

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Événements - Indépendance - Formule de Bayes

Enseignant-Formateur : H. El-Otmany

A.U. : 2019-2020

Exercice n°1 On considère E , F et G trois événements d'un espace de probabilité. Exprimer en fonction de E , F et G les événements suivants :

1. E et F ont lieu mais pas G .
2. Un de ces événements et un seul a lieu.
3. Au moins un de ces événements a lieu.
4. Aucun de ces événements n'a lieu.
5. Pas plus de deux de ces événements n'ont lieu.
6. E seul a lieu.
7. Exactement deux de ces événements ont lieu.
8. Au moins deux de ces événements ont lieu.

Exercice n°2 On jette trois dés. Calculer :

1. la probabilité d'avoir les trois faces avec le même chiffre.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces avec le même chiffre.

Exercice n°3 Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le triple de celle de sortie du 1. Les numéros 1 2 3 4 5 ayant la même probabilité de sortie. Calculer :

1. la probabilité de sortie de chaque numéro.
2. la probabilité de l'événement $A :=$ "obtenir un numéro pair".

Exercice n°4 Tirages simultanés Une sac contient 10 jetons sur lesquels sont respectivement inscrits les nombres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On tire simultanément deux jetons de ce sac. Les tirages sont supposés équiprobables (rappel : 0 est un nombre pair et multiple de 3). On pose $A :=$ "obtenir deux nombres pairs" et $B :=$ "obtenir deux nombres multiples de 3".

1. Calculer la probabilité de A et B .
2. Calculer la probabilité de $(A \cap B)$ et $(A \cup B)$.

Exercice n°5 Tirages successifs avec et sans remise

1. Tirages avec remise :

On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes bien battu, on note le résultat, on remet la carte dans le jeu, on bat les cartes et on tire à nouveau une carte au hasard. Un résultat est un couple de cartes. Tous les couples sont équiprobables. Quelle est la probabilité de l'événement A : Les deux cartes tirées sont des piques ?

2. Tirages sans remise :

On répond à la même question qu'au 1 en ne remettant pas la première carte tirée dans le paquet avant de tirer la seconde carte.

Exercice n°6 Une main est composée de 5 cartes prises simultanément dans un jeu de 32 cartes.

1. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne exactement :
 - (a) deux dix (une paire de dix).
 - (b) trois rois (un brelan de rois).
 - (c) trois dames et deux sept (un full au dames par les rois).

2. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne au plus :
 - (a) deux dix (une paire de dix).
 - (b) trois rois (un brelan de rois).
3. Calculer la probabilité pour qu'une main contienne :
 - (a) exactement une paire.
 - (b) au plus un pique.
 - (c) un as et deux piques exactement.
4. Calculer la probabilité pour qu'une main ne contiennent aucune paire.

Exercice n°7 Dans une loterie, un joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 numéros parmi ces 40 nombres. En admettant que le tirage est équiprobable pour les C_{40}^8 combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait

1. les 8 bons numéros ?
2. 7 numéros parmi les 8 bons ?
3. au moins 6 numéros parmi les 8 bons ?

Exercice n°8 Dans une usine, deux machines A et B fabriquent des réfrigérateurs. Ceux issus de A (respectivement B) sont défectueux avec une probabilité de 0.025 (respectivement 0.045). La chaîne A (respectivement B) produit 500 (respectivement 400) réfrigérateurs par jour. On choisit au hasard un micro-processeur sur la chaîne de fabrication.

1. Avec quelle probabilité est-il défectueux ?
2. S'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la chaîne B ?

Exercice n°9 Parmi les 42 étudiants d'une formation universitaire, 33 étudient l'anglais, 27 étudient l'espagnol, 19 étudient la langue chinoise, 15 étudient l'anglais et la langue chinoise, 8 étudient la langue chinoise et la langue chinoise et 5 étudient les trois langues. On suppose que tout élève de la classe étudie au moins une langue. Calculer le nombre d'élèves étudiant :

1. l'anglais et l'espagnol ?
2. l'anglais ou l'espagnol ?
3. uniquement la langue chinoise ?

Exercice n°10 On lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) n fois de suite. On note p_n la probabilité que les quatre chiffres (1, 2, 3, 4) apparaissent au moins une fois lors des n lancers. Pour tout nombre entier $i \in \{1; \dots; 4\}$, on pose : $A_i = \{\text{le numéro } i \text{ n'apparaît pas durant les } n \text{ tirages}\}$.

1. Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$. En déduire que $p_n = 1 - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 6 \left(\frac{2}{4}\right)^n - 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice n°11 Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules. On pose $E := \text{"obtenir 2 blanches"}$ et $F := \text{"obtenir 2 rouges"}$

1. On suppose qu'il n'y a pas remise.
Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$, $P_F(E)$, $P_E(F)$.
Les événements E et F sont-ils indépendants ?
2. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise