

NB : cette fiche présente les techniques nécessaires **minimales** de calcul financier ; elle ne constitue donc pas un objectif mais un pré-requis pour les mathématiques financières !

Tout au long de cette fiche, on considère les notations suivantes :

- C_0 : capital initial (,emprunté, prêté, placé, investi,) ou valeur actuelle (actualisée).
- i : taux d'intérêt annuel.
- n : la durée ou la période de l'emprunt (prêt, placement, investissement, ...).
- C_f : capital final (capitalisé, remboursé, gagné, cumulé,...) à la fin de la période.

1 Intérêts simples et composés

| Type d'intérêt | Description |
|----------------|--|
| Simple | <p>les intérêts sont constants pendant la période n. Le capital final : $C_f = C_0(1 + in)$. La valeur des intérêts simples : $I_s(n) = n \times i \times C_0 = C_f - C_0$. Les capitaux sont des suites arithmétiques de raison $r = iC_0$ où $C_n = C_0 + nr = C_0 + n \times iC_0$.</p> <p>La durée d'investissement : $n = \frac{\frac{C_f}{C_0} - 1}{i}$.</p> <p>Le taux d'intérêt simple est : $i = \frac{\frac{C_f}{C_0} - 1}{n}$.</p> |
| Composés | <p>Les intérêts sont variables pendant la période n Le capital final : $C_f = C_0(1 + i)^n$. La valeur des intérêts composés : $I_c(n) = C_f - C_0$. Les capitaux sont des suites géométriques de raison $q = 1 + iC_0$ où $C_n = C_0q^n = C_0(1 + iC_0)^n$.</p> <p>La durée d'investissement : $n = \frac{\ln\left(\frac{C_f}{C_0}\right)}{\ln(1 + i)}$.</p> <p>Le taux d'intérêt composé est : $i = \left(\frac{C_f}{C_0}\right)^{1/n} - 1$.</p> |

2 Taux périodique, taux équivalent, taux proportionnel

- Le taux de la période n peut être défini sur une sous-période k en années, en semestres, en trimestres, en mois, en quinzaines et en jours.

| Type de taux | taux semestriel | taux trimestriel | taux mensuel | taux quinzaine | taux Journalier |
|--------------|-----------------|------------------|----------------|----------------|-----------------|
| Valeur | $\frac{i}{2}$ | $\frac{i}{4}$ | $\frac{i}{12}$ | $\frac{i}{24}$ | $\frac{i}{360}$ |

- Le taux proportionnel au taux annuel i pour une sous-période k est le taux appliqué à intérêts simples sur toutes les sous-périodes k défini par

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

- Le taux équivalent au taux annuel i pour une sous-période est le taux qui est appliqué à intérêts composés sur toutes les sous-périodes défini par

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1.$$

3 Annuités et tableau d'amortissement

- Une annuité a_k est une somme d'argent (contrepartie) versée à chaque période, en général d'un an par un épargnant (emprunteur) pour constituer (rembourser) une épargne (une dette ou un emprunt) :

$$a_k = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \times C_k.$$

Autrement dit : annuité = $\frac{\text{taux d'intérêt}}{1 - (1 + \text{taux d'intérêt})^{-\text{période}}} \times \text{capital initial}.$

- Tableau d'amortissement :

| Période n° k | Capital C_k^{de} en début d'exercice | Intérêts I_k | Capital amorti A_k | Annuité a_k | Capital C_{k-1} en fin d'exercice |
|----------------|--|------------------|----------------------|-------------------|-------------------------------------|
| 1 | $C_0^{de} = C_0$ | $I_1 = iC_0$ | $A_1 = a_1 - I_1$ | $a_1 = A_1 + I_1$ | $C_1 = C_0 - A_1$ |
| 2 | $C_2^{de} = C_1$ | $I_2 = iC_1$ | $A_2 = a_2 - I_2$ | $a_2 = A_2 + I_2$ | $C_2 = C_1 - A_2$ |
| k | $C_k^{de} = C_{k-1}$ | $I_k = iC_{k-1}$ | $A_k = a_k - I_k$ | $a_k = A_k + I_k$ | $C_k = C_{k-1} - A_k$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| n | $C_n^{de} = C_{n-1}$ | $I_n = iC_{n-1}$ | $A_n = a_n - I_n$ | $a_n = A_n + I_n$ | $C_n = C_{n-1} - A_n$ |

avec

- $C_k^{de} = C_{k-1}$; Capital ou emprunt de la période écoulée k = capital ou emprunt de la période $k - 1$.
- $I_k = iC_{k-1}$; Intérêt de la période k = Taux d'intérêt \times capital ou emprunt de la période $k - 1$.
- $A_k = a_k - I_k$; Capital amorti (amortissement) de la période k = annuité - Intérêt de la période k .
- $C_k = C_{k-1} - A_k$; Emprunt restant de la période k = capital ou emprunt de la période $(k - 1)$ moins capital amorti de la période k .