

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Suites numériques

Enseignant-Formateur : H. El-Otmany

A.U. : 2019-2020

Exercice n°1 (Initiation aux suites)

- Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$.
 - Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
 - Donner u_n en fonction de n et calculer u_{32} .
- Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.
 - Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 .
 - Donner v_n en fonction de n et calculer v_{21} .

Exercice n°2 Soit (u_n) ma suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$.

- Calculer u_0 et u_{10} .
- Exprimer, u_{n+1} en fonction de n et u_n .

Exercice n°3 Soit (u_n) ma suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

- Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .
- En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice n°4 Montrer par récurrence que :

- Pour tout entier naturel $n \geq 6$, $2^n \geq 6n + 7$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 - \frac{1}{2^n - 1}$ où la suite u_n est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 2$ est un entier divisible par 3 (a divisible par 3 s'écrit $a = 3q$).
- $a \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice n°5 Démontrer

- Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice n°6 Calculer la limite des suites données par les termes généraux suivants :

$$\frac{n^3}{-3 + \sin n}, \quad \cos\left(\frac{1}{n}\right), \quad e^{-(n+1)^2} \cos(n^3 + 1)$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}, \quad \frac{1}{n} \ln(1 + 2n)$$

Exercice n°7 On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_n = \frac{n}{n+1}u_n + \frac{4}{n+1}$.

1. Calculer u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de (v_n) .
3. En déduire l'expression de (v_n) en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .
4. En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée.

Exercice n°8 Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes (Devoir à la maison, étudier la nature des suites) :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 2n - 2} - \sqrt{2n + 2}; \quad c_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$$

$$d_n = \frac{\ln(e + n^3)}{\ln(e + 2n^5)}; \quad e_n = \frac{\ln(\sqrt{2n} + 2e^n)}{n + 4}; \quad f_n = 4^n e^{-4n}$$

$$g_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{\sqrt{n}}; \quad h_n = \frac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}; \quad k_n = \frac{x^n - y^n}{x^n + y^n}, \quad x, y \in]0, +\infty[$$

Exercice n°9 Un chef d'entreprise paie 6000 euros par an pour l'entretien de ses machines. Lors du renouvellement du contrat pour les dix prochaines années, une société lui propose deux formules :

- Contrat A : Le contrat augmente de 5% par an.
 1. Exprimer en fonction de n le montant du contrat lors de la $n^{\text{ième}}$ année.
 2. Calculer le montant du contrat pour la 10^{ème} année.
 3. Au bout de combien d'années le contrat dépasserait-il le double du contrat initial ?
 4. Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.
- Contrat B : Le contrat augmente de 350 euros par an.
 1. Exprimer en fonction de n le montant v_n du contrat lors de la $n^{\text{ième}}$ année.
 2. Calculer le montant du contrat pour la 10^{ème} année.
 3. Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.
 4. Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercice n°10 En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

1. Soit I_0 l'intensité d'un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0 .
2. On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la $n^{\text{ième}}$ plaque.
 - a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} .
 - b. Quelle est la nature de la suite I_n ? Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et de I_0 .
 - c. Quel est le sens de variation de I_n ?
3. Quelle est l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?
4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?