

Exercice n°1

1. Déterminer par la méthode des rectangles à droite puis celle des trapèzes la valeur de $I = \int_0^{1/2} f(x)dx$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1	1.1051709	1.2214027	1.3498588	1.4918246	1.6487212

- **Rappel :** Pour tout cet exercice, découpons $[a; b]$ en sous-intervalles à pas constant h ($h \in \mathbb{R}^{*+}$), notés $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi

$$x_0 = a; x_N = b; \forall i \in \{0, \dots, N-1\} : x_{i+1} - x_i = h.$$

d'où $h = \frac{b-a}{N}$. Par suite pour tout i de $\{0, \dots, N\} : x_i = a + ih$.

- L'approximation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par la formule des rectangles (à gauche et à droite) est

$$I_{RG}(f) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i); \quad I_{RD}(f) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1}) = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1})$$

Avec les valeurs de l'énoncé on a $a = 0, b = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{b-a}{x_{i+1}-x_i} = \frac{1/2-0}{0.1} = 5$, on obtient

$$\begin{aligned} I_{RG}(f) &\approx 0.1 (f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)) \\ &\approx 0.1 (1 + 1.1051709 + 1.2214027 + 1.3498588 + 1.4918246) \approx 0.61147951 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{RD}(f) &\approx 0.1 (f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5)) \\ &\approx 0.1 (1.1051709 + 1.2214027 + 1.3498588 + 1.4918246 + 1.6487212) \approx 0.67635763 \end{aligned}$$

- L'approximation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par la formule des trapèzes est

$$I_T(f) \approx \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right] = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right]$$

Avec les valeurs de l'énoncé on a $a = 0, b = \frac{1}{2}$ et $N = \frac{b-a}{h} = \frac{1/2-0}{0.1} = 5$, on obtient

$$\begin{aligned} I_T(f) &\approx \frac{1/2-0}{5} \left[\frac{f(0) + f(0.5)}{2} + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) \right] \\ &\approx 0.1 \left[\frac{1 + 1.6487212}{2} + 1.1051709 + 1.2214027 + 1.3498588 + 1.4918246 \right] \approx 0.64926176. \end{aligned}$$

2. Ces points sont ceux donnant $f(x) = e^x$. Comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte. On

$$I_{Exact} = \int_0^{1/2} e^x dx = [e^x]_0^{1/2} = e^{1/2} - 1 \approx 0.68472127. \text{ L'erreur réelle commise est ainsi égale à}$$

$$|I_{Exact} - I_{RD}| = |0.68472127 - 0.67635763| = 0.02763503,$$

$$|I_{Exact} - I_{RG}| = |0.68472127 - 0.61147951| = 0.03724176,$$

$$|I_{Exact} - I_T| = |0.68472127 - 0.64926176| = 0.00054049.$$

Remarques :

- L'erreur commise par la formule des rectangles composite est

$$E_N^R = \frac{(b-a)^2}{2N} f'(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

On peut écrire aussi $E_N^R \leq \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$. Pour se faire, il faut vérifier que f est de classe C^1 sur $[0; 1/2]$, $x \mapsto e^x$ est une fonction de classe C^∞ et $f'(x) = e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ étant croissante, donc

$$E_N^R \leq \frac{(1/2 - 0)^2}{2 \times 5} e^{1/2} = \frac{e^{1/2}}{40} \approx 0.04121803177.$$

- L'erreur commise par la formule des trapèzes est $E_N^T = \frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$. On peut écrire aussi $E_N^T \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

On a $f''(x) = e^x$ et croissante sur $[0; 1/2]$, donc $E_N^T \leq \frac{(1/2-0)^3}{12 \times 5^2} e^{1/2} = \frac{e^{1/2}}{2400} \approx 6.869672 \cdot 10^{-4}$

Exercice n°2 (partiel du 09 avril 2018) Voici le relevé de la vitesse d'écoulement de l'eau v dans un conduit cylindrique en fonction du temps t :

$t(s)$	0	10	20	30	40	50	60
$v(m/s)$	2	1.98	1.7	1.44	1.32	1.20	1.02

La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans le conduit cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$\bar{v} = v_{moy} = \frac{1}{60} \int_0^{60} v(t) dt.$$

1. Calculer la vitesse moyenne de l'eau v_{moy} par la méthode des rectangles à droite.

— On applique la méthode des rectangles à droite avec $a = 0$, $b = 60$ et $N = \frac{b-a}{h} = \frac{60-0}{10} = 6$. D'où

$$\begin{aligned} \bar{v}_{RD} &\approx \frac{1}{60} \times 10 (v(10) + v(20) + v(30) + v(40) + v(50) + v(60)) \\ &\approx \frac{1}{6} (1.98 + 1.7 + 1.44 + 1.32 + 1.20 + 1.02) \approx 1.113498333 m/s. \end{aligned}$$

2. Calculer la vitesse moyenne de l'eau v_{moy} par la méthode des trapèzes.

— On applique la méthode des trapèzes avec $a = 0$, $b = 60$ et $N = \frac{b-a}{h} = \frac{b-a}{t_{i+1}-t_i} = \frac{60-0}{10} = 6$.
D'où

$$\begin{aligned}\bar{v}_T &\approx \frac{1}{60} \times 10 \left(\frac{v(0) + v(60)}{2} + v(10) + v(20) + v(30) + v(40) + v(50) \right) \\ &\approx \frac{1}{6} \left(\frac{2 + 1.02}{2} + 1.98 + 1.7 + 1.44 + 1.32 + 1.20 \right) \approx 1.113498333 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

3. Peut-on déterminer la vitesse moyenne de l'eau v_{moy} par la méthode de Simpson ? Justifier rigoureusement votre réponse. Oui, il suffit d'appliquer cette méthode avec $a = 0$, $b = 60$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+2}]$. On a $h = \frac{b-a}{N} = 10$ donc $N = 6$.

$$\begin{aligned}\bar{v}_S &\approx \frac{1}{60} \times \frac{b-a}{6N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[v(t_i) + 4v\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) + v(t_{i+1}) \right] \\ &\approx \frac{1}{60} \times \frac{b-a}{6N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[v(a + ih) + 4f\left(a + h\left(i + \frac{1}{2}\right)\right) + v(a + (i+1)h) \right] \\ &\approx \frac{1}{60} \times \frac{h}{3} \left[v(a) + v(b) + 4 \sum_{i=1, i \text{ impair}}^{N-1} v(t_i) + 2 \sum_{i=2, i \text{ pair}}^{N-2} v(t_i) \right] \\ &\approx \frac{1}{60} \times \frac{h}{3} \left[v(a) + v(b) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} v(t_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} v(t_{2i}) \right]\end{aligned}$$

Numériquement, on a

$$\begin{aligned}\bar{v}_S &\approx \frac{1}{60} \times \frac{10}{3} [v(0) + v(60) + 4(v(10) + v(30) + v(50)) + 2(v(20) + v(40))] \\ &\approx \frac{1}{18} [2 + 1.02 + 4(1.98 + 1.44 + 1.20) + 2(1.7 + 1.32)] \approx 1.53 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

Exercice n°3 On souhaite déterminer une valeur approchée de $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en $N = 10$ sous-intervalles.

1. Majorer l'erreur commise en utilisant les différentes méthodes usuelles (rectangle à gauche, rectangle à droite, point milieu, trapèzes, Simpson). Pour répondre à cette question, on commence d'abord par donner la formule d'erreur associée à chaque méthode d'approximation. Ensuite, on vérifie que la fonction f est de classe C^2 . Enfin, on majore la valeur absolue de $f'(\xi)$, $f''(\xi)$ et $f^{(4)}(\xi)$ par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondante. La $x \mapsto e^{-x^2}$ est de classe C^∞ sur $[0; 1]$. On a donc

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}; f^{(2)}(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}; f^{(3)}(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2}; f^{(4)}(x) = (12 - 48x^2 + 16x^4)e^{-x^2}$$

Pour $\xi \in [0; 1]$, on a :

— L'erreur de la méthode des rectangles à droite est $E_{RD} = \frac{(b-a)^2}{2N} f'(\xi)$, c-à-d : $E_{RD} \leq \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$. Nous avons le choix entre deux méthodes :

— 1ère méthode : on utilise le tableau de variation pour trouver le maximum de f' . Pour se faire, on calcule $f''(x)$ puis on dresse son tableau de variation. On a $f^{(2)}(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0$, nous donne $2x^2 - 1 = 0$, d'où $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	∞
$f^{(2)}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$					

Comme $x \in [0; 1]$, on en déduit que $|f'|$ admet un maximum en $x = 1$ et $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| = |f'(1)| = 2e^{-1}$. Par conséquent

$$|E_{RD}| \leq \frac{(1-0)^2}{2 \times 10} \times 2e^{-1} = 0.1e^{-1} \approx 0.03787944.$$

Remarque : nous pouvons aussi prendre le maximum de la fonction $|f'|$ au point $\sqrt{2}/2$ en utilisant sa convexité.

- On majore directement la fonction $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ pour $x \in [0; 1]$. Si bien que $|f'(x)| \leq 2|x|e^{-x^2} \leq 2e^{-x^2}$. Par combinaison de la croissance de la fonction exponentielle et $0 \leq x \leq 1$, on a $-1 \leq -x^2 \leq 0$, donc $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^{-0^2} = 1$. Soit donc $|f'(x)| \leq 2$. Par conséquent :

$$|E_{RD}| \leq \frac{(1-0)^2}{2 \times 10} \times 2 = 0.1.$$

Mais, cette erreur est grossière et nous ne permet de prendre des décisions.

- L'erreur de la méthode des rectangles à gauche est $E_{RG} = \frac{(b-a)^2}{2N} f'(\xi)$, c-à-d : $|E_{RD}| \leq \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$.
- L'erreur de la méthode du point milieu est $E_{PM} = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\xi)$, c-à-d : $|E_{PM}| \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$.
- L'erreur de la méthode des trapèzes est $E_T = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$, c-à-d : $|E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)|$.
- L'erreur de la méthode de Simpson est $E_S = -\frac{(b-a)^5}{90 \times 2^5 N^4} f^{(4)}(\xi)$, c-à-d : $|E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{90 \times 2^5 N^4} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f^{(4)}(x)|$.

Remarques :

- Pour majorer grossièrement l'erreur et avoir une idée sur le nombre de subdivision à utiliser, nous pouvons appliquer le changement de convexité en utilisant les relations : $|a+b| \leq |a|+|b|$ et/ou $||a|-|b|| \leq |a-b|$.
- Pour un choix judicieux du nombre de subdivision N afin de minimiser l'erreur commise par la méthode d'approximation, on le maximum de la fonction mise en jeu dans l'erreur théorique de la méthode via le tableau de variation.
- Proposer une approche permettant de déterminer une valeur approchée de I à 10^{-10} près. (On pourra envisager une autre valeur de N).
voir l'exercice 4 où $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice n°4 On rappelle que l'erreur commise par la méthode des trapèzes pour une fonction

f de classe $C^2([a; b])$ est majorée ainsi :

$$|I(f, a, b) - I_N(f, a, b)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Combien faut-il de subdivisions de $[0; 1]$ pour évaluer l'intégrale $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$ à 10^{-6} près ?

- Il s'agit ici de déterminer le nombre de points minimum pour satisfaire la tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$ donnée. Pour se faire, on vérifie d'abord que la fonction f est de classe C^2 , puis on majore la valeur absolue de $f''(\xi)$ par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondante. f est de classe C^2 car c'est le produit de fonction de classe C^2 sur $[a; b]$. On a $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x e^{-x}$ pour $x \in [0; 1]$. Alors :

$$f'(x) = e^{-x}(1-x); \quad f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

- 1ère méthode : on dresse le tableau de variation de la fonction f'' en calculant $f^{(3)}$ et on cherche ses racines ($f^{(3)}(x) = 0$). On a $f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x} = 0$, donne $x = 3$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	$+$	0	$-$
$f^{(2)}(x)$		e^{-3}	$-2e^{-1}$

Or $x \in [0; 1]$, donc $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f^{(2)}(x)| \leq e^{-3}$. Par conséquent :

$$|I(f, 0, 1) - I_N(f, 0, 1)| \leq e^{-3} \frac{(1-0)^3}{12N^2} \leq \varepsilon.$$

Soit $N^2 \geq \frac{e^{-3}}{12\varepsilon}$, si bien que $N \geq \sqrt{\frac{e^{-3}}{12\varepsilon}}$. il suffit donc de choisir $N = \lfloor \sqrt{\frac{3}{12\varepsilon}} \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ est le plus petit entier supérieur ou égal X .

Numériquement, on a donc en utilisant $\varepsilon = 10^{-6}$. On trouve $N = \lfloor \sqrt{\frac{e^{-3}}{12 \times 10^{-6}}} \rfloor = \lfloor 64.41 \rfloor \approx 65$.

- **2ème méthode** : La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant croissante sur $[0; 1]$, on a sur $[0; 1]$: $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0} = 1$.

Sur $[0; 1]$, on a également $|x-2| \leq |x| + 2 \leq 3$. Donc $|f''(x)| \leq 3$ pour $x \in [0; 1]$. Avec $a = 0$, $b = 1$ et $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1}{n}$, on trouve finalement

$$|I(f, 0, 1) - I_N(f, 0, 1)| \leq 3 \frac{(1-0)^3}{12N^2} \leq \varepsilon.$$

Soit $N^2 \geq \frac{3}{12\varepsilon}$. Soit encore, $N \geq \sqrt{\frac{3}{12\varepsilon}}$. Par conséquent, il suffit donc de choisir $N = \lfloor \sqrt{\frac{3}{12\varepsilon}} \rfloor$. Numériquement, on a donc, en utilisant $\varepsilon = 10^{-6}$,

$$N = \lfloor \sqrt{\frac{3}{12 \times 10^{-6}}} \rfloor = \lfloor 500 \rfloor = 500.$$

Exercice n°5 On considère f une fonction de classe C^2 sur un intervalle $J = [a; b]$, que l'on subdivise en N sous-intervalles. On note respectivement I_{RG} , I_{RD} , I_T , I_{PM} , I_S les approximations données par les méthodes usuelles (rectangles à gauche, rectangle à droite, trapèzes, point milieu, Simpson) de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$.

- (a) Montrer que $I_T = \frac{I_{RD} + I_{RG}}{2}$. Pour démontrer ce résultat, on découpe l'intervalle $[a; b]$ en N sous intervalles de même longueur $\frac{b-a}{N} : [x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{N-1}, x_N]$ avec $x_0 = a$ et $x_N = b$. On a par la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

La méthode des trapèzes consiste à remplacer ces n intégrales par la somme suivante : (correspondant à la somme des aires algébriques des trapèzes de hauteur $(x_{i+1} - x_i)$ et de bases $f(x_{i+1})$ et $f(x_i)$).

$$\begin{aligned} I_T(f) &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i))}{2} \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \frac{(f(x_{i+1}) + f(x_i))}{2} \\ &\approx \frac{b-a}{N} \left[\frac{f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)}{2} \right] = \frac{I_{RG}(f) + I_{RD}(f)}{2} \end{aligned}$$

On dit que la méthode des trapèzes est une combinaison linéaire des méthodes des rectangles à droite et à gauche.

- (b) Exprimer I_S en fonction de I_{PM} et I_T . On utilise la même démarche de la question 1., on a

$$\begin{aligned} 3I_S(f) &\approx \frac{b-a}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right] \\ &\approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + \frac{b-a}{2N} \sum_{i=0}^{N-1} 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \approx I_T(f) + 2I_{PM}(f) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_S(f) = \frac{I_T(f) + 2I_{PM}(f)}{3}.$$

On dit alors que la méthode de Simpson est une combinaison linéaire de la méthode des trapèzes et du point milieu,

- (c) Lorsque l'on connaît $I_{RG}(f)$ comment calculer rapidement $I_{RT}(f)$? En utilisant l'expression de $I_{RG}(f)$ et celle de $I_{RD}(f)$, on obtient la relation suivante :

$$I_{RD}(f) = I_{RG}(f) + \frac{b-a}{N} [f(b) - f(a)].$$

- (d) On suppose que f est une fonction croissante. Montrer que l'on a les inégalités $I_{RG}(f) \leq I_T(f) \leq I_{RD}(f)$. En utilisant la croissance de f sur $[a; b]$, on obtient $f(a) \leq f(b)$. D'où $\frac{b-a}{N} [f(b) - f(a)] \leq 0$. Par conséquent

$$I_{RD}(f) \geq I_{RG}(f).$$

En utilisant $I_T(f) = \frac{I_{RG}(f) + I_{RD}(f)}{2}$, il vient que

$$I_{RG}(f) = \frac{I_{RG}(f) + I_{RG}(f)}{2} \leq I_T(f) = \frac{I_{RG}(f) + I_{RD}(f)}{2} \leq \frac{I_{RD}(f) + I_{RD}(f)}{2} = I_{RD}(f). \quad (CQFD)$$

- (e) On suppose maintenant que f est une fonction convexe. Montrer que $I_{PM}(f) \leq I(f) \leq I_T(f)$.

On dit que f est convexe s'il existe $t \in [0; 1]$ tel que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Par définition, on a $I_{PM}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$. Pour $t = \frac{1}{2}$ et f convexe, il vient que

$$\begin{aligned} I_{PM}(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &\leq \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \\ &\leq \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \leq I_T(f) \end{aligned}$$

Par combinaison de $I_{PM}(f) = \frac{I_{PM}(f) + 2I_{PM}}{3}$, et $I_{PM}(f) \leq I_T(f)$ on aboutit à $I_{PM}(f) \leq \frac{I_T(f) + 2I_{PM}}{3} = I_S(f) = I \leq \frac{I_T(f) + 2I_T}{3} = I_T(f)$.

Exercice n°6 (travail personnel)

- (a) Déterminer par la méthode des rectangles à gauche et à droite puis celle des trapèzes la valeur de

$$I = \int_0^{1/2} f(x) dx$$

sur la base des valeurs données dans le tableau suivant :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0	0.0993346	0.1947091	0.2823212	0.3586780	0.4207354

- méthode des rectangles à gauche : en utilisant la définition avec $a = 0$, $b = 1/2$, $N = 5$ et $h = \frac{b-a}{N} = 0.1$ (ici le pas h est uniforme), on a

$$\begin{aligned} I_{RG} &= \frac{b-a}{N} (f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)) \\ &= \frac{0.5-0}{5} (0 + 0.0993346 + 0.1947091 + 0.2823212 + 0.3586780) \approx 0.09350429. \end{aligned}$$

- méthode des rectangles à droite : en utilisant la définition avec $a = 0$, $b = 1/2$, $N = 5$ et $h = \frac{b-a}{N} = 0.1$ (ici le pas h est uniforme), on a

$$\begin{aligned} I_{RD} &= \frac{b-a}{N} (f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5)) \\ &= \frac{0.5-0}{5} (0.0993346 + 0.1947091 + 0.2823212 + 0.3586780) \approx 0.09350429 + 0.4207354 \approx 0.5142397 \end{aligned}$$

- méthode des trapèze : en utilisant la définition avec $a = 0$, $b = 1/2$, $N = 5$ et $h = \frac{b-a}{N} = 0.1$ (ici le pas h est uniforme), on a

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(0) + f(0.5)}{2} + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) \right) \\ &= \frac{0.5-0}{5} \left(\frac{0 + 0.4207354}{2} + 0.0993346 + 0.1947091 + 0.2823212 + 0.3586780 \right) \approx 0.09350429 \end{aligned}$$

- (b) Ces points sont ceux donnant $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. Comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte. Conclure.

Par un calcul simple, on gets

$$I_{exact} = \int_0^{1/2} f(x) dx = \int_0^{1/2} \sin(x) \cos(x) dx = \left[\frac{1}{2} \sin^2(x) \right]_0^{1/2} = 0.5 \times \sin^2\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.11492442$$

Pour conclure, il suffit de comparer les valeurs approchées d'intégrale à la valeur exacte en utilisant l'erreur absolue. On a ainsi

- $|I_{exact} - I_{RG}| = |0.11492442 - 0.09350429| = 0.02142013$.
- $|I_{exact} - I_{RD}| = |0.11492442 - 0.13557783| = 0.02065341$.
- $|I_{exact} - I_T| = |0.11492442 - 0.11454106| = 0.00038336$.

En comparant les erreurs, on en déduit que la méthode des trapèzes est la meilleure méthode pour approcher l'intégrale I .

Exercice n°7 (travail personnel) Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx$$

et la comparer avec sa valeur exacte. Pour cela, on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en $N = 10$ sous-intervalle de même longueur.

- (a) Calculer la valeur du pas h .

Posons $a = 0$, $b = 1$ et $N = 10$, on a $h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{10} = 0.1$.

- (b) Donner la valeur exacte de l'intégrale I .

Pour calculer I , on répète l'intégration par parties 3 fois en utilisant respectivement les fonctions : $u_1(x) = x^3$, $u_2(x) = x^2$, $u_3(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, on arrive à

$$\begin{aligned} I &= \left[-x^3 e^{-x} \right]_0^1 + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -e^{-1} + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + 3 \left[-x^2 e^{-x} \right]_0^1 + 6 \int_0^1 x e^{-x} dx = -e^{-1} - 3e^{-1} + 6 \int_0^1 x e^{-x} dx = -4e^{-1} + 6 \int_0^1 x e^{-x} dx \\ &= -4e^{-1} + 6 \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + 6 \int_0^1 e^{-x} dx = -10e^{-1} + 6 \int_0^1 e^{-x} dx = -11e^{-1} + 6 \approx 1.95332615. \end{aligned}$$

- (c) i. Calculer I par la méthode des rectangles à gauche.

En utilisant la subdivision de cours avec les notations $x_0 = a = 0$, $x_{10} = b = 1$, $x_i = x_0 + i \times h = i \times h$ avec $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ et $h = 0.1$ (voir la question 1) et $f(x) = x^3 e^{-x}$, on a par définition :

$$I_{RG} = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^9 f(x_i) = 0.1 (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_9))$$

Il suffit de calculer les valeurs de $f(x_i) = f(i \times h) = f(i \times 0.1)$ en remplaçant f par son expression $f(x) = x^3 e^{-x}$.

- ii. Calculer I par la méthode des rectangles du point milieu.

En utilisant la subdivision de cours avec les notations $x_0 = a = 0$, $x_{10} = b = 1$, $x_i = x_0 + i \times h = i \times h$ avec $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ et $h = 0.1$ (voir la question 1) et $f(x) = x^3 e^{-x}$, on a par définition :

$$I_{RD} = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{10} f(x_i) = 0.1 (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{10}))$$

Il suffit de calculer les valeurs de $f(x_i) = f(i \times h) = f(i \times 0.1)$ en remplaçant f par son expression $f(x) = x^3 e^{-x}$.

- iii. Calculer I par la méthode des trapèzes.

En utilisant la subdivision de cours avec les notations $x_0 = a = 0$, $x_{10} = b = 1$, $x_i = x_0 + i \times h = i \times h$ avec $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ et $h = 0.1$ (voir la question 1) et $f(x) = x^3 e^{-x}$, on a par définition :

$$I_T = \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(x_0) + f(x_{10})}{2} + \sum_{i=1}^9 f(x_i) \right) = 0.1 \left(\frac{f(x_0) + f(x_{10})}{2} f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_9) \right)$$

Il suffit de calculer les valeurs de $f(x_i) = f(i \times h) = f(i \times 0.1)$ en remplaçant f par son expression $f(x) = x^3 e^{-x}$.

- (d) Déterminer numériquement l'erreur relative commise par chaque méthode. Conclure.

Il s'agit ici de calculer l'erreur relative associée à chaque méthode d'approximation ;

— Méthode des rectangles à gauche : $\frac{|I_{exact} - I_{RG}|}{|I_{exact}|} =$.

— Méthode des rectangles à droite : $\frac{|I_{exact} - I_{RD}|}{|I_{exact}|} =$.

— Méthode des trapèzes : $\frac{|I_{exact} - I_T|}{|I_{exact}|} =$.

Ensuite, comparer ces erreurs et prendre une décision sur la méthode à choisir pour l'approximation d'intégrale.