Examen de rattrapage - Ma212, session de juillet 2021
Durée : 2 heures **Prof.** H. El-Otmany

***Règlement :** Documents écrits, électroniques, calculatrices programmées et téléphones portables interdits. Soignez votre rédaction. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve). Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif.*
****

Questions de cours *[4 points, 15 min]* Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. L'intégrale double de $f(x,y) = (x-y)^{25}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geqslant x^2,\ x \geqslant y^2\}$ est nulle.
2. La longueur d'une fonction réelle $f(x) = x^2$ entre 0 et 10 est $\displaystyle\int_0^{10} \sqrt{1+4t^2}dt$.
3. Toute 1-forme différentielle fermée définie sur un ouvert U est une forme exacte.
4. Une surface fermée S de $\mathbb{R}^3$ est une forme géométrique ayant un bord ∂S non vide.

Exercice n°1 *[4 points, 25 min]* Soit l'intégrale $I = \iint_D xydxdy$ où

$$D = \{(x,y) \in [0,1]^2 :\ 0 \leqslant 3xy \leqslant 1,\ 2x > y^2\}.$$

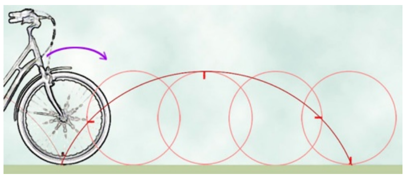
1. Représenter graphiquement la région D et calculer son aire.
2. Calculer I.

Exercice n°2 *[5 points, 35 min]* Soit ω une 1-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega(x,y) = (y-x)dx + xdy.$$

1. Vérifier que ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que ω est fermée.
3. En déduire que ω est exacte.
4. Déterminer une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice n°3 *[7 points, 45 min]*
On souhaite déterminer la trajectoire de la valve M d'une roue d'un vélo lorsque la roue du vélo avance sans glisser sur un sol plat. On choisit le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Avec t le temps, $t = 0$ lorsque le point M est en l'origine O, la position de la valve M est donnée par les fonctions coordonnées :



Source : www.icem-pedagogie-freinet.org/image/tid/1396.

$$x(t) = 3(t - \sin t), \quad y(t) = 3(1 - \cos t).$$

1. Déterminer le domaine de définition et l'intervalle de réduction.
2. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y.
3. Donner la position de la valve M aux instants $t = 0, \pi$, puis déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe à chaque point.
4. La courbe admet-elle des branches infinies ? Si oui, préciser leur natures.
5. Tracer la trajectoire de la valve M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en respectant les résultats trouvés dans les questions précédentes.
6. Calculer la longueur de la courbe entre $t = -\pi$ et $t = \pi$.

FIN D'ÉPREUVE.