

"Composition en caractère Cochin sur un ordinateur Apple MacBook Pro 13 à l'aide des logiciels libres suivants : \LaTeX 2 ϵ pdf \TeX Xfig Grace

*version : Cours_IPSA_20220120.tex du 8 février 2023 Copyright ©2022 by H.
El-Otmany*

Outline d'exposé

1 Introduction à la mécanique des fluides numériques

- Introduction et motivation
- Méthode des différences finies
- Méthodes des éléments finis
- Méthode de volumes finis

2 Méthode de volumes finis en 1D

- Étapes de mise en œuvre de la méthode
- Application au problème unidimensionnel de diffusion
- Tests numériques

3 Méthode de volumes finis en 2D

- Application au problème bidimensionnel de diffusion
- Tests numériques

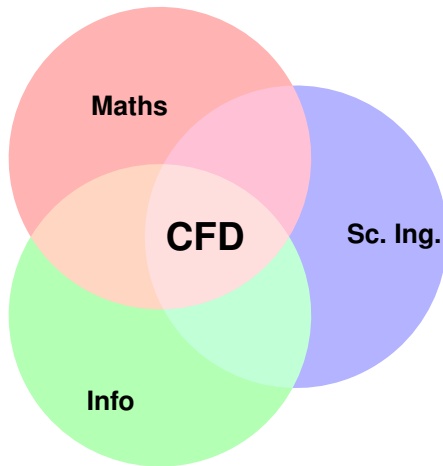
4 Prototype du calcul par CFD

Mécanique des fluides numérique (CFD)

- 1 Introduction à la CFD
- 2 Étapes essentielles pour résoudre un problème physique en CFD
- 3 Méthodes numériques d'approximation

Introduction à la mécanique des fluides numérique ?

- La mécanique des fluides numérique est une discipline carrefour entre les sciences de l'ingénieur, les mathématiques et l'informatique.



Étapes essentielles pour résoudre un problème physique en CFD

1 la modélisation du phénomène :

- décrire le comportement de systèmes physiques pour prédire, optimiser, contrôler le comportement de ces systèmes
- mise en équation des phénomènes physiques observés
- décrire les hypothèses, le domaine de validité, la description partielle parfois erronée de la réalité, ... ~> erreurs de modélisation

2 l'analyse mathématique :

- étude des équations modélisant le phénomène
- existence, unicité de solutions
- analyse de la stabilité et la singularité des solution (stables, instables, singulières, ...) ↪ erreurs de calcul

3 la résolution numérique et le développement informatique : il

existe beaucoup de problèmes n'ayant pas de solutions explicites, donc nous se retournons aux ordinateurs pour les résoudre.

- choix et étude de la méthode de résolution (volumes finis, différences finies, éléments finis,...) ↪ erreurs numériques
- écriture des algorithmes de résolution
- analyse et traitement de la solution

Pourquoi des simulations numériques ?

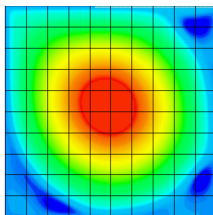
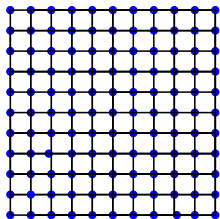
- 1 Investigation du comportement de systèmes complexes (absence de solution analytique).
- 2 Mise en œuvre et test de modèles théoriques pour confrontation aux expériences.
- 3 Cas inaccessibles aux méthodes expérimentales non intrusives.
- 4 Accès à des données expérimentales difficilement mesurables.
- 5 Souplesse phase R&D d'un projet industriel, coût moindre que la réalisation de prototypes.

Pourquoi se méfier des méthodes numériques ?

- 1 Sources d'erreurs inhérentes associées à la méthode utilisée.
- 2 Seule la physique modélisée est observée.
- 3 Coût en temps de calcul augmentant très rapidement avec la précision souhaitée (risque de sous-résolution selon le domaine de validité du problème).
- 4 Artefacts numériques : instabilités, dispersions, diffusion, ...

Méthode des différences finies

- Domaine cible approché par une grille cartésienne.



Source de l'image (PFE-Bac+3-Helotmany)

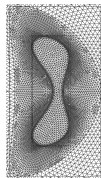
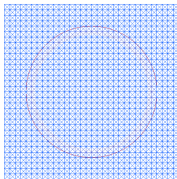
- Dérivées partielles approchées par différence divisées (Dév. Taylor-Lagrange) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{2h}$$

- Avantage : très simple à développer et à utiliser.
- Inconvénient : limités à des géométries simples et ne conservent pas les propriétés physiques (flux, ...)

Méthode des éléments finis

- Domaine cible est complexe.
- Utilisation de maillage similaire des volumes finis (cellules jointives non inter-pénétrantes)



Source de l'image (PhD-Helotmany).

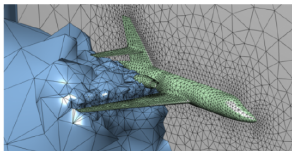
- Interpolation de solution par les fonctions polynomiales par morceaux ou de forme ou modales ϕ_i :

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

- Avantage : précision arbitrairement élevée.
- Inconvénient : certains problèmes de stabilité.

Méthode des volumes finis

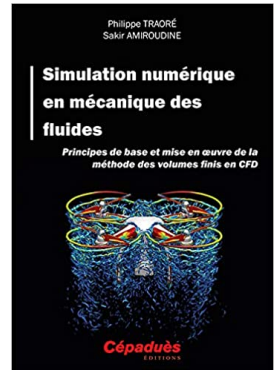
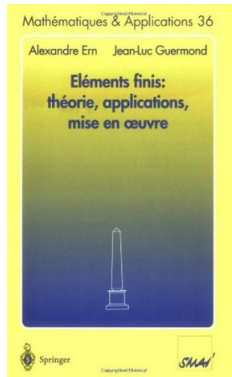
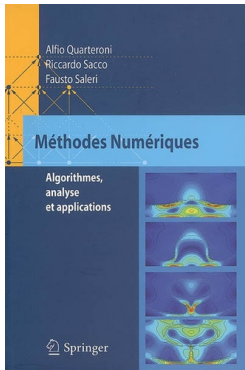
- Domaine de calcul subdivisé en volumes de contrôles (polygones, polyèdres).
- Utilisation de maillage similaire des éléments finis (cellules jointives non inter-pénétrantes)



Source de l'image (CSR of California University).

- Calcul d'intégrale de l'EDP sur chaque volume de contrôle par le théorème de divergence.
- Avantages : géométries complexes, approche naturelle en mécanique des fluides, bonne conservation des propriétés physiques (conservation du flux, bornes des solutions, ...).
- Inconvénient : moins évidente à appliquer dans d'autres domaines.

Supports pédagogiques



Dans ce cours, nous n'exposerons que la méthode des volumes finis.

Méthode des volumes finis

- 1 Étapes de résolution de la méthode des volumes finis.
- 2 Restriction : EDP linéaires (diffusion et advection) en $1D$ et $2D$.
- 3 On utilisera des problèmes simples (de solutions exactes connues) pour analyser le comportement de cette méthode.

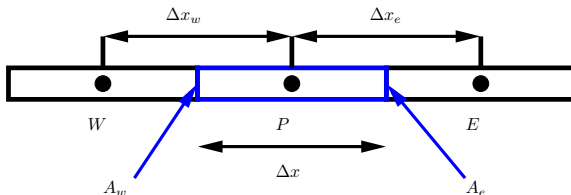
Méthode des volumes finis

Étapes de résolution de la méthode des volumes finis

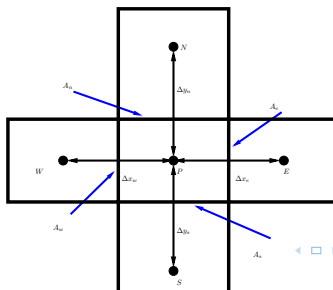
- 1 Définition de l'équation du phénomène étudié.
- 2 Discrétisation du domaine de validité du phénomène étudié (subdivision en volumes élémentaires).
- 3 Intégration de l'équation sur chaque volume du contrôle (théorème de Gauss ou de divergence ou d'Ostrogradski).
- 4 Traitement des conditions aux limites.
- 5 Construction du système d'équation algébrique résultant et sa résolution matricielle.
- 6 Présentation des résultats (comparaison avec la solution explicite ou à l'expérience).

Exemples de volume de contrôle

- Volume du contrôle en 1D (chaque nœud représente des grandeurs physiques : T , v , p , ...)

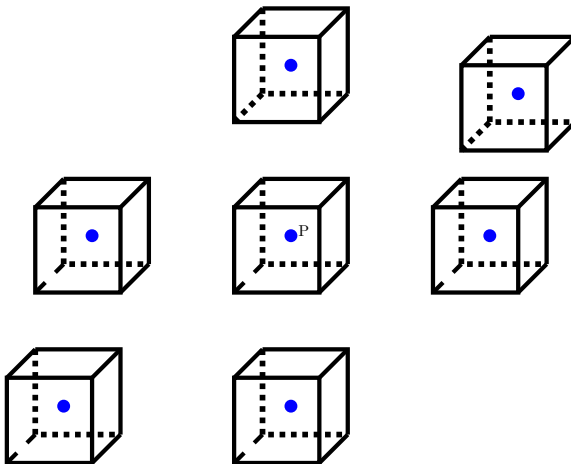


- Volume du contrôle en 2D



Méthode des volumes finis

- Volume du contrôle de 3D



Mise en application de volumes finis en $1D$: phénomène du transfert de chaleur

Étape 1 : définition de l'équation du transfert de chaleur à résoudre

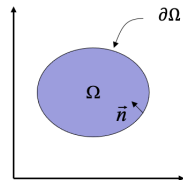
On considère l'**équation de la chaleur** sur un domaine Ω :

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla(\rho c_p v T) - \text{div}(\kappa \nabla T) = S_T$$

Temporel + Transport + Diffusion = Source de chaleur

avec

- T , la température (K)
- ρ , la masse volumique ($\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- c_p , la capacité calorifique ($\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
- t , le temps (s)
- v , la vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
- κ , la conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
- S_T , la source de chaleur volumique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$)



Observation 1 : pour mieux comprendre la méthode des volumes finis, on suppose que

- Ω : une plaque rectangulaire $[0, l] \times [0, L]$.
- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$: un problème stationnaire.
- $S_T = 0$: le terme source est nul.
- $L \gg \gg l$:



Par conséquent, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$.

- Conditions de Dirichlet en $x = 0$ et $x = L$ telles que $T(0) = T_A$ et $T(L) = T_B$.

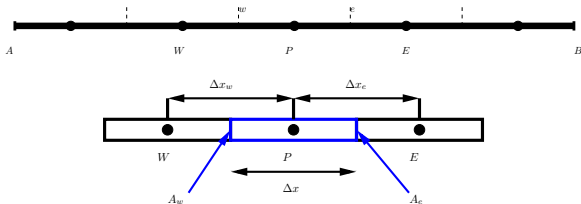
Étape 2 : discrétisation de domaine du phénomène

① En **MAJUSCULE**, on notera les grandeurs relatives aux **VOLUMES** et aux **NŒUDS** :

- Nœud du volume considéré ; P .
- Nœud du voisin de gauche de P ; W (west).
- Nœud du voisin de droite de P ; E (est).
- Température en P , E et W ; T_P , T_E et T_W .
- Taille du volume (distance entre les faces du volume) ; Δx .

② En **minuscule**, on notera les grandeurs relatives aux **frontières** des **volumes** :

- Face à droite du volume P (est) ; e .
- Face à gauche du volume P (west) ; w .
- Distance séparant les nœuds et ses voisins ; Δx_e , Δx_w .



Étape 3 : Intégration de l'équation sur chaque volume du contrôle

Théorème de la divergence

Supposons que S est une surface fermée délimitant le volume V . Soient \mathbf{u} un champ vectoriel de classe C^1 et \vec{n} un vecteur normal vers l'extérieur de V , alors :

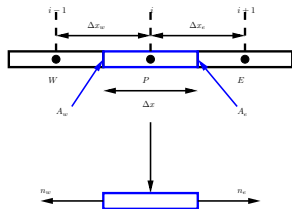
$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{u}) dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \vec{n} dS.$$

En appliquant le théorème de la divergence, nous avons

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(\kappa \nabla T) dV &= \int_S \kappa \nabla T \cdot \vec{n} dS = 0 \\ \int_{V_P} \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) dV &= \int_{S_P} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{n} dS = 0 \end{aligned}$$

Les flux diffusifs sont approchés en discrétisant les expressions des gradients sur les faces avec les températures des nœuds :

$$\begin{aligned}
 \int_{S_P} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{n} dS &= \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w n_w A_w \right] + \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e n_e A_e \right] \\
 &= \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w (-1) A_w \right] + \left[\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e (1) A_e \right] \\
 &= \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e A_e - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w A_w \\
 &= \left(\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} A_e \right) - \left(\kappa_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} A_w \right)
 \end{aligned}$$



où A_e et A_s désigne les sections transversales (très petites).

Par un simple calcul, on obtient

$$\int_{S_P} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \vec{n} dS = \kappa_e \frac{A_e}{\Delta x_e} T_E - \left(\kappa_e \frac{A_e}{\Delta x_e} + \kappa_w \frac{A_w}{\Delta x_w} \right) T_P + \kappa_w \frac{A_w}{\Delta x_w} T_W = 0.$$

Posons

$$a_E = \frac{\kappa_e A_e}{\Delta x_e}, \quad a_W = \frac{\kappa_w A_w}{\Delta x_w}, \quad a_P = a_E + a_W,$$

$$\kappa_e = \frac{\kappa_E + \kappa_P}{2}, \quad \kappa_w = \frac{\kappa_W + \kappa_P}{2}.$$

On obtient, pour chaque volume du contrôle de la plaque rectangulaire, une équation de type :

$$a_E T_E - a_P T_P + a_W T_W = 0$$

Étape 4 : Traitement des conditions aux limites

- Nœud 1 :

$$\begin{aligned} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} A \right)_e - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} A \right)_w &= \left(\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} A_e \right) - \left(\kappa_w \frac{T_P - T_A}{\frac{\Delta x_w}{2}} A_w \right) \\ &= \left(\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} A_e \right) - \left(2\kappa_w \frac{T_P - T_A}{\Delta x_w} A_w \right) \\ &= a_E T_E - a_E T_P - 2a_w T_P + 2a_w T_A = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$a_E T_E - (a_E + 2a_w) T_P = -2a_w T_A.$$

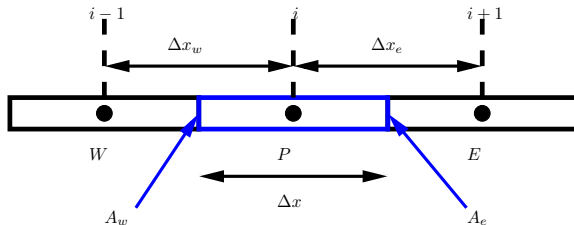
● Nœud 5 :

$$\begin{aligned}
 \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} A \right)_e - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} A \right)_w &= \left(\kappa_e \frac{T_B - T_P}{\frac{\Delta x_e}{2}} A_e \right) - \left(\kappa_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} A_w \right) \\
 &\quad \left(2\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} A_e \right) - \left(\kappa_w \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} A_w \right) \\
 &= 2a_E T_B - 2a_E T_P - a_W T_P - a_W T_W = 0.
 \end{aligned}$$

Donc

$$-(2a_E + 2a_w)T_P + a_W T_W = -2a_E T_B.$$

Étape 5 : Construction du système d'équation algébrique résultant et sa résolution matricielle



$$a_W T_W - a_P T_P + a_E T_E = 0,$$

$$a_{i-1} T_{i-1} - a_i T_i + a_{i+1} T_{i+1} = 0, \quad 2 \leq i \leq 4.$$

Étape 5 : Formulation du système d'équation algébrique résultant et sa résolution matricielle

- Nœuds 2, 3 et 4 :

$$a_1 T_1 - a_2 T_2 + a_3 T_3 = 0,$$

$$a_2 T_2 - a_3 T_3 + a_4 T_4 = 0,$$

$$a_3 T_3 - a_4 T_4 + a_5 T_5 = 0.$$

- Nœud 1 : $-a_1 T_1 + a_2 T_2 = 2a_W T_A$.

- Nœud 5 : $a_4 T_4 - a_5 T_5 = -2a_E T_B$.

On écrit ainsi :

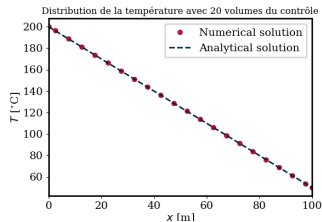
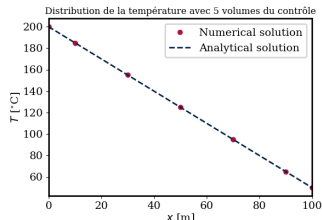
$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_W T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2a_E T_B \end{bmatrix}.$$

Remarque : la démarche est valable pour n volumes du contrôles.

Étape 6 : Présentation des résultats numériques

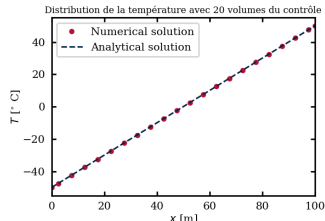
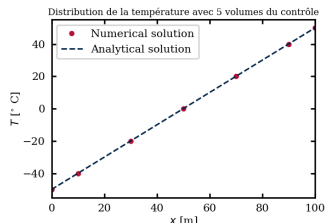
1 Cas test : Dirichlet

- Développement informatique de la méthode des volumes finis en Python (code disponible sur demande).
- Données :
 - ▶ $L = 100\text{m}$, $l = 0.0001\text{m}$.
 - ▶ $T_A = T(0) = 200^\circ\text{C}$ et $T_B = T(100) = 50^\circ\text{C}$.
 - ▶ $S_T = 0$ pour tout $x \in [0; L]$.
 - ▶ Conductivité thermique $\kappa = 100\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Simulations : $n_1 = 5$, $n_2 = 20$



2 Cas test : Dirichlet + Neumann

- Développement informatique de la méthode des volumes finis en Python (code disponible sur demande).
- Données :
 - ▶ $L = 100\text{m}$, $l = 0.0001\text{m}$.
 - ▶ $-\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{x=0} = 100$ et $T_B = T(100) = 50^\circ\text{C}$.
 - ▶ $S_T = 0$ pour tout $x \in [0; L]$.
 - ▶ Conductivité thermique $\kappa = 100\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Simulations : $n_1 = 5$, $n_2 = 20$



③ Cas test : S_T n'est pas nulle + conditions de Dirichlet

- Intégration de l'équation sur chaque volume du contrôle (idem + $\bar{S}_T \Delta x$).
- Traitement des conditions aux limites (idem + $\bar{S}_T \Delta x / 2$).
- Construction du système d'équation et résolution matricielle
 - ▶ Nœuds 2, 3 et 4 :

$$a_1 T_1 - a_2 T_2 + a_3 T_3 = \bar{S}_T \Delta x,$$

$$a_2 T_2 - a_3 T_3 + a_4 T_4 = \bar{S}_T \Delta x,$$

$$a_3 T_3 - a_4 T_4 + a_5 T_5 = \bar{S}_T \Delta x.$$

▶ Nœud 1 : $-a_1 T_1 + a_2 T_2 = 2a_W T_A + \bar{S}_{T_1} \Delta x / 2.$

▶ Nœud 5 : $a_4 T_4 - a_5 T_5 = -2a_E T_B + \bar{S}_{T_5} \Delta x / 2.$

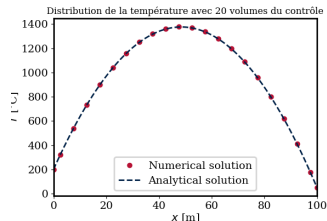
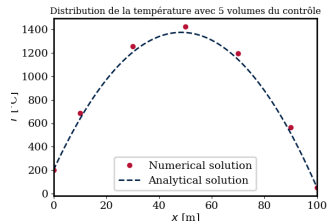
On écrit ainsi :

$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & -a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_W T_A + \bar{S}_{T_1} \Delta x / 2 \\ \bar{S}_{T_2} T \Delta x \\ \bar{S}_{T_3} \Delta x \\ \bar{S}_{T_4} \Delta x \\ -2a_E T_B + \bar{S}_{T_5} \Delta x / 2 \end{bmatrix}.$$

● Données :

- $L = 100\text{m}, l = 0.0001\text{m}.$
- $T_A(0) = 200^\circ\text{C}$ et $T_B = T(100) = 50^\circ\text{C}.$
- $S_T = 100$ pour tout $x \in [0; L].$
- Conductivité thermique
 $\kappa = 100\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$

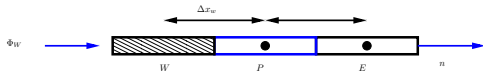
● Simulations : $n_1 = 5, n_2 = 20$



Traitement des cas particuliers de conditions aux limites

- Le flux sur la face west W est le flux sur la face extérieur de la plaque :

$$\kappa_e \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} + \Phi_W + \bar{S} \Delta x / 2 = 0$$



Si la condition aux limites de convection + le flux imposé sur la face ouest s'écrit

$$\Phi_W = h_W (T_{ext} - T_P) A_w + \phi_w A_w$$

avec

- h_W , le coefficient d'échange convectif ($W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$).
- T_{ext} , la température du fluide à l'infini (K).
- ϕ_w , le flux imposé sur la face ouest ($W \cdot m^{-2}$).

$$\leadsto a_E T_E - (a_E + h_W) T_P + a_W T_W = \bar{S}_T \Delta x / 2 + h_W T_{ext} + \phi_w.$$

Mise en application de volumes finis en $2D$: phénomène du transfert de chaleur

Étape 1 : définition de l'équation du transfert de chaleur à résoudre

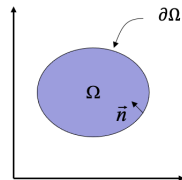
On considère l'**équation de la chaleur** sur un domaine Ω :

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla(\rho c_p v T) - \text{div}(\kappa \nabla T) = S_T$$

Temporel + Transport + Diffusion = Source de chaleur

avec

- T , la température (K)
- ρ , la masse volumique ($\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- c_p , la capacité calorifique ($\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
- t , le temps (s)
- v , la vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
- κ , la conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
- S_T , la source de chaleur volumique ($\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$)



Observation 1 : pour mieux comprendre la méthode des volumes finis, on suppose que

- Ω : une plaque rectangulaire $[0, l] \times [0, L] \times [0; h]$.
- $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$: un problème stationnaire.
- $S_T = 0$: le terme source est nul.
- $k = 1$ (pour simplifier les notations)
- $L \gg \gg h, l \gg h$:



Par conséquent, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$.

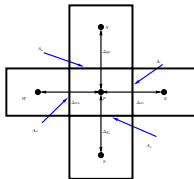
Étape 2 : discrétisation de domaine du phénomène

① En **MAJUSCULE**, on notera les grandeurs relatives aux **VOLUMES** et aux **NŒUDS** :

- Nœud du volume considéré ; P .
- Nœud du voisin de gauche (resp. droite) de P ; W (resp. E).
- Nœud du voisin de haut (resp. bas) de P ; N (resp. S).
- Température en P , E et W ; T_P , T_E et T_W .
- Taille du volume (distance entre les faces du volume) ; Δx .

② En **minuscule**, on notera les grandeurs relatives aux **frontières** des volumes :

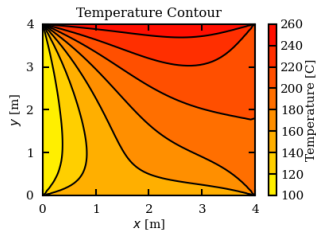
- Face à droite (resp. gauche) du volume P ; e (resp. w).
- Face en haut (resp. bas) du volume P ; n (resp. s).
- Distance séparant les nœuds et ses voisins ; Δx_e , Δx_w , Δy_n et Δy_s .



Présentation des résultats numériques

1 Cas test : Dirichlet

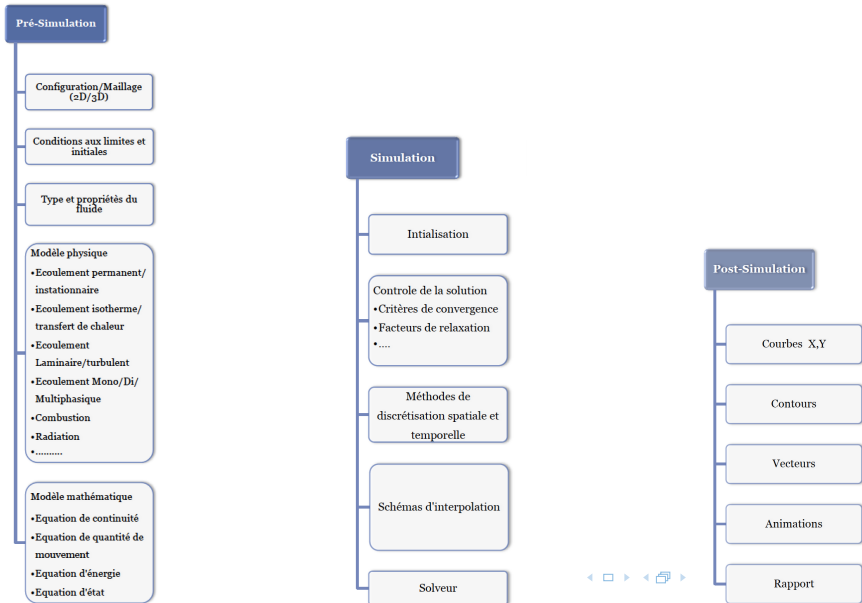
- Développement informatique de la méthode des volumes finis en Python (code disponible sur demande).
- Données :
 - ▶ $L = 4\text{m}, l = 4\text{m}, h = 0.01$
 - ▶ $T_N = 250^\circ\text{C}, T_S = 150^\circ\text{C}, T_E = 200^\circ\text{C}$ et $T_W = 100^\circ\text{C}$.
 - ▶ $S_T = 1000$ pour tout $(x, y) \in [0; l] \times [0; L]$.
 - ▶ Conductivité thermique $\kappa = 100\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Simulations



Prototype du calcul par CFD

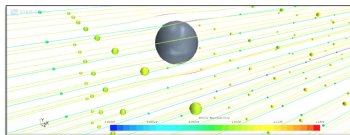
- Pré-simulations (Pre-processing)
- Simulations (Processing)
- Post-simulations (Post processing)

Prototype du calcul par CFD



Exercice d'application en Python et StarCCM

- Problème physique : écoulement d'air autour d'une sphère



- Données :

- Sphère de diamètre $d = 2\text{ cm}$ placé au centre d'un canal (soufflerie)
- Les dimensions du canal sont : Longueur $L = 80\text{ cm}$; Largeur $l = 20\text{ cm}$ et hauteur $h = 20\text{ cm}$
- Tests : On commencera par une vitesse de l'écoulement $V = 1\text{ m/s}$
- Le centre de la sphère comme le centre du canal sont placés à l'origine du repère.
- La densité de l'air est considérée dans les conditions standards

MERCI POUR VOTRE ATTENTION