

Exercice n°1 Dans ce TD, on va étudier les propriétés des schémas présentés dans le chapitre sur l'équation d'advection (EDP).

$$(EDP) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+, \\ u(x+1, t) = u(x, t) & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, 1] \end{cases}$$

où V est un réel non nul représentant la vitesse d'un écoulement par exemple.

1 Etude du schéma implicite centré

1. Montrer que le schéma implicite centré est consistant, précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

On reprend dans un premier temps la même discrétisation avec $h = \frac{1}{N+1}$ et τ le pas de temps. On note u_j^n la valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ avec $x_j = jh$ et $t_n = n\tau$. Le schéma implicite centré de l'EDP s'écrit ainsi

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N-1$$

Pour montrer que ce schéma est consistant, on écrit le développement en série de Taylor en fonction de $u_j^{n+1} \approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_{n+1}) = (jh, (n+1)\tau)$:

$$u_j^n = u_j^{n+1} - \frac{\tau}{1!} \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau^2),$$

d'où

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau).$$

De même, on a les développements en série de Taylor en fonction de $u_j^{n+1} \approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_{n+1}) = (jh, (n+1)\tau)$:

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} &= u_j^{n+1} + \frac{h}{1!} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(h^3), \\ u_{j-1}^{n+1} &= u_j^{n+1} - \frac{h}{1!} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{n+1}) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(h^3), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(h^2).$$

En reportant ces développements dans l'équation aux différences finies, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+1}) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) \\ &\quad + V \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+1}) + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) \right) + o(\tau + h^2). \end{aligned}$$

De l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, il vient que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + V \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau + h^2).$$

On peut donc écrire l'erreur de troncature sous la forme

$$E_j^n = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_{n+1}) + V \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t_{n+1}) + o(\tau + h^2).$$

Pour obtenir la condition permettant d'annuler les premiers termes dans la relation précédente, qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, on dérive l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ par rapport à t et on permute les dérivées en t et x (Ici V est une constante) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C := \max \left(\frac{1}{2} \sup_{x,t} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \frac{V^3}{6} \sup_{x,t} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \right)$ telle que

$$|E_j^n| \leq C(\tau + h^2).$$

Par passage à la limite $\tau \rightarrow 0$ et $h \rightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0. Le schéma numérique est ainsi consistant à l'EDP et l'erreur de troncature est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'erreur est en $o(\tau + h^2)$.)

2. Montrer que le schéma centré implicite est inconditionnellement stable en norme L^2 .

On utilise la transformée de Fourier définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

qui permet de retrouver facilement le résultat de stabilité du schéma numérique en calculant l'énergie du système à chaque pas de temps.

On multiplie le schéma numérique par $e^{-i\xi x}$ et on intègre sur $[0, 1]$ pour obtenir la transformée de Fourier en espace uniquement :

$$\int_0^1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} e^{-i\xi x} dx + \int_0^1 V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} e^{-i\xi x} dx = 0. \quad (1)$$

En notant $u_{j+1}^n = u(x_j + h)$ (où u est une fonction périodique de période 1), les coefficients de u_{j+1}^n :

$$\hat{u}_{j+1}^n(\xi) = \int_0^1 u(x_j + h) e^{-i\xi x_j} dx = \int_h^{1+h} u(y) e^{-i\xi(y-h)} dy = e^{i\xi h} \int_0^1 u(y) e^{-i\xi y} dy = e^{i\xi h} \hat{u}_j^{n+1}.$$

De même, on a $\hat{u}_{j-1}^n(\xi) = e^{-i\xi h} \hat{u}_j^{n+1}$. La relation (1) se traduit donc par

$$\frac{\hat{u}_j^{n+1}(\xi) - \hat{u}_j^n(\xi)}{\tau} + V \frac{e^{i\xi h} \hat{u}_j^{n+1} - e^{-i\xi h} \hat{u}_j^{n+1}}{2h} = 0$$

Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, on a donc

$$\begin{aligned} \left(1 + \alpha \frac{e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}}{2}\right) \hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_j^n &= 0, \\ (1 + i\alpha \sin(\xi h)) \hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_j^n &= 0, \\ \hat{u}_j^{n+1} &= \frac{1}{1 + i\alpha \sin(\xi h)} \hat{u}_j^n = g(\alpha, \xi h) \hat{u}_j^n \end{aligned}$$

Rappel : On rappelle qu'un schéma numérique est stable au sens de Von Neumann si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, le coefficient d'amplification $g(\cdot, \cdot)$ vérifie $|g(\alpha, \xi h)| \leq 1$.

On rappelle aussi l'égalité Parseval sur $[0, 1]$ qui donne la conservation de l'énergie par transformée de Fourier :

$$\|u^n\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \int_0^1 |\hat{u}^n(x)|^2 dx.$$

Comme l'énergie d'un système libre (pas de source de chaleur) ne pouvant pas croître, donc l'énergie ne peut que baisser avec le temps, on a ainsi

$$\int_0^1 |u^{n+1}(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u^n(x)|^2 dx,$$

ou de manière équivalente :

$$\int_0^1 |\hat{u}^{n+1}(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |\hat{u}^n(x)|^2 dx.$$

Ceci est vérifié si le coefficient d'amplification du schéma numérique $|g(\alpha, \xi h)| = \left| \frac{1}{1 + iV \frac{\tau}{h} \sin(\xi h)} \right| \leq 1$. Par conséquent, le schéma pour l'équation d'advection est inconditionnellement stable car il n'y a pas de condition de stabilité sur le pas de temps τ . Mais τ doit être en accord avec le phénomène étudié.

3. Exprimer matriciellement le schéma implicite centré pour l'équation d'advection.

On rappelle le schéma implicite centré pour l'équation d'advection

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, Ce schéma s'écrit ainsi

$$-\frac{\alpha}{2} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_{j+1}^{n+1} = u_j^n.$$

- Pour $j = 1$, on a $u_1^n = -\frac{\alpha}{2} u_0^{n+1} + u_1^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_2^{n+1} = u_1^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_2^{n+1} - \frac{\alpha}{2} u_N^{n+1}$.
- Pour $j = N$, on a $u_N^n = -\frac{\alpha}{2} u_{N-1}^{n+1} + u_N^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_{N+1}^{n+1} = \frac{\alpha}{2} u_1^{n+1} - \frac{\alpha}{2} u_{N-1}^{n+1} + u_N^{n+1}$.
- Pour $2 \leq j \leq N-1$, on a $u_j^n = -\frac{\alpha}{2} u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2} u_{j+1}^{n+1}$.

Par conséquent, on a une formulation matricielle $M(\alpha)U^{n+1} = U^n$ où

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\frac{\alpha}{2} & 1 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2 Etude du schéma de Lax-Friedrichs

1. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs, pour l'équation de l'advection, est stable en norme L^2 sous la condition CFL : $|V|\tau \leq h$.

La schéma explicite de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection (EDP) s'écrit

$$\frac{2u_j^{n+1} - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

En utilisant la même démarche du paragraphe précédent (stabilité de Von Neumann), on a

$$\begin{aligned} \frac{2\hat{u}_j^{n+1}(\xi) - e^{i\xi h}\hat{u}_j^n - e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n}{2\tau} + V \frac{e^{i\xi h}\hat{u}_j^n - e^{-i\xi h}\hat{u}_j^n}{2h} &= 0 \\ 2\hat{u}_j^{n+1}(\xi) &= \left[e^{i\xi h} + e^{-i\xi h} - V \frac{\tau}{h} (e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}) \right] \hat{u}_j^n \\ 2\hat{u}_j^{n+1}(\xi) &= \left[2 \cos(\xi h) - 2iV \frac{\tau}{h} \sin(\xi h) \right] \hat{u}_j^n \\ \hat{u}_j^{n+1}(\xi) &= \left[\cos(\xi h) - iV \frac{\tau}{h} \sin(\xi h) \right] \hat{u}_j^n \end{aligned}$$

Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, on a

$$|g(\alpha, \xi h)| = \sqrt{\cos^2(\xi h) + \alpha^2 \sin^2(\xi h)}.$$

Le schéma est ainsi stable si et seulement si $|g(\alpha, \xi h)| \leq 1 \iff |\alpha| \leq 1 \iff |V|\tau \leq h$. Par contre, si $|\alpha| > 1$, alors le schéma est instable car on peut avoir $|g(\alpha, \xi h)| = |\alpha| > 1$ pour au moins $\xi h = \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer que le schéma de Lax-Friedrichs vérifie le PMD sous CFL : $|V|\tau \leq h$.

On réécrit le schéma de Lax-Friedrichs pour l'équation d'advection avec $\alpha = V \frac{\tau}{h}$:

$$u_j^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n + \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

Si $|\alpha| \leq 1$, on a $\frac{1+\alpha}{2} \geq 0$ et $\frac{1-\alpha}{2} \geq 0$. Alors, u_j^{n+1} est une combinaison convexe de u_{j-1}^n et u_{j+1}^n (car $\frac{1+\alpha}{2} + \frac{1-\alpha}{2} = 1$).

Si pour tout j , il existe m et M tels que $m \leq u_j^n \leq M$, alors on a aussi

$$\forall j, \quad m \leq u_j^{n+1} \leq M.$$

Et de proche en proche, on arrivera au principe du maximum discret

$$\forall j, \forall n, \quad \min(u_j^0) \leq u_j^n \leq \max(u_j^0).$$

Ainsi, le schéma est inconditionnellement stable en norme L^∞ .

3. Exprimer matriciellement ce schéma

Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$. Le schéma implicite centré pour l'équation d'advection s'écrit ainsi

$$u_j^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n + \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n.$$

— Pour $j = 1$, on a $u_1^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2} u_0^n + \frac{1-\alpha}{2} u_2^n = \frac{1-\alpha}{2} u_2^n + \frac{1+\alpha}{2} u_N^n$.

— Pour $j = N$, on a $u_N^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2} u_{N-1}^n + \frac{1-\alpha}{2} u_{N+1}^n = \frac{1-\alpha}{2} u_1^n + \frac{1+\alpha}{2} u_{N-1}^n$.

— Pour $j \in \{2, \dots, N-1\}$, on a $u_j^{n+1} = \frac{1+\alpha}{2} u_{j-1}^n + \frac{1-\alpha}{2} u_{j+1}^n$.

Par conséquent, on a une formulation matricielle $U^{n+1} = M_{LF}(\alpha) U^n$ où

$$M_{LF}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\alpha}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1+\alpha}{2} \\ \frac{1+\alpha}{2} & 0 & \frac{1-\alpha}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1+\alpha}{2} & 0 & \frac{1-\alpha}{2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1+\alpha}{2} & 0 & \frac{1-\alpha}{2} \\ \frac{1-\alpha}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1+\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3 Etude du schéma de Lax-Wendroff

1. Montrer que le schéma de Lax-Wendroff est stable en norme L^2 sous une condition CFL à expliciter.

La schéma explicite de Lax-Wendroff pour l'équation d'advection (EDP) s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{V^2 \tau}{2} \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} = 0, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N-1.$$

En utilisant la même démarche du paragraphe 1. (stabilité de Von Neumann) avec $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_j^{n+1} - \hat{u}_j^n}{\tau} + V \frac{e^{i\xi h} \hat{u}_j^n - e^{-i\xi h} \hat{u}_j^n}{2h} - \frac{V^2 \tau}{2} \frac{e^{-i\xi h} \hat{u}_j^n - 2\hat{u}_j^n + e^{i\xi h} \hat{u}_j^n}{h^2} &= 0 \\ \hat{u}_j^{n+1} + \left[-1 + i \frac{V\tau}{h} \sin(\xi h) + \frac{V^2 \tau^2}{h^2} (2 - \cos(\xi h)) \right] \hat{u}_j^n &= 0 \\ \hat{u}_j^{n+1} + \left[-1 + i\alpha \sin(\xi h) + \alpha^2 (1 - \cos(\xi h)) \right] \hat{u}_j^n &= 0 \\ \hat{u}_j^{n+1} = \left[1 - i\alpha \sin(\xi h) + \alpha^2 (\cos(\xi h) - 1) \right] \hat{u}_j^n &= g(\alpha, \xi h) \hat{u}_j^n \end{aligned}$$

Supposons $|\alpha| > 1$. Alors, pour $\xi h = \pi$, on a $g(\alpha, \pi) = 1 - i\alpha \sin(\pi) + \alpha^2 (\cos(\pi) - 1) = 1 - 2\alpha^2 \leq -1$ et donc le schéma est instable.

Supposons $|\alpha| \leq 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
 |g(\alpha, \xi h)| &= \sqrt{(1 + \alpha^2(\cos(\xi h) - 1))^2 + \alpha^2 \sin^2(\xi h)} \\
 &= \sqrt{(1 + \alpha^2(\cos(\xi h) - 1))^2 + \alpha^2(1 - \cos^2(\xi h))} \\
 &= \sqrt{1 + \alpha^4(\cos(\xi h) - 1))^2 + 2\alpha^2(\cos(\xi h) - 1) + \alpha^2(1 - \cos^2(\xi h))} \\
 &= \sqrt{1 + \alpha^4(\cos(\xi h) - 1))^2 + 2\alpha^2 \cos(\xi h) - 2\alpha^2 + \alpha^2(1 - \cos^2(\xi h))} \\
 &= \sqrt{1 + \alpha^4(\cos(\xi h) - 1))^2 + \alpha^2(2 \cos(\xi h) - 1 - \cos^2(\xi h))} \\
 &= \sqrt{1 + \alpha^4(\cos(\xi h) - 1))^2 - \alpha^2(\cos(\xi h) - 1)^2} \\
 &= \sqrt{1 + (\alpha^4 - \alpha^2)(\cos(\xi h) - 1))^2} \\
 &= \sqrt{1 + \alpha^2(\alpha^2 - 1)(\cos(\xi h) - 1))^2}
 \end{aligned}$$

Avec $|\alpha| \leq 1$, on a $-1 \leq \alpha^2 - 1 \leq 0$, d'où $-1 \leq \alpha^2(\alpha^2 - 1) \leq 0$, d'où $|g(\alpha, \xi h)| \leq 1$. Par conséquent, le schéma est stable.

2. Exprimer matriciellement ce schéma.

Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, le schéma s'écrit ainsi

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} u_{j-1}^n + (1 - \alpha^2) u_j^n + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} u_{j+1}^n$$

- Pour $j = 1$, on a $u_1^{n+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} u_0^n + (1 - \alpha^2) u_1^n + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} u_2^n = (1 - \alpha^2) u_1^n + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} u_2^n + \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} u_N^n$.
- Pour $j = N$, on a $u_N^{n+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} u_{N-1}^n + (1 - \alpha^2) u_N^n + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} u_{N+1}^n = \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} u_1^n + \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} u_{N-1}^n + (1 - \alpha^2) u_N^n$.
- Pour $2 \leq j \leq N - 1$, on a $u_j^{n+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} u_{j-1}^n + (1 - \alpha^2) u_j^n + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} u_{j+1}^n$.

Par conséquent, on a une formulation matricielle $U^{n+1} = M_{LW}(\alpha) U^n$ où

$$M_{LW}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 & \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} \\ \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} & 1 - \alpha^2 & \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} & 1 - \alpha^2 & \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} & 1 - \alpha^2 & \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} \\ \frac{\alpha^2 - \alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha^2 + \alpha}{2} & 1 - \alpha^2 \end{bmatrix}.$$

4 Etude du schéma décentré amont

On se place dans le cas où $V > 0$.

1. Etudier la consistance du schéma et montrer qu'il est précis d'ordre 1 en temps et en espace.

Le schéma décentré amont ($V > 0$) de l'EDP s'écrit ainsi

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0.$$

Pour montrer que ce schéma est consistant, on écrit le développement en série de Taylor en fonction de $u_j^{n+1} : \approx u(x_j, t_{n+1})$ au voisinage du point $(x_j, t_{n+1}) = (jh, (n+1)\tau)$:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\tau}{1!} \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau^2),$$

d'où

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + o(\tau).$$

De même, on a les développements en série de Taylor en fonction de $u_j^n : \approx u(x_j, t_n)$ au voisinage du point $(x_j, t_n) = (jh, n\tau)$:

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{h}{1!} \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(h^2)$$

d'où

$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(h).$$

En reportant ces développements dans l'équation aux différences finies, il vient que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) + V \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) \right) + o(\tau + h).$$

De l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, il vient que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - V \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(\tau + h).$$

On peut donc écrire l'erreur de troncature sous la forme

$$E_j^n = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) - V \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + o(\tau + h).$$

Pour obtenir la condition permettant d'annuler les premiers termes dans la relation précédente, qui font intervenir les dérivées d'ordre supérieur $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, on dérive l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ par rapport à t et on permute les dérivées en t et x (Ici V est une constante) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En utilisant le fait que u solution de l'EDP satisfait certaines conditions de régularités, alors il existe une constante $C := \max \left(\frac{V^2}{2}, \frac{V}{2} \right) \sup_{x,t} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|$, telle que

$$|E_j^n| \leq C(\tau + h).$$

Par passage à la limite $\tau \rightarrow 0$ et $h \rightarrow 0$, l'erreur de troncature tend vers 0. Le schéma numérique est ainsi consistant à l'EDP et l'erreur de troncature est d'ordre 1 en temps et en espace (l'erreur est en $o(\tau + h)$.)

2. Montrer que ce schéma est stable en norme L^∞ sous la condition CFL.

Il suffit de vérifier si le principe du maximum discret est satisfait. Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, le schéma s'écrit ainsi

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1 - \alpha) u_j^n.$$

En utilisant la combinaison convexe des coefficients du schéma ci-dessus avec $0 \leq \alpha \leq 1$, le principe du maximum discret est vérifié. par conséquent, le schéma est stable en norme L^∞ si $0 \leq \alpha \leq 1$.

3. Présenter une formulation matricielle de ce schéma.

Posons $\alpha = V \frac{\tau}{h}$, le schéma s'écrit ainsi

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1 - \alpha) u_j^n.$$

— Pour $j = 1$, on a $u_1^{n+1} = \alpha u_0^n + (1 - \alpha) u_1^n = (1 - \alpha) u_1^n + \alpha u_N^n$.

— Pour $j = N$, on a $u_N^{n+1} = \alpha u_{N-1}^n + (1 - \alpha) u_N^n$.

— Pour $2 \leq j \leq N - 1$, on a $u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + (1 - \alpha) u_j^n$.

Par conséquent, on a une formulation matricielle $U^{n+1} = M_d(\alpha) U^n$ où

$$M_d(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 - \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$