Couples de variables aléatoires discrètes

Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles

Exercice 1. $(**)$ On lance $2n$ fois une pièce, qui tombe sur PILE avec probabilité $p \in]0,1[$. On note X (resp. Y) le nombre de PILE dans les n premiers (resp. derniers) lancers. Sachant que le nombre total de PILE est $m \in \{0,\dots,2n\}$, quelle est la probabilité que $X = k$ (avec $k \in \{0,\dots,n\}$) ?

a) Répondre à la question sans aucun calcul.

b) Vérifier par le calcul la conjecture faite à la question précédente.

Corrigé :

On cherche la probabilité que, parmi les m PILE obtenus, k le soient parmi les n premiers lancers, et $m-k$ parmi les n derniers lancers : la probabilité cherchée est donc $\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}/\binom{n}{m}$ (la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=m$ est $\mathcal{H}(m,n,2n)$).

On a X et Y indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n,p)$ et $X+Y$ de loi $\mathcal{B}(2n,p)$. On cherche :

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=m) &= \frac{P(X=k,\, Y=m-k)}{P(X+Y=m)} \\
&= \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\binom{n}{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m}p^m(1-p)^{2n-m}} \\
&= \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}.
\end{aligned}$$

La loi conditionnelle de X sachant $[X+Y=m]$ est bien la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(m,n,2n)$

Exercice 2. $(*)$ On lance une pièce, qui tombe sur PILE avec probabilité $p \in]0,1[$, jusqu'à avoir obtenu deux fois PILE. Sachant qu'on a fait n lancers en tout, quelle est la probabilité qu'on ait obtenu PILE pour la première fois au k-ième lancer (avec $k \in \{1,\dots,n\}$) ?

a) Répondre à la question sans aucun calcul.

b) Vérifier par le calcul la conjecture faite à la question précédente.

Corrigé :

a) Le PILE obtenu dans les $n-1$ premiers lancers arrive uniformément au hasard : donc la probabilité cherchée est $1/(n-1)$ (la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=n$ est $\mathcal{U}([\![1,n-1]\!])$.

b) On modélise le nombre de lancers jusqu'au premier PILE, puis jusqu'au second, par X et Y sont indépendantes, de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On cherche :

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=n) &= \frac{P(X=k,\, X+Y=n)}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} P(X+Y=n, X=i)} \\
&= \frac{(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}p}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}p(1-p)^{n-i-1}p} = \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. $(**)$ On admet que la probabilité qu'une famille ait n enfants pour $n \geqslant 1$ est $p^{n-1}(1-p)$, où $0 < p < 1$. On suppose que toutes les répartitions des sexes sont équiprobables.
Montrer que la probabilité qu'une famille ait exactement k garçons, $k \geqslant 1$, est :

$$\frac{2p^{k-1}(1-p)}{(2-p)^{k+1}}.$$

[*Si G désigne le nombre de garçons et N le nombre d'enfants, on déterminera au préalable* $\mathbb{P}(G = k|N = n)$, *et on utilisera* $\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{k} x^j = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$, *valable pour* $|x| < 1$].

Corrigé :

Soit $n \geqslant 1$. La loi conditionnelle de G sachant $[N = n]$ est la loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{2}$: $P(G = k|N = n) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit $k \geqslant 1$. Alors, pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
P(G = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P([G = k] \cap [N = n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(G = k|N = n)P(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} p^{n-1}(1-p) = (1-p)\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{k+j}{k} \frac{1}{2^{k+j}} p^{k+j-1} \\
&= \frac{(1-p)p^{k-1}}{2^k} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{k+j}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^j \\
&= \frac{(1-p)p^{k-1}}{2^k} \frac{1}{(1-\frac{p}{2})^{k+1}} = \frac{2p^{k-1}(1-p)}{(2-p)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

et $P(G = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} qp^{n-1} = \frac{q}{2} \frac{1}{1-\frac{p}{2}} = \frac{q}{2-p}$

Exercice 4. $(*)$ Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

a) Déterminer les lois de X et de Y.
b) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
c) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
e) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Corrigé :

- a) • On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. On a, par la formule des probabilités totales, $P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$, donc

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{i+1}j!} = \frac{1}{e2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}.$$

$$\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{G}_0(1/2)}.$$

• On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $j \in \mathbb{N}$. De même, $P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$. Donc,

$$P(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{i+1}j!} = \frac{1}{2ej!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2ej!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{ej!}.$$

$$\boxed{Y \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(1)}.$$

• b) On pose $Z = X + 1$. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(Z = n) = P(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Donc, Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. Il en résulte que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} = 2$ et $\text{Var}(Z) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

Donc, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z - 1) = \mathbb{E}(Z) - 1 = 2 - 1 = 1$ et $\text{Var}(X) = \text{Var}(Z - 1) = \text{Var}(Z) = 2$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \text{ et } \text{Var}(X) = 2}.$$

• c) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$, donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \text{Var}(Y) = \lambda = 1}.$$

• d) On a, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(X = i)P(Y = j).$$

Donc, les variables $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$.

• e) $(X = Y) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (\{X = k\} \cap \{Y = k\})$ et il s'agit d'une union d'évènements deux à deux incompatibles, donc

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X = k\} \cap \{Y = k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e2^{k+1}k!} \\ &= \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k!} = \frac{1}{2e} e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{P(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}}$.

Exercice 5. ($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \cdots, U_n$ des urnes. On suppose que l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule de l'urne. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne, Y la variable aléatoire donnant le numéro de la boule choisie.

a) Déterminer la loi de (X, Y) et l'espérance de Y.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Corrigé :

- Cas de $n = 4$

a) Corrigé avec $n = 4$: X et Y prennent leurs valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$. Si $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$, on a

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(Y = j|X = i)P(X = i) \\ &= \frac{1}{4}P(Y = j|X = i) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4i} \text{ si } i \geqslant j \\ 0 \text{ si } i < j \end{array} \right. . \end{aligned}$$

On a alors le tableau suivant :

$X\|Y$	1	2	3	4	total
1	$1/4$	0	0	0	$1/4$
2	$1/8$	$1/8$	0	0	$1/4$
3	$1/12$	$1/12$	$1/12$	0	$1/4$
4	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/4$
total	$25/48$	$13/48$	$7/48$	$3/48$	1

On a donc la loi de Y définie par $P(Y = 1) = \dfrac{25}{48}$, $P(Y = 2) = \dfrac{13}{48}$, $P(Y = 3) = \dfrac{7}{48}$ et $P(Y = 4) = \dfrac{3}{48} = \dfrac{1}{16}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1 \times 25 + 2 \times 13 + 3 \times 7 + 4 \times 3}{48} \\ &= \frac{25 + 26 + 21 + 12}{48} = \frac{84}{48} = \frac{21}{12}, \end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{7}{4}}$ et

$$P(X = Y) = p_{1,1} + p_{2,2} + p_{3,3} + p_{4,4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = P(Y = 1)$$

soit $\boxed{P(X = Y) = \dfrac{25}{48}}$.

- Cas de n quelconque:

a) X et Y prennent leurs valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. Si $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on a

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(Y = j|X = i)P(X = i) \\ &= \frac{1}{n}P(Y = j|X = i) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{ni} \text{ si } i \geqslant j \\ 0 \text{ si } i < j \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a, avec les probabilités totales et le système complet des $\{X = i\}$,

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i, Y=j) = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i},$$

puis, avec le principe de Fubini (changement de l'ordre des sommes),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)}{2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right), \end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+3}{4}}$.

b) On a $P(X=1, Y=2) = 0$, alors que $P(X=1) = \frac{1}{n} \neq 0$ et $P(Y=2) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i} \neq 0$. D'où $P(X=1, Y=2) \neq P(X=1)P(Y=2)$, et $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

c) On a

$$P(X=Y) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i, Y=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 6.}}$ $(*)$ Un jeu de dé est relié à un compteur chargé d'enregistrer le nombre de 6 sur n lancers, où $n \in \mathbb{N}^*$. On note X le nombre de 6 réellement obtenus par le joueur. Le compteur est détraqué et n'affiche pas bien la valeur de X :

- Si X prend une valeur non nulle, le compteur affiche correctement cette valeur ;
- Si X prend la valeur 0, le compteur affiche n'importe quel entier au hasard dans $\{1, \ldots, n\}$.

On note Y la valeur affichée par le compteur.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
b) Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
c) Quelle est la loi de Y conditionnelle à $[X = 0]$?
d) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Quelle est la loi de Y conditionnelle à $[X = k]$?
e) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

Corrigé :

- a) La variable aléatoire X représente le nombre de 6 réellement obtenus par le joueur. Il est clair que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$:
  $X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$,

  $$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k}\frac{1}{6^k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.}.$$

- b) Les valeurs possibles de la variable Y sont $\boxed{\{1, \cdots, n\}}$ (la valeur 0 ne peut pas être obtenue).

- c) Lorsque l'événement $[X = 0]$ est réalisé, alors Y peut prendre n'importe quelle valeur au hasard dans $\{1, \cdots, n\}$, c'est-à-dire que la loi conditionnelle de Y à l'événement $[X = 0]$ est l'équiprobabilité sur $\{1, \cdots, n\}$. Ainsi, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\boxed{P_{[X=0]}(Y = k) = \tfrac{1}{n}.}$$

- d) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Si $[X = k]$ est réalisé alors Y prend de manière certaine la valeur k. Donc : $\boxed{P_{[X=k]}(Y = k) = 1}$.

- e) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. L'événement $[Y = k]$ peut être décomposé de la manière suivante :

$$[Y = k] = ([Y = k] \cap [X = 0]) \cup ([Y = k] \cap [X = k]).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(([Y = k] \cap [X = 0]) \cup ([Y = k] \cap [X = k])) \\ &= P([Y = k] \cap [X = 0]) + P([Y = k] \cap [X = k]) \\ &= P_{[X=0]}(Y = k)P(X = 0) + P_{[X=k]}(Y = k)P(X = k) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{6^n} + \binom{n}{k} \frac{1}{6^k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Indépendances de variables aléatoires

Exercice 7. $(**)$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$. Déterminer les lois de $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

Corrigé :

- U et V prennent leur valeur dans $\{1, \cdots, n\}$ avec, si $1 \leqslant k \leqslant n$, $\{V \leqslant k\} = \{X \leqslant k, Y \leqslant k\}$, donc, avec l'indépendance de X et Y, il vient

$$P(V \leqslant k) = P(X \leqslant k)P(Y \leqslant k) = P(X \leqslant k)^2,$$

car, de plus X et Y ont la même loi.

$\{X \leqslant k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{X = i\}$, donc, les évènements de la réunion étant incompatibles deux à deux, $P(X \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i) = \frac{k}{n}$, puis $P(V \leqslant k) = \frac{k^2}{n^2}$. Ainsi, $P(V = 1) = P(V \leqslant 1) = \frac{1}{n^2}$ et, si $2 \leqslant k \leqslant n$, l'écriture $\{V \leqslant k\} = \{V = k\} \cup \{V \leqslant k - 1\}$, puis (avec l'incompatibilité),

$$P(V = k) = P(V \leqslant k) - P(V \leqslant k - 1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2},$$

cette formule étant vraie si $k = 1$ aussi.

-

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, alors $n+1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ aussi et $n+1-X$ et $n+1-Y$ restent indépendantes. Par ailleurs, $\max(n+1-X, n+1-Y) = n+1-\min(X,Y)$, donc $U = n+1-\max(n+1-X, n+1-Y)$. Donc, si $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} P(U=k) &= P(\max(n+1-X, n+1-Y) = n+1-k) \\ &= \frac{2(n+1-k)-1}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}. \end{aligned}$$

On a $U+V = X+Y$, donc, comme $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} = n+1-\frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \\ &= (n+1)\left(1-\frac{4n-1}{6n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}. \end{aligned}$$

Exercice 8. $(**)$ On choisit un nombre Y au hasard dans $\{1, \ldots 5\}$, puis un nombre X au hasard dans $\{1, \ldots, Y\}$.

a) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Le vérifier en calculant la loi du couple (X, Y).

Corrigé :

1. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car on a toujours $X \leqslant Y$.

2. On a :

$$P(Y=y) = \frac{1}{y}, \quad \forall y \in \{1, 2, \cdots, 5\},$$
$$P(X=x|Y=y) = \frac{1}{y}, \quad \forall x \in \{1, 2, \cdots, y\},$$
$$P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = P(X=x, Y=y) = P(Y=y) \times P(X=x|Y=y) = \frac{1}{5y}.$$

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	$P(X=x)$
1	1/5	1/10	1/15	1/20	1/25	137/300
2	0	1/10	1/15	1/20	1/25	77/300
3	0	0	1/15	1/20	1/25	47/300
4	0	0	0	1/20	1/25	27/300
5	0	0	0	0	1/25	12/300
$P(Y=y)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	

Pour tester l'indépendance, on compare par exemple $P(\{X=1\} \cap \{Y=2\}) = P(X=1, Y=2)$ et $P(X=1) \times P(Y=2)$. On a

$$P(\{X=1\} \cap \{Y=2\}) = P(X=1, Y=2) = \frac{1}{10},$$
$$P(X=1) = \frac{137}{300}, \quad P(Y=2) = \frac{1}{5},$$
$$P(X=1) \times P(Y=2) = \frac{137}{300} \times \frac{1}{5} = \frac{137}{1500}$$

Donc $P(X=1) \times P(Y=2) \neq P(X=1, Y=2)$ et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

$\boxed{\textbf{Exercice 9.}}$ $(*)$ On jette deux dés cubiques et on note X (resp. Y) le plus petit résultat (resp. le plus grand).

a) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Le vérifier en calculant la loi du couple (X, Y).

Corrigé :

Il suffit d'utiliser la même stratégie de l'exercice 8.

1. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $X \leqslant Y$.

2. On a :

$x \quad y$	1	2	3	4	5	6	$P(X=x)$
1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	11/36
2	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	9/36
3	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36	7/36
4	0	0	0	1/36	2/36	2/36	5/36
5	0	0	0	0	1/36	2/36	3/36
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36
$P(Y=y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	

$\boxed{\textbf{Exercice 10.}}$ $(*)$ Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout couple (i, j) d'entiers non nuls, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{2^{i+j}}$.

a) Calculer α et déterminer les lois marginales de X et Y.

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé :

- a) Par la formule des probabilités totales, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, puisque $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$,

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{2^{i+j}} = \frac{\alpha}{2^i} \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{\alpha}{2^i}.$$

  Comme $\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = 1 = \frac{\alpha/2}{1-1/2} = \alpha$, donc $\alpha = 1$.

  On a alors $P(X = i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{i-1}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)}$.Il en va de même pour Y au vu de la symétrie entre i et j.

- b) On a $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^{i+j}} = P(X = i)P(Y = j)$, donc

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}. \tag{1}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 11.}}$ $(**)$ Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, dont la loi est donnée par

$$\text{pour tout } (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{(j + k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}.$$

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer la loi de $X + Y$.

Corrigé :

- a) On a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$P(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=j \cap Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}.$$

- $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{ek!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$, donc $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{ek!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{ek!} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{e}}.$$

- De même, $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{ek!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{ek!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{ek!} e^{\frac{1}{2}} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{e}}.$$

Il résulte des deux calculs précédents que

$$P(Y=k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{e}} + \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{e}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{e}}.$$

Pour des raisons de symétrie en (j,k) de la loi conjointe, X et Y ont la même loi, d'où

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et, pour tout } j \in \mathbb{N},\quad P(X=j) = \frac{\left(\frac{1}{2}+j\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{e}}.$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes, en effet

$$P(X=0, Y=0) = 0 \text{ et } P(X=0)P(Y=0) \neq 0.$$

- Il reste à traiter le cas où $n=0$, on a $P(S=0) = P(X=0, Y=0) = 0$. Par conséquent :

$$P(X+Y=n) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{(n-1)!} & si \quad n \geqslant 1, \\ 0 & si \quad n=0. \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 12. $(**)$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
a) Déterminer la loi de $Z = X/Y$.
b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et montrer que $\mathbb{E}(Z) > 1$.

Corrigé :

- a) $Z = \frac{X}{Y}$ donc $Z(\Omega) = \mathbf{Q}_+^\star$ et, si $r \in \mathbf{Q}_+^\star$, on peut écrire $r = \frac{s}{t}$ avec s et t premiers entre eux. On a alors :

$$\begin{aligned} P(Z=r) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P([X=ms] \cap [Y=mt]) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(X=ms)P(Y=mt) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} pq^{ms-1}pq^{mt-1} = \frac{p^2}{q^2} \sum_{m=1}^{+\infty} q^{m(s+t)} = \frac{p^2 q^{s+t-2}}{1-q^{s+t}} \end{aligned}$$

- b) $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(X \times \frac{1}{Y}\right) = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$ car X et Y sont indépendantes.
  Or $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} pq^{m-1} = \frac{p}{q} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q^m}{m} = -\frac{p}{q} \ln(1-q) = -\frac{p \ln p}{1-p}$.
  On obtient finalement $\mathbb{E}[Z] = -\frac{\ln p}{1-p}$.
  A-t-on $-\ln p > 1-p$, c'est-à-dire $1-p+\ln p < 0$?

  Si $\Phi(p) = 1-p+\ln p$, $\Phi'(p) = -1+\frac{1}{p} > 0$ car $p \in]0,1[$. Donc Φ est strictement croissante sur $]0,1[$, avec $\Phi(1) = 0$, d'où $\Phi(p) < 0$ pour $p \in]0,1[$ et $\mathbb{E}[Z] > 1$

Exercice 13. $(**)$ a) Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Y = n - X$?

b) Dans une exploitation agricole, 100 bovins se répartissent au hasard et indépendamment dans trois étables numérotées de 1 à 3 (chaque étable peut accueillir le troupeau). Pour $i = 1,2,3$, soit X_i la variable aléatoire retournant le nombre de bovins ayant choisi l'étable i. Déterminer la loi de X_i. Calculer $X_1 + X_2 + X_3$ et en déduire la loi de $X_1 + X_2$.

Corrigé :

- a) $X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$ et $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$. On a alors $Y(\Omega) = \{0,\dots,n\}$ car $t \mapsto n-t$ est une permutation de $\{0,\dots,n\}$.
  Puis, si $k \in \{0,\dots,n\}$, $\{Y=k\} = \{X = n-k\}$

$$P(Y=k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = C_n^k p^{n-k}(1-p)^k. \qquad (3)$$

  Par conséquent, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$

- Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100, 1/3)$, soit, pour $k = 0,\dots,100$, $P(X_i = k) = \binom{100}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$.
  $X_1 + X_2 + X_3 = 100$.
  Par conséquent, $Y = X_1 + X_2 = 100 - X_3$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100, 2/3)$

Exercice 14. $(**)$ Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, et que X et Y sont indépendantes. Soit $S = X + Y$.

a) Déterminer la loi de S.

b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{S = k\}$.

Corrigé :

- a) La fonction génératrice de S est $G_S = G_X G_Y$ par indépendance. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{pt}{1-p}\right)^k \\ &= (1-p)^n \left(1 + \frac{pt}{1-p}\right)^n = (1-p+pt)^n. \end{aligned}$$

  Il en va de même pour Y. Donc,

$$G_S(t) = (1-p+pt)^n (1-p+pt)^m = (1-p+pt)^{n+m}.$$

  La fonction génératrice caractérise la loi, donc

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)}.$$

- b) On a, pour $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n+m$,

$$\begin{aligned} P(X=i|S=k) &= \frac{P(\{X=i\}\cap\{S=k\})}{P(S=k)} \\ &= \frac{P(\{X=i\}\cap\{Y=k-i\})}{P(S=k)} = \frac{P(X=i)P(Y=k-i)}{P(S=k)}. \end{aligned}$$

On doit avoir $0 \leqslant k-i \leqslant m$, donc $i \leqslant k \leqslant m+i$ ou encore $\max(k-m,0) \leqslant i \leqslant \min(k,n)$. Alors,

$$P(X=i|S=k) = \frac{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}}{\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}.$$

Exercice 15. $(***)$ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $U = |X-Y|$ et $V = \min(X,Y)$.

a) Déterminer la loi de (U,V).

b) En déduire les lois de U et de V. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Corrigé :

- a) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Si $i = 0$ et $j \in \mathbb{N}^*$, il vient, avec l'indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned} P(U=0,V=j) &= P(X=j,Y=j) = P(X=j)P(Y=j) \\ &= p(1-p)^{j-1}p(1-p)^{j-1} = p^2(1-p)^{2j-2}. \end{aligned}$$

• Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}$. On a $\{U=i\}\cap\{V=j\} = (\{X=i+j\}\cap\{Y=j\}) \cup (\{Y=i+j\}\cap\{X=j\})$ les évènements de la réunion étant incompatibles. Donc, toujours avec l'indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned} P(U=i,V=j) &= P(X=i+j)P(Y=j) + P(X=j)P(Y=i+j) \\ &= 2p^2(1-p)^{i+2j-2}. \end{aligned}$$

- b) On utilise la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(U=0) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(U=0,V=j) = p^2\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{2(j-1)} \\ &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p} \end{aligned}$$

et, si $j = 1$,

$$\begin{aligned} P(U=i) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(U=i,V=j) = 2p^2(1-p)^{i-1}\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{2(j-1)} \\ &= 2\frac{p(1-p)^i}{2-p}. \end{aligned}$$

De même, si $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(V=j) &= p^2(1-p)^{2j-2} + 2p^2(1-p)^{2j-1}\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1} \\ &= p^2(1-p)^{2j-2} + \frac{2p^2(1-p)^{2j-1}}{1-(1-p)} \\ &= p(1-p)^{2j-2}(p+2(1-p)) = p(2-p)((1-p)^2)^{j-1} \\ &= (1-(1-p)^2)((1-p)^2)^{j-1}, \end{aligned}$$

donc $V \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.

- c) On a, si $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(U=0)P(V=j) &= \frac{p}{2-p}p(2-p)((1-p)^2)^{j-1} \\ &= p^2(1-p)^{2j-2} = P(U=0, V=j) \end{aligned}$$

et, si $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(U=i)P(V=j) &= 2\frac{p(1-p)^i}{2-p}p(2-p)((1-p)^2)^{j-1} \\ &= 2p^2(1-p)^{i+2j-2} = P(U=i, V=j), \end{aligned}$$

donc $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes}}$.

Exercice 16. $(*)$ a) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur $\{1, 2, 3\}$. Écrire la fonction génératrice de $W = X + Y$.

b) On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi est définie par le tableau suivant :

X—Y	1	2	3
1	1/9	1/18	1/6
2	1/6	1/9	1/18
3	1/18	1/6	1/9

Déterminer les fonctions génératrices de X, Y puis celle de $X + Y$. Vérifier qu'il existe un lien simple entre la fonction génératrice de $X + Y$ et celle de X. Quel commentaire suggère alors cet exemple ?

Corrigé :

- **1.** Valeurs de la variable aléatoire $S = X + Y$.

X—Y	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

On a donc $S(\Omega) = \{2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;6\}$ avec

$$\begin{aligned} P(S=2) &= P(X=1, Y=1) = \frac{1}{9}, \\ P(S=3) &= P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = \frac{2}{9}, \\ P(S=4) &= P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=1) = \frac{3}{9}, \\ P(S=5) &= P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) = \frac{2}{9}, \\ P(S=6) &= P(X=3, Y=3) = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left[t^{X+Y}\right] &= \sum_{n=2}^{6} t^n P(X+Y=n) \\ &= \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{9}t^3 + \frac{3}{9}t^4 + \frac{2}{9}t^5 + \frac{1}{9}t^6 \\ &= \frac{t^2+2t^3+3t^4+2t^5+t^6}{9}. \end{aligned}$$

NB. Puisque X et Y sont indépendantes, on a :

$$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t) = \left(\frac{t+t^2+t^3}{3}\right)^2}.$$

- 2. On calcule les marges du tableau de l'énoncé qui donnent les lois de X et de Y :

X—Y	1	2	3	Marge de X
1	1/9	1/18	1/6	1/3
2	1/6	1/9	1/18	1/3
3	1/18	1/6	1/9	1/3
Marge de Y	1/3	1/3	1/3	1

Les variables X et Y sont donc équidistribuées sur $\{1,2,3\}$, mais elles ne sont pas indépendantes.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{n=1}^{3} t^n P([X=n]) = \frac{t+t^2+t^3}{3}.$$

X et Y ayant la même loi on a, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = \frac{t+t^2+t^3}{3}$.

On calcule la fonction génératrice de $X+Y$ comme à la question 1, et on obtient

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= t^2 \times \frac{1}{9} + t^3\frac{2}{9} + t^4 \times \frac{3}{9} + t^5 \times \frac{2}{9} + t^6 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{t^2+2t^3+3t^4+2t^5+t^6}{9}. \end{aligned}$$

On voit que : $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$ alors que X et Y ne sont pas ici indépendantes.

$\boxed{\textbf{Exercice 17.}}$ $(***)$ Soit $p \in]0,1/2[$ et $q = 1-p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi géométrique de paramètre p pour X et de paramètre q pour Y. Soit $Z = X+Y$.

a) Montrer que, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p} t^n = \frac{t^2}{(1-pt)(1-qt)}.$$

b) Calculer la somme de la série génératrice de Z ; en déduire la loi de Z.

Corrigé :

- a) Si $|t|<1$, $qt|<1$ et $|pt|<1$ aussi, et

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p} t^n &= \frac{t}{q-p}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}((qt)^{n-1}-(pt)^{n-1})\right) \\ &= \frac{t}{q-p}\left(\frac{qt}{1-qt}-\frac{pt}{1-pt}\right) = \frac{t^2}{(1-pt)(1-qt)}.\end{aligned}$$

- b) X et Y étant indépendantes, on a $G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t)$, au moins pour tout $t \in [-1,1]$. Par ailleurs,

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n = \frac{pt}{1-pt}$$

et, de même, $G_Y(t) = \frac{qt}{1-qt}$.

On a alors, pour $|t| < \min(1/p, 1/q) = 1/p$,

$$G_Z(t) = \frac{pt}{1-pt}\frac{qt}{1-qt} = pq\frac{t^2}{(1-pt)(1-qt)}.$$

Il s'ensuit que $G_Z(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{pq^n-qp^n}{q-p}t^n$, donc que $Z(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ avec $\boxed{P(Z=n) = \frac{pq^n-qp^n}{q-p} \text{ pour tout } n \geqslant 2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 18.}}$ $(*)$ Une entreprise de construction produit des objets pour lesquels une modélisation conduit à la probabilité $1/10$ qu'un objet soit défectueux. On suppose que le nombre d'objets produits en une heure est le résultat d'une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(20)$. Soit aussi la variable aléatoire X retournant le nombre d'objets défectueux produits en 1 heure.

a) Calculer, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X=i|Y=j)$. En déduire que

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \frac{2^i}{i!}e^{-2} \times \frac{18^{j-i}}{(j-i)!}e^{-18}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \{0,\dots,j\}$. En déduire la loi de X.

b) Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes et déterminer les lois de ces deux variables aléatoires.

c) Quel est le nombre moyen d'objets non défectueux produits par la chaîne de montage en 1 heure ?

Corrigé :

- a) Il y a moins d'objets défectueux que d'objets produits, donc, si $i \geqslant j+1$, on a $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = 0$.

  Soit $i \in \{0, \ldots, j\}$. Si $Y = j$ est réalisé, X retourne le nombre i d'objets défectueux parmi les j produits, qui le sont de manière indépendantes, donc X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(j, 1/10)$. Donc,

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \binom{j}{i}\left(\frac{1}{10}\right)^i\left(\frac{9}{10}\right)^{j-i} = \left(\frac{1}{10}\right)^j\binom{j}{i}9^{j-i}.$$

  On a ensuite

$$\begin{aligned} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\} &= P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})P(Y = j) \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^j\binom{j}{i}9^{j-i}\frac{20^j}{j!}e^{-20} = 2^j\frac{e^{-20}}{i!(j-i)!}9^{j-i} \\ &= 2^{j-i}2^i\frac{e^{-20}}{i!(j-i)!}9^{j-i} = \frac{2^i}{i!}e^{-2} \times \frac{18^{j-i}}{(j-i)!}e^{-18}. \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\} = \sum_{j=i}^{+\infty} P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \\ &= \frac{2^i}{i!}e^{-2}\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{18^{j-i}}{(j-i)!}e^{-18} = \frac{2^i}{i!}e^{-2}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{18^j}{j!}e^{-18} = \frac{2^i}{i!}e^{-2}e^{18}e^{-18}, \end{aligned}$$

  donc $P(X = i) = \frac{2^i}{i!}e^{-2}$ et $\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(2)}$.

- c) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme $Y \geqslant X$, $(Y - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $(i, k) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\begin{aligned} P(\{X = i\} \cap \{Y - X = k\}) &= P(\{X = i\} \cap \{Y = i + k\}) \\ &= \frac{2^i}{i!}e^{-2} \times \frac{18^k}{k!}e^{-18} = P(X = i)\frac{18^k}{k!}e^{-18} \end{aligned}$$

  donc

$$\begin{aligned} P(Y - X = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(\{X = i\} \cap \{Y - X = k\}) \\ &= \frac{18^k}{k!}e^{-18}\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) = \frac{18^k}{k!}e^{-18}. \end{aligned}$$

  On en déduit que $\boxed{Y - X \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(18)}$ (donc $(Y - X)(\Omega) = \mathbb{N}$) et que $P(\{X = i\} \cap \{Y - X = k\}) = P(X = i)P(Y - X = k)$, ce qui donne $\boxed{\text{l'indépendance de } X \text{ et } Y - X}$.

- d) On cherche donc $\mathbb{E}(Y - X)$, qui est bien définie et qui vaut le paramètre de la loi de Poisson en jeu, soit $\boxed{18}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 19.}}$ $(*)$ Le nombre quotidien de contrôles antidopage lors d'une course cycliste est une variable aléatoire Y de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque coureur contrôlé a la probabilité p d'être positif. On prend $\lambda = 10$ et $p = \frac{1}{5}$.

a) Si X est le nombre de coureurs contrôlés positifs dans une journée, quelle est la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = n\}$?

b) En utilisant les probabilités totales avec le système complet $(\{Y = n\})_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer la loi de X et le nombre moyen de coureurs contrôlés positifs en une journée.

Corrigé :

- a) • Si $k > n$, $P(X = k|Y = n) = 0$: en effet, il ne peut pas y avoir plus de contrôles positifs qu'il n'y a de contrôles.

  • Si $k \leqslant n$, $P(X = k|Y = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$: en effet, si $Y = n$, parmi les n contrôles, il y a C_n^k façons de choisir les k contrôles positifs, chacun ayant la probabilité p, et chacun des contrôles négatifs ayant la probabilité $1 - p$.

  La loi conditionnelle de X sachant $\{Y = n\}$ est donc la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}(n, p)}$.

- b) On a ici $P(Y = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On applique les probabilités totales à $P(X = k)$, en utilisant le système complet d'évènements $(\{Y = n\})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = k|Y = n)P(Y = n).$$

  On remplace ensuite $P(Y = n)$ et $P(X = k/Y = n)$ par leur valeur, sans oublier que $P(X = k|Y = n) = 0$ pour $n < k$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^m}{m!}\lambda^{k+m} = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

  avec $m = n - k$.
  Ainsi, X suit bien la loi de Poisson $\boxed{\mathcal{P}(\lambda p)}$ et $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda p = 2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 20.}}$ $(*)$ On considère une espèce d'insectes dont la femelle pond un nombre aléatoire X d'oeufs. X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque oeuf a la probabilité p d'arriver à éclosion, chaque oeuf se comportant indépendamment des autres oeufs d'une même ponte et indépendamment du nombre d'oeufs pondus. Soit Y le nombre d'oeufs d'une ponte qui arrivent à éclosion.

a) Calculer $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y = k)$ et $\mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k])$.

b) Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ et $\mathbb{E}[Y]$.

c) Calculer $\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = n)$.

Corrigé :

- a) En utilisant les hypothèses d'indépendance, on voit facilement que la loi conditionnelle de Y à $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètres n et p :

$$P^{[X=n]}(Y = k) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \text{ si } 0 \leq k \leq n, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons que pour $n=0$, $P^{[X=0]}(Y=0)=1$. On en déduit :

$$\begin{aligned} P([X=n]\cap[Y=k]) &= P(X=n)P^{[X=n]}(Y=k) \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}, \text{ si } 0\le k\le n \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Soit $k\in\mathbb{N}$; on a :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P([X=n]\cap[Y=k]) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ \frac{\lambda^k e^{-\lambda}p^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

La loi de Y est donc la loi de Poisson de paramètre λp. On en déduit directement que $\boxed{\mathbb{E}[Y]=\lambda p}$.

- c) On a pour $0\le k\le n$:

$$\begin{aligned} P_{[Y=k]}(X=n) &= \frac{P_{[X=n]}(Y=k)P(X=n)}{P(Y=k)} \\ &= e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exercice 21. $(**)$ On procède à une suite de tirages avec remise dans une urne qui contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On note X (resp. Y) le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux jetons différents (resp. les trois jetons au moins une fois chacun).

a) Déterminer la loi de X.

b) Reconnaître la loi de $X-1$ puis déterminer l'espérance et la variance de X.

c) Montrer que $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\frac{2^{j-i}}{3^{j-1}}$ pour $2\leqslant i<j$ et 0 sinon.

d) Retrouver la loi de X et déterminer celle de Y.

e) On pose $Z=Y-X$. Déterminer la loi de (X,Z) et celle de Z. Les variables aléatoires X et Z sont-elles indépendantes ? Reconnaître la loi de Z.

f) Déterminer l'espérance de Y et la covariance de X et de Y.

Corrigé :

- a) On a $X(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ (au minimum 2 tirages nécessaires pour avoir 2 jetons différents) et $X=i$ si le même jeton apparaît lors des $i-1$ premiers tirages et un nouveau jeton apparaît au tirage suivant. Il y a trois choix possibles pour le premier jeton qui apparaît et deux choix pour le second. Le nombre total de résultats pour i tirages étant 3^i, on a $P(X=i)=\frac{3\times 2}{3^i}$, soit

$$\boxed{\text{pour } i\geqslant 2,\ P(X=i)=\frac{2}{3^{i-1}}}. \quad (4)$$

- b) $(X-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(X-1=k) = P(X=k+1) = \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$, donc $\mathbb{E}(X-1) = \frac{3}{2}$ et $\text{Var}(X-1) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$. Or $\mathbb{E}(X-1) = \mathbb{E}(X) - 1$ et $\text{Var}(X-1) = \text{Var}(X)$. On a donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \tfrac{5}{2} = 2.5 \text{ et } \text{Var}(X) = \tfrac{3}{4} = 0.75}. \tag{5}$$

- c) On a nécessairement $Y > X$. Si $X = i$ et $Y = j$, on tire un même jeton pendant les $i-1$ premiers tirages (3 choix possibles pour ce jeton), puis un nouveau jeton pour le i-ème tirage (2 choix pour ce jeton), ensuite jusqu'au tirage $j-1$, soit, pendant $j-1-i$ tirages, on a le choix entre ces 2 jetons déjà tirés et enfin pour le j-ème tirage, c'est le dernier jeton qui apparaît. Le nombre total de résultats pour j tirages étant 3^j, on a bien $P(X=i, Y=j) = \frac{3\times2\times2^{j-1-i}}{3^j}$, soit $\boxed{P(X=i,Y=j) = \frac{2^{j-i}}{3^{j-1}} \text{ pour } 2 \leqslant i < j \text{ et } 0 \text{ sinon}}$.

- d) On a

$$P(X=i) = \sum_{j=i+1}^{+\infty} P(X=i, Y=j) = \frac{2}{3^i}\sum_{j=i+1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1} = \frac{2}{3^{i-1}},$$

$$\begin{aligned} P(Y=j) &= \sum_{i=2}^{j-1} P(X=i,Y=j) = \frac{2^{j-2}}{3^{j-1}}\sum_{i=2}^{j-1}\frac{1}{2^{i-2}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}\right) \end{aligned}$$

pour $j \geqslant 3$.

- e) $P(X=i, Z=k) = P(X=i, Y=i+k) = \frac{2^k}{3^{i+k-1}}$ pour $i \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P(Z=k) = \frac{2^k}{3^{k+1}}\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{i-2}} = \frac{2^{k-1}}{3^k},$$

donc $\boxed{Z \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$.

On a $P(X=i, Z=k) = P(X=i)P(Z=k)$, donc les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } Z \text{ sont bien indépendantes}}$.

- f) $Y = X + Z$ donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Z) = \frac{5}{2} + 3$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 11/2}$ et $\text{Cov}(X,Y) = \text{Cov}(X,Z) + \text{Var}(X) = \text{Var}(X)$, soit $\boxed{\text{Cov}(X,Y) = 3/4}$.

Exercice 22. $(*)$ On jette simultanément deux pièces A et B de façon répétée: La probabilité d'obtenir pile pour A comme pour B est p. On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire correspondant au nombre de jets nécessaires pour obtenir pile avec A (respectivement avec B).

a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

b) Quelle est la probabilité que la pièce A soit strictement la première à retomber du côté pile et que ceci se réalise au $k^{\text{ème}}$ jet ?

c) Calculer $P(X < Y)$.

d) Quelle est la probabilité que les deux pièces retombent du côté pile pour la première fois lors d'un même jet ?

e) Retrouver le résultat de c) en utilisant d).

Corrigé :

- a) Les variables aléatoires X et Y suivent la même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p :
$\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = pq^{k-1}$, $P(X = \ell) = pq^{\ell-1}$.
Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, on obtient :

$$\forall (k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P([X = k] \cap [Y = \ell]) \ = \ p^2 q^{k+\ell-2}.$$

- b) On cherche $P([X = k] \cap [Y > k])$:

$$\begin{aligned}
P([X = k] \cap [Y > k]) &= P(X = k)P(Y > k) = pq^{k-1}(1 - P(Y \leqslant k)) \\
&= pq^{k-1}(1 - \sum_{\ell=1}^{k} P(Y = \ell) = pq^{k-1}(1 - \sum_{\ell=1}^{k} pq^{\ell-1}) \\
&= pq^{k-1}(1 - p\sum_{\ell=0}^{k-1} q^{\ell}) = pq^{k-1}(1 - p\frac{1 - q^k}{p}) = pq^{2k-1}.
\end{aligned}$$

- c) On a :

$$\begin{aligned}
P(X < Y) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty}([X = k] \cap [Y > k])) \ &= \ \sum_{k=1}^{\infty} P([X = k] \cap [Y > k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^k = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1 - q^2} - 1\right) = \frac{pq}{1 - q^2} \\
&= \frac{pq}{(1 - q)(1 + q)} = \frac{q}{1 + q}.
\end{aligned}$$

- d) La probabilité que les deux pièces retombent du côté pile pour la première fois lors d'un même jet vaut :

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}pq^{k-1} = \frac{p^2}{q^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(q^2)^k = \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{1 - q^2} - 1\right) = \frac{p}{1 + q}.
\end{aligned}$$

Par symétrie, les variables aléatoires X et Y jouant le même rôle, on a

$$P(X < Y) = P(Y < X) = \frac{q}{1 + q}.$$

Par ailleurs :

$$1 = P(X < Y) + P(Y < X) + P(X = Y).$$

On en déduit que :

$$P(X = Y) = 1 - 2\frac{q}{1+q} = \frac{1-q}{1+q} = \frac{p}{1+q}.$$

On retrouve ainsi le résultat de la question d)

Caractéristiques des variables aléatoires

Exercice 23. $(*)$ Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose X et Y mutuellement indépendantes et on pose $Z = XY$.

a) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

b) Déterminer la loi de Z, puis calculer sa variance.

Corrigé :

- a) $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ car X et Y sont indépendantes, donc $\boxed{\mathbb{E}(Z) = p\lambda}$.
- b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(Z = k) = P(\{X = 1\} \cap \{Y = k\}) = P(X = 1)P(Y = k) = pe^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

et

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(\{X = 0\} \cup \{Y = 0\}) \\ &= P(X = 0) + P(Y = 0) - P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}), \end{aligned}$$

soit $P(Z = 0) = 1 - p + pe^{-\lambda}$.

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = p(\mathrm{Var}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) = p(\lambda + \lambda^2),$$

donc $\boxed{\mathrm{Var}(Z) = p\lambda(1 + \lambda - \lambda p)}$.

Exercice 24. $(*)$ On donne $p_{i,j} = \begin{cases} 1/4 \text{ pour } (i,j) = (1,-1), (0,0), (2,0) \text{ et } (1,1) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

a) Vérifier que $(p_{i,j})$ définit la loi d'un couple discret (X,Y). [*Faire un tableau (3,3)*].
b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
c) Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
d) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = 0\}$.

Corrigé :

- a) $p_{i,j} \geqslant 0$ pour tout (i,j) et $\sum_i \sum_j p_{i,j} = 1$ donc $(p_{i,j})$ définit la loi d'un couple discret (X,Y).
- b) $X(\Omega) = \{0,1,2\}$, avec $p_{0.} = p_{0,0} = \frac{1}{4}$, $p_{1.} = p_{1,-1} + p_{1,1} = \frac{1}{2}$ et $p_{2.} = p_{2,0} = \frac{1}{4}$; $Y(\Omega) = \{-1,0,1\}$, avec $p_{.-1} = p_{1,-1} = \frac{1}{4}$, $p_{.0} = p_{0,0} + p_{2,0} = \frac{1}{2}$ et $p_{.1} = p_{1,1} = \frac{1}{4}$.
- c) $\mathbb{E}(X) = 0p_{0.} + 1p_{1.} + 2p_{2.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et $\mathbb{E}(Y) = -1p_{.-1} + 0p_{.0} + 1p_{.1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ $\mathbb{E}(XY) = 0p_{0,0} + 0p_{2,0} + 1p_{1,1} - 1p_{1,-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = 0}$. Toutefois, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car, par exemple, $p_{1,0} = 0 \neq p_{1.}p_{.0}$.
- d) $p_{0.} = \frac{1}{4}$ et $P_{(X=0)}(Y = j) = \frac{p_{0,j}}{p_{0.}} = 4p_{0,j}$ non nul seulement pour $j = 0$, avec $p_{0,0} = \frac{1}{4}$. On a donc $\boxed{P_{X=0|Y} = \delta_0}$.

Exercice 25. $(**)$ On considère une variable entière X dont la loi conditionnelle à $[Y = m]$, pour $m \in \mathbb{N}$, est l'équiprobabilité sur $\{m, m+1\}$.
a) Déterminer $\mathbb{E}_Y[X]$.
b) En déduire que X admet une espérance que l'on indiquera.

Corrigé :
Soit $m \in \mathbb{N}$, déterminons la loi conditionnelle de X à l'événement $[Y = m]$: les valeurs possibles de X sont m et $m+1$ et

$$P_{[Y=m]}(X = m) = P_{[Y=m]}(X = m) = \frac{1}{2}.$$

a) On a : $\mathbb{E}_{[Y=m]}[X] = m \times \frac{1}{2} + (m+1) \times \frac{1}{2} = m + \frac{1}{2}$. Il vient finalement : $\mathbb{E}_Y[X] = Y + \frac{1}{2}$.

b) On a, avec le théorème de l'espérance totale,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_Y[X]] = \mathbb{E}[Y + \frac{1}{2}] = \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2}.$$

On obtient alors : $\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$.

Exercice 26. $(***)$ Un élève subit un QCM de 20 questions comportant $k \geqslant 2$ propositions de réponses par question, n'écoutant que son courage, cet élève entreprend de répondre au hasard à ce QCM. Dans un premier temps, l'élève répond au QCM et on lui indique à la fin si ses réponses sont bonnes ou fausses et on note X le nombre de bonnes réponses lors de ce premier essai. Dans un second temps, l'élève reprend sa feuille et recommence le QCM, les questions bien traitées ayant déjà été validées (à chaque question recommencée, il répond au hasard parmi les $(k-1)$ réponses restantes) et on note Y le nombre de bonnes réponses lors de ce deuxième essai.
a) Déterminer la loi de X.
b) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$.
c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Corrigé :

- a) Les réponses sont mutuellement indépendantes et chacune relève du schéma de Bernoulli avec le succès de probabilité $1/k$, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 1/k)$, soit $X(\Omega) = \{0, \dots, 20\}$ avec

$$P(X = i) = \binom{20}{i}\left(\frac{1}{k}\right)^i\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{20-i}.$$

- b) On a $Y(\Omega) = \{0, \dots, 20\}$. Si $0 \leqslant i \leqslant 20$ et $X = i$, alors, comme en a), il vient, pour $0 \leqslant j \leqslant 20 - i$,

$$P(Y = j|X = i) = \binom{20-i}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j},$$

tandis que $P(Y = j|X = i) = 0$ si $j > 20 - i$.

- c) On a alors $P(Y = j) = \sum\limits_{i=0}^{20-j} P(Y = j|X = i)P(X = i)$ (car $j \leqslant 20-i$ équivaut à $i \leqslant 20-j$). On a donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=0}^{20} j \sum_{i=0}^{20-j}\binom{20-i}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j} P(X = i)\\ &= \sum_{i=0}^{20} P(X = i) \sum_{j=0}^{20-i} j\binom{20-i}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j}.\end{aligned}$$

$\sum\limits_{j=0}^{20-i} j\binom{20-i}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j}$ est l'espérance d'une variable de la loi binomiale $\mathcal{B}(20 - i, \frac{1}{k-1})$, donc c'est $\frac{20-i}{k-1}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{20}(20 - i)P(X = i) = \frac{20}{k-1}\sum_{i=0}^{20} P(X = i) - \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{20} iP(X = i)\\ &= \frac{20 - \mathbb{E}(X)}{k-1} = \left(20 - \frac{20}{k}\right)\frac{1}{k-1} = \frac{20}{k}.\end{aligned}$$

Exercice 27. (**) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_m}{X_1+\cdots+X_n}\right)$.

Corrigé :

Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On a $S_n > 0$ et aussi $0 < S_m \leqslant S_n$ si $1 \leqslant m \leqslant n$. Cela fait que $0 \leqslant Y_{m,n} = \frac{S_m}{S_n} \leqslant 1$. Si $Y_{m,n}(\Omega) \subset \{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ (éléments distincts deux à deux), alors

$$0 \leqslant y_k P(Y_{m,n} = y_k) \leqslant P(Y_{m,n} = y_k)$$

avec $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Y_{m,n} = y_k) = 1$, donc, par domination, $Y_{m,n}$ admet une espérance. En fait, $Y_{1,n} = \frac{X_1}{S_n}$ admet une espérance, de même que les $\frac{X_k}{S_n}$ qui ont la même loi que $\frac{X_1}{S_n}$ car

$$\left\{\frac{X_1}{S_n} = x\right\} = \bigcup_{s \in S_n(\Omega)}\{X_1 = xs\} = \bigcup_{s \in S_n(\Omega)}\{X_k = xs\} = \left\{\frac{X_k}{S_n} = x\right\}.$$

Par linéarité de l'espérance, il vient alors $\mathbb{E}(Y_{m,n}) = m\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{S_n}\right)$. En appliquant ceci à $m = n$, il vient, puisque $Y_{n,n} = 1$, $1 = n\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{S_n}\right)$. Il s'ensuit que $\boxed{\mathbb{E}(Y_{m,n}) = \frac{m}{n}}$.

Exercice 28. $(**)$ Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires sur Ω, indépendantes et suivant chacune la même loi définie par $X_i(\Omega) = \{-1,0,1\}$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = (1-p)^2$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p^2$. On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1+X_i}{2}$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathrm{Var}(X_i)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer une majoration de $\mathbb{P}(|Y_n - p| \geqslant \varepsilon)$ prouvant que cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé :

- a) On a

$$\mathbb{E}(X_i) = (-1).(1-p)^2 + 0.2p(1-p) + 1.p^2 = p^2 - (1-p)^2 = 2p - 1.$$

Puis, avec le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_i) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= (-1)^2.(1-p)^2 + 0^2.2p(1-p) + 1^2.p^2 - (2p-1)^2 \\ &= p^2 + (1-p)^2 - (2p-1)^2 = 2p(1-p).\end{aligned}$$

- b) Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(1) + \mathbb{E}(X_i)) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(1 + \mathbb{E}(X_i)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}(X_1)) = p.\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $1 + X_i$ restent indépendantes avec la définition car $P(X_i + 1 = x_i) = P(X_i = x_i - 1)$, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_n) &= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(1 + X_i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) \\ &= \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{4n} = \frac{p(1-p)}{2n}.\end{aligned}$$

- c) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dit que

$$P(|Y_n - E(Y_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

, soit que

$$\boxed{P(|Y_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{2n\varepsilon^2}.}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 29.}}$ $(**)$ On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

a) Donner la loi de X. En déduire $\mathbb{E}[X]$.

b) Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathbb{E}[Y]$.

c) Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé :

- a) Pour $i = 1, \ldots, 6$, l'événement $X = i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
  - A : $U_1 = i$ et $U_2 = i$;
  - B : $U_1 = i$ et $U_2 > i$;
  - C : $U_1 > i$ et $U_2 = i$.

  Par indépendance des variables aléatoires U_1 et U_2, on en déduit que

  $$P(A) = \frac{1}{36},\ P(B) = \frac{6-i}{36} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{6-i}{36}.$$

  Il vient $P(X = 1) = 11/36$, $P(X = 2) = 9/36$, $P(X = 3) = 7/36$, $P(X = 4) = 5/36$, $P(X = 5) = 3/36$, $P(X = 6) = 1/36$.
  On en déduit $\boxed{\mathbb{E}[X] = 91/36}$.

  Pour déterminer la loi de X, on peut aussi faire un tableau à double entrées contenant la valeur de X selon les valeurs de U et V :

$U \backslash V$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	4	5
6	1	2	3	4	5	6

  En comptant le nombre de 1 dans le tableau, on obtient que m'on a 11 chances sur 36 que X soit égal à 1 et ainsi de suite...

- b) On a $X + Y = U_1 + U_2$ car (U_1, U_2) est une permutation de (X, Y). Il vient

  $$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[U_1] + \mathbb{E}[U_2] = 7,$$

  puisque chaque U_i suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$, son espérance vaut $(6 + 1)/2 = 7/2$.
  On en déduit $\boxed{\mathbb{E}[Y] = 161/36}$.

- c) On a $XY = U_1U_2$. On en déduit

  $$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[U_1U_2] = \mathbb{E}[U_1]\mathbb{E}[U_2]$$

  par indépendance de ces deux variables aléatoires. D'où

  $$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1225}{1296}.$$

  Les deux variables ne sont pas indépendantes puisque leur covariance n'est pas nulle.