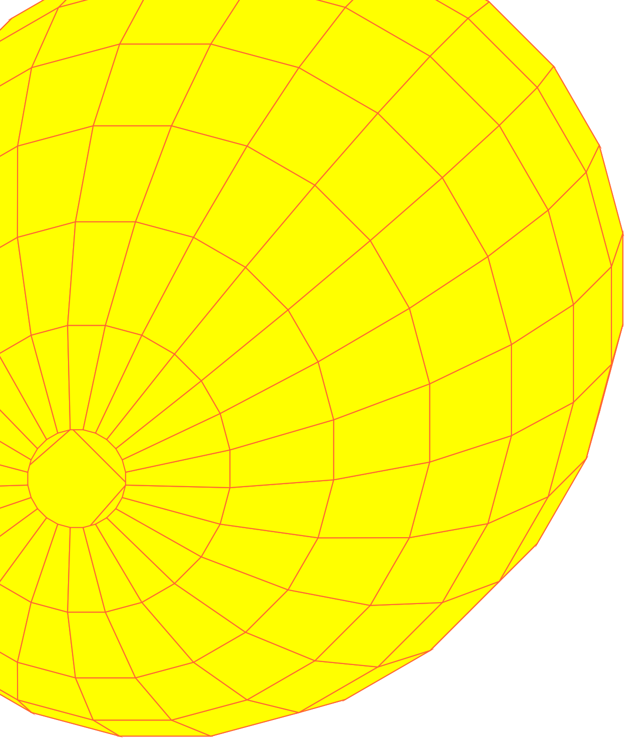


Mathématiques - Techniques de Commercialisation

Polycopié de cours
Année universitaire : 2021/2022

Département de Mathématiques
IUT de Tarbes, France

Hammou El-Otmany

Chapter 1

Loi de probabilités discrètes

***

Dans ce chapitre, on présente les loi de probabilités discrètes usuelles et les variables qui nous permettant de définir différentes méthodes de probabilités.

1-1 Rappels sur les variables aléatoires

Définition 1.

On appelle variable aléatoire sur Ω toute fonction ou application définie sur l'univers Ω associé à une expérience aléatoire (lié au hasard), à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Il en existe deux types de variables aléatoires :

1. Variables aléatoires discrètes : (dénombrables) elle est dite discrète lorsque les valeurs x_i qu'elle est susceptible de prendre sont en nombre fini, ou encore formés de nombres entiers. Voici quelques exemples :
   - nombre de "face ou pile" apparaissant après 10 jets d'une pièce ;
   - nombre de véhicules passant à un carrefour dans une journée ;
   - nombre de clients entrant dans un magasin le samedi.
2. Variables aléatoires continues : (regroupées dans une classe) elle est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. Voici quelques exemples :
   - intervalle de temps entre 2 passages de train ;
   - longueur de cheveux ;
   - durée de vie en secondes d'une pièce électronique ;

Notations : soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω. On note $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les différentes images des éléments de Ω par X (nous précisons que $n \leq card(\Omega)$ en effet, nous ne pouvons pas avoir plus d'images que d'antécédent).

Alors, on désigne $\{X = x_i\}$, $1 \leq i \leq n$ l'événement constitué de tous les éléments de Ω ayant pour image x_i par X.
Exemple : On lance deux dés non truqués (expérience aléatoire) et on s'intéresse à la somme obtenue lors du lancer. Sachant que chaque partie coûte $3,50$ euros, le joueur participe au jeu suivant :

- si la somme obtenue est un multiple de 3, alors le joueur gagne 3€;
- si la somme obtenue est égale à 8, alors le joueur gagne 4€;
- dans tous les cas, le joueur ne gagne rien.

On désigne par X la variable aléatoire associée au gain de ce jeu (le gain est algébrique, c'est-à-dire qu'il peut être négatif : c'est le cas quand le joueur perd de l'argent). Alors, les valeurs prises par X sont :

- $3 - 3,50 = -0,50$ (cas où la somme est un multiple de 3);
- $4 - 3,50 = 0,50$ (cas où la somme est égale à 8) ;
- $0 - 3,50 = -3,50$ (cas où le joueur ne gagne rien et que la partie lui a coûté $3,50$).

On conclut donc que $(X = -0,50) = \{3; 6; 9; 12\}$, $(X = 0,50) = \{8\}$, et $(X = -3,50) = \{2; 4; 5; 7; 10; 11\}$,

Définition 2.

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω. On note $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les différentes images des éléments de Ω par X. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X (plus simplement loi de X) la donnée des probabilités des événements $(X = x_i)$ pour $i \in \{1; \cdots; n\}$.

Remarque 3.

En guise de de conclusion, la loi d'une variable aléatoire est donnée sous forme d'un tableau.

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus, nous avons :

- $P(X = -0.5) = p_3 + p_6 + p_9 + p_{12} = \frac{1}{3}$
- $P(X = 0,50) = p_8 = \frac{5}{36}$
- $P(X = -3,50) = p_2 + p_4 + p_5 + p_7 + p_{10} + p_{11} = \frac{19}{36}$.

Par conséquent, la loi de X est :

Valeurs de x_i	$-3,50$	$-0,50$	$0,50$
Valeurs de $P(X = x_i)$	$\frac{19}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{5}{36}$

On vérifie facilement que la somme des probabilités des événements $(X = x_i)$ est égale à 1.

Remarque 4.

Il est utile de noter que la somme des probabilités des événements $(X = x_i)$ est toujours égale à 1.

1-1.1 Espérance, variance et écart-type

Définition 5.

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω. On note $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les différentes images des éléments de Ω par X. Alors, on définit

- l'**espérance** de X par : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.
- la **variance** de X par : $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - E(X))\, P(X = x_i)$.
- l'**écart-type** de X par : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 6.

L'espérance correspond à la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X. La variance et l'écart-type ont la même interprétation qu'en statistique.

Reprenons les notations et les définitions précédentes, on a la proposition suivante :

Proposition 7.

La variance de la variable aléatoire X est donné aussi par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2 .$$

Exemple : Reprenons l'exemple du lancer de deux dés non pipés. Alors, on a :

- $E(X) = (-3.50) \times \frac{19}{36} + (-0.50) \times \frac{12}{36} + 0.50 \times \frac{5}{36} \approx -1.94$: cela signifie que que le joueur va perdre en moyenne (environ)1.94. L'espérance correspond donc au gain moyen du joueur (Ici c'est une perte d'argent). On dit donc que le jeu est défavorable au joueur. Si l'espérance avait été positive, alors le jeu aurait été favorable au joueur et si l'espérance avait été nulle, alors le jeu aurait été équitable.
- $V(X) = (-3.50)^2 \times \frac{19}{36} + (-0.50)^2 \times \frac{12}{36} + 0.50^2 \times \frac{5}{36} - (1.94)^2 \approx 2.97$
- $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.97} \approx 1.72$.

Proposition 8 (Transformation affine des données)**.**

Soient X une variable aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :
- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- $\sigma_{aX+b} = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = \begin{cases} a\,\sigma_X & si\, a \geq 0 \\ -a\,\sigma_X & si\, a < 0 \end{cases}$.

Exemple : Dans un magasin commercial, un technicien commercial est rémunéré avec une commission et un salaire fixe. On définit le salaire Y du technicien par la formule $Y = aX + b$, avec X le chiffre d'affaire,a le taux de commission et b le salaire fixe.

- Calcul l'espérance de salaire du technicien : $E(Y) = aE(X) + b$; Ici, l'espérance dépend essentiellement d'espérance du chiffre d'affaire et et du salaire fixe.
- Mesure le risque du salaire : $V(Y) = a^2 V(X)$.

Prenons par exemple: $a = 0.03$, $b = 1325$€et le chiffre d'affaire moyen $E(X) = 12000$€. On a donc $E(Y) = 0.03 \times 12000 + 1325 = 1685$€

1-2 Loi de probabilités discrètes

1-2.1 Loi de Bernoulli

Définition 9.

On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues, appelées succès (S) et échec(E). On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (avec $0 \leq p \leq 1$) si elle prend exactement deux valeurs 0 et 1, avec $P(X = 1) = p$. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque 10.

Comme X est une variable aléatoire prenant exactement les deux valeurs 0 et 1, $P(X=0)+P(X=1)=1$, si bien que $P(X=0)=1-P(X=1)=1-p$. La loi de X s'écrit ainsi

Valeurs de x_i	0	1
Valeurs de $P(X=x_i)$	$1-p$	p

Exemple : Une entreprise spécialisée dans la fabrication des ordinateurs possède 10 chaînes de fabrication $C_1, C_2, \cdots, C_{10}$. Elle sait qu'une chaîne possède un problème mais elle ignore laquelle, elle choisit alors une chaîne au hasard. On considère la variable aléatoire X prenant la valeur 1 si la chaîne testée est la chaîne défaillante et 0 sinon.

Cette expérience est alors associée à une épreuve de Bernoulli. Ainsi, la variable aléatoire X suit une variable de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$ que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(p=\frac{1}{10}\right)$. En effet, la probabilité de choisir une chaîne défaillante est $p = P(X =' succès") = \frac{1}{10}$.

Dans la suite, on utilise l'expérience aléatoire décrite dans l'exemple ci-dessous :
Exemple : On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé non truqué à 6 faces. Si on obtient le nombre $'6'$, alors on a gagné, sinon on a perdu. Cette expérience aléatoire est donc associée à une épreuve de Bernoulli, car deux situations sont présentes :

- succès : "obtenir le nombre 6 $\Longrightarrow$ gain ";
- échec : "ne pas obtenir le nombre 6 $\Longrightarrow$ perte";

On considère la variable aléatoire X qui prend deux valeurs 0 (échec) et 1 (succès). On en déduit donc que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$ car la probabilité d'obtenir le nombre $'6'$ (d'avoir le succès) est $p = P(X =' succès') = \frac{1}{6}$. On note donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p=\frac{1}{6})$.

Proposition 11.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 \leq p \leq 1$. Alors, on a

$$E(X) = p, \quad V(X) = p(1-p), \quad \sigma_X = \sqrt{p(1-p)}.$$

Exemple : On reprend l'expérience aléatoire 1-2.1 dont la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(p=\frac{1}{6})$. Alors, on a

$$E(X) = \frac{1}{6} = 0.1, \quad V(X) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}, \quad \sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$

1-2.2 Loi binomiale

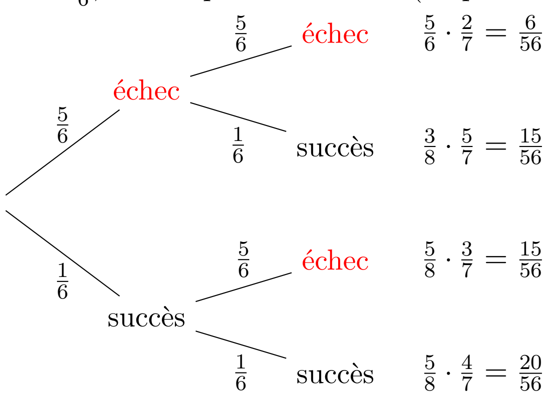
Définition 12.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire quelconque. X est dite une variable suivant la loi binomiale de paramètres n et p lorsqu'elle comptabilise le nombre de succès lors de la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli (schéma de Bernoulli) de paramètre p. On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire de l'exemple 1-2.1 traité dans le paragraphe 1-2.1 et on la répète trois fois de manières indépendantes. A l'issue des trois lancers de dé, on compte le nombre total des succès.

1. Avec les conditions ci-dessus, cette expérience est donc un schéma de Bernoulli. Par conséquent, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$, en effet la probabilité de succès (obtenir nombre $'6'$) est $p = \frac{1}{6}$. Ainsi, on note
$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n = 3; p = \frac{1}{6}\right).$$
2. Déterminons la loi de X en utilisant les arbres probabilistes : commençons par remarquer que X peut prendre les valeurs $0, 1, 2$ et 3. En effet, lors des trois lancers, on peut avoir les situations suivantes :
   - ne pas obtenir le nombre $'6'$, c'est-à-dire $'6'$ n'apparait pas lors des trois lancers (0 fois).
   - obtenir une fois le nombre $'6'$.
   - obtenir deux fois le nombre $'6'$.
   - obtenir trois fois le nombre $'6'$.

   Réalisons maintenant un arbre probabiliste qui traduit la situation où S représente le succès (obtenir le nombre $'6'$) de probabilité $\frac{1}{6}$, et E représente l'échec (ne pas obtenir le



   nombre $'6'$) de probabilité $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.
   On a les résultats suivants :
   - $P(X = 0)$ désigne la probabilité d'obtenir 0 succès (i.e. obtenir trois échecs consécutifs). Il existe donc un seul chemin dans l'arbre contenant 0 succès et on a $P(X = 0) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

- $P(X=1)$ désigne la probabilité d'obtenir 1 succès. Il existe donctrois chemins dans l'arbre contenant 1 succès et on a $P(X=1) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$.
- $P(X=2)$ désigne la probabilité d'obtenir 2 succès. Il existe donc trois chemins dans l'arbre contenant 1 succès et on a $P(X=1) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$.
- $P(X=3)$ désigne la probabilité d'obtenir 3 succès. Il existe donc un seul chemin dans l'arbre contenant 3 succès et on a $P(X=1) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$.

D'où loi de probabilité de X (on vérifie facilement que la somme des probabilité vaut 1) :

Valeurs de x_i	0	1	2	3
Valeurs de $P(X=x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

D'où le théorème suivant :

Théorème 13.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $0 \leq p \leq 1$. On considère X une variable aléatoire suivant la loi Binomiale $B(n;p)$. Alors, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$P(X=k) = \underbrace{C_n^k}_{\text{nombre de chemins contenant k succès parmi n épreuves}} \times \underbrace{p^k}_{\text{probabilité des k succès}} \times \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{probabilité des n-k échecs}}$$

où $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Remarque 14.

Il est utile de noter que la probabilité de l'événement $\{X = k+1\}$ et celle de l'événement $\{X = k\}$ sont liées par la formule suivante :

$$P(X = k+1) = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} P(X=k).$$

Proposition 15.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \geq 2$ et $p \in [0,1]$. Alors, on a :

- Espérance : $E(X) = np$;
- Variance : $V(X) = np(1-p)$;
- Écart-type : $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple : On reprend l'expérience aléatoire de l'exemple 1-2.1. On sait que la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=3;p=6)$. On a donc

$$E(X)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad V(X)=3\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{12},\quad \sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Remarque 16.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \hookrightarrow B(n_1;p)$ et $X_2 \hookrightarrow B(n_2;p)$. Alors la variable aléatoire $Z=X_1+X_2$ suit la loi binomiale $B(n_1+n_2;p)$. On note que cette propriété peut être généralisée à l variables binomiales indépendantes.

1-2.3 Loi binomiale en proportion (fréquence)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ et $0\leq p\leq 1$ associée au nombre de succès au cours de n épreuves. On note F_n la fréquence de succès définie par rapport entre le nombre de succès et le nombre d'épreuves et on écrit $F_n=\frac{X}{n}$.

Définition 17.

On dit que la variable aléatoire F_n suit la loi binomiale en fréquence lorsqu'elle prend les valeurs d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale divisées par le nombre d'épreuves. On note $X \hookrightarrow BF(n;p)$ et on a

$$P(F_n=f)=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

Proposition 18.

Soit F_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale en fréquence $BF(n;p)$ avec $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ et $0\leq p\leq 1$. Alors, on a

$$E(F_n)=E\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{E(X)}{n}=\frac{np}{n}=p,\quad V(F_n)=\frac{V(X)}{n^2}=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}.$$

Remarque 19.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $0 \leq p \leq 1$. On désigne par $X = k$ le nombre de succès et par $Y = n - k$ le nombre d'échecs. On a donc

$$P(X = k) = P(Y = n - k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple : Un procédé de fabrication produit 5% d'articles non conformes. Un échantillon de 50 unités de cet article est choisi (prélevé). Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de 7% d'article non conformes dans l'échantillon.

Commençons d'abord par remarquer que la variable aléatoire $F_n = \frac{X}{50}$ associée à cette expérience suit une loi binomiale en fréquence $BF(n = 50; p = 0.05)$. Ensuite, déterminons le nombre de succès k. On a $f = 0.07 = \frac{k}{50}$, d'où $k = 50 \times 0.07 = 3.5$. Or, le calcul des probabilités se fait en utilisant des entiers naturels, donc on utilise la partie entière de 3.5 qui vaut 3.

$$P(F_n \geq 7\%) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} P(x = i) = 1 - \sum_{i=0}^{3} C_{50}^i 0.05^i (1 - 0.05)^{50-i}.$$

1-2.4 Loi hypergéométrique

On tire sans remise m objets d'un ensemble de n objets dont a possédant une caractéristique particulière et les autres $n - a$ ne la possèdent pas, et on note X le nombre d'objets qui possède la caractéristique. Pour mieux comprendre cette loi, on réalise l'expérience aléatoire suivante :

Soit une urne contenant n boules dont a boules noirs et b boules blanches avec $a + b = n$. On effectue m tirages d'une boule sans remise[1] (ou on prélève simultanément m boules) avec $m \leq n$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires obtenues. On dit donc que X suit la loi hypergéométrique dépendant de trois paramètres n, a et m, notée $\mathcal{H}(n; a; m)$, et on a

$$P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_n^m} \tag{1.1}$$

En effet, $\{X = k\}$ est l'ensemble des parties à k éléments parmi a, donc $card(\{X = k\}) = C_a^k C_b^{m-k}$.

Remarque 20.

Si p est la proportion des boules noirs de l'urne, q celle des boules blanches, on a $p = \frac{a}{n}$ et $q = \frac{b}{n}$ avec $p + q = n$. Donc $a = pn, b = qn$ et $P(X = k) = \frac{C_{pn}^k C_{qn}^{m-k}}{C_n^m}$. On note finalement $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n; p; m)$.

[1]le tirage sans remise est dit exhaustif : la boule n'est pas remise dans l'urne après avoir été prélevé

Proposition 21.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n; p; m)$. Alors, on a

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq\frac{n-m}{n-1} = npq\rho$$

où $\rho = \dfrac{n-m}{n-1}$ est le coefficient d'exhaustivité.

Remarque 22.

En général, on considère $n > 1$ dans les expériences aléatoires, donc $\rho < 1$. Par conséquent, la variance d'une variable hypergéométrique (tirages sans remise) est inférieure à la variance de variable binomiale (tirage avec remise).

Exemple : Prenons $(a, b, n, m) = (20, 10, 30, 5)$ et appliquons les formules ci-dessus. On en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{H}\left(30; \frac{2}{3}; 5\right)$.

1-2.5 Loi Poisson ou modèle de Poisson

La loi de Poisson dite aussi la loi des événements rares permet la modélisation de l'observation d'un phénomène (risques pour un contrat d'assurance, observation des météores en astronomie, ...) qui produit des événements à un rythme connu où la probabilité de survenu est très faible. Voici quelques exemples :

- nombre de panne survenue sur une machine ;
- nombre d'accidents qui se produisent à un carrefour ;
- nombre de pièces produites par une machine outil ;

Pour modéliser les différents phénomènes, on s'intéresse à l'observation des événements et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. un seul événement arrive à la fois ;
2. le nombre d'événement se produisant ne dépend que du temps de l'observation ;
3. les événements sont indépendants.

Définition 23.

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ avec λ un réel strictement positif, si elle est à valeurs dans l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Il est facile de vérifier que la somme des probabilités vaut 1. En effet, on admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.
Alors, on a : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1.$

Exemple : On s'intéresse au nombre de clients qui fréquentent une banque chaque jours, pendant une heure. Soit X le nombre de clients fréquentant la banque. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 7$.

- Déterminons la probabilité qu'il y ait deux clients en heure à 10^{-4} près. On a $P(X = 2) = e^{-7}\frac{7^2}{2!} \approx 0.0233$.
- Déterminons la probabilité qu'il y ait au moins cinq clients qui fréquente la banque en heure à 10^{-4} près. On a $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$.
  Il s'agit donc de calculer $P(X \leq 4)$. Donc, il faut déterminer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3$ et $P(X = 4)$. Pour ce faire, on a deux méthodes :
  1. **Méthode 1 :** en utilisant la formule $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$. On a donc

     $$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3 + P(X = 4)] \\ &= 1 - \left[e^{-7}\frac{7^0}{0!} + e^{-7}\frac{7^1}{1!} + e^{-7}\frac{7^2}{2!} + e^{-7}\frac{7^3}{3!} + e^{-7}\frac{7^4}{4!}\right] \approx 1 - 0.1718 \approx 0.8271 \end{aligned}$$

     Il est déconseillé d'utiliser cette méthode pour calculer les probabilités en effet elle demande plus de temps et de calculs.
  2. **méthode 2 :** en utilisant la table de la loi de Poisson, voir la section C de l'annexe. On y trouve les valeurs de $P(X = k)$ arrondie à 10^{-4} où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour les valeurs de $\lambda \geq 1$ et avec $k \geq 0$. Pour utiliser la table, on suit les étapes suivantes : on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(7)$. On se place dans la colonne $\lambda = 7$ du tableau. Ensuite on se place aux lignes correspondantes aux valeurs de k souhaitées. On obtient donc

     $$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3 + P(X = 4) \\ &\approx 0.0009 + 0.0064 + 0.0223 + 0.0521 + 0.0912 \approx 0.1729. \end{aligned}$$

     D'où

     $$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0.1729 \approx 0.8271.$$

     Ainsi, la probabilité qu'il y ai au moins cinq clients qui fréquentent la banque pendant un jours est environ égale à $82,71\%$.

Proposition 24.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où λ est un réel strictement positif. Alors, on a

$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda, \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}.$$

Exemple : On reprend la situation de l'exemple précédent (clients fréquentant une banque dans chaque jours pendant une heure). On a donc $E(X) = 7$. Autrement dit, en moyenne sept clients qui fréquentent la banque pendant une journée. En outres, on a : $V(X) = 7$ et $\sigma_X = \sqrt{7} \approx 2.65$.

Remarque 25.

Dans une étude statistique, si on suppose que les données peuvent être modélisées par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, on peut donc définir le paramètre λ via la moyenne statistique des données.

1-2.6 Approximation d'une loi binomiale

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(190; 0.05)$. On souhaite calculer les valeurs de $P(X = k)$ pour $k \in [0, 190]$. On sait que $P(X = k) = C_{200}^{k} 0.05^k (1 - 0.05)^{200-k}$. Le problème mis en jeu est qu'un calcul peut s'avérer compliqué à obtenir avec une calculatrice classique. Par exemple, si on prend $k = 85$, il faudrait calculer le coefficient binomial $C_{190}^{75} = 1333946243489274949522752337240497134241030470328511560$, s'en suivrait le calcul de 0.05^{75} et de$(1 - 0.05)^{190-75}$. Par conséquent, nous vient l'idée d'utiliser une approximation qui facilite le calcul.
On commence d'abord à constater que la probabilité de succès $P(\text{succès}) = 0.05$ est très faible. Par conséquent, on peut traiter le succès comme un événement rare. Ceci nous conduit à une approximation par la loi de Poisson. De plus, $E(X) = np = 190 \times 0.05 = 9.5$, et d'après la proposition 24, on sait qu'une loi de Poisson de paramètre 9.5 a cette espérance mathématique. Comparons ensuite les distributions des lois $\mathcal{B}(190; 0.05)$ et $\mathcal{P}(9.5)$ représentées respectivement en couleur rouge et bleue. La figure ci-dessus montre que les deux distributions sont très proches. il semble donc raisonnable d'approcher la loi binomiale par la loi de Poisson sous certaines conditions.

Théorème 26.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$. On suppose que $n \geq 30$, $0 \leq p \leq 0.1$, $np < 10$ et on considère la variable $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(np)$. Alors, pour tout entier $k \in [0; n]$, on a $P(X = k) \approx P(Y = k)$.

Exemple : Dans une loterie, on suppose que la probabilité de gagner une partie est égale à 5%. On réalise 140 parties de manière indépendante et on s'intéresse à la probabilité de gagner exactement 12 parties. On note X la variable aléatoire associée au nombre de parties gagnées sur les 140. L'expérience aléatoire décrite ci-dessus admet deux issues, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(140; 0.05)$. On a $E(X) = np = 140 \times 0.05 = 7$. Comme $n = 140 \geq 30$, $0 \leq p = 0.05 \leq 0.1$ et $np = 7 < 10$, donc les hypothèse du théorème 26 sont satisfaites. Par conséquent, on considère la variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(7)$ et on a $P(X = 12) \approx P(Y = 12) = e^{-7}\frac{7^{12}}{12!} \approx 0.0263$.

Remarque 27.

On peut calculer $P(Y = 12)$ en utilisant la table de la loi de Poisson de paramètre 7. On a donc $P(Y = 12) \approx 0.0263$. Ainsi, la probabilité de gagner exactement 12 fois est environ égale à 2.63%.

Chapter 2

Loi de probabilités continues

***

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la loi uniforme, à loi exponentielle et aux lois normales. Contrairement à la loi de Bernoulli, à la loi binomiale, à la loi hypergéométrique et à la loi de Poisson qui sont des lois de probabilités discrètes, ces lois sont dites continues ayant plus d'utilité dans de nombreux domaines tels que la finance de marché, l'économie, marketing, ... Ici, nous allons s'intéresser à des événements de la forme $X \in I$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

2-1 Loi de probabilités continues usuelles

On rappelle d'abord quelques outils de bases sur les variables aléatoires continues Ensuite, on présente les différentes lois de probabilités continues et ses applications.

2-1.1 Rappels de quelques outils de base

Définition 28.

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur I si elle vérifie les assertions suivantes :

- f est positive sur I : $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$;
- f est continue sur I ;
- l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur I est égale à 1 : $\int_I f(x)dx = 1$.

Remarque 29.

Il est utile de noter que :

- une fonction continue est une fonction dont la courbé est tracé sans lever le crayon.
- la $3^{ième}$ assertion de la définition de densité est la version continue de la somme des probabilités égale à 1 dans le cas discret.

Exemple : Soit f une fonction définie sur $I = [6; 8]$ par $f(x) = \frac{1}{2}$. On souhaite prouver que la fonction f est une densité de probabilité. Pour répondre à cette question, on trace d'abord sa courbe représentative.

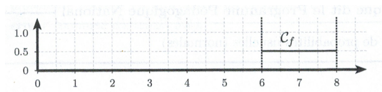


Fig. 2-1.1 – Représentation graphique de f.

i. f est positive sur $I = [6; 8]$, car elle est constante et égale à 0.5.
ii. f est continue sur $I = [6; 8]$, car sa courbe est un segment de droite.
iii. l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur son intervalle de définition I est égale à 1. En effet, cette surface est un rectangle de base égale à 2 et de hauteur égale à $\frac{1}{2}$, ce qui nous donne la valeur de l'aire $\frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Définition 30.

Soient a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$ et f une densité de probabilité sur un intervalle $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire de densité f si

$$P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt. \tag{2.1}$$

Autrement dit, la probabilité $P(X \in [a, b]) = P(a \leq X \leq b)$ est égale à l'aire de la surface comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[a, b]$.

On peut généraliser cette définition dans le cas où l'intervalle I n'est pas borné. Ainsi, on définit de même $P(x \in [a, +\infty[) = P(X \geq a)$ et $P(x \in]-\infty, b]) = P(X \leq b)$ comme étant les aires des surfaces comprises entre la courbe de f et l'axe des abscisses les intervalles $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

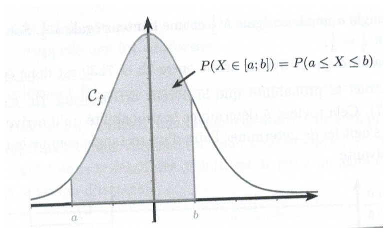


Fig. 2-1.2 – Représentation graphique de f et F.

Remarque 31.

- Par définition, si X est une variable aléatoire à densité f, $P(a \leq X \leq b)$ représente l'aire d'une surface.
- Si on souhaite calculer $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$ ou $P(a < X < b)$, on considère la même surface (ici, on a simplement retiré une partie partie de la frontière de cette surface). Par conséquent $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$.
- De même, on a $P(X \geq a) = P(X > a)$ et $P(X \leq b) = P(X < b)$.

Exemple : Une Poste réceptionne ses courrier-colis chaque jour entre $6h$ et $8h$. On considère la fonction f de l'exemple précédent et X la variable aléatoire de densité f. La probabilité qu'un facteur arrive entre l'instant a et l'instant b (compris entre $6h$ et $8h$) est $P(a \leq X \leq b)$

1. Calculons la probabilité que le facteur arrive entre $7h$ et $7h30$: $P(7 \leq X \leq 7.5)$. Il s'agit ici de déterminer l'aire du rectangle précisé dans la figure 2-1.3 : Ce rectangle a une base

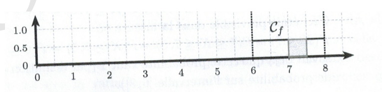


Fig. 2-1.3 – Illustration de la probabilité $P(7 \leq X \leq 7.5)$.

égale à $\frac{1}{2}$ et une hauteur égale $\frac{1}{2}$. Donc, son aire est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$. Par conséquent, la probabilité que le facteur arrive entre $7h$ et $7h30$ est 25%.

2. Calculons la probabilité que le facteur arrive avant $7h$: $P(X \leq 7)$. Cela revient à calculer la probabilité que le facteur arrive entre $7h30$ et $8h$. Il s'agit donc de déterminer l'aire du rectangle représenté dans la figure 2-1.4. Comme précédemment, le rectangle a une base égale à $\frac{1}{2}$ et une

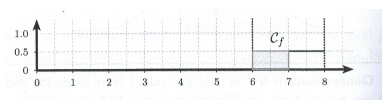


Fig. 2-1.4 – Illustration de la probabilité $P(7 \leq X \leq 7.5)$.

hauteur égale à $\frac{1}{2}$. Donc, son aire est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$. Par conséquent, la probabilité que le facteur arrive après $7h30$ est égale à 25

Remarque 32.

- Calculons la somme de ces trois probabilités :

$$P(X \leq 7) + P(7 \leq X \leq 7.5) + P(X \geq 7.5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1. \tag{2.2}$$

  Ceci était prévisible dans la mesure où : $P(X \leq 7) + P(7 \leq X \leq 7.5) + P(X \geq 7.5) = P(6 \leq X \leq 8)$ et on savait déjà que cette probabilité vaut 1 par définition d'une densité de probabilité sur $[6, 8]$.
- La loi de l'exemple précédent dont la densité est une fonction constante, est une loi uniforme.
- Sous certains conditions et hypothèses, une variable aléatoire continue à densité peut admettre une espérance mathématique, une variance et un écart-type. Nous ne rentrons pas dans le détails des définitions de ces grandeurs car cela nécessiterait la notion d'intégrale.

2-1.2 Lois normales

Contexte : Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $p \in [0, 1]$. L'espérance, la variance et l'écart-type sont : $E(X) = np$, $V(X_n) = np(1-p)$, et $\sigma_{X_n} = \sqrt{np(1-p)}$. Si on fixe la valeur de p et que l'on augmente celle de n, l'histogramme (voir **??**) représentant les valeurs prises par X_n semble se rapprocher d'une courbe en cloche. Si p varie, la courbe en cloche change de caractéristiques : hauteur et étalement.

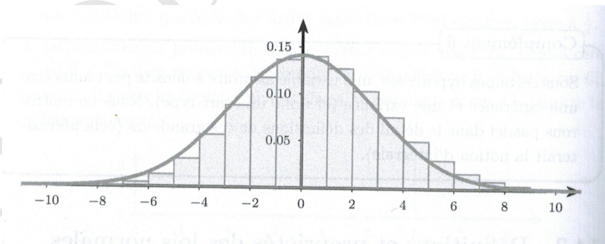


Fig. 2-1.5 – Histogramme de $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

Si on considère la variable aléatoire $Y_n = X_n - E(X_n) = X_n - np$, alors la courbe en cloche associée à Y_n a les mêmes propriétés que celle associée à X_n, à ceci près qu'elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on dit que la variable Y_n est centrée. On peut remarquer que, quelles que soient les valeurs de n et p, son espérance est nulle car $E(Y_n) = E(X_n - np) = E(X_n) - np = np - np = 0$, voir la figure 2-1.6.

Finalement, si on considère la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_{X_n}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, on s'aperçoit que la courbe en cloche associée à Z_n semble être toujours la même, quelles que soient les valeurs de n et p : on dit que la variable Z_n est centrée réduite.

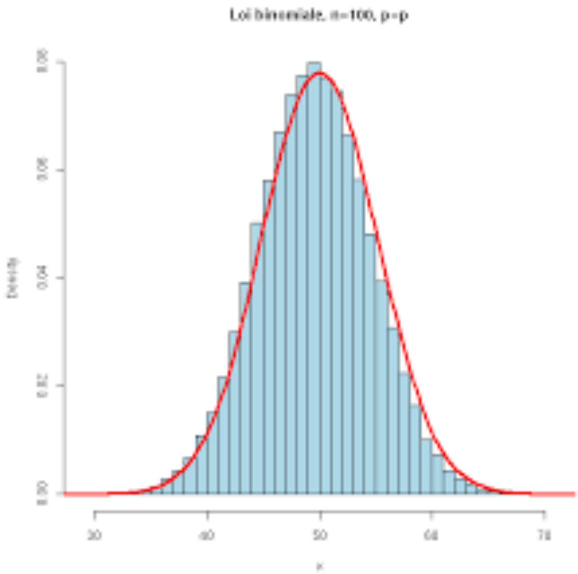


Fig. 2-1.6 – Lissage de l'histogramme de $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$.

Quelles que soient les valeurs de n et p, l'espérance de Z_n est nulle (variable centrée) car on a $E(Z_n) = E\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_{X_n}}\right) = \frac{E(X_n) - E(X_n)}{\sigma_{X_n}} = 0$. E plus, l'écart de Z_n vaut 1 (variable réduite), en effet $V(Z_n) = V\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_{X_n}}\right) = \frac{V(X_n) - E(X_n)}{\sigma^2_{X_n}} = \frac{V(X_n)}{V(X_n)} = 1$, si bien que $\sigma_{Z_n} = \sqrt{V(Z_n)} = \sqrt{1} = 1$.

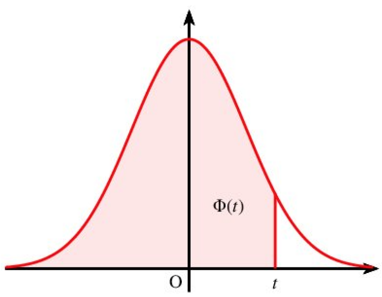


Fig. 2-1.7 – Histogramme de $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

Ce phénomène décrit un grand théorème de la théorie des probabilités : le théorème de Moivre-Laplace.

Théorème 33.

(Théorème de Moivre-Laplace) Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec n un entier supérieur ou égal à 2 et $p \in [0,1]$. On pose $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_{X_n}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Pour tous réels a et b ($a < b$), la probabilité $P(a \leq Z_n \leq b)$ se rapproche de la probabilité $P(a \leq Y \leq b)$ où Y est la variable ayant la densité de probabilité φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ quand n devient grand.

Définition 34.

On dit qu'une variable aléatoire Y suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si sa densité de probabilité est $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Remarque 35.

En reprenant les notations du théorème de Moivre-Laplace, on dit que la variable Z_n, que l'on a centrée en soustrayant l'espérance de X_n et réduite en divisant par l'écart-type de X_n, converge vers la loi normale centrée réduite. Alors, on parle plus généralement de la convergence en loi. On s'intéressera dans les sections suivantes la convergence de la loi binomiale vers loi normale.

Définition 36.

Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On appelle la fonction de répartition de Y la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(Y \leq t) = P(Y \in]-\infty, t])$.

Dans la suite du paragraphe, on cherche à calculer $\Phi(t)$ pour un réel t donné. Cela revient donc à déterminer l'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de la densité φ de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty, t]$, voir la section D de l'annexe .

Dans les exemples des sections précédentes, il était plus aisé de calculer une telle aire. Ici, cela semple beaucoup plus compliqué (en réalité, cela n'est possible que par des approximations). Pour calculer des probabilités dans le cas d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite, on utilisera donc une table qui regroupe les valeurs $\Phi(t)$ arrondies à 10^{-4} pour t compris entre 0 et 3.99 par un pas de 0.01, voir le tableau en annexe.

Par exemple, pour déterminer à l'aide de la table $\Phi(0.34)$, on se positionne sur la ligne 0.3 et sur la colonne 0.04 car $0.3 + 0.04 = 0.34$ et la valeur cherchée est donc 0.6331 comme on le voit sur l'extrait de la table. Finalement, $\Phi(0.34) = P(Y \leq 0.34) \approx 0.6331$.

Proposition 37.

Soient Y une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.

- Si $a \geq 0$ (positif), alors on a :
  - $P(Y > a) = 1 - \Phi(a)$;
  - $P(Y < -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$;
  - $P(Y > -a) = \Phi(a)$;
  - $P(-a < Y < a) = 2\Phi(a) - 1$.
- Si a et b sont deux réels avec $a < b$, alos on a : $P(a < Y < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Remarque 38.

Comme on l'a mentionné en début de ce chapitre des lois continues toutes les relations de la proposition 37 restent valables avec des inégalités larges. Par exemple, on a $P(Y \geq a) = 1 - \Phi(a)$;

Exemple :

- $P(Y > 0.34) = 1 - \Phi(0.34) \approx 1 - 0.6331 \approx 0.3669$;
- $P(Y < -0.34) = 1 - \Phi(0.34) \approx 1 - 0.6331 \approx 0.3669$;
- $P(Y \geq -1.28) = \Phi(1.28) \approx 0.8997$, ici on a obtenu $\Phi(1.28)$ par la lecture de la table en se plaçant sur la ligne 1.2 et sur la colonne $t = 0.08$.
- $P(-0.34 \leq Y \leq 0.34) = 2\Phi(0.34) - 1 \approx 2 \times 0.6331 - 1 \approx 0.2662$, ;
- $P(0.34 \leq Y < 2.75) = \Phi(2.75) - \Phi(0.34) \approx 0.9949 - 0.6331 \approx 0.3618$: on a obtenu $\Phi(2.75)$ par la lecture de la table en se plaçant sur la ligne 2.5 et sur la colonne $t = 0.07$.
- $P(-2.75 \leq Y \leq -0.34) = P(0.34 \leq Y \leq 2.75) \approx 0.3618$;
- $P(-0.34 < Y < 2.75) = \Phi(2.75) - (1 - \Phi(0.34)) \approx 0.9949 - (1 - 0.6331) \approx 0.6280$.

Proposition 39.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Alors, on a : $E(Y) = 0$, $V(Y) = 1$ et $\sigma_Y = 1$.

Définition 40.

Soient μ un réel (moyenne) et σ un réel strictement positif(écart-type). Alors, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Exemples : soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1;4)$. On a alors $\sigma_X = \sqrt{4} = 2$. On remarque que $Y = \frac{X-1}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. On souhaite calculer quelques probabilités :

- $P(X < 2.5) = P\left(\frac{X-1}{2} < \frac{2.5-1}{2}\right) = P(Y < 0.75) = \Phi(0.75) \approx 0.7734$: pour lire la valeur de $\Phi(0.75)$ à partir de la table, on se place sur la ligne 0.7 et sur la colonne 0.05 ;
- $P(X \geq 2.84) = P\left(\frac{X-1}{2} \geq \frac{2.84-1}{2}\right) = P(Y \geq 0.92) = 1 - \Phi(0.92) \approx 1 - 0.8212 \approx 0.1788$: on obtient $\Phi(0.92)$ par la lecture de la table en se plaçant sur la ligne 0.9 et sur la colonne 0.02 ;
- $P(X \leq -3.6) = P\left(\frac{X-1}{2} \leq \frac{-3.6-1}{2}\right) = P(Y \leq -2.3) = \Phi(-2.3) = 1 - \Phi(2.3) \approx 1 - 0.9893 \approx 0.0107$: on obtient $\Phi(2.3)$ en se plaçant sur la ligne 2.3 et sur la colonne 0.00 ;
- $P(X > -0.5) = P(\left(\frac{X-1}{2} > \frac{-0.5-1}{2}\right) = P(Y > -0.75) = \Phi(-0.75) \approx 0.7734$;
- $P(-0.8 \leq X < 2.8) = P\left(\frac{-0.8-1}{2} \leq \frac{X-1}{2} < \frac{2.8-1}{2}\right) = P(-0.9 \leq Y < 0.9) = 2\Phi(0.9) - 1 \approx 2 \times 0.8159 - 1 \approx 0.6318$;
- $P(2.84 < X \leq 5.6) = P\left(\frac{2.84-1}{2} < \frac{X-1}{2} \leq \frac{5.6-1}{2}\right) = P(0.92 < Y \leq 2.3) = \Phi(2.3) - \Phi(0.92) \approx 0.9893 - 0.8212 \approx 0.1681$;
- $P(-5.6 < X < -2.84) = P(2.84 < X < 5.6) = P\left(\frac{2.84-1}{2} < \frac{X-1}{2} < \frac{5.6-1}{2}\right) = P(0.92 < Y < 2.3) = \Phi(2.3) - \Phi(0.92) \approx 0.9893 - 0.8212 \approx 0.1681$;
- $P(-3.56 \leq X \leq -2.84) = P\left(\frac{-3.56-1}{2} \leq \frac{X-1}{2} \leq \frac{2.84-1}{2}\right) = P(-2.28 \leq Y \leq 0.92) = \Phi(0.97) - (1 - \Phi(2.84)) \approx 0.8340 - (1 - 0.9887) \approx 0.8227$;

Proposition 41.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors, on a : $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ et $\sigma_X = \sigma$.

Remarque 42.

- La densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \mu$. La valeur de σ influe sur l'étalement de la courbe : plus σ est petit, plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie et donc moins la dispersion est grande ...
- La représentation graphique de la densité d'une loi normale illustre bien le fait que l'espérance est une mesure de position représentant l'axe de symétrie, et que la variance et l'écart-type sont des mesures de dispersion représentant l'étalement autour de l'axe de symétrie.

2-1.3 Approximation d'une loi binomiale

Comme on l'a évoqué dans le paragraphe précédent, sous certaines conditions et hypothèses, on peut approcher une loi binomiale par une loi normale. C'est ce qui illustre le théorème suivant :

Théorème 43.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Supposons que n et p vérifient les trois conditions :
- $n \geq 20$;
- $np \geq 10$;
- $n(1-p) \geq 10$.

Considérons alors la variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ avec $m = E(Z)$ et $\sigma = \sigma_Z$. Alors on peut approcher la loi de Z par la loi de X.

Exemple : soit Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(200; 0.35)$. Alors, on a :

- $n = 200 \geq 20$;
- $np = 200 \times 0.35 = 70 \geq 10$;
- $n(1-p) = 200 \times (1 - 0.35) = 130 \geq 10$.

Les conditions du théorème 43 sont satisfaites. On peut donc approcher la loi de Z par la loi de X, où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(E(Z); \sigma_Z^2)$. Or, on a : $E(Z) = np = 70$ et $\sigma_Z = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{45.5}$. D'où $XZ \hookrightarrow \mathcal{N}(70; 45.5)$.

Remarque 44.

On se place dans les conditions du théorème 43. Pour un entier naturel k compris entre 0 et n, on cherche à approximer $P(Z = k)$. En utilisant le théorème 43, on serait tenté d'écrire $P(Z = k) \approx P(X = k)$. Or, on sait que $P(X = k) = 0$ car X est une variable aléatoire continue, ce qui n'est a priori pas le cas de $P(Z = k)$ car Z est une variable aléatoire discrète.
Ce passage du discret au continu implique donc de prendre des précautions lors du calcul des probabilités : c'est ce que l'on appelle la correction de la continuité.

Proposition 45.

On se place dans les hypothèses du théorème 43. Pour le calcul des probabilités, on utilisera une correction de la continuité comme suit, avec k un réel : $P(Z = k) \approx P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$.

Exemple : on reprend l'exemple 2-1.3. Déterminons une valeur approchée à 10^{-4} près de $P(Z = 80)$ (on notera Y la valeur aléatoire suivant la loi normale centrée réduite). On a donc

$$\begin{aligned} P(Z = 80) &\approx P(79.5 < X < 80.5) \approx P\left(\frac{79.5 - 70}{\sqrt{45.5}} < \frac{X - 70}{\sqrt{45.5}} < \frac{80.5 - 70}{\sqrt{45.5}}\right) \\ &\approx P(1.41 < Y < 1.56) = \Phi(1.56) - \Phi(1.41) \approx 0.9406 - 0.9207 \approx 0.0199 \end{aligned}$$

Pour conclure sur ce paragraphe d'approximation d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$par une loi de Poisson ou par une loi normale, on commence d'abord à rappeler les conditions sur les paramètres n et p :

Approximation par la loi de Poisson	Approximation par la loi normale
$n \geq 30$	$n \geq 20$
$p \leq 0.1$	$np \geq 10$
$np \leq 10$	$np(1 - p)$

On en déduit que l'on approchera une loi binomiale par une loi de Poisson lorsque la probabilité de succès p et l'espérance np de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ sont très fables (($p \leq 0.1$ et $np < 10$ respectivement), et par une loi normale $\mathcal{N}(np; np(1 - p))$ lorsque l'espérance de succès et l'espérance d'échec sont suffisamment grands (≥ 10).

Annexes

Appendix A

Lois de probabilités continues

***

A Loi uniforme

Définition 47.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur un segment $[a, b]$ avec $0 \leq a < b$, notée $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, si sa densité de probabilité f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\, a \leq x \leq b, \\ 0 & si\, x < a\, ou\, x > b. \end{cases} \tag{A.1}$$

Proposition 48.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ avec $0 \leq a < b$. L'espérance mathématique, la variance et la fonction de répartition de X sont :

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right] = \frac{a+b}{2}$.
- $V(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. En effet, on a $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{b-a} dt = \left[\frac{t^2}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$.
- $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si\, x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\, a \leq x \leq b, \\ 1 & si x > b. \end{cases}$, En effet, il suffit d'utiliser la définition 47.

La fonction densité f et celle de répartition F admettent les représentation graphiques illustrées par la figure A.1.

Exemple : On reprend la fonction densité f de l'exemple 2-1.1. En intégrant la densité f, il

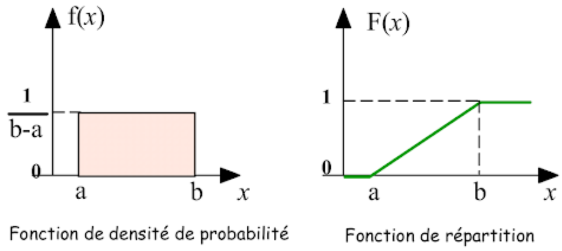


Fig. A.1 – Représentation graphique de f et F.

vient que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 6 \\ \frac{x-6}{2} & si\, 6 \leq x \leq 8, \\ 1 & si x > 8. \end{cases} \tag{A.2}$$

On sait que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([6,8])$, d'où $E(X) = 7$ et $V(X) = \frac{1}{3}$.

Proposition 49.

Soit $[c,d]$ un intervalle inclus dans $[a,b]$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$, alors on a $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}$.

Exemple : Dans une ville idéale, les autobus passent à chaque arrêt exactement toutes les $15minutes$. On appelle X le temps d'attente en minutes d'un autobus à un arrêt. X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,15]$, on a donc

$$P(5 \leq X \leq 15) = \frac{15-5}{15-0} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(X \geq 15) = P(15 \leq X \leq 20) = \frac{20-15}{15-0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Enfin, le temps d'attente moyen qui est égal à $E(X)$ vaut $\frac{0+20}{2}$, soit 10 minutes.

Remarque 50.

Dans l'exemple précédent, comme dans toute variable aléatoire absolument continue, on a $P(X = 0) = 0$. En effet, pour tout réel a, on a : $\int_a^a f(t)dt = 0$.

B Loi exponentielle

Définition 51.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$, notée $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité de probabilité[a] est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & si\, x \geq 0. \end{cases} \quad \text{(A.3)}$$

[a]On vérifie facilement que f satisfait les trois conditions de la définition **??**.

Proposition 52.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$. L'espérance, la variance et la fonction de répartition F sont

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, en effet,
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, en effet il suffit d'appliquer deux fois l'intégration par parties.
- $F(X) = \begin{cases} 0 & si\, x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\, x \geq 0. \end{cases}$

La densité de probabilité f et la fonction de répartition admettent les représentations graphiques de la figure B.2.

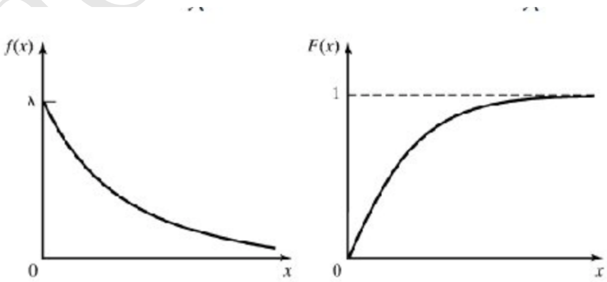


Fig. B.2 – Représentation graphique de f et F.

C Table de la loi de Poisson

La table de la loi de Poisson a été récupérée sur google, mais nous pouvons l'obtenir sur excel via la commande prédéfinie : LOI.POISSON.N(A3;B;1;0).

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0076
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019

Fig. C.3 – La table de loi de Poisson.

Exemple : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(7)$. On souhaite calculer la probabilité que X soit inférieure ou égale à 2 : $P(X \leq 2)$. Pour se faire, on suit les étapes suivantes : on sait que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(7)$. On se positionne dans la colonne $\lambda = 7$ du tableau. Ensuite on se positionne à ligne correspondante à la valeurs de $k = 2$. On obtient donc :

$$P(X = 2) = 0.0223. \tag{A.4}$$

D Table de la loi normale

On rappelle les formules utiles pour calculer certaines probabilités :

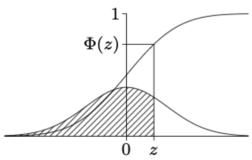
$$P(Y > t) = 1 - P(Y \leq t) = 1 - \Phi(t),$$
$$P(Y < -t) = P(Y > t) = 1 - \Phi(t).$$

Exemples : Par exemple, pour déterminer à l'aide de la table $\Phi(0.34)$, on se positionne sur la ligne 0.3 et sur la colonne 0.04 car $0.3 + 0.04 = 0.34$ et la valeur cherchée est donc 0.6331 comme on le voit sur l'extrait de la table. Finalement, on obtient $\Phi(0.34) = P(Y \leq 0.34) \approx 0.6331$.

De même, on a

$$P(Y < 0.34) \approx 0.6331$$
$$P(Y > 0.34) \approx 1 - 0.6331 \approx 0.3669$$
$$P(Y < -0.34) = P(Y > 0.34) \approx 0.6331$$

A.1. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$



1° *Fonction de répartition de la loi Normale.* — La fonction de répartition Φ de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u/\sqrt{2\pi}$, $z \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Exemples. — $\Phi(0{,}25) \approx 0{,}5987$, $\Phi(-0{,}32) = 1 - \Phi(0{,}32) \approx 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$.

Fig. D.4 – La table de loi normale centrée réduite.

Bibliography

***

[1] J.P. Lecoutre. Statistique et probabilités/ Dunod, 7ème édition Paru le 16 janvier 2019.

[2] B. Candelpergher Théorie des probabilités - Une introduction élémentaire. Dunod, Paris.

[3] R. Abdesselam. Statistique et probabilités - Exercices d'application et problèmes corrigés avec rappels de cours. Editions MIR/Ellipses

[4] D., Lafolie. Mathématiques, statistiques et probabilités: cours et exercices corrigés. Éditions Ellipses, 2019.