d'une forme différentielle.

Définition 121.

On appelle forme différentielle définie sur l'ouvert U de \mathbb{R}^n une application ω de l'ouvert U dans le dual de \mathbb{R}^n noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

5-1.2 Différentielle totale du premier ordre d'une fonction**Définition 122.**

Si f est de classe C^1 , on appelle différentielle totale du premier ordre d'une fonction f l'expression :

- $df(x) = df = f'dx$ (sur \mathbb{R} pour une variable)
- $df(x, y) = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ (sur \mathbb{R}^2 pour deux variables).
- $df(x, y, z) = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ (sur \mathbb{R}^3 pour trois variables).
- $df(x_1, \dots, x_n) = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$ (sur \mathbb{R}^n pour n variables).

5-1.3 Écriture d'une forme différentielle

On désigne toujours par $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ la base duale de la base canonique e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n . On rappelle que $dx_i \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = x_i$. Pour tout $x \in U$, $\omega(x)$ s'écrit dans la base duale $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ avec des coefficients $\{A_1, \dots, A_n\}$ qui dépendent de x telle que

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x_1, \dots, x_n)dx_i.$$

Définition 123.

Une forme différentielle de degré 1 (ou 1-forme différentielle) définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n est une application

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

où A_i ($i = 1, \dots, n$) sont fonctions définies sur l'ouvert U et à valeur dans \mathbb{R} .

De plus, si toutes les fonctions A_i sont de classe C^k sur U , on dit que ω est de classe C^k sur U .

5-2 Formes différentielles exactes et fermées

Il s'agit ici de présenter les outils pour déterminer si une forme différentielle est-elle exacte ? est-elle fermée ?

5-2.1 Formes différentielles exactes

Définition 124.

On dit que la forme différentielle ω de degré 1 est exacte (ou totale) s'il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , telle que $df = \omega$. On dit alors que f est une primitive de ω sur U et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Exemple 125.

- La forme différentielle $\omega = xdx + ydy$ est une forme exacte car ω est la différentielle de la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sur n'importe quel ouvert de \mathbb{R}^2 .
- La forme différentielle $\omega = ydx$ n'est pas exacte. Indication : supposons qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ et $f \in C^1$ sur $\mathcal{V} =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ tels que $df = \omega$ sur \mathcal{V} .

Comment représenter les formes différentielles ?

Dans \mathbb{R}^2 , une très bonne représentation des formes différentielles sont les lignes de flux. Ainsi, l'action d'une forme différentielle sur un vecteur est le nombre de ligne que ce vecteur coupe, voir Fig. 5-2.2. Le lecteur peut consulter les courbes de niveau pour certaines formes. Dans la suite, ceci est une bonne représentation du gradient, comme nous le verrons plus bas.

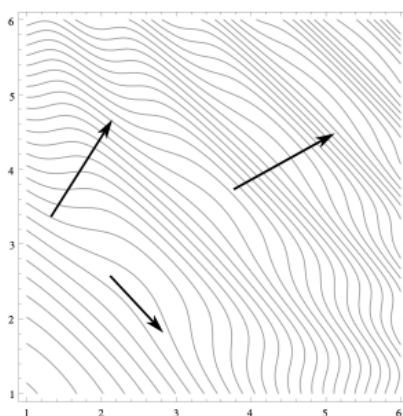


Fig. 5-2.2 – Représentation graphique d'une forme différentielle de degré 1.

Remarque 126.

Si ω est une forme différentielle exacte sur l'ouvert connexe U , alors ω admet au moins une primitive f et $\{f + c, c \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 127.

On souhaite déterminer si $\omega(x, y) = ydx + xdy$ définie dans \mathbb{R}^2 est une forme exacte. On cherche la fonction $f(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Donc $f(x, y) = xy + k(y)$ et $x + k'(y) = x$. Il s'ensuit que $k'(y) = 0$ et donc $k(y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Par conséquent $f(x, y) = xy + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Remarque 128 (Moyen mnémotechnique).

Pour calculer $d\omega$, il suffit d'appliquer les règles ci-dessous :

- d est linéaire (passe à travers les sommes).
- si f est une fonction, $ddf = 0$, en particulier, $d(dx) = d(dy) = 0$.
- si f est une fonction et ω une forme différentielle de degré 1, $d(f\omega) = \omega df + f d\omega$.
- $dx dx = dy dy = 0$ et $dy dx = -dx dy$.

Proposition 129.

Si U est convexe (ou connexe) et f et g sont deux primitives de la même forme différentielle ω sur U alors $f - g$ est constante. Ce résultat est toujours vrai pour U connexe par arcs.

Démonstration. Si $w = df = dg$ alors pour tout $x_0 \in U$, on a $d(f - g)(x_0) = 0$. □

5-2.2 Comment reconnaître une forme différentielle exacte

Il est utile de rappeler la définition des notions suivantes : connexe, connexe par arcs et convexe.

Définition 130.

- On dit qu'un ouvert U est connexe s'il n'existe pas de partition de U en deux ouverts disjoints. Si ce n'est pas le cas, chacun des ouverts est appelé composante connexe.
- On dit qu'un ouvert U est connexe par arcs si deux points quelconques de U peuvent être joint par un chemin.
- On dit qu'un domaine U est convexe si deux quelconques de ses points peuvent être joint par un segment.

Exemple 131.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est connexe, connexe par arc, non convexe

On s'intéresse tout d'abord au cas bidimensionnel.

Théorème 132.

Soit P et Q deux fonctions de classe C^1 ^a définies sur l'ouvert simplement connexe $U \subset \mathbb{R}^2$ et à valeur \mathbb{R} , alors la forme différentielle $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est la forme différentielle totale d'une fonction f et elle est exacte si et seulement si

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \quad (5.1)$$

^a P et Q sont de classe C^1 si elles sont continues sur U et admettent des dérivées partielles continues du premier ordre

Proposition 133.

D'après les notations et les hypothèses du théorème ci-dessus, On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Les égalités de la Proposition 133 permettent de définir f à une constante additive près. On voit là que f admet des dérivées mixtes égales : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ conforme à la condition de Schwartz.

Exemple 134.

On considère la forme différentielle $\omega = ydx + xdy$. Si f est la fonction recherchée, on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = y.$$

On a bien ici $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$. Donc, ω est une forme différentielle exacte telle que $\omega = df$. Pour chercher f , on intègre la première équation

$$f(x, y) = xy + \varphi(y)$$

En dérivant f par rapport à y , il vient que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \varphi'(y), \quad \forall (x, y).$$

Par conséquent $\varphi'(y) = 0$ et $f(x, y) = xy + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Remarque 135.

- La condition (5.1) est toujours nécessaire mais c'est la réciproque qui nécessite que l'ouvert U soit simplement connexe i.e. sans trou et d'un seul morceau.
- La condition (5.1) se traduit aussi en $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$ (Condition de Schwartz).

De manière similaire, le théorème 132 s'étend facilement en dimension trois.

Théorème 136.

Soit P , Q et R trois fonctions de classe C^1 définies sur l'ouvert simplement connexe $U \subset \mathbb{R}^3$ et à valeur \mathbb{R} , alors la forme différentielle définie par $\forall (x, y, z) \in U$, $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, est exacte si et seulement si pour tout $(x, y, z) \in U$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z).$$

Remarque 137.

Le résultat des théorèmes précédents se généralise pour la dimension n et porte le nom Henri Poincaré (né le 29 Avril 1854 à Nancy et mort le 17 Juillet 1912 à Paris).

$\omega = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$ est exacte sur $U \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$.

5-2.3 Formes différentielles fermées**Définition 138.**

On dit qu'une forme différentielle ω définie

- sur $U \subset \mathbb{R}^2$, est fermée si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- sur $U \subset \mathbb{R}^3$, est fermée si $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
- sur $U \subset \mathbb{R}^n$, est fermée si $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ où $\omega = \sum_{i=1}^n A_i dx_i$.

Corollaire 139.

Toute forme différentielle exacte est une fermée.

Démonstration. On démontre le corollaire pour une forme différentielle ω sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et on utilise la même procédure pour une forme ω sur \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Soit la forme différentielle exacte $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ sur U .

Comme ω est exacte sur un ouvert U , alors il existe une fonction f de classe C^1 telle que :

$$\omega = df, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

En utilisant la continuité de P et Q , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ sont continues sur U . D'après le théorème de Schwarz, on a l'implication suivante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \implies \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Ceci complète la démonstration du corollaire. □

Remarque 140.

- Sur \mathbb{R} , toute forme de degré un (au moins continue) est exacte et on a toute forme fermée est exacte.
- Attention, toute forme différentielle définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) fermée n'est pas automatiquement exacte. En effet, ce résultat est liée à la nature topologique de l'ouvert U de \mathbb{R}^n .

Exemple 141.

On considère la forme différentielle $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ainsi $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. ω est de classe C^∞ et on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Donc ω est fermée, mais non exacte car on verra dans la suite si elle l'était, l'intégrale curviligne de ω sur le cercle unité serait nulle ce qui n'est pas le cas.

Bien sûr, il serait plus intéressant de montrer la contra-posée du corollaire 139, à savoir qu'une forme fermée est exacte. On introduit la définition d'un ouvert étoilé qui permette de mieux cerner la complexité d'un ouvert de taille plus grande que 1.

Définition 142.

Soit U un ensemble borné de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 et $A \in U$.

— On dit que U est étoilé par rapport à A si et seulement si pour tout $M \in U$, $[AM] \subset U$ avec $[AM]$ est le segment joignant A et M . C'est-à-dire,

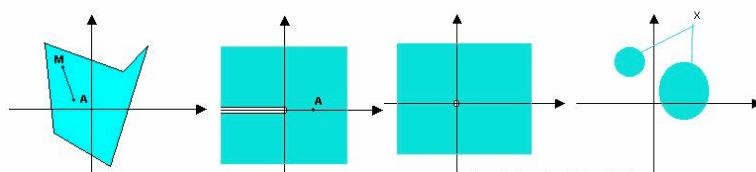
$$[AM] = \{N \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3; \exists \lambda \in [0, 1] : \vec{AN} = \lambda \vec{AM}\}.$$

Remarque 143.

Sur \mathbb{R} , U est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $b \in U$ on a $[a, b] \subset U$ avec $[a, b] = \{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$.

Exemple 144.

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est un ouvert non étoilé.
2. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est un ouvert non étoilé.
3. \mathbb{R}^2 est un ouvert étoilé.
4. Toute partie convexe de \mathbb{R}^2 est étoilée.


Théorème 145 (Théorème de Poincaré).

Soit U un ouvert étoilé de \mathbb{R}^n . Alors, toute forme différentielle fermée de classe C^1 est exacte sur U .

Démonstration. Le sens direct du Théorème 145 découle automatiquement de la définition d'une forme exacte. □

Exemple 146.

On souhaite étudier la forme différentielle $\omega = (3x^2y + 2x + y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 - 2y)dy$ définie sur \mathbb{R}^2 . Posons $P(x, y) = 3x^2y + 2x + y^2$ et $Q(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 2y$. On a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3(x^2 + y^2).$$

D'où ω est une différentielle fermée. Comme \mathbb{R}^2 est étoilé, alors ω est exacte.

On peut vérifier le résultat en considérant $f(x, y) = x^2(1 + xy) + y^2(xy - 1)$. On obtient facilement $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \omega(x, y)$.

5-2.4 Facteur intégrant**Définition 147.**

Soit ω une forme différentielle non exacte. On dit que la fonction φ est un facteur intégrant de ω si la forme $\varphi\omega$ est une forme différentielle exacte.

Exemple 148.

On considère la forme différentielle $\omega = 2xzdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$. Posons $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Alors on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \neq \frac{\partial R}{\partial x}.$$

On peut alors essayer de chercher un facteur intégrant de la forme $\varphi(z)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi\omega$ est une forme exacte.

5-3 Relation entre champs de vecteurs et formes différentielles

Une utilité première des formes différentielles est de donner une approche unifiée et relativement simple d'objets prenant leur origine en physique en associant à tout point de l'espace un vecteur qui permet de représenter et quantifier un phénomène physique (pesanteur, électromagnétisme, . . .). L'ensemble des vecteurs se réunit dans un champ de vecteurs tel que : le champ de pesanteur \vec{g} , le champ électrique \vec{E} , le champ magnétique \vec{B}

À ce stade, on souhaite répondre à une question importante concernant le lien entre les

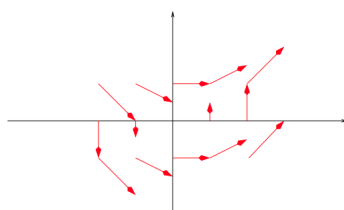
formes différentielles exactes et un champ de vecteurs V . En d'autres termes, on veut savoir s'il est déterminé par une fonction F , plus précisément de savoir s'il s'agit d'un champ de gradient, s'il peut s'écrire comme le gradient de la fonction F . Et c'est le rotationnel qui permettra de caractériser les champs de gradients, ...

Définition 149.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle champ de vecteurs ou champ vectoriel, toute application V qui à tout point de U associe un vecteur de même dimension. C'est-à-dire à chaque point (x, y) (resp. (x, y, z)) un vecteur $V(x, y)$ (resp. $V(x, y, z)$).

Exemple 150.

- $V(x, y) = (y^2, \frac{x}{2})$ est un champ vectoriel défini sur \mathbb{R}^2 (voir figure).
- $V(x, y, z) = (x, y, z)$ est un champ vectoriel défini sur \mathbb{R}^3 .



Dans la suite, on omet les flèches pour les vecteurs afin d'alléger les notations. Par exemple, on note V à la place de \vec{V} . Au champ de vecteurs V de composantes $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, on peut lui associer la forme différentielle $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Définition 151.

Supposons que f une fonction réelle sur U admettant les dérivées partielles d'ordre 1. Le champ de vecteurs V de composantes $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est appelé **champ de gradients** de f et on note $V = \text{grad } f$. On dit aussi que $V(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ est le gradient de f en $M(x, y)$.

Remarque 152.

La forme différentielle associée au champ de gradients $\text{grad } f$ est la différentielle df de f . En effet, on a $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Définition 153.

- La divergence de V est $\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.
- Le laplacien de $f(x, y, z)$ est $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
- Le rotationnel de V est $\vec{\operatorname{rot}} V = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{k}$

Remarque 154.

En utilisant les définitions précédentes, on a les propriétés remarquables :

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{grad}} F) = \vec{0}, \quad \operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}}(V)) = 0. \quad (5.2)$$

On présente maintenant le lien entre un champs vectoriel et une forme différentielle exacte.

Théorème 155.

Soit $V(P, Q)$ un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ telles que $P, Q \in C^1$. Alors V est un champ de gradients si et seulement si $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ est exacte. De même, si $V(P, Q, R)$ un champs de vecteur sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ telles que $P, Q, R \in C^1$. Alors V est irrotationnel si et seulement si $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ est exacte.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, on utilise la définition des champs de gradients et de rotationnel, puis on applique le théorème d'une forme différentielle exacte. \square

Remarque 156.

En terme de champs de vecteurs : "sur un domaine étoilé, un champ de vecteurs est un gradient si et seulement si il est irrotationnel. C'est-à-dire, il existe $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $V = \vec{\operatorname{grad}} \varphi \Leftrightarrow \vec{\operatorname{rot}} V = \vec{0}$.

5-4 Intégrale curviligne et méthodes de calcul

L'intégrale curviligne a une importance capitale en physique, elle représente la circulation d'un champ de vecteurs (dans l'identification entre l'espace des champs de vecteurs et son dual,

l'espace des formes) le long d'une courbe. Dans le cas où la forme est exacte, ce champ de vecteurs est un champ de gradient et l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi.

Pour définir cet intégrale, il est utile de consulter le chapitre 5 pour plus de détails sur les notions suivantes : courbes paramétrées, tangentes et fonctions vectorielles.

5-4.1 Intégrale curviligne

Définition 157.

Soit ω une forme différentielle sur U et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe paramétrée de classe C^1 . On appelle intégrale curviligne de ω sur l'arc paramétré γ l'intégrale :

$$\int_{\gamma} \omega(x) = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

En particulier, si $\omega(x) = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$, alors on a

$$\int_{\gamma} \omega(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

Exemple 158.

1. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [a, b], \gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. D'après la définition de l'intégrale curviligne de ω , on a

$$\int_{\gamma} \omega(x, y) = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

2. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \omega(x, y) = xdx + ydy$. Par définition, on a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} [-\cos(t) \sin(t) + \sin(t) \cos(t)] dt = 0$$

Il est très intéressant de noter que l'intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe paramétrée (arc paramétré) est invariante par changement de paramètre positif. Elle ne dépend que de l'arc géométrique orienté défini par γ .

Proposition 159.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un arc paramétré de classe C^k ($k \geq 1$) et φ un C^k -difféomorphisme de $[u, v]$ sur $[a, b]$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} \omega &= \int_{\gamma} \omega \quad \text{si } \varphi \text{ est croissant,} \\ \int_{\gamma \circ \varphi} \omega &= - \int_{\gamma} \omega \quad \text{si } \varphi \text{ est décroissant.} \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ et choisissons le changement de variable $t = \varphi(s)$. Supposons que φ est croissant, on a

$$\int_a^b \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_u^v \omega(\gamma(\varphi(s))) \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds.$$

En utilisant la linéarité de la forme $\omega(\gamma(\varphi(s)))$, il vient que

$$\int_a^b \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_u^v \omega(\gamma(\varphi(s))) \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \int_u^v \omega(\tilde{\gamma}(s)) \tilde{\gamma}'(s) ds = \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

De même, si φ est décroissant, on obtient

$$\int_a^b \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_v^u \omega(\gamma(\varphi(s))) \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = - \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

□

On annonce maintenant la proposition qui simplifie le calcul de l'intégrale curviligne, et explique l'intérêt de s'intéresser aux formes différentielles exactes. On conclut que l'intégrale curviligne dépend uniquement des points de départ et d'arrivée mais pas du chemin γ parcouru entre les deux extrémités.

Proposition 160.

Soit ω est une forme différentielle exacte sur U (i.e. f est C^1 sur U et $df = \omega$) et $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ une courbe paramétrée C^1 par morceaux, alors on a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (5.3)$$

En particulier, si γ est une courbe fermée (i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$), alors $\int_{\gamma} \omega = 0$.

En mécanique, (5.3) peut être interprétée comme la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel. Elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final, et non du chemin choisi. Lorsqu'un point matériel se déplace dans un potentiel, le travail fourni par la force est égale à la variation de l'énergie potentiel entre l'état final et l'état initial.

Démonstration. Pour démontrer la Proposition 160, on utilise le fait que γ est de classe C^1 et on considère une fonction $g(t) = f(\gamma(t))$ qui est de classe C^1 sur $[a, b]$. Ensuite, on applique la méthode de calcul d'intégrale simple. Dans le cas où γ n'est que C^1 par morceaux, on utilise la subdivision de $[a, b]$ et on utilise la même procédure. \square

Remarque 161.

Il existe deux manières pour démontrer qu'une forme différentielle ω n'est pas exacte sur son domaine de définition :

- Calculer $d\omega$ et voir que $d\omega \neq 0$.
- Trouver une courbe fermée γ telle que $\int_{\gamma} \omega \neq 0$.

Exemple 162.

La forme différentielle $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

5-4.2 Changements de coordonnées

Définition 163.

Pour changer de coordonnées dans une forme différentielle, on substitue les nouvelles coordonnées aux anciennes.

Exemple 164.

Pour passer des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ dans $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, il suffit de différencier

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta.$$

et on obtient la forme $\omega(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Le changement de coordonnées dans la forme différentielle simplifier le calcul d'intégrale et ne change pas sa valeur. On a alors

Proposition 165.

L'intégration des formes différentielles de degré 1 est invariante par changement de coordonnées.

Démonstration. La démonstration découle de $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ et la définition du passage aux nouvelles coordonnées. \square

5-4.3 Circulation d'un champ de vecteurs

Il s'agit ici d'introduire les notations vectorielles pour définir la circulation ou le travail d'un vecteur le long d'un chemin ou d'une courbe γ .

Supposons que la courbe est paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in [a, b], \gamma(t) = (x(t), y(t))$ et on associe au champ de vecteurs $V = \vec{V}(P, Q)$ la forme différentielle de degré 1

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Notons $M(t)$ le point de la courbe γ ayant les composantes $(x(t), y(t))$ et $\overrightarrow{MM'}$ le vecteur tangent à la courbe γ et de composante $(x'(t), y'(t))$. Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 166.

En utilisant les notations ci-dessus, on a

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b \vec{V}(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{MM'} dt \quad (5.4)$$

Démonstration. Par définition du produit scalaire, on a :

$$\vec{V}(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{MM'} = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t).$$

Donc

$$\int_a^b \vec{V}(x(t), y(t)) \cdot \overrightarrow{MM'} dt = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt = \int_{\gamma} Pdx + Qdy.$$

\square

Remarque 167.

- L'intégrale (5.4) est appelée la circulation ou le travail du \vec{V} le long de γ .
- Si V est orthogonal à tangente de la courbe γ en tout point $M(x(t), y(t), z(t))$ (i.e. $\vec{V} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$) alors $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\overrightarrow{OM}$.

5-4.4 Propriétés de l'intégrale curviligne

L'intégrale curviligne dépend linéairement de la forme différentielle ω . Les propriétés des intégrales curvilignes sont aussi valables pour la circulation ou le travail d'un vecteur.

Proposition 168.

Soient $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ et soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles de degré 1. Alors on a

- Linéarité : $\int_{\gamma} (\lambda\omega_1 + \beta\omega_2) = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \beta \int_{\gamma} \omega_2$.
- Chasles : $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1$.
- Sens d'orientation de γ : $\int_{\gamma^+} \omega = - \int_{\gamma^-} \omega$.

Démonstration. La démonstration des propriétés d'intégrale curviligne découle automatiquement de la définition de l'intégrale curviligne. \square

5-4.5 Formule de Green-Riemann et de Stokes-Ampère**Théorème 169 (Formule de Green-Riemann).**

Soit $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle de degré 1 sur D une partie de \mathbb{R}^2 de frontière $\Gamma = \partial D$ de classe C^1 par morceaux orienté dans le sens direct. Supposons que P et Q sont de classe C^1 . La formule de Green-Riemann s'écrit ainsi

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat découle du théorème de Fubini et de la définition d'une intégrale curviligne. \square

Corollaire 170 (Calcul d'aire plane).

L'aire d'un compact simple D est donnée par les formules :

$$\text{Aire} = \int_D dx dy = \int_{\gamma} x dy = - \int_{\gamma} y dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (y dx - x dy).$$

En coordonnées polaires, on a $\text{Aire} = \frac{1}{2} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} r^2(\theta) d\theta$.

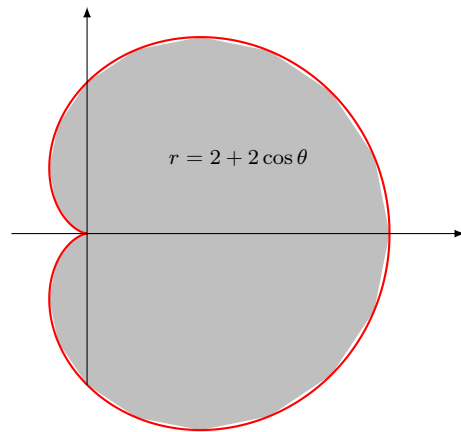
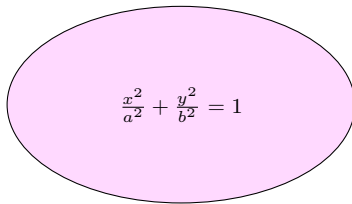
Exemple 171.

- Supposons que l'on veuille calculer l'aire délimité par l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On considère le paramétrage suivant $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On obtient donc

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \int \int_{\mathcal{E}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (y dx - x dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = \pi ab.$$

- Supposons que l'on veuille calculer l'aire délimité par la cardioïde C délimité par la courbe d'équation polaire $r = \alpha(1 + \cos \theta)$, avec $\theta \in [-\pi, \pi]$. D'après la formule de Green-Riemann, l'aire de C , en coordonnées polaires est donnée par

$$\text{Aire}(C) = \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{3\alpha^2 \pi}{2}.$$



La formule de Green-Riemann se généralise en \mathbb{R}^3 en un lien de l'intégrale curviligne sur une courbe C avec l'intégrale de surface sur une surface S si la courbe γ est le bord de la surface S : $\Gamma = \partial S$. On admettra le Théorème de Stokes-Ampère.

Théorème 172 (Formule de Stokes-Ampère).

Soit $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ une forme différentielle de degré 1 sur S une partie de \mathbb{R}^3 de frontière Γ courbe de classe C^1 par morceaux orienté dans le sens direct. Supposons que P , Q et R sont de classe C^1 . La formule de Stokes-Ampère (ou de la circulation) s'écrit ainsi

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

En termes de flux, on a

$$\int_S \vec{\text{rot}} V \cdot d\sigma = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

5-5 Applications en physique

5-5.1 Système équilibré en thermodynamique

En thermodynamique, le système en équilibre est caractérisé par un certain nombre de variables, dites variables d'état qui sont liées par les équations d'état. Ces équations déterminent les propriétés du système en état d'équilibre.

On s'intéresse par exemple à la masse d'un gaz qui est caractérisée par les paramètres : température T , pression de gaz P , volume de gaz V , énergie de gaz U , entropie de gaz S , ... Si on choisit la température et le volume de cette masse, alors les paramètres (P, T, S) sont liées par des formules :

$$P = f(T, V), \quad U = g(T, V), \quad S = h(T, V).$$

Dans le cas d'une transformation réversible (c'est-à-dire par une suite d'états d'équilibre), le premier principe de la Thermodynamique définit une fonction d'état, l'énergie libre U , telle que :

$$dU = dQ_{rev} + dW.$$

— On montre facilement que dQ_{rev} n'est pas une forme différentielle exacte. En utilisant $dW = -PdV$, on a

$$dQ_{rev} = dU - dW = dU + PdV$$

Or $U = g(T, V) \implies dU = \frac{\partial g}{\partial T} dT + \frac{\partial g}{\partial V} dV$. D'où

$$dQ_{rev} = \left(\frac{\partial g}{\partial V} + P \right) dV + \frac{\partial g}{\partial T} dT = \left(\frac{\partial g}{\partial V} + f(T, V) \right) dV + \frac{\partial g}{\partial T} dT = M(T, V) dV + N(T, V) dT.$$

Pour que dQ_{rev} soit une forme exacte, il faut que $\frac{\partial M}{\partial T} = \frac{\partial N}{\partial V}$, i.e.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial V} + \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial^2 g}{\partial V \partial T}.$$

En utilisant le théorème de Cauchy-Schwarz, on a $\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 g}{\partial V \partial T}$. Alors pour que dQ_{rev} soit exacte, il faut que $\frac{\partial P}{\partial T} = 0$, ce qui n'est pas vrai en général.

Ici, on dit que Q_{rev} n'est pas une fonction d'état : les quantités de chaleur Q_{rev} échangées entre un système et son milieu extérieur dépendent du type transformation. Autrement dit, Q_{rev} n'est pas une propriété du système d'équilibre.

- Pour un mol de gaz parfait, on montre que $\frac{dQ_{rev}}{T}$ est une forme différentielle totale exacte, en d'autres termes $\frac{dQ_{rev}}{T}$ est une fonction d'état. On a

$$\frac{dQ_{rev}}{T} = dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial g}{\partial V} + P \right) dV + \frac{1}{T} \frac{\partial g}{\partial T} dT$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial g}{\partial V} + P \right) \right] = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial g}{\partial V} + \frac{1}{T} \frac{\partial^2 g}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T} \frac{\partial P}{\partial T} - \frac{P}{T^2},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial g}{\partial T} \right] = \frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 g}{\partial V \partial T}.$$

Pour que $\frac{dQ_{rev}}{T}$ soit une forme exacte, i.e. $\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{1}{T} \frac{\partial g}{\partial T} \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial g}{\partial V} + P \right) \right]$, il faut que

$$-\frac{1}{T^2} \frac{\partial g}{\partial V} + \frac{1}{T} \frac{\partial P}{\partial T} - \frac{P}{T^2} = 0 \quad (5.5)$$

Comme il s'agit d'un gaz parfait, on a

$$P = \frac{RT}{V} \implies \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V} \text{ (un mole de gaz),}$$

$$\frac{\partial g}{\partial V} = 0 \text{ (énergie interne de gaz ne dépend que de T).}$$

Par conséquent, (5.5) est satisfaite. On en déduit que dS est une forme différentielle exacte et S est une fonction d'état. En effet, le deuxième principe de la thermodynamique introduit la fonction d'état S dite entropie.

5-5.2 Travail d'un champ de vecteurs

Supposons que l'on veuille déterminer le champ de vecteurs $V(x, y) = (3x + y, -x + 2y)$ le long de l'ellipse d'équation $9x^2 + y^2 = 9$, orienté dans le sens trigonométrique.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 9x^2 + y^2 \leq 9\}$ l'ensemble forme de l'ellipse et de son intérieur, et ∂D est un domaine admissible pour le Théorème de Green-Riemann. En utilisant le fait que le champ de vecteurs V est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et en appliquant le Théorème de Green-Riemann, on obtient

$$W(V) = \int_{\partial D} V(x, y) = \int_D \int_D (-2) dx dy = -2 \int_D \int_D dx dy = -2A(D) = -6\pi.$$

5-5.3 Résolution de certaines équations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ ou $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ avec P et Q sont des fonctions de classe C^1 sur un ouvert U . Pour résoudre cette équation, on procède comme suit

1. Vérifier d'abord si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Si oui, il existe une fonction $f(x, y)$ telle que $df(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.
2. Évaluer $f(x, y) = \int Q(x, y)dy + r(x)$.
3. Dériver $f(x, y)$ pour trouver $r(x)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) \Rightarrow r'(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int Q(x, y)dy \right) = P(x, y) \Rightarrow r(x) = ?$$

4. vérifier que la solution finale en $f(x, y)$ redonne $P(x, y)$ et $Q(x, y)$.

Si l'étape 1 de la procédure n'est pas vérifiée, on peut rendre l'équation $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ exacte en utilisant un **facteur intégrant** $\varphi(x, y) \neq 0$ telle que $\varphi P(x, y)dx + \varphi Q(x, y)dy = 0$ soit exacte. Pour choisir φ , on procède comme suit :

1. si $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \alpha(x)$, alors $\varphi = e^{\int \alpha(x)dx}$ est un facteur intégrant.
2. si $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \beta(y)$, alors $\varphi = e^{\int \beta(y)dy}$ est un facteur intégrant.
3. Sinon, on cherche un facteur intégrant dépendant de (x, y) .

Supposons qu'on veuille résoudre l'équation $(E) : 2x + 3x^2y + (x^3 - 3y^2)y' = 0$. Posons $P(x, y) = 2x + 3x^2y$ et $Q(x, y) = x^3 - 3y^2$. Donc (E) s'écrit sous la forme

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (5.6)$$

Par calcul simple, on a $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$. D'où (E) est une équation exacte. Cherchons u telle que $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Or $df = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, donc $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3x^2y$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3y^2$.

En intégrant la première équation, on obtient $u(x, y) = x^2 + x^3y + k(y)$. En dérivant par rapport à y , il vient que $k'(y) = -3y^2$, d'où $u(x, y) = x^2 + x^3y - y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$

Rappels mathématiques

Cette annexe contient plusieurs rappels mathématiques qui seront utiles au fur et à mesure du déroulement du cours.

1-1 Ensembles pavables et quarrables

Pour définir l'intégrale double, nous avons besoin de quelques hypothèses sur le domaine d'intégration.

1-1.1 Les pavés et leurs mesures

Définition 173.

On appelle pavé de \mathbb{R}^2 une partie P égale à un produit d'intervalles compacts $P = [a, b] \times [c, d]$. Le réel positif : $\mu(P) = (b - a)(d - c)$ est appelé la mesure du pavé P .

1-1.2 Ensembles pavables de \mathbb{R}^2 **Définition 174.**

Une partie A de \mathbb{R}^2 est dite pavable si elle est réunion d'une famille finie de pavés $(P_i)_{i \in I}$ d'intérieurs deux à deux disjoints. (i.e. si $i \neq j$ alors $P_i \cap P_j = \emptyset$). Le réel positif :

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(P_i),$$

ne dépend que de la partie A . Il s'appelle la mesure ou l'aire de la partie pavable A .

1-1.3 Ensembles quarrables de \mathbb{R}^2 **Définition 175.**

Soit A une partie bornée de \mathbb{R}^2 . On note $m^-(A)$ la borne inférieure des aires des parties pavables contenant A et $m^+(A)$ la borne supérieure des aires des parties pavables contenues dans A . La partie A est quarrable si et seulement si $m^-(A) = m^+(A)$ et la valeur commune de ces deux bornes est appelée aire ou mesure de A et notée $\mu(A)$. Une partie A (intérieur ici à la courbe bleue) est quarrable si et seulement s'il peut être approximé à la fois par des ensembles pavables intérieurs et extérieurs (leurs frontières figurent respectivement en vert et en rose).

Exemple 176.

Si f est une fonction positive continue sur le segment $[a, b]$ alors la partie : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ est quarrable et il résulte de la définition de l'intégrale de Riemann que ? ?

$$\mu(A) = \int_a^b f(t) dt$$

1-2 Complément sur les surfaces dans l'espace et leurs équations cartésiennes

Le but de ce paragraphe est de présenter quelques surfaces dans l'espace en mettant en oeuvre les équations cartésiennes pour décrire chaque surface.

1. Sphère centrée en (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est une surface d'équation cartésienne donnée par

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

2. Ellipsoïde est une surface de l'espace \mathbb{R}^3 d'équation cartésienne donnée par

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

3. Cône est une surface de l'espace \mathbb{R}^3 d'équation cartésienne donnée par

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{(z - z_0)^2}{c^2}$$

4. Paraboloïde elliptique (bol) est une surface d'équation de la forme

$$z = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2}$$

5. Paraboloïde hyperbolique (à selle) est une surface d'équation de la forme

$$z = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2}.$$

Par un changement de variable, l'équation se transforme en $z = xy$.

6. Hyperboloïde à une nappe est surface d'équation de la forme

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

7. Hyperboloïde à deux nappes est surface d'équation de la forme

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} + 1 = 0$$

1-3 Développements limités usuels

Les développements limités présentés dans cette section sont tous au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + \mathbf{o}(x^n) \\
 sh(x) &= x + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathbf{o}(x^{2n+2}) \\
 ch(x) &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{o}(x^{2n+1}) \\
 \cos(x) &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathbf{o}(x^{2n+1}) \\
 \sin(x) &= x + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathbf{o}(x^{2n+2}) \\
 \ln(1+x) &= x + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathbf{o}(x^n) \\
 \frac{1}{1+x} &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k x^k + \mathbf{o}(x^n) \\
 \arctan(x) &= x + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathbf{o}(x^{2n+1}) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha-k+1)!}{k!} + \mathbf{o}(x^n)
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] J.P., Margirier. Rappels de cours et exercices corrigés. Dunod, 1994.
- [2] O., Rodot. Analyse MP, cours et exercices corrigés. De Boeck, 2014.
- [3] J.-P. Ramis, A. Warusfel. Mathématiques : Tout-en-un pour la Licence : Niveau L1. Dunod, Paris, 861 + XX pp, 2006.
- [4] Doneddu. Géométrie différentielle, intégrales multiples Dunod, Paris, 861 + XX pp, 2006.
- [5] N. Piskounov. Calcul différentiel et intégrale Editions MIR/Ellipses
- [6] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès. Cours de mathématiques Collection Dunod Université : tome 3 : géométrie et cinématique.
- [7] H. F.Davis, A. D. Snider. Introduction to vector analysis 4th édition, Allyn and Bacon, 1979.
- [8] R., Taillet, V. Villain, P. Febvre. Dictionnaire de physique De boeck, Bruxelles, 2009.
- [9] H., Cartan. Cours de calcul différentiel Éd. Hermann, réédition 2007 "1ère édition parue en 1977".
- [10] V., Arnold. Les méthodes mathématiques de la mécanique classique Éditions Mir, Moscou, 1974.

Index

- abscisse curviligne, 76
- accélération centrale, 53
- Aire, 28
- Applications, 28
- asymptote, 62

- birégulier, 56
- branche parabolique, 62

- Centre d'inertie, 29
- Centre de gravité, 29, 36
- Centre de masse, 36
- cercle osculateur, 77
- champ de gradients, 90
- circulation, 95
- colinéaire, 56
- colinéaires, 57
- condition de Schwartz, 86
- connexe par arcs, 84
- coordonnées polaires, 48
- courbe birégulière, 57
- courbe fermée, 48
- courbe gauche, 49
- courbe plane, 49
- courbe régulière, 57
- courbure, 77

- domaine convexe, 84
- double, 56
- développement limité, 46

- facteur intégrant, 89
- forme différentielle, 82
- forme exacte, 82
- forme totale, 82
- formule de Taylor-Young, 46

- gradient, 90

- inflexion, 56

- libres, 56
- linéairement dépendants, 56, 57
- linéairement indépendants, 56
- liées, 57
- liés, 56

- Masse, 29
- moment d'inertie, 29
- moments d'inertie, 36
- mouvement, 51
- multiple, 56

- non colinéaire, 56
- norme euclidienne, 39, 48

- orienté, 49, 74, 76, 77
- orthonormé, 39, 48
- ouvert connexe, 84

- Paraboloïde, 29
- parallélépipède, 31
- point birégulier, 71
- point d'arrêt, 56
- point pôle, 71
- point régulier, 71
- point stationnaire, 71
- position, 51
- principe de la thermodynamique, 98
- projection, 29

- rayon de courbure, 77
- rectiligne, 53
- reparamétrage, 51
- reparamétrisation, 51
- repère de Serret-Frenet, 76
- régulier, 56, 74, 76, 77

- sens direct, 50
- sens indirect, 50
- singulier, 56

stationnaire, 56

support, 48

symétrie, 27

temps, 51

thermodynamique, 98

trajectoire, 48, 51

travail, 95

uniforme, 53

vecteur accélération, 53

vecteur position, 51

vecteur tangent, 76

vecteur vitesse, 53, 56

Volume, 35

élément d'arc, 76

élément de ligne, 76

étoilé, 88

Hammou El-Otmamy