

Exercice n°1 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0; 1], \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

où $f(t, y) = 3t + y$.

1. — Montrer que la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et donner une constante de Lipschitz.

On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2|$, f est lipschitzienne par rapport à la variable y telle que $k = 1$. On dit aussi que f est 1-lipschitzienne par rapport à la variable y .

Remarque : Pour montrer que f est lipschitzienne en y , vous pouvez vérifier que f est une fonction de classe C^1 et essayer de majorer la dérivée partielle par rapport à y au voisinage de y_0 . Autrement dit, il suffit de calculer $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = 1$, donc $\left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right| = 1$. Par conséquent, f est une fonction 1-lipschitzienne.

- Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité du problème (\mathcal{P}) ?
 f est continue sur $I = [0; 1]$ et 1-lipschitzienne. Ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que le problème différentiel (\mathcal{P}) admet une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Montrer que $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ est l'unique solution de (\mathcal{P}) .

Pour que $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ soit l'unique solution du problème différentiel, il faut vérifier les conditions suivantes :

- $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur l'intervalle ou le domaine de validité du problème (\mathcal{P}) .
- $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ vérifie l'équation $y'(t) = f(t, y(t)) = 3t + y(t)$. Il suffit de calculer la dérivée de $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ et de la comparer à $f(t, y(t)) = 3t + y(t)$. On a $y'(t) = 4e^t - 3$ et $f(t, y(t)) = 3t + y(t) = 3t + 4e^t - 3t - 3 = 4e^t - 3 = y'(t)$. Par conséquent, $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ vérifie l'équation donnée.
- $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ vérifie la condition initiale du problème (\mathcal{P}) . On a $y(0) = 4e^0 - 3 \times 0 - 3 = 4 - 3 = 1$.

Ensuite, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est donc la seule solution de l'équation qui peut vérifier l'équation et la condition initiale $y(0) = 1$.

Remarque : toute solution sur un intervalle I qui ne vérifie pas la condition initiale $y(0)$ n'est pas une solution du problème différentiel (\mathcal{P}) .

3. Écrire le schéma d'Euler explicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$. Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.

On a

- $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
- $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(3t_0 + y_0) = 1.1$.
- $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + h(3t_1 + y_1) = 1.24$.

4. Écrire le schéma d'Euler implicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.

Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. En utilisant $f(t, y) = 3t + y$, il vient que $y_{n+1} = y_n + 3t_{n+1}h + y_{n+1}h$, donc $(1 - h)y_{n+1} = y_n + 3t_{n+1}h = y_n + 3(n+1)h^2$. Par conséquent, $y_{n+1} = \frac{y_n + 3(n+1)h^2}{1-h}$ si $h \neq 1$. On a

- $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).

$$— y_1 = y(0.1) = \frac{y_0 + 3(0+1)h^2}{1-h} = 1.1444$$

$$— y_2 = y(0.2) = \frac{y_1 + 3(1+1)h^2}{1-h} = 1.338.$$

5. Écrire la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et donner l'approximation de $y(0.2)$ à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0.1$.

Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Posons $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$ où $\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$.

— $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).

— On a $\hat{y}_0 = y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0) = 1 + \frac{0.1}{2}(3 \times 0 + 1) = 1.05$, donc $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, \hat{y}_0) = 1 + 0.1(3(\times 0 + \frac{0.1}{2}) + 1.05) = 1.12$.

— On a $\hat{y}_1 = y_1 + \frac{h}{2}f(t_1, y_1) = 1.12 + \frac{0.1}{2}(3 \times 0.1 + 1.12) = 1.191$, donc $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1 + \frac{h}{2}, \hat{y}_1) = 1.191 + 0.1(3(\times 1 + \frac{0.1}{2}) + 1.191) = 1.2841$.

6. Comparer les solutions numériques obtenues par chaque méthode à la valeur exacte.

D'après la solution du problème \mathcal{P} , on a $y(0.2) \approx 1.2856$. On conclut que les erreurs relatives sont de 0.03 pour Euler explicite, 0.04 pour Euler implicite, et 0.001 pour RK2.

Exercice n°2 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) = e^{-t} - 2y(t), & t \in [0; 1], \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et donner une constante de Lipschitz.

Posons $f(t, y) = e^{-t} - 2y$. On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq |-2y_1 + 2y_2|$, f est lipschitzienne par rapport à la 2^{ème} variable y telle que $k = 2$. On dit aussi que f est 2-lipschitzienne par rapport à la variable y .

2. Montrer que ce problème admet une solution unique. D'après la question 1, on a f est 2-lipschitzienne par rapport à la 2^{ème} variable y . Or, $f(t, y) = e^{-t} - 2y$ est une fonction continue car c'est la somme de fonctions continues. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème (\mathcal{P}) admet une solution unique.

3. Montrer que $y(t) = e^{-t}$ est l'unique solution de ce problème. Pour que $y(t) = e^{-t}$ soit l'unique solution du problème différentiel, il faut vérifier les conditions suivantes :

— $y : I = [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur l'intervalle ou le domaine de validité du problème (\mathcal{P}) .

— $y(t) = e^{-t}$ vérifie l'équation $y'(t) = f(t, y(t)) = e^{-t} - 2y(t)$. Il suffit de calculer la dérivée de $y(t) = e^{-t}$ et de la comparer avec $f(t, y(t)) = e^{-t} - 2y(t)$. On a $y'(t) = -e^{-t}$ et $f(t, y(t)) = e^{-t} - 2y(t) = e^{-t} - 2e^{-t} = -e^{-t} = y'(t)$. Par conséquent, $y(t) = e^{-t}$ vérifie l'équation donnée.

— $y(t) = e^{-t}$ vérifie la condition initiale du problème (\mathcal{P}) . On a $y(0) = e^{-0} = 1$.

Ensuite, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est donc la seule solution de l'équation qui peut vérifier l'équation et la condition initiale $y(0) = 1$.

Remarque : toute solution sur un intervalle I qui ne vérifie pas la condition initiale $y(0)$ n'est pas une solution du problème différentiel (\mathcal{P}) .

4. Écrire le schéma d'Euler explicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.3$.

Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.

On a

— $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).

— $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(e^{-t_0} - 2y_0) = 0.9$.

— $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + h(e^{-t_1} - 2y_1) = 0.810483741803596$.

— $y_3 = y(0.3) = y_2 + hf(t_2, y_2) = y_2 + h(e^{-t_2} - 2y_2) = 0.730260068750675$.

5. Écrire le schéma d'Euler implicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.
 Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. En utilisant $f(t, y) = e^{-t} - 2y$, il vient que $y_{n+1} = y_n + e^{-t_n}h - 2y_{n+1}h$, donc $(1 + 2h)y_{n+1} = y_n + 3t_{n+1}h = y_n + 3(n+1)h^2$. Par conséquent, $y_{n+1} = \frac{y_n + e^{-(n+1)h}h}{1 + 2h}$. On a
- $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
 - $y_1 = y(0.1) = \frac{y_0 + e^{-(0+1)h}h}{1 + 2h} = 0.9087364515029966$.
 - $y_2 = y(0.2) = \frac{y_1 + e^{-(1+1)h}h}{1 + 2h} = 0.8255079390089958$.
 - $y_3 = y(0.3) = \frac{y_2 + e^{-(2+1)h}h}{1 + 2h} = 0.749658134230973$.
6. Écrire la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et donner l'approximation de $y(0.3)$ à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0.1$.
 Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Posons $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$ où $\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$.
- $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
 - On a $\hat{y}_0 = y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0) = 1 + \frac{0.1}{2}(e^{-t_0} - 2y_0) = 0.95$, donc $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, \hat{y}_0) = 0.9051229424500714$.
 - On a $\hat{y}_1 = y_1 + \frac{h}{2}f(t_1, y_1) = 0.8598525191068622$, donc $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1 + \frac{h}{2}, \hat{y}_1) = 0.8192232362712047$.
 - On a $\hat{y}_2 = y_2 + \frac{h}{2}f(t_2, y_2) = 0.7782374502979834$, donc $y_3 = y(0.3) = y_2 + hf(t_2 + \frac{h}{2}, \hat{y}_2) = 0.7414558245187486$.
7. Comparer les solutions numériques obtenues par chaque méthode à la valeur exacte.
 La solution du problème \mathcal{P} , nous donne $y(0.2) \approx e^{-0.2} = 0.81873075308$. Par conséquent, les erreurs relatives sont d'ordre 10^{-2} pour les schémas d'Euler et d'ordre 8×10^{-4} pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.

Exercice n°3 Soit l'équation différentielle du second ordre $y'' + ty' + (1 - t)y = 2$, considérée sur l'intervalle $I = [0; 1]$ assortie des conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. Reformuler cette équation différentielle sous la forme d'un problème de Cauchy.

Posons $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ et $F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y' \\ 2 - ty' - (1 - t)y \end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $Y'(t) = F(t, Y(t))$ où $F\left(t, Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2 - ty_2 - (1 - t)y_1 \end{bmatrix}$ avec la condition initial $Y(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Montrer que ce problème a une seule solution.

On vérifie les hypothèse de Cauchy-Lipschitz :

- F est une fonction continue sur $I = [0; 1]$ car ses composantes sont continues.
- On étudie si F est Lipschitzienne en utilisant la norme 1 : $\|F(t, Y) - F(t, Z)\|$. On a, avec $t \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} \|F(t, Y) - F(t, Z)\| &= \left\| \begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ -t(y_2 - z_2) - (1 - t)(y_1 - z_1) \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq (1 + t)|y_2 - z_2| + |1 - t||y_1 - z_1| \leq 2\|Y - Z\|. \end{aligned}$$

Donc F est 2-Lipschitzienne. en Y .

3. Exposer la formulation de la méthode d'Euler explicite pour ce problème. Calculer, pour $h = 0.1$ la valeur approchée obtenue comme approximation de $y(0.3)$.

Soit $Y(t_n) \approx Y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$.

On a

$$— Y_0 = \begin{bmatrix} y(0.0) \\ y'(0.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (condition initiale).}$$

$$— Y_1 = \begin{bmatrix} y(0.1) \\ y'(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$— Y_2 = \begin{bmatrix} y(0.2) \\ y'(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.398 \end{bmatrix}$$

$$— Y_3 = \begin{bmatrix} y(0.3) \\ y'(0.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0598 \\ 0.58844 \end{bmatrix}$$

On trouve $y(0.3) \approx 0.0598$.

Remarque : le calcul de la deuxième composante $y'(t_3)$ de Y_3 n'est pas nécessaire. Vous pouvez appliquer le développement de Taylor à $y(t)$ à l'ordre 3 au point $t = 0$.

4. Exposer la formulation de la méthode d'Euler implicite pour ce problème.

Posons $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_{n+1}, Y_{n+1})$. On a donc

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hz_{n+1} \\ z_{n+1} = z_n + h(2 - t_{n+1}z_{n+1} - (1 - t_{n+1})y_{n+1}) \end{cases}$$

On obtient les composantes de Y_{n+1} de la résolution du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} y_{n+1} - hz_{n+1} = y_n \\ (1 - t_{n+1})hy_{n+1} + (1 + t_{n+1})hz_{n+1} = 2h + z_n \end{cases}$$

Remarque : On peut résoudre explicitement le système avec les méthodes algébriques (Cramer, Pivot de Gauss, ...) ou utiliser un algorithme (TDMA, ...) pour le résoudre à chaque itération.

En utilisant la méthode de substitution, on arrive à

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= hz_{n+1} + y_n \\ (1 - t_{n+1})h(hz_{n+1} + y_n) + (1 + t_{n+1})hz_{n+1} &= 2h + z_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= hz_{n+1} + y_n \\ (1 - t_{n+1})h^2z_{n+1} + (1 - t_{n+1})hy_n + (1 + t_{n+1})hz_{n+1} &= 2h + z_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= hz_{n+1} + y_n \\ [(1 - t_{n+1})h^2 + (1 + t_{n+1})h]z_{n+1} &= 2h + z_n - (1 - t_{n+1})hy_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= \frac{2h + z_n - (1 - t_{n+1})hy_n}{(1 - t_{n+1})h + (1 + t_{n+1})} + y_n \\ z_{n+1} &= \frac{2h + z_n - (1 - t_{n+1})hy_n}{(1 - t_{n+1})h^2 + (1 + t_{n+1})h} \end{cases} \end{aligned}$$

avec $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0) = y'(0)$.

Exercice n°4 Soit le système différentiel à deux inconnues $y(t)$ et $z(t)$ considéré sur un intervalle $[0; T]$ suivant :

$$\begin{cases} y'' - ty' + 2z &= t \\ y' + e^t y + 3z' + 2z &= 4t^2 + 1 \end{cases}$$

1. Quelles conditions initiales poser pour constituer avec ce système un problème de Cauchy ? L'exprimer sous la forme $Y' = F(t, Y)$.

On est amené à poser $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ et $F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y' \\ t + ty' - 2z \\ \frac{1}{3}(4t^2 + 1 - y' - e^t y - 2z) \end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $Y'(t) = F(t, Y(t))$ où

$$F \left(t, Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y_2 \\ t + ty_2 - 2y_3 \\ \frac{1}{3}(4t^2 + 1 - y_2 - e^t y_1 - 2y_3) \end{bmatrix}.$$

où $Y(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{bmatrix}$ est la condition initiale à imposer pour que ce système d'équations soit un problème de Cauchy.

2. Justifier que ce problème admet une seule solution.

Il suffit de vérifier les hypothèse de Cauchy-Lipschitz :

- F est une fonction de classe C^1 sur $I = [0; T]$ au voisinage de Y_0 car ses composantes sont dérivables et continues.
- On étudie si F est Lipschitzienne en utilisant la norme 1 : $\|F(t, Y) - F(t, Z)\|$. On a, avec $t \in [0; T]$,

$$\begin{aligned} \|F(t, Y) - F(t, Z)\| &= \left\| \begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ t(y_2 - z_2) - 2(y_3 - z_3) \\ \frac{1}{3}(-(y_2 - z_2) - e^t(y_1 - z_1) - 2(y_3 - z_3)) \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq |y_2 - z_2| + t|y_2 - z_2| + 2|y_3 - z_3| + \frac{1}{3}(|y_2 - z_2| + e^t|y_1 - z_1| + 2|y_3 - z_3|) \\ &\leq \frac{e^T}{3}|y_1 - z_1| + \left(\frac{4}{3} + T\right)|y_2 - z_2| + \left(2 + \frac{2}{3}\right)|y_3 - z_3| \end{aligned}$$

Prenons $k = \max \left(\frac{e^T}{3}, \frac{4}{3} + T, \frac{8}{3} \right)$, on en déduit que

$$\|F(t, Y) - F(t, Z)\| \leq k(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| + |y_3 - z_3|) = k\|Y - Z\|.$$

Par conséquent F est k -Lipschitzienne en Y .

3. Exposer le principe des méthodes d'Euler explicite et implicite pour ce système.

- Méthode d'Euler explicite (résolution d'un système linéaire que l'on pourrait expliciter avec les méthodes algébriques) :

Posons $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \\ v_n \end{bmatrix}$, le schéma s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$. On a donc

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hz_n \\ z_{n+1} &= z_n + h(t_n + t_n z_n - 2v_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{3}(4t_n^2 + 1 - z_n - e^{t_n} y_n - 2v_n) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hz_n \\ z_{n+1} &= (1 + ht_n)z_n + ht_n - 2hv_n \\ v_{n+1} &= (1 + \frac{h}{3})v_n + \frac{h}{3}(4t_n^2 + 1 - z_n - e^{t_n} y_n) \end{cases}$$

En utilisant $t_n = nh$ et les conditions initiales, on peut déterminer les valeurs du triplet $(y_{n+1}, z_{n+1}, v_{n+1})$ pour différentes valeurs de n et de h .

— Méthode d'Euler explicite (Plusieurs opérations algébriques pour expliciter Y_{n+1}) : Posons

$Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_{n+1}, Y_{n+1})$. On a donc

$$(S) \begin{cases} y_{n+1} &= y_n + h z_{n+1} \\ z_{n+1} &= z_n + h(t_{n+1} + t_{n+1} z_{n+1} - 2v_{n+1}) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{3} (4t_{n+1}^2 + 1 - z_{n+1} - e^{t_{n+1}} y_{n+1} - 2v_{n+1}) \end{cases}$$

En réarrangeant le triplet $(y_{n+1}, z_{n+1}, v_{n+1})$, les composantes de Y_{n+1} s'écrivent ainsi :

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} y_{n+1} - h z_{n+1} &= y_n \\ (1 - h t_{n+1}) z_{n+1} + 2h v_{n+1} &= z_n + h t_{n+1} \\ \frac{h e^{t_{n+1}}}{3} y_{n+1} + \frac{h}{3} z_{n+1} + \left(1 + \frac{2}{3} h\right) v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{3} (4t_{n+1}^2 + 1) \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ 0 & (1 - h t_{n+1}) & 2h \\ \frac{h e^{t_{n+1}}}{3} & \frac{h}{3} & \left(1 + \frac{2}{3} h\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n + h t_{n+1} \\ v_n + \frac{h}{3} (4t_{n+1}^2 + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant la méthode du Pivot de Gauss ou système de Cramer (déterminant non nul), on trouve facilement les valeurs de $(y_{n+1}, z_{n+1}, v_{n+1})$ en fonction (y_n, z_n, v_n) .