Optimisation

Exo 9

① Exprimer h en f^{ct} de x :

$$V = h \times x \times 6 \to h = \frac{V}{6x} = \frac{35,5}{6x} = \frac{75}{12x}$$

② Mq l'aire totale du conteneur (Σ des aires des 6 faces) est donnée en f^{ct} de x par

$$S(x) = 12x + 12,5 + \frac{75}{x}$$

Le conteneur est 1 parallélépède rectangle, donc les faces opposées sont de surfaces égales, d'où

$$S(x) = 2 \times (6x) + 2 \times (hx) + 2 \times (6h)$$

$$S(x) = 12x + 2hx + 12h$$

$$S(x) = 12x + \frac{75}{6} + \frac{75}{x}$$

③ Etude de $S(x)$ pour $0 < x \leq 6$

a) $\forall x \in]0,6]$, on a

$$S'(x) = 12 - \frac{75}{x^2}$$

b) $\forall x \in]0,6]$, on a

$$S'(x) \geq 0 \iff \frac{12x^2 - 75}{x^2} \geq 0$$

$$\iff 12x^2 - 75 \geq 0 \quad (\text{car } x^2 > 0)$$

$$\iff x^2 - \frac{75}{12} \geq 0$$

$$\iff x^2 - 6,25 \geq 0$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \rightarrow$

$$\iff (x + \sqrt{6,25})(x - \sqrt{6.25}) \geq 0$$

En étudiant ce produit (son signe) car $x > 0$

$$\iff x \geq 2.5$$

ou en utilisant $x^2 \geq 6.25 \iff |x| \geq \sqrt{6.25} \iff x \geq \sqrt{6.25}$ ou $x \leq -\sqrt{6.25}$

On a ainsi

x	0		$\sqrt{6,25} = 2.5$		6
$S'(x)$			0		
$S(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$72,5$	$\nearrow$	97
	$\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$		$S(\sqrt{6.25})$		$S(6)$

ⓒ D'après le tableau de variation de S, on en déduit que S admet 1 minimum global sur $]0, 6]$ atteint en $x = \sqrt{6.25} = 2.5$ (condition d'ordre 0)

Finalement la surface minimale pour $V = 37,5\,m^3$ est $72,5\,m^2$ obtenue pour $x = \sqrt{6.25} = 2.5\,m$ et

$$h = \frac{V}{6x} = \frac{V}{6\times 2.5} = \frac{37,5}{6\times 2,5} = 2.5$$

Exo 10

$$f(x) = \frac{2\ln(x)+2}{x} \; ; \; x>0$$

① Pour $x>0$; $f(x) = 0 \iff \dfrac{2+2\ln x}{x} = 0$

$\iff 2+2\ln x = 0$

$\iff 1+\ln x = 0$

$\iff \ln x = -1$

$\iff e^{\ln x} = e^{-1}$

$\iff x = e^{-1} \simeq 0,368 \Rightarrow S = \{0,3$

② $x>0$; $f(x)>0 \iff \dfrac{2+2\ln x}{x} > 0$ $\quad x>0$

$\iff 2+2\ln x > 0$

$\iff \ln x > -1$

$\iff x > e^{-1} \Rightarrow S =]e^{-1}, +\infty[$

3) Tableau de variation de f: (3

$x \mapsto f(x)$ est 1e f^{ct} dérivable car les fct $x \mapsto 2(1+\ln x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables pour $x > 0$. On a ainsi :

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$ avec $u = 2(1+\ln x)$ et $v = x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2}$$

et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2\ln x}{x^2} \geq 0$; $x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -2\ln x \geq 0$ (Multiplions par -1, changer le signe de l'inégalité)

$\Leftrightarrow \ln x \leq 0$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} \leq e^0 = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{x \leq 1}$

De plus f' est aussi dérivable (f^{ct} fractionnaire de f^{ct} dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) $\forall x > 0$ $\left(f = \frac{u}{v}\right)$

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \times x^2 + 4(\ln x)x}{x^4} = \frac{4\ln x - 2}{x^3}$$

et on a $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4\ln x - 2 \geq 0$ (car $x \geq$

$4\ln x \geq 2$

$\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq e^{1/2}$

Pour dresser le tableau, on calcule :

$*\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2(1+\ln x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{2\ln x}{x}$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée ou règle de l'Hopital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2(1+\ln x)}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \text{ FI}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = $$

* $f(1) = 2$ car $f'(1)=0$ (f' s'annule en 1) ou 1 racine de f'

x	0		e^{-1}		1		$e^{1/2}$	
f''	‖	$-$				$-$	0	$+$
f'	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$
f	‖ $-\infty$	↗			$f(1) = 2$	↘		0

5)a $\forall x>0$, on a $f(x)\geq 0 \iff x \geq e^{-1} \simeq 0.368$. Pour que le bénéfice soit positif, il faut donc l'entrep… vende au moins (0.368×1000) objets par mois.

b/ f admet un maximum en 1, ce qui nous donne 1000 objets vendus.

c) En utilisant le tableau de variation de f, on $f(0.2) \simeq -6.09 < 0 < f(20)$ donc
$f([0.2 ; 20]) = [-6.09 ; 2]$

$f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, 2]$

Exo 11 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = -x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 32x - 4$

1) Maximas et minimas de f :

f est 1 f^{ct} polynomiale, donc elle est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 24x - 32$

on a $f'(1) = (-4 \times 1^3) + (12 \times 1^2) + (24 \times 1) - 32 = 0$

donc $\exists Q$ tel que $f'(x) = (x-1)\, Q(x)$

où $d^\circ Q \leq 2$.

Par la méthode d'Horner, on a :

	x^3	x^2	x	1
$f'(x)$	-4	12	24	-32
1	$\times$	-4	8	32
$Q(x)$	-4	8	32	0
	x^2	x	1	

$\Rightarrow Q(x) = -4x^2 + 8x + 32 = -4(x^2 - 2x - 8)$

$\Delta(x^2 - 2x - 8) = (-2)^2 - 4 \times (1) \times (-8) = 4 + 32 = 36 = 6$

$\Delta > 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{36}}{2} = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{36}}{2} = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow Q(x) = -4(x-4)(x-(-2)) = -4(x-4)(x+$

d'où $f'(x) = -4(x-1)(x+2)(x-4)$

les pts critiques de f' sont $1 ; -2 ; 4$.

Pour déterminer la nature de chaque pt, on calcule

$f''(x) = -12x^2 + 24x + 24 = -12(x - 2x - 2)$

↳ f'' est continue donc on peut évaluer f'' en chaque point :

* $f''(1) = -(12 \times 1^2) + (24 \times 1) + 24 = 36 > 0$

$\Rightarrow$ 1 est un minimum local de f et vaut

$f(1) = -21$

* $f''(4) = -(12 \times 4^2) + (24 \times 4) + 24 = -72 < 0$

$\Rightarrow$ 4 est un maximum local de f et vaut

$f(4) = 60$

* $f''(-2) = -72 < 0$ $\Rightarrow$ -2 est un maximum local de f

et vaut $f(-2) = 60$.

a) Max ~~ou~~ Min global sur IR.

on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} -x^4 = -\infty$

donc pour la condition d'ordre 0, f n'admet pas de minimum global ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$) mais elle admet un maximum global ($\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$) $\Rightarrow$ 4 est maximum global

En effet, en comparant les valeurs de f en $x = -2$ et $x = 1$ et $x = 4$ on a :

$$f(4) = 60 \; ; \; f(-2) = 60 \text{ et } f(1) = -21$$

et $-2 < 4$ donc 4 est 1 max. global.

b/ $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty, 60\right]$

c) Pour déterminer $f([0,3])$, il faut dresser le tableau de variation de f en effet entre -2 et 4 la f^{ct} admet un minimum local.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	60	$\searrow$	-21	$\nearrow$	60	$\searrow$	

On a $f(0) = -4$; $f(3) = 35 \Rightarrow f([0,3]) = [-21, 35]$

min local

2) Pour déterminer le nbre de solutions réelle de $f(x) = 0$, il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $]-\infty, -2]$; $[-2, 1]$, $[1, 4]$ et $[4, +\infty[$

* sur $]-\infty, -2]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $f(-2) = 60 > 0$

donc $\exists\, x_0 \in \left]-\infty, -2\right[\,/\, f(x_0) = 0$

* sur $[-2, 1]$: $f(-2) = 60 > 0$ et $f(1) = -21 < 0$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in]-2, 1[\ / \ f(x_1) = 0$

* sur $[1, 4]$: $f(1) = -21 < 0$ et $f(4) = 60 > 0$

$\Rightarrow \exists\, x_2 \in]1, 4[\ / \ f(x_2) = 0$

* sur $[4, +\infty[$: $f(4) = 60 > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

$\Rightarrow \exists\, x_3 \in]4, +\infty[\ / \ f(x_3) = 0$

donc f s'annule au moins quatre fois dans $\mathbb{R}$ et

Comme $d^\circ f = 4$ donc f admet au plus 4 racines réelles et finalement $f(x) = 0$ admet exactement 4 racines réelles.

Exo 12 $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{(x-1)}\,(x-2)} \quad \forall x \in D_f =]1, 2[\cup]2, +\infty[$

Mq f est prolongeable par continuité en 1 et 2 et que cet unique prolongement est

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \in D_f \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases} \qquad \forall x \geq 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-1}\,(x-2)} = \frac{2^2 - (3 \times 2) + 2}{\sqrt{2-1}\,(2-2)} = \frac{0}{0} \ \text{F}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}\,(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{2-1}{\sqrt{2-1}} =$$

donc on pose $\underline{f(2) = 1} = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

$\left(\lim f(x) = \lim f(x) = 1 \right) \leftarrow$ vu la simplification de la f ct

$\cdot \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-1}\,(x-2)} = \frac{1^2 - (3\times 1) + 2}{\sqrt{1-1}\,(1-2)} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}\,(x-2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)}{\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$x \to 1^+$ $\Leftrightarrow$ $x \to 1$ $x > 1 \Leftrightarrow x-1$

$$= \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 1 - 1 = 0$$

Posons $f(1) = 0$ donc le prolongement par continuité de f est

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-1}\,(x-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{(x-1)}\,(x-2)} = \sqrt{x-1} & \text{si} \\ f(2) = 1 & \text{si } x = 2 \\ f(1) = 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

pour tout $x \geq 2$