

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET LEURS APPLICATIONS-ED n° 211

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Hammou EL-OTMANY

APPROXIMATION PAR LA MÉTHODE NXFEM DES PROBLÈMES D'INTERFACE ET D'INTERPHASE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

soutenue publiquement le 9 novembre 2015

Après avis de :

M.	BLOUZA Adel	Maître de Conférences HDR, Université de Rouen
M.	HILD Patrick	Professeur, Université Paul Sabatier - Toulouse 3

Devant la commission d'examen composée de :

M.	BLOUZA Adel	Maître de Conférences HDR, Université de Rouen	Rapporteur
Mme	CAPATINA Daniela	Maître de Conférences HDR, Université de Pau	Directrice
M.	EYMARD Robert	Professeur, Université Paris-Est Marne-la-Vallée	Président
M.	GRAEBLING Didier	Professeur, Université de Pau	Directeur
M.	HILD Patrick	Professeur, Université Paul Sabatier - Toulouse 3	Rapporteur
M.	LUCE Robert	Maître de Conférences HDR, Université de Pau	Examineur

Afin d'être reconnaissant envers ceux qui m'ont aidé et encouragé à réaliser ce travail de
recherche, je dédie ce mémoire :

À mes très chers, respectueux et magnifiques parents qui m'ont soutenu tout au long de
ma vie, ainsi qu'à mes frères, mes sœurs et mon épouse,

À toute ma famille,

À tous mes amis,

À toute personne qui m'a encouragé et m'a aidé au long de mon parcours académique
et professionnel,

Et à tous ceux que ma réussite leur tient à cœur.

—— H. El-Otmany

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie du fond de cœur Daniela Capatina (LMAP¹) et Didier Graebbling (IPREM²) qui furent mes directeurs au long de cette belle aventure. J'ai pu apprécier leur générosité, leur patience, leur disponibilité, leur qualité scientifique et humaine et leur conseil ainsi que leur aide précieuse. Qu'ils puissent trouver ici le gage de mon respect profond.

Je remercie sincèrement les membres de mon jury : Adel Blouza et Patrick Hild pour avoir accepté de rapporter sur ma thèse, leur expertise scientifique fait référence, et je suis très reconnaissant qu'ils s'associent à ce travail. Robert Luce pour son aide en programmation C++ dans la librairie CONCHA³ et pour avoir accepté de participer à ce jury et Robert Eymard pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Merci également à Stéphanie Delage Santacreu d'avoir relu en détail mon manuscrit et d'avoir accepté de faire partie de mon jury en tant que membre invité.

J'ai eu la chance immense de rencontrer beaucoup de personnes durant ces trois années universitaires, des personnes qui ont compté pour moi, qui m'ont énormément apporté, et que j'aimerais remercier ici.

J'adresse mes remerciements au grand mathématicien Roland Becker qui dirige notre équipe pluridisciplinaire CONCHA. J'exprime également ma profonde reconnaissance envers tous les membres de l'équipe CONCHA, j'ai beaucoup appris auprès de chacun d'entre vous. Je vous remercie chaleureusement pour tous ces échanges scientifiques, philosophiques et même gustatifs. Un grand merci pour l'amateur de football David Trujillo de m'inviter pour des matchs au Soccer Park Pau.

Je tiens à remercier les professeurs et les maîtres de conférences du LMAP qui ont partagé avec moi leurs enseignements, leurs savoirs et leurs compétences. En particulier, le directeur du LMAP Jacques Giacomoni qui m'a fourni les meilleures conditions pour effectuer cette thèse. À ce stade, il me faut également saluer Allal Guessab et Brahim Amaziane pour leur aide pour trouver un post-doctorat, ainsi que Philippe Poncet pour son soutien pour un poste d'ATER à Toulouse. Un grand merci à Marie-Claire Hummel, Chantal Blanchard, Bruno Demoisy, Stéphane Leborgne, Lina Goncalves pour m'avoir toujours facilité divers types de démarches administratives. J'ai beaucoup apprécié l'ambiance chaleureuse qui y règne et les valeurs humaines qui y sont défendues.

Je me tourne ensuite vers le directeur de l'Organisme Pétrolier de Recherche Appliquée (OPERA) Reda Baina, qui m'a soutenu et qui a tant compté pour moi pour le post-doctorat. Merci également à tous les membres d'OPERA : Delphine André, Raoul Beauduin, Brigitte Boulaigue, Véronique Duprat, Adam Gosselet, Louis Jonardan Gallin,

1. Laboratoire Mathématique et de leurs Applications - Pau

2. Institut Pluridisciplinaire de Recherche sur l'Environnement et les Matériaux

3. COmplex flow simulationN Codes based on High-order and Adaptive methods

Fabrice Jurado et Jean-Baptiste Laurent.

Je ne saurais oublier l'ensemble des thésards que j'ai rencontrés pendant mes trois années au LMAP. Aux " anciens " : Nelly Barrau, Caroline Bauzet, Benoît Guerville-Ballé, Loïc Bourdin, Cheikh Ndour, Hai Ha Pham, Tamatoro Johng-Ay, Ahmed Rejaiba, Brahim Bougherara, Paul Sauvy, Mohammed Meslemani, Juan Viu Sos, Hind Al Baba, Zeina Almasry, Nicolas Chauchat, Jeanne Demgne, Vincent Darrigrand, Simon Delmas, Lionel Boillot. Aux " prochains " : Abdelkader Sayed, Yassin Zaim, Osama Alabdali, Florian Faucher, Yasmina Kheloufi, Laurène Hume. Mes chers ami(e)s, je vous souhaite beaucoup de réussite dans votre vie professionnelle et familiale.

Last but not least, j'exprime mes sincères salutations à mes amis. La liste est tellement longue que je ne peux pas citer vos noms. Je remercie aussi toutes les personnes avec qui j'ai partagé un repas, un café, un match de football ou une discussion durant ces trois ans. Merci pour vos encouragements et pour votre soutien permanent.

Je ne peux trouver les bons mots pour ma famille. Je veux citer en particulier mon père Saïd El-Otmany, ma mère Itto Issouani, mes sœurs, mes frères et mon épouse. Leur soutien et leur affection à tous dépassent largement le cadre de cette thèse aussi je leur dirai simplement ... Merci pour tout ! Les autres aussi m'entourent avec beaucoup d'affection, et je souhaite les remercier chaleureusement. Et merci à mon épouse Meryam Gaadad parce qu'avec elle, la vie est un chemin de bonheur. Pour finir, une pensée affectueuse pour mon petit bébé Yasser que j'attendrais en fin Février 2016.

Merci à toutes et à tous et bonne lecture pour ceux qui ont le courage de continuer.

— H. El-Otmany

Table des matières

Notations générales	11
Introduction générale	15
1 Méthode NXFEM pour éléments finis conformes	21
1.1 Notations spécifiques	21
1.2 Présentation de la méthode originale	24
1.3 Formulation robuste	28
Partie I. Problème d'interface : extension de la méthode NXFEM aux éléments finis non-conformes	31
2 Approximation P^1 non-conforme d'un problème modèle elliptique	33
2.1 Approximation P^1 non-conforme	34
2.1.1 Rappel de quelques outils de base	34
2.1.2 Difficultés liées à l'utilisation de la méthode NXFEM	36
2.2 Première approche : modification des éléments finis non-conformes	37
2.2.1 Robustesse par rapport à la position de l'interface	41
2.2.2 Problème discret - Existence et unicité	43
2.2.3 Erreur d'interpolation	45
2.2.4 Erreur de consistance	53
2.2.5 Estimation d'erreur a priori	58
2.3 Deuxième approche : rajout de termes de stabilisation	59
2.3.1 Problème discret - Existence et unicité	59
2.3.2 Erreur d'interpolation	62
2.3.3 Erreur de consistance	64
2.3.4 Estimation d'erreur a priori	64
2.4 Lien entre les approches	65
2.4.1 Passage à la limite lorsque $\gamma_i \rightarrow +\infty$	65
2.4.2 Formulation de type Galerkin discontinue	66
2.5 Conclusion	68
3 Résultats numériques pour le problème elliptique	69
3.1 Préliminaires	70
3.2 Cas tests considérés	72

3.3	Première approche : modification des fonctions de base sur les triangles coupés	75
3.3.1	Tests de validation	76
3.3.2	Test de comparaison - ordre de convergence	77
3.3.3	Robustesse	81
3.4	Deuxième approche : rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées	83
3.4.1	Tests de validation	84
3.4.2	Test de comparaison - ordre de convergence	84
3.4.3	Robustesse	88
3.5	Lien entre les approches : passage à la limite	89
4	Approximation non-conforme d'un problème modèle de Stokes	91
4.1	Problème de Stokes avec une interface	91
4.2	Formulation variationnelle et état de l'art	92
4.3	Première approche : fonctions de base modifiées	94
4.3.1	Problème discret - Existence et unicité	95
4.3.2	Condition <i>inf-sup</i>	97
4.3.3	Estimation d'erreur a priori	107
4.4	Deuxième approche : rajout de termes de stabilisation	116
4.4.1	Problème discret - Existence et unicité	116
4.4.2	Condition <i>inf-sup</i>	119
4.4.3	Estimation d'erreur <i>a priori</i>	120
4.5	Conclusion	121
5	Résultats numériques pour le problème de Stokes	123
5.1	Formulation variationnelle associée aux équations de Stokes	124
5.2	Cas tests académiques	125
5.2.1	Solution exacte linéaire avec une interface droite	125
5.2.2	Solution exacte continue avec une interface artificielle	125
5.2.3	Solution exacte quadratique avec une interface courbe	125
5.2.4	Résultats numériques	126
5.3	Écoulement de Poiseuille biphasique où $\mu_{in} = \mu_{ex}$	129
5.3.1	Vitesse entrante parabolique	129
5.3.2	Vitesse entrante quasi constante	130
5.4	Écoulement de Poiseuille biphasique	131
5.4.1	Vitesse entrante parabolique	132
5.4.2	Vitesse entrante quasi constante	133
5.4.3	Comparaison avec la solution analytique dans l'écoulement développé	134
Partie II. Problème d'interphase : modélisation asymptotique et approximation par NXFEM		137
6	Interphase et problème asymptotique	139
6.1	Introduction	139
6.2	Présentation de problèmes modèles	140
6.3	Modélisation asymptotique	142
6.3.1	Cas d'une interface rectiligne	142
6.3.2	Cas d'une interface courbe	143

7	Problème modèle elliptique	145
7.1	Introduction	145
7.2	Modèle asymptotique continu	146
7.2.1	Cas d'une interface droite	147
7.2.2	Problème obtenu après passage à la limite	149
7.2.3	Extension à une interface courbe	152
7.2.4	Extension à une solution discontinue à travers l'interface	153
7.3	Méthode d'approximation de type NXFEM	154
7.4	Résultats numériques	163
7.4.1	Tests de comparaison : fracture rectiligne	163
7.4.2	Tests de comparaison : fracture courbe	167
7.4.3	Modèle asymptotique : fracture courbe et solution discontinue	168
7.4.4	Ordre de convergence	169
8	Problème modèle de Stokes	171
8.1	Présentation du problème	172
8.2	Modèle asymptotique continu	173
8.2.1	Cas d'une interface droite	173
8.2.2	Passage à la limite dans la formulation faible	174
8.2.3	Interprétation comme problème aux limites	182
8.2.4	Extension à une interface courbe	183
	Partie III. Modélisation d'une membrane par un fluide non-newtonien	189
9	Globules rouges et modèles rhéologiques	191
9.1	Sang et globules rouges	191
9.2	Rhéologie des liquides	194
9.2.1	Invariance des lois de comportement et dérivées objectives	194
9.2.2	Modèles quasi-linéaires	195
9.2.3	Modèles non-linéaires	197
10	Modèle asymptotique d'une membrane liquide de type Giesekus	201
10.1	Position du problème d'interphase	201
10.2	Formulation faible du problème d'interphase	203
10.3	Passage formel à la limite	207
10.4	Interprétation du modèle asymptotique comme problème aux limites	209
	Conclusions et perspectives	211
	Annexes	212
A	Rappels utiles d'analyse fonctionnelle	213
A.1	Opérateurs différentiels	213
A.2	Espaces de Sobolev et normes induites	213
A.3	Théorèmes de trace	215
	Bibliographie	215

Notations générales

Les principales notations introduites dans cette thèse sont rassemblées dans cette nomenclature. Dans la mesure du possible, on a tenté de conserver et d'utiliser les mêmes notations d'un chapitre à l'autre. On note **en gras** les grandeurs vectorielles et les matrices. Certaines notations, apparaissant uniquement de manière ponctuelle, ont été omises.

Géométrie

$\Omega, \Omega_\varepsilon$:= ouverts bornés et réguliers de \mathbb{R}^2
Ω^{in}, Ω^{ex}	:= sous-domaines de Ω
$\Omega_\varepsilon^{in}, \Omega_\varepsilon^{ex}$:= sous-domaines de Ω_ε dépendant de ε
Ω_ε^m	:= sous-domaine de Ω_ε , d'épaisseur faible ε
\mathcal{T}_h	:= famille de triangulations de Ω
T	:= élément du maillage (triangle)
ρ_T	:= rondeur de T (diamètre de la boule inscrite dans T)
h_T	:= diamètre de T (distance maximum entre deux points de T)
h	:= pas du maillage (maximum des diamètres $h_T, T \in \mathcal{T}_h$)
Γ	:= discontinuité
r	:= courbure de Γ
Γ_T	:= partie de la discontinuité Γ dans T , définie par $\Gamma_T := \Gamma \cap T$
$\mathcal{T}_h^{int,i}$:= ensemble des triangles totalement inclus dans Ω^i := $\{T \in \mathcal{T}_h : T \subset \Omega^i\}, i = in, ex$
\mathcal{T}_h^{int}	:= $\mathcal{T}_h^{int,in} \cup \mathcal{T}_h^{int,ex}$
\mathcal{T}_h^Γ	:= ensemble de tous les triangles coupés par Γ := $\{T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Gamma \neq \emptyset\}$
$\mathcal{T}_h^{\Gamma,i}$:= ensemble des triangles coupés par Γ et contenus dans Ω^i := $\{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma : T \cap \Omega^i \neq \emptyset\}, i = in, ex$
$\mathcal{T}_h^{\partial,i}$:= $\{T \in \mathcal{T}_h : T \cap \partial\Omega^i \neq \emptyset\}, i = in, ex$
\mathcal{T}_h^∂	:= ensemble des triangles situés sur le bord de Ω

\mathcal{T}_h^i	$:= \mathcal{T}_h^{int,i} \cup \mathcal{T}_h^{\Gamma,i}$
T^i	$:=$ partie du triangle coupé T contenue dans Ω^i , $T^i := T \cap \Omega^i$
\mathcal{E}_h	$:=$ ensemble des arêtes du maillage \mathcal{T}_h
$\mathcal{E}_h^{i,nc}$	$:=$ ensemble des arêtes non-coupées du maillage \mathcal{T}_h et contenus dans Ω^i
\mathcal{E}_h^{nc}	$:=$ ensemble des arêtes non-coupées du maillage \mathcal{T}_h $:= \mathcal{E}_h^{in,nc} \cup \mathcal{E}_h^{ex,nc}$
$\mathcal{E}_h^{i,cut}$	$:=$ morceaux des arêtes coupées par Γ et contenus dans Ω^i $:= \{e \subset \partial T, T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma,i} : e \cap \Gamma \neq \emptyset\}$
$\mathcal{E}_h^{\partial,i}$	$:=$ ensemble des arêtes situées sur le bord $\partial\Omega \cap \partial\Omega^i$ $:= \{e \subset \partial T, T \in \mathcal{T}_h^{\partial} : e \cap \partial\Omega^i \neq \emptyset\}$
\mathcal{E}_h^{∂}	$:= \mathcal{E}_h^{\partial,in} \cup \mathcal{E}_h^{\partial,ex}$
$\mathcal{E}_h^{int,i}$	$:=$ ensemble des arêtes intérieures de Ω^i du maillage \mathcal{T}_h^i
\mathcal{E}_h^i	$:= \mathcal{E}_h^{int,i} \cup \mathcal{E}_h^{i,cut}$
$ T $	$:=$ mesure du triangle T
$ e $	$:=$ mesure de l'arête e

Paramètres

\mathbf{K}_i	$:=$ tenseur symétrique de diffusion
μ_i	$:=$ viscosité définie sur chaque sous-domaine Ω^i , $i = in, ex$
ε	$:=$ épaisseur d'une fissure (tendant vers 0)
λ_T	$:=$ paramètre de stabilisation
$\underline{\tau}$	$:=$ tenseur des contraintes
\mathbf{I}_n	$:=$ matrice identité d'ordre n
$tr(\mathbf{I}_n)$	$:=$ trace de \mathbf{I}_n
δ_{ij}	$:=$ symbole de Kronecker

Opérateurs différentiels

$\nabla \mathbf{u}$	$:=$ gradient de \mathbf{u}
$\text{div} \mathbf{u}$	$:=$ divergence de \mathbf{u}
$\nabla \cdot \underline{\tau}$	$:=$ divergence du tenseur $\underline{\tau}$
$\Delta \mathbf{u}$	$:=$ laplacien de \mathbf{u} , $\Delta \mathbf{u} = \text{div}(\nabla \mathbf{u})$
$D(\mathbf{u})$	$:=$ tenseur des vitesses de déformation, $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ avec $\nabla \mathbf{u}^T$ matrice transposée de $\nabla \mathbf{u}$

Espaces fonctionnels, normes et semi-normes

Les espaces fonctionnels et normes suivants sont définis sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pour une fonction v mesurable.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'(\Omega) &:= \text{espace des distributions sur } \Omega \\
d\mathbf{x} &:= \text{mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}^d \\
\alpha &:= (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{ multi-indice dans } \mathbb{N}^d \\
|\alpha| &:= \sum_{i=1}^d \alpha_i \text{ utilisé pour la définition des espaces de Sobolev} \\
D^\alpha &:= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} \text{ avec } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \\
H^m(\Omega) &:= \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m \right\}, \quad m \in \mathbb{N}^* \\
H_0^1(\Omega) &:= \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\
L_0^2(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \\
H^{1/2}(\partial\Omega) &:= \left\{ v \in L^2(\partial\Omega) : \exists v \in H^1(\Omega), v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\
\|v\|_{m,\Omega} &:= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\
|v|_{m,\Omega} &:= \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha v|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Abréviations

$$\begin{aligned}
\text{XFEM} &:= \text{eXtended Finite Element Method (en anglais)} \\
\text{NXFEM} &:= \text{Nitsche's eXtended Finite Element Method (en anglais)} \\
\text{dG} &:= \text{discontinuous Galerkin (en anglais)} \\
\text{d.d.l} &:= \text{degrés de liberté}
\end{aligned}$$

Introduction générale

Le sujet de ce travail est l'approximation par la méthode NXFEM (Nitsche's eXtended Finite Element Method) des problèmes d'interface et d'interphase en mécanique des fluides. Nous proposons d'une part, une méthode numérique de type NXFEM pour une approximation par éléments finis non-conformes pour prendre en compte l'interface séparant deux fluides. D'autre part, nous nous intéressons à la modélisation asymptotique puis numérique de problèmes d'interphase, faisant apparaître une couche mince comprise entre deux fluides ; de tels problèmes ont des applications en biologie cellulaire, par exemple dans la modélisation du comportement des globules rouges.

Contexte général

Depuis une décennie, les investigations théoriques, expérimentales et numériques sur les interfaces se sont considérablement intensifiées et accélérées, notamment dans l'industrie pour la simulation numérique en mécanique des fluides et/ou des solides. Ces problèmes d'interface apparaissent dans de très nombreuses applications telles que :

- la propagation des ondes et présence de failles (sismique, recherche pétrolière),
- les problèmes de rupture et de chocs (aérospatiale),
- la modélisation de l'interface béton-acier et la fissuration du béton (génie civil),
- la déformation des globules rouges dans le sang et l'écoulement du sang (biologie cellulaire).

Beaucoup de travaux ont déjà été consacrés au traitement des méthodes numériques efficaces et robustes pour résoudre ce type de problème, mais très peu se sont intéressés au problème d'interaction fluide-fluide tel que nous l'envisageons dans ce travail. Il est donc important de situer nos contributions par rapport aux travaux existants que nous présentons ici.

1. Méthode de maillages adaptés

Cette méthode consiste à faire coïncider la singularité avec le maillage, voir Fig. 1(a). Nous définissons des éléments finis qui nous permettent de bien poser les espaces, et de résoudre les problèmes dans les bonnes conditions. Ces résultats ont été expliqués par Babuška [9].

2. Méthode VOF

La méthode « Volume Of Fluid » a été introduite par Hirt et Nichols [80] en 1981, permet de suivre l'interface dans un maillage fixe, utilisant le concept de conservation de la masse. Cette méthode, conçue pour la simulation d'écoulements diphasiques à interface fortement déformées, est basée sur le principe de conservation de la masse. L'idée fondatrice de cette méthode est d'utiliser une fonction discrète représentant la fraction volumique d'un des fluides dans chaque volume de contrôle. Cette fonction représente le volume occupé par le fluide dans une maille de calcul. C'est-à-dire une cellule pleine d'un fluide a la valeur 0 et une cellule pleine de l'autre fluide a la valeur 1. Si la valeur de la fraction volumique est comprise entre 0 et 1, cela prouve la présence de l'interface.

3. Méthode Level Set

Cette méthode a été introduite par Osher et al. [102] en 1988. Elle consiste à repérer une interface entre deux milieux par l'introduction de courbes de niveaux. C'est une technique numérique pour suivre les interfaces mobiles et pour représenter de façon pratique des fissures 3D, efficace pour la phase de propagation. La résolution d'une équation de convection permet alors de prédire les mouvements de l'interface pour un champ de vitesse donné. Cette méthode manipule les changements topologiques naturellement. Sa mise en oeuvre est aussi directe en 2D qu'en 3D. En outre, le calcul des caractéristiques géométriques du problème est particulièrement simple et s'effectue à l'aide du calcul du gradient de la fonction Level Set [125].

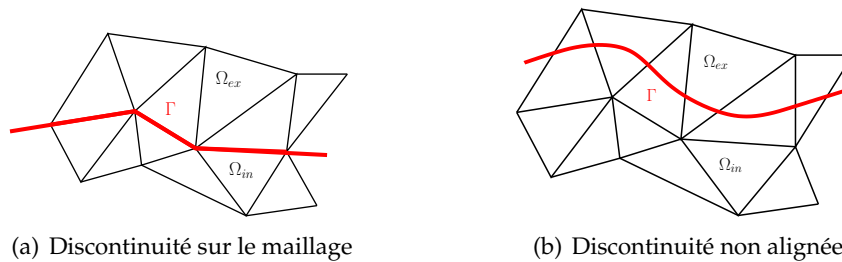


Fig. 1 – Position de la discontinuité par rapport au maillage

4. Méthode de partition de l'unité

La méthode de partition de l'unité a été introduite par Babuška et Melenk [10] en 1997, pour construire des fonctions décrivant la singularité tout en respectant les conditions aux limites. Le principe de cette méthode est d'introduire des fonctions de forme capables de prendre en compte la singularité que l'on veut traiter et de les régulariser sur le bord grâce à une fonction, préservant les propriétés des fonctions introduites à l'intérieur du domaine. Ils ont montré que la méthode, préserve le taux de convergence normal.

5. Méthodes des domaines fictifs

Le concept « fictitious domain method » a été introduit par Saul'ev [120]. Cette méthode consiste à modifier localement le maillage cartésien du domaine fictif afin de prendre

en compte les conditions aux limites immergées. L'idée de base est de découpler la géométrie du domaine physique d'étude de celle du domaine de calcul. Le domaine physique est alors immergé dans un domaine plus grand généralement rectangulaire en 2D, appelé domaine fictif qui deviendra le domaine de calcul. Différentes méthodes ont été proposées afin de traiter cette question. On peut dégager cinq principaux types de méthodes de domaines fictifs : les méthodes de pénalisation, les méthodes utilisant des multiplicateurs de Lagrange, les méthodes multi-domaines, les méthodes fondées sur des interpolations, et les méthodes assurant des propriétés de conservation.

6. Méthode de Frontière Immergée

Le terme Frontière Immergée (Immersed Boundary Method, notée IBM) a été utilisé pour la première fois pour qualifier une méthode développée par Peskin en 1972 cherchant à simuler les écoulements sanguins dans le système circulatoire [104, 105]. Le principe de la méthode est de déplacer la paroi à la vitesse du fluide, et d'imposer faiblement un saut dans la contrainte du fluide à travers l'interface. Cette condition est réalisée en imposant des forces additionnelles dans la formulation fluide au voisinage de la paroi. D'autres méthodes ont été proposées dans ce cadre. On peut citer les méthodes suivantes : les méthodes de la frontière élargie (Fat boundary method), les méthodes de grilles cartésiennes (méthodes Cut-Cell). La méthode IBM peut présenter des fuites numériques du fluide vers le solide (cf. [127]). Elle est dédiée à la modélisation de structures minces. En effet cela suppose que le mouvement est régi par l'influence du fluide occupant le domaine. Pour améliorer cette méthode, Leveque et Li [87] ont développé la méthode d'interface immergée (Immersed Interface Method) dont le but est de résoudre des systèmes d'EDP à coefficients discontinus avec des termes sources pouvant être singuliers. Ces dernières années la recherche autour de cette thématique évolue et s'améliore pour des problèmes d'interaction fluide-structure, voir [22–26, 79].

Les méthodes numériques citées précédemment ne représentent pas de manière suffisamment précise l'interface. La plupart porte sur l'introduction de fonctions capables de représenter ce qui se passe au niveau de la discontinuité.

La méthode XFEM est une méthode qui permet d'obtenir une amélioration de cette précision.

7. Méthode des éléments finis étendue (XFEM)

Le concept XFEM (eXtended Finite Element Method) [96] a été introduit pour tenir compte des problèmes de convergence des éléments finis près des singularités du domaine. Cette méthode est une généralisation de la méthode de la partition de l'unité, où l'on s'autorise à enrichir l'espace éléments finis usuel avec des degrés de liberté supplémentaires et des fonctions singulières, telles que des fonctions de Heaviside et des solutions asymptotiques. Cette méthode possède des inconvénients comme par exemple le conditionnement du problème dégradé, les difficultés d'intégration numérique et elle ne traite pas les conditions de transmission sur l'interface de contact dans la formulation variationnelle. Divers travaux autour de cette thématique se multiplient et s'améliorent ces dernières années, voir [15, 20, 52, 71].

8. Méthode NXFEM

La méthode NXFEM (Nitsche's eXtended Finite Element Method) a été introduite par Hansbo et Hansbo [75] en 2002 pour suivre de façon précise la discontinuité ne coïncidant pas avec le maillage. Elle consiste à dédoubler les degrés de liberté sur toutes les cellules qui sont touchées par l'interface et à recoller les morceaux via une formulation variationnelle inspirée de la méthode de Nitsche, voir Fig. 1(b) ; cette dernière a été introduite par J. Nitsche en 1979 (cf. [100]) dans le but de résoudre le problème de Dirichlet sans imposer la condition aux limites de manière forte dans l'espace d'éléments finis, mais d'une manière faible dans la formulation variationnelle. Cette méthode est bien étudiée sur des maillages triangulaires avec des approximations conformes des inconnues, et utilise des fonctions de base d'éléments finis classiques pour enrichir l'espace d'approximation et traite les conditions au bord de façon faible dans la formulation variationnelle.

Cette méthode s'est généralisée pour des applications diverses telles que la décomposition de domaines fictifs et avec recouvrement [16, 17, 76, 92, 93] et à différentes méthodes d'éléments finis [94].

L'avantage de NXFEM est l'implémentation plus simple que celle des autres méthodes présentées précédemment. De plus, elle est robuste par rapport aux coefficients physiques de chaque domaine et par rapport à la position de l'interface.

Motivations et objectifs

Une partie de cette thèse porte sur le développement de la méthode NXFEM pour des éléments finis non-conformes. Une autre partie est dédiée à la modélisation asymptotique puis l'approximation par une méthode de type NXFEM des problèmes d'interphase. Enfin, la dernière partie est consacrée à une possible application physique.

Les éléments finis non-conformes ont été largement utilisés en particulier dans la mécanique des solides et la mécanique des fluides, en raison de leur meilleure stabilité par rapport à celle de la méthode d'éléments finis conformes. L'élément non-conforme le plus simple sur un maillage triangulaire, connu comme élément P^1 non-conforme ou élément de Crouzeix-Raviart, a été introduit en 1973 par Crouzeix et Raviart [45]. Parmi les éléments finis non-conformes sur maillage rectangulaire, on peut citer l'élément $Q1$ non-conforme de Rannacher et Turek [115], ou celui de Han [74].

Les éléments finis non-conformes ont été introduits pour le problème de Stokes mais ils ont aussi été utilisés pour résoudre des problèmes elliptiques [84, 95, 103] ou des problèmes d'élasticité [32, 39, 62]. Nous renvoyons le lecteur à [42, 73, 74] et à leurs références pour plus de détails sur les méthodes non conformes.

Nous nous intéressons à étendre la méthode NXFEM aux éléments finis non-conformes pour les raisons suivantes :

- Ils sont inf-sup stables pour les équations de Stokes que nous envisageons d'étudier dans le chapitre 4.
- Ils donnent une approximation robuste pour le modèle Giesekus par rapport aux nombres de Weissenberg élevés [82].
- Ils ne souffrent pas de problème de verrouillage numérique pour les couches minces, contrairement aux éléments finis conformes.

Présentation de la thèse

La thèse est organisée en trois parties, auxquelles se rajoutent un chapitre introductif et une annexe.

Le **chapitre 1** est consacré à une introduction de la méthode originale NXFEM (Nitsche's Extended Finite Element Method) pour un problème elliptique d'interface approché par des éléments finis conformes. Il présente des rappels de notations et de résultats auxquels on aura recours dans cette thèse.

Partie I. Problème d'interface : extension de la méthode NXFEM aux éléments finis non-conformes

Dans cette partie, nous étudions le problème elliptique de type Darcy et celui de Stokes avec une interface et nous nous intéressons à leurs approximations non-conformes via la méthode NXFEM. Cette partie est découpée en quatre chapitres.

Le **chapitre 2** traite le cas d'un problème elliptique. Nous rappelons tout d'abord les éléments finis de Crouzeix-Raviart et leurs propriétés. Puis, nous présentons la difficulté et les modifications engendrées lorsqu'on étend la méthode NXFEM aux éléments finis non-conformes sur une famille de maillages triangulaires. Nous proposons ensuite deux approches pour pallier cette difficulté : la première modifie les fonctions de base sur les triangles coupés par l'interface, la deuxième consiste à rajouter des termes de stabilisation sur les arêtes coupées. Nous montrons comment ces approches peuvent servir pour obtenir les principaux résultats d'interpolation et de consistance : il s'agit d'estimer dans une norme adéquate l'erreur de consistance et l'erreur d'interpolation. Nous présentons enfin le lien entre les approches développées et la méthode de Galerkin discontinue. Pour toutes ces approches, nous montrons qu'elles sont robustes à la fois par rapport aux coefficients de diffusion et à la position de l'interface, et nous montrons aussi que l'ordre de convergence est optimal.

Le **chapitre 3** est consacré aux tests numériques pour valider les résultats prouvés théoriques au chapitre précédent.

Au **chapitre 4**, les approches développées en chapitre 2 sont étendues au problème de Stokes avec une interface. Ce chapitre traite deux approches basées sur la méthode NXFEM, avec des éléments finis P^1 non-conformes pour la vitesse et P^0 pour la pression. L'objectif est de construire des formulations variationnelles bien posées, stables et convergent de manière optimale. Nous montrons que la condition *inf-sup* de Babuška-Brezzi, utilisant la modification des fonctions de base, est satisfaite sans rajouter de termes de stabilisation. Cependant, la condition *inf-sup* avec la deuxième approche nécessite des termes de stabilisation sur les arêtes coupées, qui sont similaires à ceux de la méthode de Galerkin discontinue. Pour ces deux approches, nous établissons un ordre de convergence optimal.

La partie s'achève avec le **chapitre 5**, où les applications des résultats du chapitre 4 aux différents problèmes physiques sont présentées. Les résultats obtenus par la première approche sont comparés et validés pour des exemples représentatifs.

Partie II. Problème d'interphase : modélisation asymptotique et approximation par NXFEM

Le **chapitre 6** est essentiellement de nature bibliographique. Dans ce chapitre, nous présentons des problèmes modèles types, tels que le problème de Darcy et les équations

de Stokes dans trois domaines dont une couche mince, qui seront utiles pour les chapitres 7 et 8.

Dans le **chapitre 7**, nous présentons d'abord la formulation variationnelle associée au problème elliptique de type Darcy, dans un domaine contenant une fracture. Puis, nous nous intéressons à un modèle asymptotique obtenu lorsque l'épaisseur de la fracture tend vers 0. Nous développons ensuite une méthode numérique basée sur NXFEM et utilisant des éléments finis conformes pour le problème aux limites correspondant au modèle asymptotique, décrit par des conditions de transmission non-standard sur une interface. Nous montrons que cette méthode est consistante et stable ; numériquement, nous obtenons un ordre de convergence optimal. Des tests numériques, incluant une comparaison avec la littérature, sont enfin présentés.

Au **chapitre 8**, l'approche asymptotique développée au chapitre 7 est étendue au problème de Stokes dans trois domaines. Nous écrivons la formulation variationnelle mixte et nous démontrons qu'elle satisfait la condition *inf-sup* de Babuška-Brezzi. Puis, nous justifions l'obtention du problème aux limites en utilisant les convergences qui entrent dans le cadre précédent. Pour finir, nous présenterons les pistes de recherche que nous envisageons à développer dans la suite.

Partie III. Modélisation d'une membrane par un fluide non-newtonien

Cette partie est dédiée au volet physique de la thèse qui englobe le comportement des globules rouges dans le sang. Elle est découpée en deux chapitres.

Le **chapitre 9** est essentiellement de nature bibliographique. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux relations entre le comportement mécanique des globules rouges et l'écoulement sanguin, cela revient à appréhender l'hémodynamique et la rhéologie du sang à travers le comportement mécanique des globules rouges. Pour cela, nous avons choisi le modèle rhéologique viscoélastique non-newtonien et non-linéaire de Giesekus pour modéliser le comportement de la membrane cellulaire.

Le **chapitre 10** porte sur la modélisation de la membrane par un fluide non-newtonien. Nous définissons d'abord le problème d'interphase composé de deux fluides newtoniens et un liquide non-newtoniens de Giesekus. Puis, nous écrivons formellement la formulation faible associée à notre problème physique. Nous utilisons ensuite l'approche asymptotique et les changements de variable pour présenter le problème variationnel. Après le passage formel à la limite, nous exposons finalement le problème avec des conditions de transmission non-standard sur l'interface modélisant la membrane.

Dans la conclusion, nous résumons brièvement les résultats obtenus et nous présentons quelques perspectives à ce travail.

Enfin, ce travail se termine par une **annexe** où nous rappelons certains résultats utilisés.

Méthode NXFEM pour éléments finis conformes

Le but de ce premier chapitre introductif est de présenter la méthode originale développée par A. et P. Hansbo [75]. Tout d'abord, nous présentons les notations mises en jeu pour décrire la formulation variationnelle. Ensuite, nous rappelons les hypothèses et quelques résultats connus sur des maillages triangulaires.

Sommaire

1.1	Notations spécifiques	21
1.2	Présentation de la méthode originale	24
1.3	Formulation robuste	28

1.1 Notations spécifiques

Nous considérons tout au long de ce chapitre un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 , avec $\partial\Omega$ frontière polygonale et une interface $\Gamma := \overline{\Omega}^{in} \cap \overline{\Omega}^{ex}$, divisant Ω en deux domaines ouverts disjoints Ω^{in} et Ω^{ex} , $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}^{in} \cup \overline{\Omega}^{ex} \cup \Gamma$.

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations de Ω dont les éléments du maillage sont des triangles notés T . On désigne par h_T le diamètre d'un triangle T , ρ_T le diamètre du cercle inscrit dans T et on pose $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$. Pour $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière non dégénérée (au sens de Ciarlet [42]), il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_T}{\rho_T} < c.$$

Nous définissons pour $i = in, ex$:

- $\mathcal{T}_h^i := \{T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Omega^i \neq \emptyset\}$,
- $\mathcal{T}_h^{int,i} := \{T \in \mathcal{T}_h : T \subset \Omega^i\}$,
- $\mathcal{T}_h^\Gamma := \{T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Gamma \neq \emptyset\}$,
- $\mathcal{T}_h^{\Gamma,i} := \{T \cap \Omega^{in} : T \in \mathcal{T}_h^\Gamma\}$,
- \mathcal{E}_h l'ensemble des arêtes du maillage \mathcal{T}_h ,
- \mathcal{E}_h^i l'ensemble des arêtes du maillage \mathcal{T}_h^i ,
- \mathcal{E}_h^{nc} l'ensemble des arêtes non - coupées du maillage \mathcal{T}_h ,

- $\mathcal{E}_h^{i,cut}$ l'ensemble des segments d'arêtes coupées inclus dans $\overline{\Omega}^i$,
- $\mathcal{E}_h^{\partial,cut}$ l'ensemble des segments d'arêtes coupées situées sur le bord $\partial\Omega^i$,
- $\mathcal{E}_h^{\partial,i}$ l'ensemble des arêtes situées sur le bord $\partial\Omega \cap \partial\Omega^i$,
- $\mathcal{E}_h^{\partial} := \mathcal{E}_h^{\partial,in} \cup \mathcal{E}_h^{\partial,ex}$,
- $\mathcal{E}_h^{int,i}$ l'ensemble des arêtes intérieures à Ω^i du maillage \mathcal{T}_h^i ,
- $\tilde{\mathcal{E}}_h^i := \mathcal{E}_h^{int,i} \cup \mathcal{E}_h^{i,cut} \cup \mathcal{E}_h^{\partial,i}$, $i = in, ex$,
- Ω_h^i sous-domaine enrichi au niveau des triangles coupés ;

$$\Omega_h^i = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^{int,i} \cup \mathcal{T}_h^{i,cut}} T,$$

Nous considérons les hypothèses suivantes sur la discontinuité :

(H₁) Pour chaque triangle T coupé, Γ_T coupe le bord ∂T distinctement et exactement deux fois, et dont au plus une fois chaque arête (ex : Fig. 1.1 interdite).

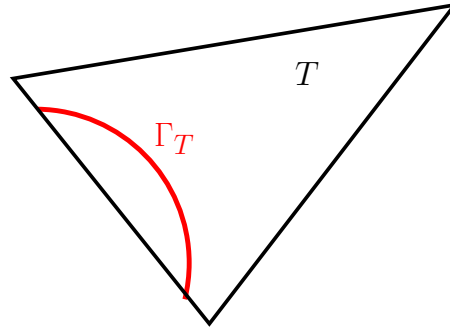


Fig. 1.1 – Situation interdite

(H₂) Pour tout élément $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$, on note $\Gamma_T := \Gamma \cap T$ et $\Gamma_{T,h}$ le segment reliant les points d'intersection entre Γ et ∂T . On admet que (voir Fig. 1.2) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{T,h} &= \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < |\Gamma_{T,h}|, \quad \eta = 0\}, \\ \Gamma_T &= \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < |\Gamma_{T,h}|, \quad \eta = r(\xi)\}, \end{aligned}$$

où r désigne la courbure de Γ et est supposée bornée.

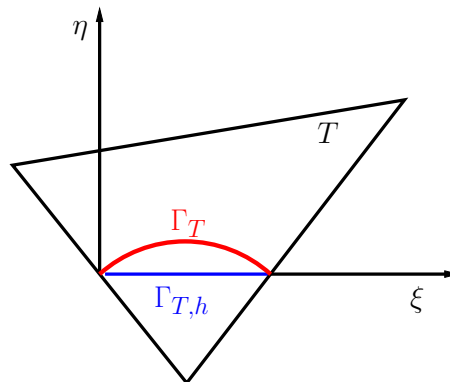


Fig. 1.2 – Géométrie et coordonnées locales de Γ_T et $\Gamma_{T,h}$ dans $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$

Sur une arête donnée $e \in \mathcal{E}_h$, on choisit une fois pour toutes la normale unitaire n_e et on convient de noter les triangles adjacents T^l, T^r de sorte que n_e soit orientée de T^l vers

T^r . Si $e \in \mathcal{E}_h^\partial$, n_e est la normale extérieure. Pour toute fonction ϕ continue dans T^l et T^r , on note pour $x \in e$:

$$\phi^l(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(x + \varepsilon n_e), \quad \phi^r(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(x - \varepsilon n_e).$$

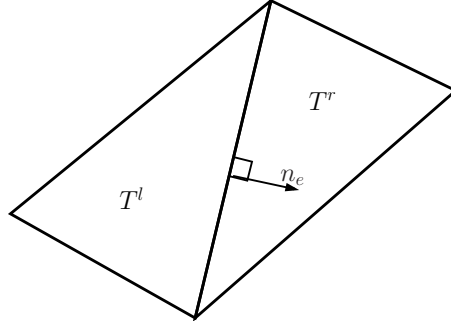


Fig. 1.3 – Deux triangles partageant une arête intérieure

On définit alors le saut $[\cdot]$ et la moyenne pondérée $\{\cdot\}$ de ϕ sur $e \in \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^\partial$ ($i = in, ex$) par les relations suivantes :

$$[\phi]^e = \begin{cases} \phi^l - \phi^r & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^i, \\ \phi^l & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^\partial, \end{cases} \quad \{\phi\}^e = \begin{cases} \kappa^r \phi^r + \kappa^l \phi^l & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}, \\ \frac{1}{2}(\phi^r + \phi^l) & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^{int, i}, \\ \phi^l & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^\partial \end{cases}$$

où les poids κ^r et κ^l seront définis ultérieurement. Ils vérifient $\kappa^r + \kappa^l = 1$, $0 \leq \kappa^r \leq 1$ et $0 \leq \kappa^l \leq 1$.

Sur l'interface Γ , on choisit la normale unitaire n_Γ orientée de Ω^{in} vers Ω^{ex} . On note pour $x \in \Gamma$ et ϕ une fonction continue dans Ω^{in} et dans Ω^{ex} ,

$$\phi^{in}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(x + \varepsilon n_\Gamma), \quad \phi^{ex}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(x - \varepsilon n_\Gamma).$$

On définit le saut et les moyennes pondérées de ϕ sur Γ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} [\phi]^\Gamma &= \phi^{in} - \phi^{ex}, \\ \{\phi\}^\Gamma &= k^{ex} \phi^{ex} + k^{in} \phi^{in}, \\ \{\phi\}_*^\Gamma &= k^{in} \phi^{ex} + k^{ex} \phi^{in} \end{aligned}$$

avec les poids k^{ex} et k^{in} qui seront définis ultérieurement tels que $k^{ex} + k^{in} = 1$, $0 \leq k^{ex} \leq 1$ et $0 \leq k^{in} \leq 1$. Nous avons

$$\phi^{in} = \{\phi\}^\Gamma + k^{ex} [\phi]^\Gamma, \quad \phi^{ex} = \{\phi\}^\Gamma - k^{in} [\phi]^\Gamma. \quad (1.1)$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on omettra les exposants e et Γ dans le saut et la moyenne.

Il est utile de rappeler la formule :

$$[ab] = \{a\}[b] + [a]\{b\}_*. \quad (1.2)$$

On notera par la suite la projection $L^2(\omega)$ - orthogonale d'une fonction $\varphi \in L^2(\omega)$ sur l'espace polynomial P^k ($k \in \mathbb{N}$) par $\pi_k^\omega \varphi$.

Nous rappelons l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.3)$$

1.2 Présentation de la méthode originale

Dans cette section, nous considérons un problème modèle modélisant par exemple l'écoulement dans deux milieux poreux Ω^{in} et Ω^{ex} séparés par une surface de contact Γ (voir par exemple [75] comme illustré dans Fig. 1.4).

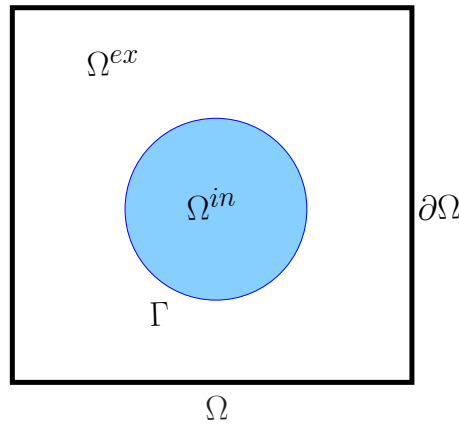


Fig. 1.4 – Exemple de géométrie considérée

Le problème que l'on souhaite résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_n u] = g & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (1.4)$$

où μ est un coefficient discontinu et strictement positif, supposé ici constant par sous-domaine : $\mu = \mu_{in}$ dans Ω^{in} et $\mu = \mu_{ex}$ dans Ω^{ex} . On suppose que $f \in L^2(\Omega)$ et que $g \in L^2(\Gamma)$.

Afin de simplifier la présentation, on considèrera par la suite des conditions aux limites homogènes de Dirichlet, mais d'autres choix sont possibles (i.e on peut prendre des conditions de Dirichlet $u = g_D$ sur Γ_D et des conditions de Neumann $\mu \nabla_n u = g_N$ sur Γ_N).

On notera désormais $u|_{\Omega^{in}} = u^{in}$ et $u|_{\Omega^{ex}} = u^{ex}$. Il est bien connu que le problème (1.4) admet une unique solution dans $H^1(\Omega)$ (voir [40]), qui vérifie la formulation variationnelle faible : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(\mu \nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega + (g, v)_\Gamma, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.5)$$

où pour un domaine $w = \Omega$ ou $w = \Gamma$, $(\cdot, \cdot)_w$ désigne le produit scalaire de $L^2(w)$ (voir annexe A.2).

Nous présentons dans la suite la méthode NXFEM (Nitsche's eXtended Finite Element Method) qui permet le traitement de discontinuités le long d'une interface sur un maillage fixe, qui ne suit pas l'interface.

NXFEM est un mot composé, le premier concerne la méthode de Nitsche et le deuxième la méthode des éléments finis étendus (XFEM). Cette dernière a été introduite en 1999 par Dolbow, Mões et Belytschko [52], afin de traiter des maillages indépendants des fissures et d'analyser des problèmes ayant des discontinuités, des singularités, des déformations locales et des géométries complexes. XFEM est basée sur la propriété de partition de l'unité qui autorise l'ajout de fonctions d'enrichissement dans la formulation, permettant de représenter les discontinuités et les singularités aux extrémités des fissures.

L'idée de la méthode NXFEM, introduite en 2002 par A. Hansbo et P. Hansbo [75], est de doubler les degrés de liberté sur toutes les cellules qui sont coupées par l'interface et de recoller les morceaux via une formulation variationnelle inspirée de la méthode de Nitsche ; cette dernière a été introduite par J. Nitsche en 1979 (cf. [100]) dans le but de résoudre le problème de Dirichlet sans imposer la condition aux limites de manière forte dans l'espace d'éléments finis, mais d'une manière faible dans la formulation variationnelle.

Dans la suite nous utiliserons la méthode NXFEM. Cette méthode utilise des fonctions de base d'éléments finis classiques pour enrichir l'espace d'approximation et traite les conditions au bord de façon faible dans la formulation variationnelle. Cependant, la méthode XFEM utilise comme fonctions de base des fonctions singulières (de Heaviside) et des degrés de liberté supplémentaires. L'implémentation de NXFEM est ainsi plus simple que celle de XFEM.

On considère l'espace d'approximation par éléments finis P^1 - conformes, noté $W_h = W_h^{in} \times W_h^{ex}$ (cf. [75]) tel que

$$W_h^i = \left\{ \phi^i \in H^1(\Omega_h^i) : (\phi^i)|_T \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i, (\phi^i)|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad i = in, ex.$$

La Figure 1.5 illustre l'espace produit : W_h^{in} est associé à la couleur verte, et l'espace W_h^{ex} est représenté par la couleur bleue. On peut remarquer que les degrés de liberté sont doublés sur les cellules coupées par l'interface Γ et que le domaine Ω_h^i est plus grand que le domaine initial Ω^i .

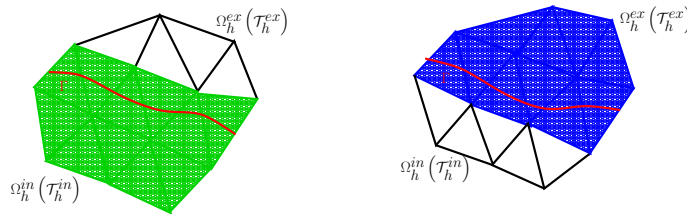
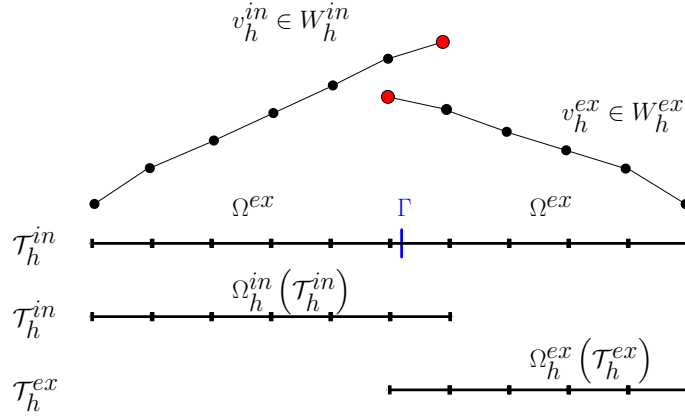


Fig. 1.5 – Espace produit W_h : dédoublement de degrés de liberté

En dimension 1, l'espace d'approximation W_h est illustrée par la figure Fig. 1.6.

Fig. 1.6 – Espace produit W_h en 1D : dédoublement de degrés de liberté

Introduisons la forme bilinéaire suivante sur W_h :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) = & \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n u_h\} [v_h] ds \\ & - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n v_h\} [u_h] ds + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_{\Gamma_T} \lambda_T [u_h] [v_h] ds, \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ désigne un paramètre de stabilisation indépendant des coefficients de diffusion et de la géométrie du maillage, et λ_T est un paramètre que l'on précisera dans la suite.

On introduit également la forme linéaire $l(\cdot)$ sur W_h :

$$l(v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\Gamma} g \{v_h\}_* ds.$$

La méthode NXFEM consiste alors à chercher $u_h \in W_h$ tel que

$$a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in W_h. \quad (1.6)$$

Nous introduisons les semi-normes et normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,h}^2 &:= \sum_{i=in,ex} \|\nabla u\|_{0,\Omega^i}^2, & \|u\|_h^2 &:= \sum_{i=in,ex} \|\mu^{1/2} \nabla u\|_{0,\Omega^i}^2, \\ \|u\|_{1/2,h,\Gamma}^2 &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} h_T^{-1} \|u\|_{0,\Gamma_T}^2, & \|u\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} h_T \|u\|_{0,\Gamma_T}^2 \end{aligned}$$

et

$$\|u\|^2 := \|u\|_h^2 + \|\{\mu \nabla_n u\}\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 + \|u\|_{1/2,h,\Gamma_T}^2. \quad (1.7)$$

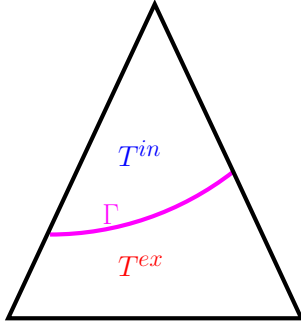
Il est utile de rappeler l'inégalité suivante sur l'interface Γ :

$$(u, v)_{\Gamma} \leq \|u\|_{-1/2,h,\Gamma} \|v\|_{1/2,h,\Gamma} \quad (1.8)$$

où $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ représente le produit scalaire de $L^2(\Gamma)$.

En 2002, A. Hansbo et P. Hansbo ont proposé dans [75] la méthode NXFEM pour des maillages triangulaires pour une approximation P^1 -conforme par sous-domaine du problème elliptique (1.4). Ils ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème

variationnel (1.6), l'ordre de convergence optimal par rapport à la norme $||| \cdot |||$ et la robustesse par rapport à la géométrie du maillage coupé par l'interface (voir Fig. 1.7), avec les coefficients de pondération définis comme suit :



$$k^{in} = \frac{|T^{in}|}{|T|}, \quad k^{ex} = \frac{|T^{ex}|}{|T|}, \quad \lambda_T = \frac{\max(\mu_{in}, \mu_{ex})}{h_T}. \quad (1.9)$$

Fig. 1.7 – Triangle coupé

Nous rappelons ici les principaux résultats de la méthode NXFEM originale. Pour plus de détails, on renvoie à [75]. On admet dans la suite que $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$; c'est le cas, par exemple, si Ω est convexe.

Lemme 1.2.1. *Pour λ suffisamment grand, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que*

$$a_h(u_h, u_h) \geq C_1 |||u_h|||^2, \quad \forall u_h \in W_h, \quad (1.10)$$

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq C_2 |||u_h||| |||v_h|||, \quad \forall u_h, v_h \in W_h. \quad (1.11)$$

Comme conséquence directe de ce lemme, le problème (1.6) vérifie les conditions du théorème de Lax-Milgram. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2.1. *Pour λ suffisamment grand, le problème (1.6) admet une unique solution..*

Lemme 1.2.2. (Consistance) *Soient u la solution du problème (1.4) et u_h la solution de la formulation variationnelle (1.6). Alors, on a*

$$a_h(u, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in W_h.$$

Avec pour conséquence directe de ce lemme :

Lemme 1.2.3. (Orthogonalité de Galerkin) *Soient u la solution du problème (1.4) et u_h la solution de la formulation variationnelle (1.6). Pour tout $v_h \in W_h$, nous avons*

$$a_h(u - u_h, v_h) = 0.$$

Nous avons le résultat suivant qui donne une estimation a priori de l'erreur.

Théorème 1.2.2. *Supposons que u solution du problème (1.4) vérifie $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$. Soit u_h la solution du problème variationnel (1.6). Alors nous avons*

$$|||u - u_h||| \leq C h |u|_{2, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}}$$

et

$$|||u - u_h|||_{0, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}} \leq C h^2 |u|_{0, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}},$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h .

Pour conclure, la méthode présentée dans [75] est uniquement robuste par rapport aux coefficients de diffusion μ_{in} et μ_{ex} . Cependant, il existe des formulations robustes à la fois par rapport à la géométrie de l'interface et par rapport aux paramètres de diffusion ; c'est l'objet de la section suivante.

1.3 Formulation robuste

D'autres formulations robustes de NXFEM sont apparues par la suite, soit en utilisant des mailles supplémentaires (voir la résolution dans un domaine fictif [17, 76]), soit en introduisant des termes de stabilisation [34]. En 2012, R. Becker et al. (cf. [12]) ont utilisé les coefficients suivants pour définir les moyenne pondérées :

$$k^{in} = \frac{\mu_{ex}|T^{in}|}{\mu_{ex}|T^{in}| + \mu_{in}|T^{ex}|}, \quad k^{ex} = \frac{\mu_{in}|T^{ex}|}{\mu_{ex}|T^{in}| + \mu_{in}|T^{ex}|}. \quad (1.12)$$

Ils ont démontré que le problème variationnel (1.6) admet une solution unique et ont établi la stabilité uniforme pour la norme :

$$\|u\|_*^2 := \|u\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [u] \|_{0,\Gamma_T}^2 \quad (1.13)$$

avec λ_T le paramètre de stabilisation donné par :

$$\lambda_T = \frac{\mu_{in}\mu_{ex}|\Gamma_T|}{\mu_{in}|T^{ex}| + \mu_{ex}|T^{in}|}. \quad (1.14)$$

La méthode NXFEM est ainsi robuste à la fois par rapport à la géométrie du maillage coupé par l'interface et par rapport aux paramètres de diffusion. Cette méthode coïncide alors sur des maillages correspondant à l'interface avec la méthode de Galerkin discontinue avec pondération harmonique proposée dans [53] ; l'expression des poids coïncide donc avec celle où l'interface suit les maillages.

C. Annavarapu et al. [6] ont proposé les mêmes coefficients que dans [12] pour définir la moyenne pondérée. Désormais, nous utiliserons ceux-ci ; un autre choix est proposé dans [76].

Dans les chapitres suivants, nous avons besoin de l'inégalité inverse suivante :

Lemme 1.3.1. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ tel que $|T^i| = \alpha_{i,T}h_T^2$ et $|\Gamma_T| = \gamma_T h_T$ pour $i = in, ex$. Pour toute fonction $v_h \in P^1(T)$, nous avons

$$h_T \|\nabla_n v_h\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq \frac{\gamma_T}{\alpha_{i,T}} \|\nabla v_h\|_{0,T^i}^2. \quad (1.15)$$

Démonstration. Rappelons que $T^i := T \cap \Omega^i$ et $\Gamma_T := \Gamma \cap T$. Comme $\nabla_n v_h$ est constant sur T , on a

$$h_T \|\nabla_n v_h\|_{0,\Gamma_T}^2 = h_T |\Gamma_T| |\nabla v_h|^2 = h_T \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \|\nabla v_h\|_{0,T^i}^2.$$

En utilisant $|T^i| = \alpha_{i,T}h_T^2$ et $|\Gamma_T| = \gamma_T h_T$, on obtient

$$h_T \|\nabla_n v_h\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq \frac{\gamma_T}{\alpha_{i,T}} \|\nabla v_h\|_{0,T^i}^2.$$

■

Remarque 1.3.1. Si $\alpha_{i,T}$ et γ_T sont bornés, alors les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_*$ sont équivalentes sur les espaces d'éléments finis P^1 (conformes ou non-conformes).

Nous rappelons aussi les inégalités de trace (cf. [76]) dont nous aurons besoin pour prouver des résultats d'approximation.

Lemme 1.3.2. *Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$h_T^{-1/2} \|\tilde{\xi}\|_{0,\Gamma_T} \leq c \left(h_T^{-1} \|\tilde{\xi}\|_{0,T} + |\tilde{\xi}|_{1,T} \right), \quad \forall \tilde{\xi} \in H^1(T), \quad T \in \mathcal{T}^\Gamma, \quad (1.16)$$

$$|e|^{-1/2} \|\tilde{\xi}\|_{0,e} \leq C \left(h_T^{-1} \|\tilde{\xi}\|_{0,T} + |\tilde{\xi}|_{1,T} \right), \quad \forall \tilde{\xi} \in H^1(T), \quad e \subset \partial T. \quad (1.17)$$

Démonstration. On utilise le Lemme 3 de [75] et l'argument de "*scaling*" pour démontrer la première inégalité de trace (1.16). La deuxième vient du théorème de trace standard, voir par exemple le Théorème 1.6.6 de Brenner [31]. ■

Nous nous intéressons dans la suite à généraliser la méthode NXFEM au cas des éléments finis non-conformes.

PARTIE I

PROBLÈME D'INTERFACE : EXTENSION DE LA MÉTHODE NXFEM AUX ÉLÉMENTS FINIS NON-CONFORMES

Cette partie est découpée en quatre chapitres. Le premier chapitre concerne le développement de la méthode NXFEM pour un problème elliptique approché par des éléments finis non-conformes. Nous avons proposé deux variantes pour estimer l'erreur d'interpolation et de consistance sur les arêtes coupées par l'interface. Le deuxième chapitre est dédié à la validation des résultats théoriques du premier chapitre. Le troisième chapitre est consacré à l'extension de cette méthode au problème de Stokes. Le quatrième chapitre concerne les applications numériques pour le problème de Stokes.

Approximation P^1 non-conforme d'un problème modèle elliptique

Nous présentons dans ce chapitre deux approches pour résoudre le problème de type Darcy par la méthode NXFEM à l'aide d'une approximation par des éléments finis P^1 - non-conformes. La première approche consiste à construire de nouvelles fonctions de base sur les triangles coupés par l'interface Γ , tout en conservant les fonctions de forme classiques de Crouzeix-Raviart sur les triangles non-coupés. La deuxième consiste à rajouter des termes de stabilisation sur les arêtes coupées par l'interface Γ , en conservant l'espace usuel des éléments finis P^1 - non-conformes de Crouzeix-Raviart. Nous nous intéressons ensuite à l'estimation d'erreur a priori commise par ces deux approches. Enfin, nous nous intéressons à la relation entre les deux approches proposées lorsque les paramètres de stabilisation de la deuxième méthode tendent vers l'infini.

Sommaire

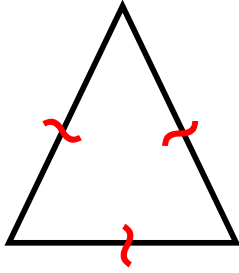
2.1	Approximation P^1 non-conforme	34
2.1.1	Rappel de quelques outils de base	34
2.1.2	Difficultés liées à l'utilisation de la méthode NXFEM	36
2.2	Première approche : modification des éléments finis non-conformes	37
2.2.1	Robustesse par rapport à la position de l'interface	41
2.2.2	Problème discret - Existence et unicité	43
2.2.3	Erreur d'interpolation	45
2.2.4	Erreur de consistance	53
2.2.5	Estimation d'erreur a priori	58
2.3	Deuxième approche : rajout de termes de stabilisation	59
2.3.1	Problème discret - Existence et unicité	59
2.3.2	Erreur d'interpolation	62
2.3.3	Erreur de consistance	64
2.3.4	Estimation d'erreur a priori	64
2.4	Lien entre les approches	65
2.4.1	Passage à la limite lorsque $\gamma_i \rightarrow +\infty$	65
2.4.2	Formulation de type Galerkin discontinue	66
2.5	Conclusion	68

2.1 Approximation P^1 non-conforme

On rappelle d'abord quelques outils de base sur les éléments finis de Crouzeix-Raviart. Ensuite, on présente la difficulté liée à l'extension de la méthode NXFEM aux éléments finis non-conformes.

2.1.1 Rappel de quelques outils de base

Soit $T = (A_1 A_2 A_3)$ un triangle de \mathbb{R}^2 dont les arêtes $A_2 A_3$, $A_1 A_3$ et $A_1 A_2$ sont notées respectivement e_1 , e_2 et e_3 . Pour $v \in H^1(T)$, on introduit comme degrés de liberté (D.d.l.) les valeurs moyennes de v sur chaque arête (voir Fig. 2.1) :



$$\sigma_i(v) = \frac{1}{|e_i|} \int_{e_i} v ds, \quad i = 1, 2, 3$$

Fig. 2.1 – D.d.l. de l'élément fini non-conforme de Crouzeix-Raviart

et on pose $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Il est alors bien connu (cf. [45]) que le triplet $\{T, P^1, \Sigma\}$ est un élément fini, appelé élément fini de Crouzeix-Raviart. Les fonctions de forme sont définies par :

$$\varphi_i(x) = 1 - 2\lambda_i(x), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (2.1)$$

avec $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ les coordonnées barycentriques associées aux nœuds A_i .

L'opérateur d'interpolation locale I_T de Crouzeix-Raviart est défini de $H^1(T)$ à valeurs dans P^1 par :

$$I_T v = \sum_{i=1}^3 \sigma_i(v) \varphi_i.$$

C'est un opérateur linéaire continu de $H^1(T)$ dans $H^1(T)$, grâce au théorème de trace, mais aussi de $H^2(T)$ dans $H^1(T)$ grâce à l'injection continue de Sobolev $H^2(T) \subset C^0(\bar{T})$.

L'espace d'éléments finis de Crouzeix-Raviart qui approche $H_0^1(\Omega)$ est défini par :

$$V_h(\Omega) = \left\{ v_h \in L^2(\Omega); v_h|_T \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \int_e [v_h] ds = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h \right\}$$

et il est bien connu que $V_h(\Omega) \not\subset H^1(\Omega)$. En effet, on impose uniquement la continuité au sens faible de v_h sur $e \in \mathcal{E}_h$.

L'opérateur d'interpolation globale I_h est défini de $H^1(\Omega)$ à valeurs dans $V_h(\Omega)$ par restriction,

$$(I_h v)|_T = I_T v, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Il satisfait les estimations d'interpolation suivantes, pour $v \in H^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{0,\Omega} &\leq ch^2 |v|_{2,\Omega}, \\ |v - I_h v|_{1,\Omega} &\leq ch |v|_{2,\Omega}. \end{aligned}$$

Nous rappelons ici une inégalité de type Poincaré-Friedrichs (cf. [30]) utilisée dans la méthode d'éléments finis non-conformes et aussi dans la méthode de Galerkin discontinue.

Lemme 2.1.1. *Soit D un sous-domaine de $\partial\Omega$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\xi\|_{0,\Omega}^2 \leq C \left[|\xi|_{1,h}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}^{int}} \frac{1}{|e|^2} \left(\int_e [\xi] ds \right)^2 + \left(\int_D \xi ds \right)^2 \right], \quad (2.2)$$

pour tout $\xi \in H^1(T)$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$.

Par conséquent, pour tout $\xi \in V_h(\Omega)$ on a

$$\|\xi\|_{0,\Omega} \leq C |\xi|_{1,h}. \quad (2.3)$$

Nous rappelons aussi un outil de base pour estimer l'erreur a priori dans le cas non-conforme où $V_h(\Omega) \not\subseteq V(\Omega)$, le lemme de Strang (cf. [42] par exemple).

Lemme 2.1.2. *Soit $u \in V(\Omega)$ la solution du problème variationnel : $B(u, v) = b(v)$, $\forall v \in V(\Omega)$ et $u_h \in V_h(\Omega)$ la solution de la formulation discrète : $B(u_h, v_h) = b(v_h)$, $\forall v_h \in V_h(\Omega)$. Si $B(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $V_h(\Omega)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u - u_h\| \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h(\Omega)} \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in V_h(\Omega)} \frac{|B(u - u_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme sur $V(\Omega) + V_h(\Omega)$.

L'erreur se décompose ainsi en deux parties. Le premier infimum est l'erreur d'interpolation. Le second terme est induit par la non-conformité de la méthode, c'est-à-dire par le fait que l'espace d'approximation construit $V_h(\Omega)$ n'est pas inclus dans l'espace original $V(\Omega)$, et correspond à l'erreur de consistance.

Pour majorer l'erreur de consistance, nous utiliserons les inégalités de trace suivantes (voir par exemple [31, 126]) :

Lemme 2.1.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|e| \|\llbracket \xi \rrbracket\|_{0,e}^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_e} h_T^2 |\xi|_{1,T}^2, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \forall \xi \in V_h(\mathcal{T}_e), \quad (2.4)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\llbracket \xi \rrbracket\|_{0,e}^2 \leq Ch^2 |\xi|_{1,\Omega}^2, \quad \forall \xi \in V_h(\Omega) \quad (2.5)$$

où \mathcal{T}_e est l'ensemble des triangles contenant l'arête e .

Démonstration. Pour tout $v_h \in V_h(\mathcal{T}_e)$ et pour tout $e \in \mathcal{E}_h^{int}$, $\{e\} = T^r \cap T^l$, on a

$$\|v_h\|_{0,e} = \|v_h - \pi_0^e v_h\|_{0,e} \leq \|(v_h - \pi_0^e v_h)|_{T^r}\|_{0,e} + \|(v_h - \pi_0^e v_h)|_{T^l}\|_{0,e},$$

d'où

$$\sqrt{|e|} \|v_h\|_{0,e} \leq |e| \frac{1}{\sqrt{|e|}} \left(\|(v_h - \pi_0^T v_h)|_{T^r}\|_{0,e} + \|(v_h - \pi_0^T v_h)|_{T^l}\|_{0,e} \right).$$

En utilisant l'inégalité de trace (1.17), il vient que

$$\begin{aligned} \sqrt{|e|} \| [v_h] \|_{0,e} &\leq C |e| \left(\frac{1}{h_T} \| v_h - \pi_0^T v_h \|_{0,T^r} + |v_h - \pi_0^T v_h|_{1,T^r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_T} \| v_h - \pi_0^T v_h \|_{0,T^l} + |v_h - \pi_0^T v_h|_{1,T^l} \right). \end{aligned}$$

à l'aide des propriétés de l'opérateur de projection, nous avons

$$\sqrt{|e|} \| [v_h] \|_{0,e} \leq C |e| (|v_h|_{1,T^r} + |v_h|_{1,T^l}) \leq C h_T (|v_h|_{1,T^r} + |v_h|_{1,T^l}),$$

par sommation sur l'ensemble des triangles \mathcal{T}_e contenant l'arête e on démontre la première inégalité du Lemme dans le cas où $e \in \mathcal{E}_h^{int}$. Le cas $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ se traite de manière similaire.

Pour démontrer la deuxième inégalité, il suffit de sommer sur toutes les arêtes $e \in \mathcal{E}_h$.

■

2.1.2 Difficultés liées à l'utilisation de la méthode NXFEM

On s'intéresse ici à l'extension de la méthode NXFEM aux éléments finis non-conformes et aux modifications que cela engendre. Revenons donc au problème variationnel (1.6), où l'on remplace l'espace d'approximation W_h par l'espace produit $V_h = V_h^{in} \times V_h^{ex}$ avec

$$V_h^i = \left\{ v_h \in L^2(\Omega_h^i); v_h|_T \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \int_e [v_h] ds = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^i \right\}, \quad i = in, ex.$$

Nous pouvons établir l'existence et l'unicité de la solution du nouveau problème variationnel grâce au lemme de Lax-Milgram.

Cependant, l'erreur de consistance n'est pas majorée de manière optimale si nous définissons les opérateurs d'interpolation de la même manière que dans le cas conforme présenté dans [75]. C'est-à-dire, si nous utilisons :

— l'opérateur d'extension (cf. [47]) $E^i : H^2(\Omega^i) \longrightarrow H^2(\Omega), i = in, ex$ tel que

$$E^i v|_{\Omega^i} = v, \quad \|E^i v\|_{s,\Omega^i} \leq C \|v\|_{s,\Omega^i} \quad \forall v \in H^s(\Omega^i), \quad s = 0, 1, 2. \quad (2.6)$$

— l'opérateur d'interpolation I_h^* défini par

$$I_h^* v := (I_h^{*in} v^{in}, I_h^{*ex} v^{ex}) \quad \text{où} \quad I_h^{*i} v^i := (I_h E^i v^i)|_{\Omega_h^i}$$

et où I_h est ici l'opérateur d'interpolation non-conforme sur Ω .

Alors, le Théorème 2 de [75] qui correspond à notre Théorème 2.2.1, page 53 et qui concerne l'erreur d'interpolation, est satisfait lors d'une approximation par des éléments finis non-conformes, mais

$$\int_e I_h^{*i} v^i ds \neq \int_e v^i ds, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}, \quad i = in, ex.$$

Par conséquent, l'égalité

$$\int_e I_h^* v ds = \int_e v ds, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^i \quad (2.7)$$

n'est pas satisfaite dans le cas non-conforme. Aussi, on ne peut pas majorer les termes de non-conformité :

$$\sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e \mu_i \nabla_n u^i \left[v_h^i \right] ds.$$

Pour remédier à ce problème, nous proposons dans la suite deux approches.

La première est dédiée à la modification des fonctions de base sur les arêtes des triangles coupés par l'interface Γ , de sorte que (2.7) soit satisfaite. L'erreur de consistance est alors majorée de manière immédiate et il reste à majorer l'erreur d'interpolation sur le nouvel espace.

La deuxième approche consiste à rajouter des termes de stabilisation dans la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$, similaires à ceux de la méthode de Galerkin discontinue mais prenant en compte la géométrie des triangles coupés, tout en conservant l'espace d'approximation V_h . La formulation devient consistante et il s'agit, là encore, de majorer l'erreur d'interpolation, en particulier les nouveaux termes induits dans la norme.

2.2 Première approche : modification des éléments finis non-conformes

Nous nous intéressons à construire de nouvelles fonctions de base sur les triangles $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ coupés par l'interface Γ . L'idée est d'associer les degrés de liberté aux segments d'arêtes coupées dans chaque sous-domaine, et non aux arêtes entières.

Modification sur les triangles coupés

Pour simplifier la présentation, on suppose dans ce paragraphe que $T^\square = T^{in}$ est la partie quadrilatérale de $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et que $T^\triangle = T^{ex}$ est celle triangulaire.

Soit un triangle $T := (ABC)$ coupé par Γ aux points $M \in (AC)$ et $N \in (BC)$. On pose

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \alpha, \quad \frac{|BN|}{|BC|} = \beta, \quad 0 < \alpha < 1 \text{ et } 0 < \beta < 1.$$

La Figure 2.2 illustre la stratégie utilisée pour déterminer ces nouvelles fonctions de base, et aussi pour construire notre espace d'approximation.

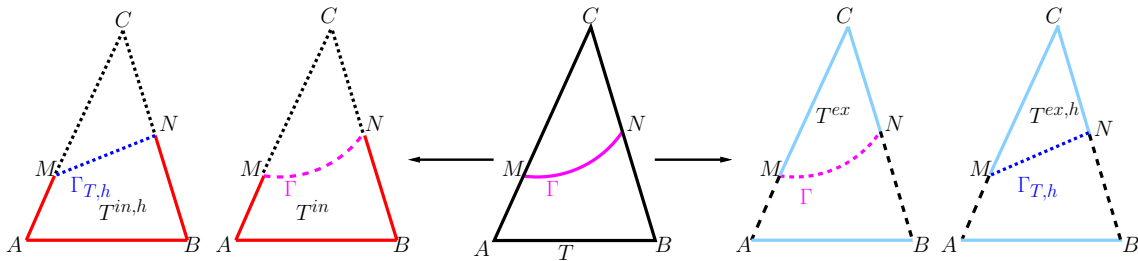


Fig. 2.2 – Géométrie du triangle (ABC) coupé par Γ

Notons les nouvelles fonctions $(\tilde{\varphi}_j^{in})_{1 \leq j \leq 3}$ (respectivement $(\tilde{\varphi}_j^{ex})_{1 \leq j \leq 3}$) associées aux arêtes $e_1^{in} = AM$, $e_2^{in} = BN$ et $e_3^{in} = AB$ de $T^{in} = T \cap \Omega^{in}$ (respectivement $e_1^{ex} = CM$, $e_2^{ex} = CN$ et $e_3^{ex} = AB$ de $T^{ex} = T \cap \Omega^{ex}$).

Dans un premier temps, nous nous intéressons à déterminer le triplet de fonctions linéaires $(\tilde{\varphi}_1^{in}, \tilde{\varphi}_2^{in}, \tilde{\varphi}_3^{in})$ sur T tel que :

$$\int_{e_l^{in}} \tilde{\varphi}_j^{in} ds = |e_l^{in}| \delta_{jl}, \quad \forall 1 \leq j, l \leq 3 \quad (2.8)$$

où δ_{jl} est le symbole de Kronecker.

On rappelle que $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq 3}$ dénotent les fonctions usuelles de Crouzeix-Raviart sur T , données dans (2.1) et qu'elles engendrent l'espace P^1 .

On décompose $\tilde{\varphi}_i^{in} \in P^1(T)$ dans la base $\mathcal{B} = \{\varphi_j\}_{1 \leq j \leq 3}$:

$$\tilde{\varphi}_i^{in} = \sum_{l=1}^3 a_{il}^{in} \varphi_l,$$

avec a_{il}^{in} ($1 \leq i, l \leq 3$) des nombres réels à déterminer.

En injectant cette expression dans (2.8), nous avons le système linéaire suivant pour chaque i :

$$\sum_{l=1}^3 a_{il}^{in} \int_{e_j^{in}} \varphi_l ds = |e_j^{in}| \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

On calcule les intégrales par la formule d'intégration au point milieu. Pour cela, nous avons besoin des valeurs de φ_1 , φ_2 et φ_3 aux points milieux M_1 et N_1 des arêtes $e_1^{in} = AM$ et $e_2^{in} = BN$, de coordonnées :

$$M_1 = \frac{\alpha}{2}C + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)A, \quad N_1 = \frac{\beta}{2}C + \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)B.$$

On obtient grâce à (2.1) :

$$\begin{cases} \varphi_1(M_1) = 1 & , & \varphi_1(N_1) = \beta - 1, \\ \varphi_2(M_1) = \alpha - 1 & , & \varphi_2(N_1) = 1, \\ \varphi_3(M_1) = 1 - \alpha & , & \varphi_3(N_1) = 1 - \beta. \end{cases}$$

Pour $i = 1$, on obtient

$$\begin{cases} a_{11}^{in} \varphi_1(M_1) + a_{12}^{in} \varphi_2(M_1) = 1, \\ a_{11}^{in} \varphi_1(N_1) + a_{12}^{in} \varphi_2(N_1) = 0, \\ a_{13}^{in} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Après calculs, il vient que

$$a_{11}^{in} = \frac{\varphi_2(N_1)}{\varphi_1(M_1)\varphi_2(N_1) - \varphi_1(N_1)\varphi_2(M_1)}, \quad a_{12}^{in} = \frac{-\varphi_1(N_1)}{\varphi_1(M_1)\varphi_2(N_1) - \varphi_1(N_1)\varphi_2(M_1)}$$

ce qui nous donne la fonction de base $\tilde{\varphi}_1^{in}$.

Nous utilisons la même démarche pour déterminer $\tilde{\varphi}_2^{in}$ et $\tilde{\varphi}_3^{in}$ et nous obtenons finalement :

$$\tilde{\varphi}_1^{in} = \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_1 + \frac{1 - \beta}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_2, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\varphi}_2^{in} = \frac{1 - \alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_1 + \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_2, \quad (2.11)$$

$$\tilde{\varphi}_3^{in} = \frac{-(1 - \alpha)(2 - \beta)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_1 - \frac{(2 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_2 + \varphi_3. \quad (2.12)$$

Pour déterminer les fonctions $\tilde{\varphi}_i^{ex}$ associées à T^{ex} , il suffit de remplacer $\alpha - 1$ et $\beta - 1$ respectivement par α et β dans (2.10), (2.11) et (2.12). Ce qui nous donne :

$$\tilde{\varphi}_1^{ex} = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \varphi_1 - \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \varphi_2, \quad (2.13)$$

$$\tilde{\varphi}_2^{ex} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \varphi_1 + \frac{1}{1 - \alpha\beta} \varphi_2, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\varphi}_3^{ex} = \frac{\alpha(1 - \beta)}{1 - \alpha\beta} \varphi_1 + \frac{\beta(1 - \alpha)}{1 - \alpha\beta} \varphi_2 + \varphi_3. \quad (2.15)$$

Remarque 2.2.1. Il est important de noter que les nouvelles fonctions de base dépendent uniquement de la position des points d'intersection M, N de l'interface Γ avec le triangle T et pas de la courbure de Γ .

Proposition 2.2.1. Le triplet de fonctions $(\tilde{\varphi}_1^{in}, \tilde{\varphi}_2^{in}, \tilde{\varphi}_3^{in})$ (respectivement $(\tilde{\varphi}_1^{ex}, \tilde{\varphi}_2^{ex}, \tilde{\varphi}_3^{ex})$) est une base de $P^1(T)$.

Démonstration. Le déterminant de $(\tilde{\varphi}_1^{in}, \tilde{\varphi}_2^{in}, \tilde{\varphi}_3^{in})$ dans la base $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ vaut

$$\det(\tilde{\varphi}_1^{in}, \tilde{\varphi}_2^{in}, \tilde{\varphi}_3^{in})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \neq 0,$$

on en déduit donc que $(\tilde{\varphi}_1^{in}, \tilde{\varphi}_2^{in}, \tilde{\varphi}_3^{in})$ est un système libre, et par conséquent une base de P^1 . De même, on a

$$\det(\tilde{\varphi}_1^{ex}, \tilde{\varphi}_2^{ex}, \tilde{\varphi}_3^{ex})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \neq 0.$$

■

Remarque 2.2.2. Les fonctions $\{\tilde{\varphi}_i^{ex}\}_{i=1,2,3}$ et $\{\tilde{\varphi}_i^{in}\}_{i=1,2,3}$ vérifient la même relation que les fonctions de base de Crouzeix-Raviart :

$$\tilde{\varphi}_1^{ex} + \tilde{\varphi}_2^{ex} + \tilde{\varphi}_3^{ex} = \tilde{\varphi}_1^{in} + \tilde{\varphi}_2^{in} + \tilde{\varphi}_3^{in} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 1.$$

On en déduit que le triplet (T, P^1, Σ^{in}) est un élément fini, où Σ^{in} est l'ensemble des degrés de liberté définis dans (2.8). De même pour (T, P^1, Σ^{ex}) .

Il est utile par la suite d'estimer la semi-norme H^1 ainsi que la norme L^2 des nouvelles fonctions de base.

Proposition 2.2.2. Pour tout $T^i = T \cap \Omega^i$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de la géométrie de Γ telle que les fonctions de base $(\tilde{\varphi}_1^i, \tilde{\varphi}_2^i, \tilde{\varphi}_3^i)_{i=in,ex}$ vérifient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{ex}|_{1, T^{ex}} &\leq \frac{C}{1 - \alpha\beta} \sqrt{\frac{|T^{ex}|}{|T|}}, \\ \sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{in}|_{1, T^{in}} &\leq \frac{C}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \sqrt{\frac{|T^{in}|}{|T|}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la propriété pour $i = ex$; nous en déduisons l'autre en remplaçant α et β respectivement par $\alpha - 1$ et $\beta - 1$. Comme $\nabla \tilde{\varphi}_j$ est constant, alors

$$|\tilde{\varphi}_j^{ex}|_{1, T^{ex}} = \sqrt{\frac{|T^{ex}|}{|T|}} |\tilde{\varphi}_j^{ex}|_{1, T}.$$

En utilisant (2.13), (2.14), (2.15) et $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|T|}{|T^{ex}|}} \sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{ex}|_{1,T^{ex}} &= \left| \frac{1}{1-\alpha\beta} \varphi_1 - \frac{\beta}{1-\alpha\beta} \varphi_2 \right|_{1,T} + \left| \frac{-\alpha}{1-\alpha\beta} \varphi_1 + \frac{1}{1-\alpha\beta} \varphi_2 \right|_{1,T} \\ &\quad + \left| \frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta} \varphi_1 + \frac{\beta-1}{1-\alpha\beta} \varphi_2 \right|_{1,T}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ et $|\varphi_i|_{1,T} \leq c$, on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|T|}{|T^{ex}|}} \sum_{i=1}^3 |\tilde{\varphi}_i^{ex}|_{1,T^{ex}} &\leq c \left(\frac{1}{1-\alpha\beta} + \frac{\beta}{1-\alpha\beta} + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} + \frac{1}{1-\alpha\beta} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} + \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \right) \\ &\leq \frac{4c}{1-\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^3 |\tilde{\varphi}_i^{ex}|_{1,T^{ex}} \leq \frac{C}{1-\alpha\beta} \sqrt{\frac{|T^{ex}|}{|T|}}.$$

■

Par passage à l'élément de référence, on majore aussi la norme L^2 :

Proposition 2.2.3. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de la géométrie de Γ telle que les fonctions $(\tilde{\varphi}_1^i, \tilde{\varphi}_2^i, \tilde{\varphi}_3^i)_{i=in,ex}$ vérifient*

$$\sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{ex}\|_{0,T^{ex}} \leq \frac{C\sqrt{|T^{ex}|}}{1-\alpha\beta} \leq \frac{Ch_T}{1-\alpha\beta}, \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{in}\|_{0,T^{in}} \leq \frac{C\sqrt{|T^{in}|}}{1-(1-\alpha)(1-\beta)} \leq \frac{Ch_T}{1-(1-\alpha)(1-\beta)}. \quad (2.17)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la propriété pour $i = ex$ et on en déduit l'autre en remplaçant α et β respectivement par $\alpha - 1$ et $\beta - 1$. En utilisant (2.13), (2.14), (2.15) et $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{ex}\|_{0,T^{ex}} &= \left\| \frac{1}{1-\alpha\beta} \varphi_1 - \frac{\beta}{1-\alpha\beta} \varphi_2 \right\|_{0,T^{ex}} + \left\| \frac{-\alpha}{1-\alpha\beta} \varphi_1 + \frac{1}{1-\alpha\beta} \varphi_2 \right\|_{0,T^{ex}} \\ &\quad + \left\| \frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta} \varphi_1 + \frac{\beta-1}{1-\alpha\beta} \varphi_2 \right\|_{0,T^{ex}}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{ex}\|_{0,T^{ex}} &\leq \frac{1+\alpha+1-\alpha}{1-\alpha\beta} \|\varphi_1\|_{0,T^{ex}} + \frac{1+\beta+1-\beta}{1-\alpha\beta} \|\varphi_2\|_{0,T^{ex}} \\ &\leq \frac{2}{1-\alpha\beta} (\|\varphi_1\|_{0,T^{ex}} + \|\varphi_2\|_{0,T^{ex}}). \end{aligned}$$

Par passage à l'élément de référence dans T^{ex} , nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{|T^{ex}|}} \|\varphi_i\|_{0,T^{ex}} = \frac{1}{\sqrt{|\hat{T}^{ex}|}} \|\hat{\varphi}_i\|_{0,\hat{T}^{ex}} \leq C \implies \|\varphi_i\|_{0,T^{ex}} \leq C \sqrt{|T^{ex}|}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{ex}\|_{0,T^{ex}} \leq \frac{4C\sqrt{|T^{ex}|}}{1-\alpha\beta} \leq \frac{C\sqrt{|T|}}{1-\alpha\beta} \leq \frac{Ch_T}{1-\alpha\beta}.$$

■

Remarque 2.2.3. Pour $T^{i,h}$, ($i = in, ex$) délimité par le segment $\Gamma_{T,h} = \Gamma_T$ d'extrémités M et N (voir Fig. 2.2), on note que :

$$\frac{|T^{in}|}{|T|} = \frac{|T^{in,h}|}{|T|} = 1 - (1-\alpha)(1-\beta), \quad \frac{|T^{ex}|}{|T|} = \frac{|T^{ex,h}|}{|T|} = (1-\alpha)(1-\beta). \quad (2.18)$$

On en déduit que :

$$\sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{ex}|_{1,T^{ex}} \leq \frac{C(1-\alpha)(1-\beta)}{1-\alpha\beta} \sqrt{\frac{|T|}{|T^{ex}|}}, \quad (2.19)$$

$$\sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{in}|_{1,T^{in}} \leq C \sqrt{\frac{|T|}{|T^{in}|}}. \quad (2.20)$$

2.2.1 Robustesse par rapport à la position de l'interface

Les paramètres α, β interviennent dans la définition et la majoration des fonctions modifiées sur les triangles coupés par Γ_T .

Si au moins un paramètre est borné comme suit (c'est-à-dire l'interface n'est pas trop proche du sommet \hat{C} ou de l'arête opposée AB) :

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 1 \text{ où } 0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1 < 1, \quad (2.21)$$

alors il vient directement d'après la Proposition 2.2.2, pour $i = in, ex$, que :

$$\sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^i|_{1,T^i} \leq C \sqrt{\frac{|T^i|}{|T|}}, \quad \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^i\|_{0,T^i} \leq C \sqrt{|T^i|}. \quad (2.22)$$

Comme $\sqrt{|T^i|} \leq \sqrt{|T|}$, on obtient

$$\sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^i|_{1,T^i} \leq C, \quad \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^i\|_{0,T^i} \leq Ch_T. \quad (2.23)$$

Dans le cas où $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$, les fonctions modifiées sur les triangles T^{in} vérifient

$$\tilde{\varphi}_1^{in} \rightarrow \varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_2^{in} \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_3^{in} \rightarrow \varphi_3 - \varphi_1 \quad (2.24)$$

et celles sur T^{ex} :

$$\tilde{\varphi}_1^{ex} \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_2^{ex} \rightarrow \varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_3^{ex} \rightarrow \varphi_2 + \varphi_3. \quad (2.25)$$

De même, lorsque $\alpha \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 0$, les fonctions modifiées sur les triangles T^{in} vérifient

$$\tilde{\varphi}_1^{in} \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_2^{in} \rightarrow \varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_3^{in} \rightarrow \varphi_2 + \varphi_3 \quad (2.26)$$

et celles sur T^{ex} :

$$\tilde{\varphi}_1^{ex} \rightarrow \varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_2^{ex} \rightarrow \varphi_1 + \varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_3^{ex} \rightarrow \varphi_3 - \varphi_1. \quad (2.27)$$

Dans ces deux cas, les majorations (2.22) sont encore satisfaites.

On s'intéresse dans la suite aux cas limites où l'interface Γ_T est un segment $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 0$, voir Fig. 2.3(b) où $\alpha \rightarrow 1$, voir Fig. 2.3(a).

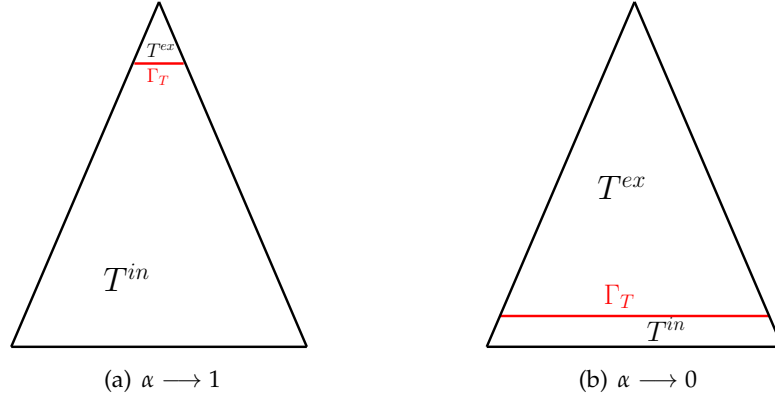


Fig. 2.3 – Illustration des cas limite où $\alpha = \beta$

★ $\alpha \rightarrow 1$: les fonctions modifiées sur T^{in} tendent vers celles de Crouzeix-Raviart tandis que sur T^{ex} on a

$$\tilde{\varphi}_1^{ex} = \frac{1}{1+\alpha}\varphi_1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (2.28)$$

$$\tilde{\varphi}_2^{ex} = \frac{1}{1+\alpha}\varphi_2 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha)}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (2.29)$$

$$\tilde{\varphi}_3^{ex} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi_1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\varphi_2 + \varphi_3 \rightarrow \frac{1}{2}(1 + \varphi_3). \quad (2.30)$$

L'expression $\frac{1}{(1-\alpha)}(\varphi_1 - \varphi_2)$ a un comportement singulier. Néanmoins, puisque

$$\sqrt{|T^{ex}|} = (1-\alpha)\sqrt{|T|},$$

nous avons les estimations suivantes indépendantes de α :

$$\sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{ex}|_{1,T^{ex}} \leq C, \quad \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{ex}\|_{0,T^{ex}} \leq \frac{C\sqrt{|T^{ex}|}}{1-\alpha} \leq Ch_T. \quad (2.31)$$

★ $\alpha \rightarrow 0$: on retrouve les fonctions de Crouzeix-Raviart sur T^{ex} et sur T^{in} on obtient

$$\tilde{\varphi}_1^{in} = -\frac{1}{2-\alpha}\varphi_2 + \frac{1}{(2-\alpha)\alpha}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (2.32)$$

$$\tilde{\varphi}_2^{in} = -\frac{1}{2-\alpha}\varphi_1 + \frac{1}{(2-\alpha)\alpha}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad (2.33)$$

$$\tilde{\varphi}_3^{in} = 1 - \frac{1}{\alpha}(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (2.34)$$

L'expression $\frac{1}{\alpha}(\varphi_1 + \varphi_2)$ a un comportement singulier. Cette fois-ci, comme

$$\sqrt{|T^{in}|} = \sqrt{\alpha|T|},$$

on obtient uniquement

$$\sum_{j=1}^3 |\tilde{\varphi}_j^{in}|_{1,T^{in}} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}}, \quad \sum_{j=1}^3 \|\tilde{\varphi}_j^{in}\|_{0,T^{in}} \leq \frac{C\sqrt{|T^{in}|}}{\alpha} \leq \frac{Ch_T}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.35)$$

2.2.2 Problème discret - Existence et unicité

Désormais, nous sommes en mesure de construire l'espace d'approximation pour ré-écrire la formulation variationnelle (1.6) dans le cas des éléments finis P^1 -non-conformes.

On introduit l'espace de dimension fini \tilde{V}_h^i défini comme suit :

$$\tilde{V}_h^i = \left\{ v_h \in L^2(\Omega^i) : (v_h)|_T \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \int_e [v_h] ds = 0, \quad \forall e \in \tilde{\mathcal{E}}_h^i \right\}, \quad i = in, ex.$$

C'est-à-dire, l'espace \tilde{V}_h^i est engendré par la famille de fonctions $\{\varphi_j\}_{1 \leq j \leq 3}$ si $T \in \mathcal{T}_h^{int,i}$ et par $\{\tilde{\varphi}_j^i\}_{1 \leq j \leq 3}$ si $T \in \mathcal{T}_h^i$.

Comme auparavant, le nombre de fonctions de forme est doublé sur chaque élément $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ coupé par l'interface Γ .

On pose $\tilde{V}_h = \tilde{V}_h^{in} \times \tilde{V}_h^{ex}$ et on considère le problème variationnel suivant :

$$u_h \in \tilde{V}_h, \quad a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h \quad (2.36)$$

où la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $l(\cdot)$ sont celles définies dans la section 1.2 du chapitre 1. Nous rappelons ici leurs expressions :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n u_h\} [v_h] ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n v_h\} [u_h] ds + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_T} \lambda_T [u_h] [v_h] ds, \quad (\lambda > 0) \\ l(v_h) &= \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\Gamma} g \{v_h\}_* ds. \end{aligned}$$

En vue de l'analyse d'erreur, on munit \tilde{V}_h de la norme $||| \cdot |||$ définie ci-dessous :

$$|||u|||^2 := \|u\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_n u\}\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [u] \|_{0,\Gamma_T}^2 \quad (2.37)$$

où la semi-norme $\|\cdot\|_h$ et le paramètre λ_T sont définis dans la section 1.3 du chapitre 1.

On souhaite prouver d'abord l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (2.36). On s'intéresse donc à la coercivité et à la continuité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ sur \tilde{V}_h .

Ces résultats ont été prouvés par les auteurs de [75] sur l'espace des éléments finis conformes, avec un choix de paramètre de stabilisation différent :

$$\lambda_T = \frac{\max(\mu_{in}, \mu_{ex})}{h_T},$$

en utilisant les coefficients (1.9) et la norme (1.7) définis dans la section 1.2 du chapitre 1, toujours pour une approximation par éléments finis conformes.

Les auteurs de [12] ont montré aussi la coercivité et la continuité de $a_h(\cdot, \cdot)$ avec les coefficients (1.12) par rapport à la norme définie dans (1.13) dans le chapitre 1.

Par souci de clarté, nous allons détailler les principales étapes de la démonstration pour le cas non-conforme. Une démonstration similaire de ce résultat pour un autre choix de coefficients λ_T , k^{in} , k^{ex} , a été proposée dans [76]. L'idée est la même dans toutes les variantes, ainsi que dans la méthode de Galerkin discontinue.

Lemme 2.2.1. *Pour λ suffisamment grand, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que*

$$a_h(u_h, u_h) \geq C_1 \|u_h\|^2, \quad \forall u_h \in \tilde{V}_h. \quad (2.38)$$

Démonstration. On a par définition

$$a_h(u_h, u_h) = \|\mu^{1/2} \nabla u_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 - 2 \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n u_h\} [u_h] ds + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \| [u_h] \|_{0, \Gamma_T}^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il s'ensuit que la coercivité de $a_h(\cdot, \cdot)$ dépend de l'estimation de la norme L^2 sur l'interface Γ de la quantité $\{\mu \nabla_n u_h\}$. On rappelle les paramètres utilisés :

$$k^{in} = \frac{\mu_{ex} |T^{in}|}{\mu_{ex} |T^{in}| + \mu_{in} |T^{ex}|}, \quad k^{ex} = \frac{\mu_{in} |T^{ex}|}{\mu_{ex} |T^{in}| + \mu_{in} |T^{ex}|}, \quad \lambda_T = \frac{\mu_{in} \mu_{ex} |\Gamma_T|}{\mu_{ex} |T^{in}| + \mu_{in} |T^{ex}|}. \quad (2.39)$$

Comme $0 \leq k^{in}, k^{ex} \leq 1$, il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_T} |\{\mu \nabla_n u_h\}|^2 ds &\leq 2 \left((k^{in})^2 \int_{\Gamma_T} \mu_{in}^2 |\nabla_n u_h|_{T^{in}}^2 ds + (k^{ex})^2 \int_{\Gamma_T} \mu_{ex}^2 |\nabla_n u_h|_{T^{ex}}^2 ds \right) \\ &\leq 2 \left((k^{in})^2 \frac{\mu_{in} |\Gamma_T|}{|T^{in}|} \int_{T^{in}} \mu_{in} |\nabla u_h|^2 dx + (k^{ex})^2 \frac{\mu_{ex} |\Gamma_T|}{|T^{ex}|} \int_{T^{ex}} \mu_{ex} |\nabla u_h|^2 dx \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{\mu_{in} \mu_{ex} |\Gamma_T|}{\mu_{ex} |T^{in}| + \mu_{in} |T^{ex}|} \int_{T^{in}} \mu_{in} |\nabla u_h|^2 dx + \frac{\mu_{in} \mu_{ex} |\Gamma_T|}{\mu_{ex} |T^{in}| + \mu_{in} |T^{ex}|} \int_{T^{ex}} \mu_{ex} |\nabla u_h|^2 dx \right) \\ &\leq 2 \lambda_T \int_{T^{ex} \cup T^{in}} \mu |\nabla u_h|^2 dx. \end{aligned}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé le fait que ∇u_h est constant sur T^{ex} , T^{in} puisque $u_h \in P^1(T)$ et (2.39). D'où

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n u_h\} [u_h] ds &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\lambda_T} \int_{\Gamma_T} \{\mu \nabla_n u_h\}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [u_h]^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|\mu \nabla_n u_h\|_{0, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \| [u_h] \|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On a donc la stabilité par rapport à la norme :

$$\|u\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \| [u] \|_{0, \Gamma_T}^2,$$

équivalente à $\|\cdot\|$ sur \tilde{V}_h car $|\Gamma_T| \leq ch_T$. ■

Remarque 2.2.4. Cette estimation mène à une stabilité uniforme par rapport aux coefficients de diffusion μ_{in} et μ_{ex} mais également par rapport à la géométrie des cellules coupées par l'interface Γ .

Remarque 2.2.5. Il est facile de prouver que la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est continue sur \tilde{V}_h . C'est-à-dire, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq C \|u_h\| \|v_h\|, \quad \forall u_h, v_h \in \tilde{V}_h. \quad (2.40)$$

La forme linéaire $l(\cdot)$ étant continue, le lemme de Lax-Milgram implique que le problème (2.36) est bien posé.

On s'intéresse dans la suite à l'estimation de l'erreur commise par cette approximation.

L'outil de départ, que nous rappelons ci-dessous pour notre problème, est le Lemme de Strang 2.1.2. Il s'agit de décomposer l'erreur totale $\|u - u_h\|$ en une erreur d'interpolation et une erreur de consistance, due au fait que \tilde{V}_h n'est pas inclus dans $V(\Omega)$.

Lemme 2.2.2. Il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$\|u - u_h\| \leq C \left(\inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|u - v_h\| + \sup_{w_h \in \tilde{V}_h} \frac{|a_h(u - u_h, w_h)|}{\|w_h\|} \right). \quad (2.41)$$

2.2.3 Erreur d'interpolation

Cette sous-section est divisée en deux paragraphes. Le premier est dédié à l'erreur dans la semi-norme H^1 et le deuxième est consacré à l'erreur sur Γ .

Dans la suite, on suppose afin de simplifier la présentation que Γ_T est un segment, pour tout $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$.

Remarque 2.2.6. Si Γ_T est courbe, on obtient les mêmes résultats en supposant que la partie délimitée par Γ_T et le segment $\Gamma_{T,h}$ a une aire négligeable (ou que la courbure de Γ_T est petite) i.e. $|T^i| \approx |T^{i,h}|$ pour $i = in, ex$.

Erreur H^1

On note T^\square la partie du triangle coupé $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ qui contient quatre cotés et T^\triangle la partie triangulaire de T . Pour faciliter la présentation, on suppose que $T^{in} = T^\square$ et $T^\triangle = T^{ex}$.

Il s'agit d'étudier ici les propriétés d'approximation de l'espace \tilde{V}_h , afin de majorer l'erreur d'interpolation de (2.41). On veut construire des opérateurs d'interpolation I_h^{in} et I_h^{ex} tels que :

$$\int_e I_h^i v^i ds = \int_e v^i ds, \quad \forall e \in \tilde{\mathcal{E}}_h^i, \quad i = in, ex,$$

en particulier pour $e \in \mathcal{E}^{i,cut}$.

Pour cela, on considère l'opérateur d'interpolation locale I_T^i défini de $H^1(T)$ dans P^1 , à partir de la base $\mathcal{B}_i = (\tilde{\varphi}_1^i, \tilde{\varphi}_2^i, \tilde{\varphi}_3^i)$ sur $T \in \mathcal{T}^{\Gamma,i}$:

$$(I_T^i v)|_T = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{|e_j|} \int_{e_j} v ds \right) \tilde{\varphi}_j^i. \quad (2.42)$$

Sur $T \in \mathcal{T}_h^{int,i}$, I_T^i est l'opérateur d'interpolation classique de Crouzeix-Raviart.

L'opérateur d'interpolation globale I_h^i est alors défini de manière classique (i.e. par restriction) de $H^1(\Omega^i)$ dans \tilde{V}_h^i . Notons que $I_h^i v$ utilise uniquement la fonction v sur Ω^i et non son extension sur Ω_h^i .

On introduit ensuite l'opérateur d'interpolation

$$I_h v := (I_h^{ex} v^{ex}, I_h^{in} v^{in}).$$

Les propriétés d'approximation des opérateurs d'interpolation précédents I_h^{in}, I_h^{ex} s'appliquent sur l'élément de référence \hat{T} de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Soit F_T la transformation affine de l'élément \hat{T} sur l'élément T et DF_T la matrice jacobienne de F_T . La figure Fig. 2.4 illustre le passage de \hat{T} à T :

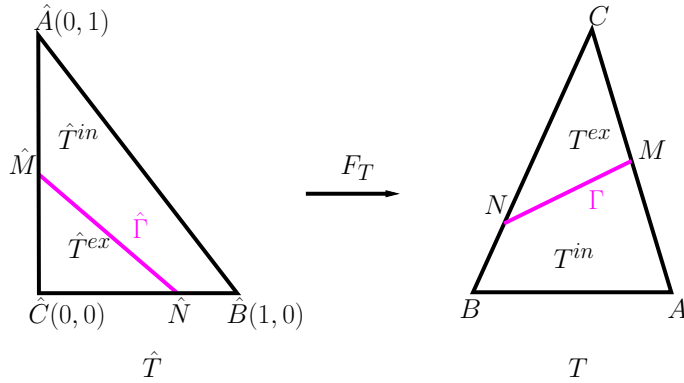


Fig. 2.4 – Passage à l'élément de référence \hat{T}

Nous rappelons les inégalités suivantes (cf. [42]) concernant le passage de l'élément \hat{T} à T :

Lemme 2.2.3. *Nous avons*

$$|\hat{v}|_{m,\hat{T}} \leq C \|DF_T\|^m |\det(DF_T)|^{-1/2} |v|_{m,T}, \quad \forall v \in H^m(T), \quad (2.43)$$

$$|v|_{m,T} \leq C \|DF_T^{-1}\|^m |\det(DF_T)|^{1/2} |\hat{v}|_{m,\hat{T}}, \quad \forall \hat{v} \in H^m(\hat{T}), \quad (2.44)$$

où

$$\|DF_T^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T}, \quad \|DF_T\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}}, \quad |\det(DF_T)| = \frac{|T|}{|\hat{T}|}. \quad (2.45)$$

Dans la suite, on établit des estimations d'interpolation locale sur un élément coupé.

On s'intéresse d'abord au cas où (2.23) est vérifiée, ce qui veut dire : α, β bornés ou $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$ ou $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0$.

Lemme 2.2.4. *Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et $v^i \in H^2(T^i)$, $i = in, ex$. Supposons que (2.23) est vérifiée. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de la géométrie de l'interface Γ telle que*

$$|v^i - I_h^i v^i|_{1,T^i} \leq Ch_T |E^i v^i|_{2,T} \quad \forall i = in, ex. \quad (2.46)$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$; nous nous intéressons à majorer l'erreur sur $T^{in} = T \cap \Omega^{in}$. De façon similaire, on en déduit le résultat pour I_h^{ex} sur T^{ex} .

La démonstration de (2.46) s'appuie sur le lemme de Bramble-Hilbert. Nous appliquons ce lemme pour l'opérateur d'interpolation I_h^{in} . Par passage à l'élément fini de référence (2.44) entre T^{in} et \hat{T}^{in} et en utilisant $\widehat{I_h^{in} v^{in}} = \hat{I}_h^{in} \hat{v}^{in}$, nous avons :

$$|I_h^{in} v^{in}|_{1,T^{in}} \leq C \|DF_T^{-1}\| |\det DF_T|^{1/2} |\hat{I}_h^{in} \hat{v}^{in}|_{1,\hat{T}^{in}}. \quad (2.47)$$

D'après (2.42) dans l'élément de référence \hat{T}^{in} , on obtient la majoration suivante :

$$|\hat{I}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1, \hat{T}^{in}} \leq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|\hat{e}_i|} \left| \int_{\hat{e}_i} \hat{\vartheta}^{in} d\hat{s} \right| |\tilde{\varphi}_i^{in}|_{1, \hat{T}^{in}}$$

et en majorant $\frac{1}{|\hat{e}_i|} \left| \int_{\hat{e}_i} \hat{\vartheta}^{in} d\hat{s} \right|$ par $\sup_{x \in \hat{T}^{in}} |\hat{\vartheta}^{in}(x)|$, on obtient

$$|\hat{I}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1, \hat{T}^{in}} \leq \left(\sum_{i=1}^3 |\tilde{\varphi}_i^{in}|_{1, \hat{T}^{in}} \right) \sup_{x \in \hat{T}^{in}} |\hat{\vartheta}^{in}(x)|.$$

à l'aide de l'estimation (2.23), il vient que

$$|\hat{I}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1, \hat{T}^{in}} \leq C \|\hat{\vartheta}^{in}\|_{C^0(\hat{T}^{in})}.$$

Par passage à l'opérateur d'extension $\hat{E}^{in} : H^2(\hat{T}^{in}) \longrightarrow H^2(\hat{T})$ et en utilisant l'injection continue de Sobolev $H^2(\hat{T}) \subset C^0(\hat{T})$, on obtient

$$|\hat{I}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1, \hat{T}^{in}} \leq C \|\hat{E}^{in} \hat{\vartheta}^{in}\|_{C^0(\hat{T})} \leq C_1 \|\hat{E}^{in} \hat{\vartheta}^{in}\|_{2, \hat{T}}.$$

Posons $F(\hat{\vartheta}) = |\hat{\vartheta}^{in} - \hat{I}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1, \hat{T}^{in}}$. Alors $F(\cdot)$ est une application continue de $H^2(\hat{T}^{in})$ dans \mathbb{R} avec une constante de continuité indépendante de \hat{T}^{in} , sous-linéaire et nulle sur P^1 . En appliquant le lemme de Bramble- Hilbert [42] à $F(\cdot)$, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de \hat{T}^{in} (donc de la géométrie et de la position de l'interface Γ), telle que

$$|\hat{\vartheta}^{in} - \hat{I}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1, \hat{T}^{in}} \leq C |\hat{E}^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{2, \hat{T}}.$$

Grâce à (2.43), il vient que

$$|\hat{E}^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{2, \hat{T}} \leq \|DF_T\|^2 |\det DF_T|^{-1/2} |\hat{E}^{in} v^{in}|_{2, T}.$$

En utilisant (2.47) et (2.45), on obtient l'inégalité désirée :

$$|v^{in} - I_h^{in} v^{in}|_{1, T^{in}} \leq Ch_T |E^{in} v^{in}|_{2, T}.$$

■

Remarque 2.2.7. Les estimations d'erreur d'interpolation locale du Lemme 2.2.4 font apparaitre la semi-norme $H^2(T)$ de $E^i v$. Ceci nous permet d'obtenir des constantes indépendantes de T^i (notamment lorsqu'on utilise l'injection continue de Sobolev).

Lemme 2.2.5. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et $v^{in} \in H^2(T^{in})$. Pour $\alpha = \beta$ et $\alpha \longrightarrow 0$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de la géométrie de l'interface Γ telle que

$$|v^{in} - I_h^{in} v^{in}|_{1, T^{in}} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}} h_T |E^{in} v^{in}|_{2, T}. \quad (2.48)$$

Démonstration. On suit le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 2.2.4 et on utilise la majoration (2.35) au lieu de (2.23). ■

On s'intéresse au cas $\alpha = \beta$ et α tend vers 0. Afin d'améliorer l'erreur d'interpolation, on a pensé utiliser l'idée suivante : on construit une transformation affine pour passer de \hat{T}^{in} à \hat{T}^{in} (voir la figure Fig. 2.5), donnée par : $\hat{x} = F_\alpha^{in}(\hat{x}) = DF_\alpha^{in}\hat{x} + b$ avec

$$DF_\alpha^{in} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1-\alpha}{\alpha} \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\alpha} \\ 1 - \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

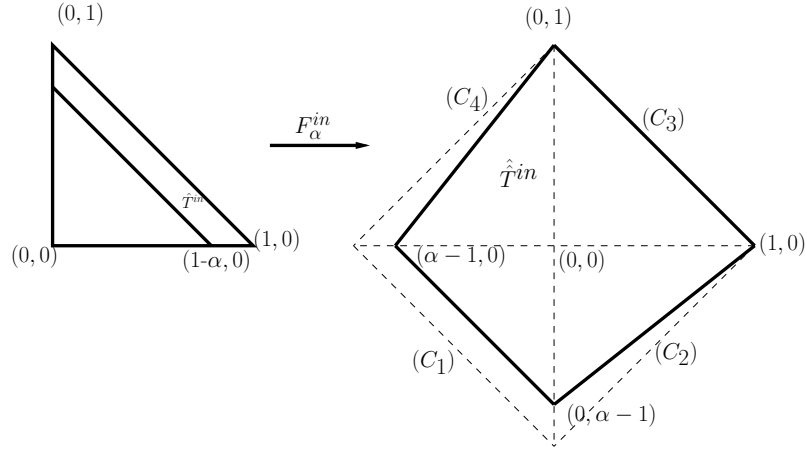


Fig. 2.5 – Changement de coordonnées.

$\hat{T}^{in} = F_\alpha^{in}(\hat{T}^{in})$ est le trapèze de sommets $(\alpha - 1, 0)$, $(0, \alpha - 1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Les équations de ses côtés sont $(C_1) : \hat{x} + \hat{y} = \alpha - 1$, $(C_2) : (1 - \alpha)\hat{x} + \hat{y} = 1 - \alpha$, $(C_3) : \hat{x} + \hat{y} = -1$ et $(C_4) : -\hat{x} + (1 - \alpha)\hat{y} = 1 - \alpha$.

Quand $\alpha \rightarrow 0$, \hat{T}^{in} tend vers le carré de sommets $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$, et donc la constante de l'inégalité de Sobolev sur \hat{T}^{in} n'explose pas avec α .

Comme DF_α^{in} est une matrice symétrique, le calcul de la valeur de $\|DF_\alpha^{in}\|$ et celle de $\|(DF_\alpha^{in})^{-1}\|$ revient à calculer les valeurs propres du polynôme caractéristique de DF_α^{in} . On a

$$\lambda^2 - \frac{2}{\alpha}\lambda + \frac{2-\alpha}{\alpha} = 0. \quad (2.49)$$

Par un calcul simple, les racines de l'équation (2.49) sont :

$$\lambda_{\max} = \frac{2-\alpha}{\alpha}, \quad \lambda_{\min} = 1.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|DF_\alpha^{in}\| &= \lambda_{\max} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \sim \frac{1}{\alpha}, \\ \|(DF_\alpha^{in})^{-1}\| &= \frac{1}{\lambda_{\min}} = 1. \end{aligned}$$

De plus, le déterminant de DF_α^{in} est

$$\det(DF_\alpha^{in}) = \frac{2-\alpha}{\alpha}.$$

Ceci donne

$$\|\hat{\vartheta}\|_{0,\hat{T}^{in}} \sim \sqrt{\alpha} \|\hat{\hat{\vartheta}}\|_{0,\hat{T}^{in}}, \quad (2.50)$$

$$|\hat{\hat{\vartheta}}|_{1,\hat{T}^{in}} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}} |\hat{\vartheta}|_{1,\hat{T}^{in}}, \quad (2.51)$$

$$|\hat{\vartheta}|_{1,\hat{T}^{in}} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}} |\hat{\hat{\vartheta}}|_{1,\hat{T}^{in}}, \quad (2.52)$$

$$|\hat{\hat{\vartheta}}|_{2,\hat{T}^{in}} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}} |\hat{\vartheta}|_{2,\hat{T}^{in}}, \quad (2.53)$$

$$|\hat{\vartheta}|_{2,\hat{T}^{in}} \leq \frac{C}{\alpha\sqrt{\alpha}} |\hat{\hat{\vartheta}}|_{2,\hat{T}^{in}}. \quad (2.54)$$

Si on reprend la démarche du Lemme 2.2.4 pour l'opérateur d'interpolation $I_h^{in} v^{in}$, c'est-à-dire :

- On passe à l'élément de référence (2.44) \hat{T}^{in} , puis à l'élément $\hat{\hat{T}}^{in}$
- On utilise l'inégalité (2.35) d'estimation des fonctions modifiées,
- On applique l'injection continue de Sobolev $H^2(\hat{\hat{T}}^{in}) \subset C^0(\hat{\hat{T}}^{in})$
- On applique le lemme de Bramble-Hilbert à $F(\hat{\vartheta}) = |\hat{\vartheta}^{in} - \hat{\hat{I}}_h^{in} \hat{\vartheta}^{in}|_{1,\hat{T}^{in}}$
- On revient sur l'élément \hat{T}^{in} via la transformation affine DF_α^{in} , puis on revient sur l'élément T^{in} ,

alors, les estimations (2.50) conduisent à une moins bonne majoration de l'erreur d'interpolation, en $\frac{h_T}{\alpha\sqrt{\alpha}} |v^{in}|_{2,T^{in}}$.

On conclut que la constante $C (\simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha}})$ est dépendante de la position de l'interface Γ . Pour améliorer la dépendance par rapport à α , on pense chercher une transformation affine pour compenser $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ dans les estimations d'erreur d'interpolation. Une autre idée est d'utiliser l'inégalité de Sobolev pour avoir une constante d'ordre $\sqrt{\alpha}$.

En ce qui concerne l'erreur d'interpolation dans la norme L^2 , nous utilisons le même raisonnement que dans les Lemmes 2.2.4, 2.2.5 et l'inégalité (2.35) ou (2.23) d'estimation L^2 des nouvelles fonctions de base.

Lemme 2.2.6. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et $v^i \in H^2(T^i)$, $i = in, ex$. Supposons que (2.23) est vérifiée. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de Γ telle que

$$\|v^i - I_h^i v^i\|_{0,T^i} \leq Ch_T^2 |E^i v^i|_{2,T}. \quad (2.55)$$

En suivant le même cheminement que dans le Lemme 2.2.6 pour le cas $\alpha = \beta \rightarrow 0$, on établit le lemme suivant :

Lemme 2.2.7. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et $v^{in} \in H^2(T^{in})$. Pour $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 0$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de Γ telle que

$$\|v^{in} - I_h^{in} v^{in}\|_{0,T^{in}} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}} h_T^2 |E^{in} v^{in}|_{2,T}. \quad (2.56)$$

Remarque 2.2.8. Si α, β sont bornés ou $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$ ou $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0$, alors (2.23) est satisfaite sur le triangle entier T et avec la même démonstration des Lemmes 2.2.4 et 2.2.7, nous avons pour $i = in, ex$:

$$|E^i v - I_h^i(E^i v)|_{1,T} \leq Ch_T |E^i v|_{2,T}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma, \quad (2.57)$$

$$\|E^i v - I_h^i(E^i v)\|_{0,T} \leq Ch_T^2 |E^i v|_{2,T}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma. \quad (2.58)$$

Erreur sur Γ

Nous nous intéressons à estimer la norme L^2 pondérée de la quantité $\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}$ ainsi que celle de $[v - I_h v]$ sur l'interface Γ_T .

Nous nous focalisons d'abord sur le cas où (2.23) est encore vérifié, c'est-à-dire : α, β bornés ou $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$ ou $\alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0$. Nous utilisons l'inégalité de trace (1.17). Nous pouvons établir :

Lemme 2.2.8. *Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et $v \in H^2(T^i)$, $i = in, ex$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , v et de Γ telle que*

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sum_{i=in,ex} \sqrt{|T^i|} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T} \leq C h_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}. \quad (2.59)$$

Démonstration. On a par définition de la moyenne $\{\cdot\}$ sur Γ que :

$$\|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq \|k^{in} \mu_{in} \nabla_n(v - I_h^{in} v)\|_{0,\Gamma_T} + \|k^{ex} \mu_{ex} \nabla_n(v - I_h^{ex} v)\|_{0,\Gamma_T}.$$

En appliquant l'inégalité (1.17) à $\varphi = \nabla_n(E^i v - I_h^i(E^i v))$, il vient que

$$\begin{aligned} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} &\leq C \sqrt{h_T} \sum_{i=in,ex} \left(k^i h_T^{-1} \|\mu_i \nabla(E^i v - I_h^i(E^i v))\|_{0,T} \right. \\ &\quad \left. + k^i |\mu_i \nabla(E^i v - I_h^i(E^i v))|_{1,T} \right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.57) et (2.58), on obtient

$$\|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sqrt{h_T} \left(k^{in} \mu_{in}^{1/2} |\mu_{in}^{1/2} E^{in} v|_{2,T} + k^{ex} \mu_{ex}^{1/2} |\mu_{ex}^{1/2} E^{ex} v|_{2,T} \right).$$

Comme $k^i \mu_i = \frac{\lambda_T |T^i|}{|\Gamma_T|}$ pour $i = in, ex$ et $0 \leq k^{in}, k^{ex} \leq 1$, nous avons

$$\|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sqrt{h_T} \left(\sqrt{\frac{\lambda_T |T^{in}|}{|\Gamma_T|}} |\mu_{in}^{1/2} E^{in} v|_{2,T} + \sqrt{\frac{\lambda_T |T^{ex}|}{|\Gamma_T|}} |\mu_{ex}^{1/2} E^{ex} v|_{2,T} \right).$$

On obtient donc

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sum_{i=in,ex} \sqrt{|T^i|} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T} \leq C h_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T},$$

d'où le résultat souhaité. ■

On étudie maintenant les cas limites cités dans la section 2.2.1 : $\alpha = \beta \rightarrow 1$ respectivement $\alpha = \beta \rightarrow 0$. En utilisant le même raisonnement que dans le Lemme 2.2.8, on établit :

Lemme 2.2.9. *Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et $v \in H^2(T^i)$, $i = in, ex$. Pour $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 0$, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de Γ telle que*

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C h_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}, \quad (2.60)$$

De même, pour $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 1$, on a

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq Ch_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}. \quad (2.61)$$

Démonstration. On détaille le premier cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 0$. Pour démontrer l'inégalité (2.60), on applique l'inégalité de trace (1.17) à $\varphi = \nabla_n(E^i v - I_h^i(E^i v))$. On a

$$\begin{aligned} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} &\leq C \sqrt{h_T} \sum_{i=in,ex} \left(k^i h_T^{-1} \|\mu_i \nabla(E^i v - I_h^i(E^i v))\|_{0,T} \right. \\ &\quad \left. + k^i |\mu_i \nabla(E^i v - I_h^i(E^i v))|_{1,T} \right). \end{aligned}$$

En utilisant (2.57) et (2.58), on obtient

$$\|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sqrt{h_T} \left(k^{in} \mu_{in}^{1/2} |\mu_{in}^{1/2} E^{in} v|_{2,T} + k^{ex} \mu_{ex}^{1/2} |\mu_{ex}^{1/2} E^{ex} v|_{2,T} \right).$$

Comme $k^i \mu_i = \frac{\lambda_T |T^i|}{|\Gamma_T|}$ pour $i = in, ex$ et $0 \leq k^{in}, k^{ex} \leq 1$, nous avons

$$\|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sqrt{h_T} \left(\sqrt{\frac{\lambda_T |T^{in}|}{|\Gamma_T|}} |\mu_{in}^{1/2} E^{in} v|_{2,T} + \sqrt{\frac{\lambda_T |T^{ex}|}{|\Gamma_T|}} |\mu_{ex}^{1/2} E^{ex} v|_{2,T} \right).$$

On obtient donc

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \sum_{i=in,ex} \sqrt{|T^i|} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}. \quad (2.62)$$

Pour $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 0$, $C \simeq \frac{C}{\sqrt{\alpha}}$. Comme $|T^{in}| \simeq \alpha |T|$ et $|T^i| \leq ch_T^2$, on obtient

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq Ch_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}.$$

Dans le cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 1$, la constante C de (2.62) est indépendante de α , on a de manière similaire

$$|T^{ex}| = (1 - \alpha)^2 |T|,$$

d'où le résultat du lemme. ■

On conclut que la constante C est indépendante de la position de l'interface grâce à notre choix de pondération de la norme L^2 .

Nous nous intéressons maintenant à estimer la norme L^2 pondérée de la quantité $[v - I_h v]$ sur Γ_T . Pour cela, on utilise l'inégalité de trace (1.16).

Nous pouvons alors établir le résultat suivant :

Lemme 2.2.10. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et v tel que $v^i = v|_{T^i} \in H^2(T^i)$, $i = in, ex$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , μ et de v (mais qui peut dépendre de la géométrie de l'interface Γ) telle que

$$\lambda_T^{1/2} \|[v - I_h v]\|_{0,\Gamma_T} \leq Ch_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}. \quad (2.63)$$

Démonstration. On a d'une part

$$\| [v - I_h v] \|_{0,\Gamma_T} \leq \| v - I_h^{in} v \|_{0,\Gamma_T} + \| v - I_h^{ex} v \|_{0,\Gamma_T} \quad (2.64)$$

et d'autre part,

$$\lambda_T = \frac{|\Gamma_T|}{\frac{|T^{in}|}{\mu_{in}} + \frac{|T^{ex}|}{\mu_{ex}}}, \quad \text{donc } \lambda_T \leq \frac{|\Gamma_T| \mu_i}{|T^i|} \quad (i = in, ex). \quad (2.65)$$

On obtient donc

$$\lambda_T^{1/2} \| [v - I_h v] \|_{0,\Gamma_T} \leq \sum_{i=in,ex} \sqrt{\frac{|\Gamma_T| \mu_i}{|T^i|}} \| v - I_h^i v \|_{0,\Gamma_T}.$$

On utilise le théorème de trace (1.16) et la remarque (2.2.8), on obtient :

$$\lambda_T^{1/2} \| [v - I_h v] \|_{0,\Gamma_T} \leq ch_T \sum_{i=in,ex} \sqrt{\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^i|}} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T}. \quad (2.66)$$

Lorsque les paramètres α et β sont bornés (i.e. $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ et $0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$), la constante c de (2.66) et $\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^i|}$ sont uniformément bornées. Donc, la constante C de l'inégalité (2.63) est indépendante de Γ . De même, si $\alpha \rightarrow 0$ et $0 < \beta_0 \leq \beta$ (i.e. β borné loin de 0) ou vice versa.

Si $\alpha \rightarrow 0$ et $\beta \leq \beta_1 < 1$ (ou vice versa), la constante c de (2.66) est uniformément bornée mais $\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^\Delta|} \simeq \frac{1}{1-\alpha}$. Donc la constante C de (2.63) se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$. De même, si $\alpha = \beta \rightarrow 0$. En effet, $|T^\Delta| = (1-\alpha)^2 |T|$ et $|\Gamma_T| \simeq (1-\alpha) h_T$, donc

$$\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^\Delta|} \simeq \frac{1}{1-\alpha}.$$

Enfin, si $\alpha = \beta \rightarrow 0$; nous avons montré précédemment que la constante c devant les termes sur T^{in} se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. En utilisant $|T^\square| \simeq \alpha |T|$ et $|\Gamma_T| \simeq (1-\alpha) h_T$, la constante C de (2.63) se comporte comme $\frac{1}{\alpha}$. ■

Remarque 2.2.9. Il est important de noter que la question de robustesse liée à $\lambda_T^{1/2} \| [v - I_h v] \|_{0,\Gamma_T}$ se pose également dans une approximation NXFEM conforme. En effet, dans ce cas, on obtient toujours une constante qui se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ dans les cas critiques du lemme 2.2.10.

Remarque 2.2.10. On pourrait améliorer la dépendance de la constante C de (2.63) par rapport à l'interface Γ , si on majore différemment λ_T . Ainsi, comme $|T^{in}| + |T^{ex}| = |T|$ on écrit :

$$\lambda_T = \frac{|\Gamma_T|}{\frac{|T^{in}|}{\mu_{in}} + \frac{|T^{ex}|}{\mu_{ex}}} \leq \frac{|\Gamma_T|}{|T|} \max\{\mu_{in}, \mu_{ex}\}.$$

On peut donc majorer $\frac{|\lambda_T| h_T}{\mu_i}$ de l'inégalité (2.66) indépendamment de α et β , mais la constante C dépend maintenant du rapport des coefficients μ_i ($i = in, ex$). Évidemment, cela peut également être fait pour les éléments finis conformes.

Nous sommes en tout cas maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'estimation d'erreur d'interpolation :

Théorème 2.2.1. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de μ mais dépendante de Γ comme discuté précédemment telle que*

$$\|v - I_h v\| \leq Ch |v|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^{ex} \cup \Omega^{in}).$$

Démonstration. On a, par définition :

$$\|v - I_h v\|^2 = \|v - I_h v\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0, \Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|v - I_h v\|_{0, \Gamma_T}^2.$$

D'une part, nous avons d'après les Lemmes 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6 et 2.2.7 :

$$\|v - I_h v\|_h \leq Ch |\mu^{1/2} v|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

En utilisant les Lemmes 2.2.9, 2.2.8, on a

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0, \Gamma_T}^2 \leq Ch_T |\mu^{1/2} v|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.2.10 :

$$\lambda_T^{1/2} \|v - I_h v\|_{0, \Gamma_T} \leq Ch_T |\mu^{1/2} v|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (2.67)$$

Nous avons utilisé la continuité de l'opérateur d'extension $E^i : H^2(\Omega^i) \longrightarrow H^2(\Omega)$. ■

2.2.4 Erreur de consistance

Avant d'énoncer le théorème d'estimation d'erreur, nous nous intéressons à l'orthogonalité de Galerkin dans le cas non-conforme.

Lemme 2.2.11. (Orthogonalité de Galerkin) *Soit u_h la solution du problème variationnel (2.36), u la solution du problème (1.4) vérifie $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$. Alors*

$$\begin{aligned} a_h(u - u_h, v_h) &= \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \mu \nabla_n u [v_h] ds \\ &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n u [v_h] ds + \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e \mu_i \nabla_n u^i [v_h^i] ds, \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h. \end{aligned}$$

Démonstration. On a par définition

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) &= \sum_{i=in, ex} \int_{\Omega^i} \mu \nabla u \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Gamma} (\{\mu \nabla_n u\} [v_h] + \{\mu \nabla_n v_h\} [u]) ds \\ &\quad + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \int_{\tilde{\Gamma}_T} [u] [v_h] ds. \end{aligned}$$

à l'aide d'une intégration par parties et de $[u]|_\Gamma = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) = & - \sum_{i=in, ex} \int_{\Omega_i} \operatorname{div}(\mu \nabla u) v_h dx + \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e [\mu \nabla u \cdot n_e v_h] ds \\ & + \int_\Gamma [\mu \nabla_n u v_h] ds - \int_\Gamma \{\mu \nabla_n u\} [v_h] ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $[ab] = [a]\{b\} + \{a\}_*[b]$, il vient que

$$a_h(u, v_h) = \int_\Omega f v_h dx + \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e [\mu \nabla u \cdot n_e v_h] ds + \int_\Gamma [\mu \nabla_n u] \{v_h\}_* ds.$$

Or $[\mu \nabla u \cdot n_e]|_e = 0$ et $[\mu \nabla_n u]|_\Gamma = g$, donc nous avons :

$$a_h(u, v_h) = \int_\Omega f v_h dx + \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \mu \nabla_n u [v_h] ds + \int_\Gamma g \{v_h\}_* ds,$$

par conséquent

$$a_h(u, v_h) = l(v_h) + \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \mu \nabla_n u [v_h] ds.$$

En utilisant la formulation variationnelle (2.36), on obtient le résultat du lemme. \blacksquare

Pour donner l'estimation de l'erreur de consistance, nous nous intéressons à l'inégalité de trace pour les arêtes coupées $e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}$, $i = in, ex$. Nous avons :

Lemme 2.2.12. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et soit $e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}$ un segment de l'arête entière E de T ($i = in, ex$), avec $|e| = \alpha_e |E|$. Il existe une constante $C_T > 0$ indépendante de T telle que pour tout $v \in H^2(T^i)$:

$$\|\partial_n(v - I_h^i v)\|_{0,e} \leq c \sqrt{|e|} |E^i v|_{2,T} \leq C_T \sqrt{h} |E^i v|_{2,T}.$$

Si $\alpha = \beta \rightarrow 0$ et $T^i = T^\square$, alors $C_T \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha_e}}$; sinon C_T est indépendante de la position de l'interface.

Démonstration. On passe à l'arête entière e et on applique l'inégalité de trace sur le triangle T , on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|v\|_{0,e} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_e |E|}} \|E^i v\|_{0,E} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha_e}} \left(\frac{1}{h_T} \|E^i v\|_{0,T} + |E^i v|_{1,T} \right). \quad (2.68)$$

On applique (2.68) à la fonction $\nabla(v - I_h^i v)$ et on utilise l'estimation de l'erreur d'interpolation des sections précédentes, on obtient la première inégalité du lemme. La seconde résulte de la relation $|e| = \alpha_e |E|$. \blacksquare

Pour démontrer le Lemme 2.2.14, il est utile d'améliorer l'inégalité de trace (2.68) lorsque l'arête coupée e appartient à la partie triangulaire de T , en particulier lorsque $\alpha = \beta$.

Lemme 2.2.13. Soit $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ avec $\alpha = \beta$ et soit $e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}$ un segment de l'arête entière E de T avec $|e| = \alpha_e |E|$. Supposons $T^i = T^\Delta$. Il existe $C > 0$ indépendante de T et α_e telle que pour tout $v \in H^1(T^i)$,

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|v\|_{0,e} \leq C \left(\frac{1}{\alpha_e h_T} \|v\|_{0,T^i} + |v|_{1,T^i} \right). \quad (2.69)$$

Démonstration. Pour démontrer (2.69)), on passe à l'élément de référence \hat{T} via la transformation affine F_T et en outre, on emploie une deuxième transformation affine F_α^Δ définie dans $\hat{T}^\Delta \subset \hat{T}$ par :

$$\bar{x} = F_\alpha^\Delta \hat{x} = DF_\alpha^\Delta \hat{x}, \quad DF_\alpha^\Delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Ainsi, on a $F_\alpha^\Delta(\hat{T}^\Delta) = \hat{T}$ (indépendante de α), avec $\hat{v}(\hat{x}) = \bar{v}(\bar{x})$,

$$|\hat{v}|_{1,\hat{T}^\Delta} \simeq |\bar{v}|_{1,\hat{T}}, \quad \frac{1}{1-\alpha} \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}^\Delta} \simeq \|\bar{v}\|_{0,\hat{T}}. \quad (2.71)$$

On note que $\alpha_e = 1 - \alpha$. Puis, on applique le théorème de trace dans $F_\alpha^\Delta(\hat{T}^\Delta) = \hat{T}$, avec une constante indépendante de α , on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|v\|_{0,e} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{e}|}} \|\hat{v}\|_{0,\bar{e}} = \frac{1}{\sqrt{|\bar{e}|}} \|\bar{v}\|_{0,\bar{e}} \leq C \left(\|\bar{v}\|_{0,\hat{T}} + |\bar{v}|_{1,\hat{T}} \right).$$

En utilisant (2.71), il vient que

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|v\|_{0,e} \leq C \left(\frac{1}{\alpha_e} \|\hat{v}\|_{0,\hat{T}^\Delta} + |\hat{v}|_{1,\hat{T}^\Delta} \right).$$

Enfin, on utilise F_T pour passer de \hat{T}^Δ à T^Δ et pour obtenir (2.69). ■

Lemme 2.2.14. Soit $T^r, T^l \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ et soit $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$ un segment de l'arête entière E appartenant à T^r et T^l avec $|e| = \alpha_e |E|$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de T telle que pour tout $v_h \in \tilde{V}_h^i$:

$$\frac{1}{\sqrt{|e|}} \|[v_h]\|_{0,e} \leq C |E^i v_h|_{1,T^r \cup T^l}.$$

Si $\alpha_e \rightarrow 0$ et au moins l'une des cellules $T^{i,r}, T^{i,l}$ est un quadrilatère, alors $C \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha_e}}$; sinon, C est indépendante de α_e .

Démonstration. Comme $E^i v_h = v_h$ sur e et $[\pi_e^0 v_h] = 0$ sur e , on obtient grâce aux propriétés de l'opérateur de projection π_e^0 :

$$\|[v_h]\|_{0,e} = \|[v_h - \pi_e^0 v_h]\|_{0,e} \leq \|E^i v_h - \pi_{T^r}^0(E^i v_h)\|_{0,e} + \|E^i v_h - \pi_{T^l}^0(E^i v_h)\|_{0,e}.$$

On utilise l'inégalité de trace sur l'arête entière E , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|[v_h]\|_{0,e} &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_e |E|}} \sum_{j=l,r} \|E^i v_h - \pi_{T^j}^0(E^i v_h)\|_{0,E} \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_e}} \sum_{j=l,r} \left(\frac{1}{h_{T^j}} \|E^i v_h - \pi_{T^j}^0(E^i v_h)\|_{0,T^j} + |E^i v_h|_{1,T^j} \right) \\ &\leq \frac{c}{\sqrt{\alpha_e}} |E^i v_h|_{1,T^l \cup T^r}. \end{aligned}$$

Si α_e est bornée loin de 0 (i.e. $0 < \alpha_0 \leq \alpha_e$), alors la constante c est indépendante de α_e . Si $\alpha_e \rightarrow 0$ et si $T^{i,r}$ et $T^{i,l}$ sont des triangles, alors on considère les triangles isocèles

$\tilde{T}^{r,i} \subset T^r$ et $\tilde{T}^{i,l} \subset T^l$ qui contiennent l'arête e , voir la figure Fig. 2.6 et on utilise l'inégalité de trace (2.69) du lemme 2.2.13 pour le cas $\alpha = \beta$ sur l'arête coupée e . On obtient ainsi une constante c indépendante de α_e :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \| [v_h] \|_{0,e} &\leq \frac{1}{\sqrt{|e|}} \sum_{j=l,r} \| v_h - \pi_{\tilde{T}^{i,j}}^0 v_h \|_{0,e} \\ &\leq c \sum_{j=l,r} \left(\frac{1}{\alpha_e h_{T^j}} \| v_h - \pi_{\tilde{T}^{i,j}}^0 v_h \|_{0,\tilde{T}^{i,j}} + |v_h|_{1,\tilde{T}^{i,j}} \right) \\ &\leq C |v_h|_{1,\tilde{T}^{i,l} \cup \tilde{T}^{i,r}} \leq C |E^i v_h|_{1,T^l \cup T^r}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Ci-dessus, on a utilisé l'estimation standard sur les triangles $\tilde{T}^{i,j}$, de diamètre $\alpha_e h_{T^j}$:

$$\| w - \pi_{\tilde{T}^{i,j}}^0 w \|_{0,\tilde{T}^{i,j}} \leq c \alpha_e h_{T^j} |w|_{1,\tilde{T}^{i,j}}.$$

Si $\alpha_e \rightarrow 0$ et au moins l'une des cellules $T^{r,i}$, $T^{l,i}$ est quadrilatère, alors on a $C \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha_e}}$. ■

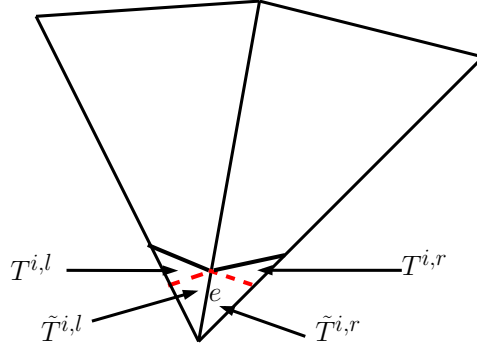


Fig. 2.6 – Deux éléments adjacents partageant une arête intérieure

Remarque 2.2.11. On obtient les mêmes résultats du lemme 2.2.14 pour les arêtes du bord $e \in \mathcal{E}_h^{i,\partial}$ coupées par l'interface Γ .

On présente ici le Théorème qui donne l'estimation optimale de l'erreur de consistance :

Théorème 2.2.2. On a

$$\sup_{w_h \in \tilde{V}_h} \frac{|a_h(u - u_h, w_h)|}{\|w_h\|} \leq C h |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^{ex} \cup \Omega^{in}}$$

où $C > 0$ est indépendante de h , de μ et de λ .

Démonstration. D'après le Lemme 2.2.11, on a pour tout $w_h \in \tilde{V}_h$:

$$\begin{aligned} a_h(u - u_h, w_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n u [w_h] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{in,cut}} \int_e \mu_{in} \nabla_n u^{in} [w_h^{in}] ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{ex,cut}} \int_e \mu_{ex} \nabla_n u^{ex} [w_h^{ex}] ds \\ &:= \mathbb{T}^{nc} + \mathbb{T}^{in,cut} + \mathbb{T}^{ex,cut}. \end{aligned}$$

Nous allons majorer les trois termes comme suit :

Terme \mathbb{T}^{nc} : Sur les arêtes non coupées, on considère l'opérateur d'interpolation classique I_h de Crouzeix-Raviart. Alors, comme $\int_e [w_h] ds = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^{nc}$, nous avons que

$$\mathbb{T}^{nc} = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n (u - I_h u) [w_h] ds.$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{nc} &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \|\mu \nabla_n (u - I_h u)\|_{0,e} \| [w_h] \|_{0,e} \\ &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} |e|^{-1} \|\mu \nabla_n (u - I_h u)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} |e| \| [w_h] \|_{0,e}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de trace (1.17) et (2.4) du Lemme 2.1.3, nous avons

$$\mathbb{T}^{nc} \leq C \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{int}} (h_T^{-2} \|\mu \nabla (u - I_h u)\|_{0,T}^2 + |\mu \nabla (u - I_h u)|_{1,T}^2) \right]^{1/2} \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{int}} h_T^2 |w_h|_{1,T}^2 \right]^{1/2}$$

et en utilisant les propriétés de l'opérateur I_h , on obtient

$$\mathbb{T}^{nc} \leq Ch |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^{ex} \cup \Omega^{in}} |\mu^{1/2} w_h|_{1,\Omega^{ex} \cup \Omega^{in}}.$$

On utilise le même raisonnement pour estimer le terme $\mathbb{T}^{i,cut}$ l'opérateur d'interpolation I_h^i défini par (2.42). On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{i,cut} &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e \mu \nabla_n (u - I_h^i u) [w_h] ds \\ &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \|\mu^{1/2} \nabla_n (u - \tilde{I}_h^i u)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \|\mu^{1/2} [w_h]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.2.14 et $|e| \simeq \alpha_e h_T$ pour $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut} \cap \partial T$, on obtient

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \|\mu^{1/2} [w_h]\|_{0,e}^2 \leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} h_T |\mu_i^{1/2} E^i w_h|_{1,T}^2 \leq ch |\mu^{1/2} w_h|_{1,\Omega^i}^2,$$

avec une constante indépendante de l'interface Γ . En utilisant le Lemme 2.2.12, il vient que

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \|\mu^{1/2} \nabla_n (u - \tilde{I}_h^i u)\|_{0,e}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} C_T h_T |\mu_i^{1/2} E^i u|_{2,T}^2 \leq ch |\mu_i^{1/2} u|_{2,\Omega^i}^2,$$

où $C_T^{1/2}$ se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Par conséquent,

$$\mathbb{T}^{i,cut} \leq Ch |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^i} |\mu^{1/2} w_h|_{1,\Omega^i}.$$

En rassemblant les estimations de \mathbb{T}^{nc} et de $\mathbb{T}^{i,cut}$, on obtient le résultat du lemme. ■

2.2.5 Estimation d'erreur a priori

Le théorème suivant donne l'erreur globale commise par la méthode NXFEM pour l'approche traitée précédemment. Nous avons les estimations suivantes :

Théorème 2.2.3. *Supposons que la solution u du problème (1.4) vérifie $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$. Si u_h est la solution du problème variationnel (2.36) sur l'espace modifié \tilde{V}_h , on a :*

$$|||u - u_h||| \leq C h |\mu^{1/2} u|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (2.73)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h , de μ et de λ .

Démonstration. On utilise le lemme 2.2.2, le Théorème 2.2.1 et le Théorème 2.2.2, on obtient le résultat désiré. ■

La dépendance de la constante C par rapport à la position de Γ a été discutée dans la section 2.2.3.

On conclut cette section par l'estimation d'erreur en norme L^2 pour l'inconnue u . Par l'argument d'Aubin-Nitsche, nous avons l'estimation d'erreur suivante :

Théorème 2.2.4. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h , de μ et de λ telle que*

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq C h^2 |\mu^{1/2} u|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

Démonstration. On adapte l'argument d'Aubin-Nitsche à notre discrétisation. Soit $w = (w^{in}, w^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$ solution du problème dual continu associé au problème (1.4),

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla w) = \psi & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [w] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_n w] = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.74)$$

avec $\psi = u - u_h$ et supposons que la solution satisfait la propriété de régularité suivante :

$$\|\mu^{1/2} w\|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq c \|\psi\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (2.75)$$

On multiplie la première équation du système (2.74) par $u - u_h$ et on intègre par parties sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$. On obtient alors

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 = a_h(w, u - u_h) - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n w [u - u_h] ds - \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e \mu_i \nabla_n w^i [u - u_h] ds.$$

à l'aide de la propriété d'orthogonalité de Galerkin (2.2.11) et des propriétés des opérateurs d'interpolation définis précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 &= a_h(w - I_h w, u - u_h) - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n (w - I_h w) [u - u_h] ds \\ &\quad - \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e \mu_i \nabla_n (w^i - I_h^i w^i) [u - u_h] ds. \end{aligned}$$

On reprend le même raisonnement que dans la démonstration du Lemme 2.2.2 et grâce à (2.2.1) la continuité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$, il vient que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}^2 &\leq C_2 \|w - I_h w\| \|u - u_h\| \\ &\quad + Ch |\mu^{1/2} w|_{2,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}} \|u - u_h\|, \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.2.1 d'estimation d'erreur d'interpolation et l'hypothèse de régularité (2.75), nous avons

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}^2 \leq C h^2 \|u - u_h\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}} |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}},$$

d'où le résultat désiré. ■

2.3 Deuxième approche : rajout de termes de stabilisation

Dans cette partie, nous gardons l'espace usuel des éléments finis de Crouzeix-Raviart mais nous introduisons dans la formulation discrète (2.36) des termes de stabilisation lors de l'approximation par éléments finis non-conformes du problème (1.4). Le but est de compenser l'erreur de consistance.

On précise que si aucune spécification n'est donnée, les constantes $C > 0$ utilisées sont indépendantes du paramètre de discrétisation h , de la viscosité $\mu = (\mu_{in}, \mu_{ex})$ et des paramètres de stabilisation λ et $\gamma = (\gamma_{in}, \gamma_{ex})$.

2.3.1 Problème discret - Existence et unicité

On considère donc l'espace de Crouzeix-Raviart $V_h = V_h^{in} \times V_h^{ex}$ où l'espace V_h^i ($i = in, ex$) est défini par :

$$V_h^i = \left\{ v_h \in L^2(\Omega_h^i) : v_h|_T \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \int_e [v_h] ds = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^\partial \right\}.$$

On introduit les nouveaux termes de stabilisation sur les arêtes coupées $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$, $i = in, ex$:

$$\begin{aligned} A_i(u_h, v_h) &= -\mu_i \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e \left(\{\nabla_n u_h^i\}^e [v_h^i] + \{\nabla_n v_h^i\}^e [u_h^i] \right) ds, \\ J_i(u_h, v_h) &= \mu_i \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \gamma_i^e \int_e [\pi_0 u_h^i] [\pi_0 v_h^i] ds, \quad \gamma_i^e = \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \end{aligned}$$

où la moyenne pondérée $\{\cdot\}^e$ sera définie ultérieurement et π_0 est la projection sur $P_0(e)$. La nouvelle forme bilinéaire notée $a_n(\cdot, \cdot)$ s'écrit sous la forme :

$$a_n(u_h, v_h) = a_h(u_h, v_h) + A(u_h, v_h) + \gamma_{in} J_{in}(u_h, v_h) + \gamma_{ex} J_{ex}(u_h, v_h), \quad (2.76)$$

où

$$A(u_h, v_h) = A_{in}(u_h, v_h) + A_{ex}(u_h, v_h)$$

et $\gamma_{in} > 0$, $\gamma_{ex} > 0$ sont deux paramètres de stabilisation pouvant être choisis indépendants de h . Les termes $A_{in}(\cdot, \cdot)$ et $A_{ex}(\cdot, \cdot)$ ont été rajoutés pour que la forme $a_n(\cdot, \cdot)$ soit

symétrique et consistante. Cependant, les termes $J_{in}(\cdot, \cdot)$ et $J_{ex}(\cdot, \cdot)$ ont été rajoutés afin de trouver la coercivité de la forme $a_n(\cdot, \cdot)$. Ces termes de stabilisation sont similaires à ceux de la méthode de Galerkin discontinue (dG) et ayant un lien avec les éléments finis non-conformes. De nombreuses études ont été faites sur les méthodes dG dans le cas elliptique. On se référera à [8] pour une présentation générale. Le principe de cette méthode est basé sur l'utilisation d'éléments finis totalement discontinus et sur l'ajout d'un terme de stabilisation sur les arêtes coupées assurant la coercivité discrète.

Remarque 2.3.1. On peut utiliser aussi le saut $[u_h]$ dans la forme linéaire $J_i(\cdot, \cdot)$, $i = in, ex$ (voir [19]). Dans notre cas, nous avons utilisé $[\pi_0 u_h]$ pour faire un lien entre la méthode de type Galerkin discontinue et l'approximation des éléments finis non-conformes, voir [18].

On considère la formulation variationnelle discrète suivante du problème (1.4) :

$$u_h \in V_h, \quad a_n(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.77)$$

On définit la norme correspondante sur V_h de la manière suivante :

$$[[u]]^2 = |||u|||^2 + J_{in}(u, u) + J_{ex}(u, u).$$

Remarque 2.3.2. Il est facile de vérifier que l'application $u \rightarrow [[u]]$ est une norme sur l'espace d'approximation V_h .

On souhaite prouver l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (2.77). Pour cela, on va montrer la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire $a_n(\cdot, \cdot)$ sur V_h .

On définit la moyenne pondérée de ϕ sur les arêtes coupées $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$ pour $i = in, ex$ (voir Fig. 2.7) par

$$\{\phi\}^e = \kappa^l \phi^l + \kappa^r \phi^r,$$

où les coefficients de pondération κ^l et κ^r sont donnés par

$$\kappa^l = \frac{|T^{i,l}|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}, \quad \kappa^r = \frac{|T^{i,r}|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \quad (i = in, ex).$$

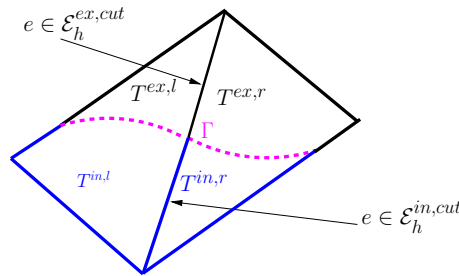


Fig. 2.7 – éléments partageant une arête intérieure coupée

La coercivité de la forme bilinéaire $a_n(\cdot, \cdot)$ dépend de l'estimation du terme $\frac{1}{\gamma_i^e} \|\{\nabla_n u_h\}^e\|_{0,e}^2$ pour tout $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$, $i = in, ex$.

Pour alléger l'écriture, on omet dans la suite l'exposant e dans $\{\cdot\}^e$.

Lemme 2.3.1. Pour tout $T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma,i}$ et pour tout $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$ ($i = in, ex$), nous avons

$$\|\{\nabla_n v_h\}\|_{0,e}^2 \leq \gamma_i^e \left(|v_h|_{1,T^{i,l}}^2 + |v_h|_{1,T^{i,r}}^2 \right), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.78)$$

Démonstration. Comme $\nabla v_h|_T$ est constant et $0 \leq \kappa^j \leq 1$ ($j = l, r$) et $\kappa^l + \kappa^r = 1$, nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \int_e \{\nabla_n v_h\}^2 ds &\leq \kappa^l \int_e |\nabla v_h|_{T^{i,l}}^2 ds + \kappa^r \int_e |\nabla v_h|_{T^{i,r}}^2 ds \\ &= \frac{|e|\kappa^l}{|T^{i,l}|} \int_{T^{i,l}} |\nabla v_h|^2 ds + \frac{|e|\kappa^r}{|T^{i,r}|} \int_{T^{i,r}} |\nabla v_h|^2 ds \\ &= \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \int_{T^{i,l}} |\nabla v_h|^2 ds + \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \int_{T^{i,r}} |\nabla v_h|^2 ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_e \{\nabla_n v_h\}^2 ds \leq \gamma_i^e \left(\int_{T^{i,l}} |\nabla v_h|^2 ds + \int_{T^{i,r}} |\nabla v_h|^2 ds \right).$$

■

Coercivité de la forme $a_n(\cdot, \cdot)$

Lemme 2.3.2. Pour λ , γ_{in} et γ_{ex} suffisamment grands, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$a_n(v_h, v_h) \geq C_1 [v_h]^2, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Démonstration. Compte tenu du Lemme 2.2.1, il suffit de contrôler les termes

$$A_i(v_h, v_h) = -2\mu_i \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e \{\nabla_n v_h^i\} [v_h^i] ds, \quad i = in, ex.$$

On note que $\{\nabla_n v_h^i\}^e \in P_0(e)$. Par définition de la projection sur $P_0(e)$, on obtient :

$$A_i(v_h, v_h) = -2\mu_i \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e \{\nabla_n v_h^i\} [\pi_0 v_h^i] ds.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que :

$$A_i(v_h, v_h) \geq -2\mu_i \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \frac{1}{\gamma_i^e} \|\{\nabla_n v_h^i\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \gamma_i^e \|[\pi_0 v_h^i]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}.$$

D'après le Lemme 2.3.1, on obtient

$$A_i(v_h, v_h) \geq -2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} |\mu_i^{1/2} v_h^i|_{1,T}^2 \right)^{1/2} J_i^{1/2}(v_h, v_h),$$

d'où le résultat annoncé. ■

Continuité de la forme $a_n(\cdot, \cdot)$

Lemme 2.3.3. *Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que*

$$|a_n(u_h, v_h)| \leq C_2[[u_h]][[v_h]] \quad \forall u_h \in V_h, v_h \in V_h.$$

Démonstration. Pour établir la continuité de la forme bilinéaire $a_n(\cdot, \cdot)$, il suffit d'étudier celle de $A_i(\cdot, \cdot)$, $i = in, ex$. On a

$$A_i(u_h, v_h) = -\mu_i \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \left(\int_e \{\nabla_n u_h^i\} [\pi_0 v_h^i] ds + \int_e \{\nabla_n v_h^i\} [\pi_0 u_h^i] ds \right).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} |A_i(u_h, v_h)| &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \frac{\mu_i}{\gamma_i^e} \|\{\nabla_n u_h^i\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \mu_i \gamma_i^e \|\pi_0 v_h^i\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \frac{\mu_i}{\gamma_i^e} \|\{\nabla_n v_h^i\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \mu_i \gamma_i^e \|\pi_0 u_h^i\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant les Lemmes 2.3.1 et 2.2.1. ■

Estimation d'erreur a priori

Le but de cette partie est de donner une borne supérieure de l'erreur résultant de l'approximation par la deuxième approche (2.76). Avant d'énoncer le lemme d'estimation d'erreur, nous nous intéressons à l'orthogonalité de Galerkin dans le cas non-conforme.

Lemme 2.3.4. (Orthogonalité de Galerkin) *Soit u_h la solution du problème variationnel (2.77) u la solution du problème (1.4) vérifie $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$. Pour tout $v_h \in V_h$, nous avons*

$$a_n(u - u_h, v_h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n u [v_h] ds.$$

Démonstration. La preuve suit le même raisonnement que dans le Lemme 2.2.11 ; les nouveaux termes de stabilisation compensent ici la non-conformité. ■

2.3.2 Erreur d'interpolation

En utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolation classique de Crouzeix-Raviart, nous avons également :

Lemme 2.3.5. (Erreur d'interpolation) *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de μ telle que*

$$\inf_{v_h \in V_h} [[u - v_h]] \leq Ch |\mu^{1/2} u|_{2, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}},$$

Démonstration. Pour estimer la norme $\|u - I_h u\|$, on utilise le même cheminement que dans le cas des éléments finis conformes [75]. La majoration de la quantité $\lambda_T^{1/2} \|u - I_h u\|_{0,\Gamma_T}$ se fait de la même manière que dans le Lemme 2.2.10 de la section 2.2. La démonstration du résultat de lemme est basée donc sur l'estimation de

$$J(u - I_h u, u - I_h u) = J_{in}(u - I_h u, u - I_h u) + J_{ex}(u - I_h u, u - I_h u)$$

où pour $i = in, ex$,

$$J_i(u - I_h u, u - I_h u) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \mu_i \gamma_i^e \|[\pi_0(u - I_h u)]\|_{0,e}^2, \quad \gamma_i^e = \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}.$$

Soient T^l et T^r deux triangles adjacents ayant l'arête entière commune $\tilde{E} \in \mathcal{E}_h^{cut}$ coupée par l'interface. Soit $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$, $e \subset \tilde{e}$ et soit $|e| = \alpha_e |E|$. La démonstration est similaire si E est une arête du bord $E \in \mathcal{E}_h^{\partial,cut}$. Pour démontrer ce lemme, on suit le même raisonnement que dans le Lemme 2.2.14. On a :

$$(\mu_i \gamma_i^e)^{1/2} \|[\pi_e^0(v - I_h^i v)]\|_{0,e} \leq \sqrt{\frac{\mu_i |e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}} \sum_{j=l,r} \|(v - I_h^i v)|_{T^j}\|_{0,e}$$

on applique l'inégalité de trace sur l'arête entière E . On obtient donc :

$$\begin{aligned} (\mu_i \gamma_i^e)^{1/2} \|[\pi_e^0(v - I_h^i v)]\|_{0,e} &\leq \sqrt{\frac{\mu_i |e|^2}{\alpha_e (|T^{i,l}| + |T^{i,r}|)}} \sum_{j=l,r} \frac{1}{\sqrt{|E|}} \|(v - I_h^i v)|_{T^j}\|_{0,E} \\ &\leq c \sqrt{\frac{\mu_i |e| |E|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}} \sum_{j=l,r} \left(\frac{1}{h_{T^j}} \|E^i v - I_h^i v\|_{0,T^j} + |E^i v - I_h^i v|_{1,T^j} \right) \\ &\leq ch \sqrt{\frac{\alpha_e h^2}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}} |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T^l \cup T^r}. \end{aligned}$$

Notons α_e^l et α_e^r respectivement les rapports des arêtes coupées de $T^{i,l}$ et $T^{i,r}$, voir la figure Fig. 2.8.

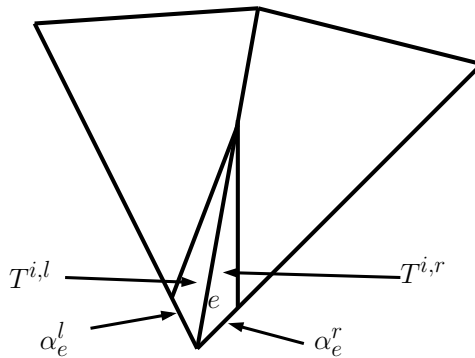


Fig. 2.8 – Cas critique : $\alpha_e^l \rightarrow 0$, $\alpha_e^r \rightarrow 0$, $\alpha_e \not\rightarrow 0$

Si au moins l'une des cellules $T^{i,l}$, $T^{i,r}$ est un quadrilatère (pour fixer les idées, on considère $T^{i,l}$ un quadrilatère), alors la seule situation critique se produit lorsque $\alpha_e =$

$\alpha_e^l \rightarrow 0$; mais donc $|T^{i,l}| \simeq \alpha_e h^2$ et on a :

$$\frac{\alpha_e h^2}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \leq \frac{\alpha_e h^2}{|T^{i,l}|} \leq c.$$

Si les deux cellules $T^{i,l}$, $T^{i,r}$ sont des triangles, alors $|T^{i,l}| \simeq \alpha_e \alpha_e^l h^2$ et $|T^{i,r}| \simeq \alpha_e \alpha_e^r h^2$ ainsi

$$\frac{\alpha_e h^2}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \leq \frac{c}{\alpha_e^l + \alpha_e^r}.$$

Si au moins l'un des paramètres α_e^l , α_e^r ne tend pas vers 0, alors l'estimation est robuste. Si $\alpha_e^l \rightarrow 0$, $\alpha_e^r \rightarrow 0$ et $\alpha_e \rightarrow 0$, alors on utilise l'inégalité de trace (2.69) sur e au lieu de l'inégalité de trace classique sur l'arête entière E . Dans le cas critique $\alpha_e^l = \alpha_e^r = \alpha_e$, en appliquant (2.72) du Lemme 2.2.14 à $v - I_h v$, on obtient :

$$\begin{aligned} (\mu_i \gamma_i^e)^{1/2} \|\pi_e^0(v - I_h^i v)\|_{0,e} &\leq \sqrt{\frac{\mu_i |e|^2}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}} \frac{1}{\sqrt{|e|}} \|v - I_h^i v\|_{0,e} \\ &\leq c \sqrt{\mu_i} |E^i(v - I_h^i v)|_{1,T^l \cup T^r} \leq ch |\mu_i^{1/2} E^i v|_{2,T^l \cup T^r}. \end{aligned}$$

Enfin, si α_e^l et α_e^r tendent vers 0 mais $\alpha_e \not\rightarrow 0$, voir la figure Fig. 2.8, la constante dans l'estimation d'erreur d'interpolation se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{\alpha_e^l + \alpha_e^r}}$. Ce cas critique semble être pathologique. ■

2.3.3 Erreur de consistance

Nous obtenons, en suivant la preuve du Lemme 2.2.11 dans le cas des arêtes non coupées (terme \mathcal{I}), l'estimation suivante :

Lemme 2.3.6. (Erreur de consistance) On a

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_n(u - u_h, w_h)|}{[[w_h]]} \leq Ch |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$$

où $C > 0$ est indépendante de h et de μ .

2.3.4 Estimation d'erreur a priori

Le théorème suivant donne l'erreur globale commise par la méthode NXFEM pour l'approche de rajout de terme de stabilisation sur les arêtes coupées. Le résultat final est :

Théorème 2.3.1. Supposons que la solution u du problème (1.4) vérifie $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$. Si u_h est la solution de la formulation variationnelle (2.77) sur l'espace d'approximation de Crouzeix-Raviart V_h , alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de μ telle que

$$[[u - u_h]] \leq C h |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

On conclut cette section par l'estimation d'erreur en norme L^2 pour l'inconnue u . Par l'argument d'Aubin-Nitsche, nous avons l'estimation d'erreur suivante :

Théorème 2.3.2. Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de μ telle que

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq C h^2 |\mu^{1/2} u|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

Démonstration. Pour démontrer le Théorème 2.3.2, on procède de la même façon que dans la preuve du Théorème 2.2.4. Il suffit de remplacer la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ par $a_n(\cdot, \cdot)$ et utiliser les résultats d'estimation d'erreur pour la deuxième approche. ■

2.4 Lien entre les approches

Dans cette partie, il s'agit d'étudier le lien entre les deux approches développées précédemment. On s'intéresse au comportement de la solution de (2.77) lorsque les paramètres de stabilisation γ_i tendent vers $+\infty$. Puis, nous introduisons une formulation variationnelle de type Galerkin discontinue (DG) pour interpréter la première approche.

2.4.1 Passage à la limite lorsque $\gamma_i \longrightarrow +\infty$

Nous avons vu précédemment que les paramètres de stabilisation γ_{in} et γ_{ex} doivent être suffisamment grands afin d'avoir la coercivité de la forme bilinéaire $a_n(\cdot, \cdot)$ sur l'espace de Crouzeix-Raviart $V_h = V_h^{in} \times V_h^{ex}$.

Nous nous intéressons au comportement de la solution du problème variationnel (2.77) lorsque les paramètres de stabilisation γ_{in} et γ_{ex} tendent vers ∞ . Pour tenir compte de la dépendance en γ , il convient de noter la solution du problème (2.79) par u_h^γ :

$$u_h^\gamma \in V_h, \quad a_n(u_h^\gamma, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.79)$$

Comme

$$a_n(\cdot, \cdot) = a_h(\cdot, \cdot) + A(\cdot, \cdot) + \gamma_{in} J_{in}(\cdot, \cdot) + \gamma_{ex} J_{ex}(\cdot, \cdot),$$

ceci nous conduit à étudier les noyaux de J_i , notés $\text{Ker} J_i$, $i = in, ex$. On a

$$\begin{aligned} \text{Ker} J_i &= \left\{ v_h \in V_h^i; \quad \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \frac{\mu_i |e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \int_e [\pi_0 u_h^i] [\pi_0 v_h^i] ds = 0, \quad \forall u_h \in V_h^i \right\} \\ &= \left\{ v_h \in V_h^i; \quad [\pi_0^e v_h^i] = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,cut} \right\} \\ &= \left\{ v_h \in V_h^i; \quad \int_e [v_h^i] = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,cut} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $\tilde{e} \in \mathcal{E}_h^i$ l'arête entière contenant l'arête coupée $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$. Par définition de l'espace V_h^i , on a

$$\int_{\tilde{e}} [v_h^i] = 0.$$

Donc

$$[v_h^i](M) = [v_h^i](\tilde{M}) = 0,$$

où M et \tilde{M} désignent respectivement les points milieux des arêtes $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$ et $\tilde{e} \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$.

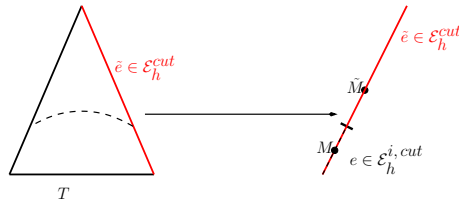


Fig. 2.9 – Illustration des points milieux le long d'une arête

Comme v_h est P^1 par morceaux, ceci nous donne $[v_h^i] = 0$ sur \tilde{e} (et donc aussi sur e), voir la figure Fig. 2.9. Par conséquent, v_h^i est continue à travers e (et implicitement e). Si $v_h \in \text{Ker} J_i$, alors

$$a_n(u_h^\gamma, v_h) = l(v_h).$$

On a

$$\text{Ker} J_i \subset \tilde{V}_h^i.$$

Cependant, l'inclusion est stricte, ce qui nous empêche de conclure que la première formulation est une limite de la deuxième formulation. Afin d'interpréter la première approche comme la limite d'une autre formulation lorsque les paramètres de stabilisation tendent vers ∞ , nous allons introduire une troisième formulation de type Galerkin discontinu. C'est l'objet de la section suivante.

2.4.2 Formulation de type Galerkin discontinue

Cette formulation est basée sur l'utilisation d'éléments finis totalement discontinus et sur l'ajout d'un terme de stabilisation sur les arêtes non-coupées, assurant la coercivité discrète. Un des principaux avantages de la méthode dG (Galerkin discontinue) est sa facilité d'implémentation et sa flexibilité, elle est idéale pour la prise en compte des discontinuités, mais également pour des couplages et des géométries de domaines complexes.

De nombreuses travaux existent sur les méthodes de type Galerkin discontinue, nous renvoyons le lecteur aux travaux d'Arnold et al. [8] pour une présentation générale dans le cas elliptique et les références d'Ern [51, 54] qui complètent confortablement cette méthode. Dans le contexte de la méthode NXFEM, un travail récent sur des maillages triangulaire a été réalisé par Massjung [94] dans le cas de problème d'interface elliptique. Cette méthode est basée sur la méthode symétrique avec pénalisation intérieur (Interior Penalty) introduite pour le laplacien par Arnold [7], elle peut être interprétée comme une généralisation de NXFEM d'Hansbo [75]. La discrétisation ainsi obtenue est bien posée et des estimations d'erreur a priori optimales ont été obtenues. Nous partirons donc de cette méthode, que nous modifions pour des éléments finis non-conformes.

On considère les espaces totalement discontinus

$$D_h^i = \left\{ v_h \in L^2(\Omega_h^i) : v_h|_T \in P^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i \right\}, \quad i = in, ex,$$

on introduit les termes de stabilisation de la méthode de Galerkin discontinue sur les arêtes non coupées (intérieures et de frontière) de chacun des sous-domaines :

$$\begin{aligned} D(u_h, v_h) &= -\mu \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e (\{\nabla_n u_h\}[v_h] + \{\nabla_n v_h\}[u_h]) \, ds, \\ J_{nc}(u_h, v_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \frac{\mu}{|e|} \int_e [\pi_0 u_h][\pi_0 v_h] \, ds \end{aligned}$$

et on définit la forme bilinéaire suivante sur $D_h = D_h^{in} \times D_h^{ex}$:

$$a_{dG}(\cdot, \cdot) = a_n(\cdot, \cdot) + D(\cdot, \cdot) + \gamma_{nc} J_{nc}(\cdot, \cdot)$$

où $\gamma_{nc} > 0$ est un paramètre de stabilisation.

On considère enfin la formulation DG suivante :

$$u_{dG}^\gamma \in D_h, \quad a_{dG}(u_{dG}^\gamma, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in D_h \quad (2.80)$$

où $\gamma = (\gamma_{in}, \gamma_{ex}, \gamma_{nc})$ dénote l'ensemble de nos paramètres de stabilisation sur les arêtes. Compte tenu des résultats de la section précédente, il est classique de vérifier que (2.80) est bien posé lorsque γ_{in} , γ_{ex} et γ_{nc} sont suffisamment grands, pour la norme

$$([\cdot]^2 + J_{nc}(\cdot, \cdot))^{1/2}. \quad (2.81)$$

On peut alors établir :

Lemme 2.4.1. Soit u_{dG}^γ la solution du problème variationnel (2.80) et soit u_h celle de la formulation (2.36). Alors

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} [[u_{dG}^\gamma - u_h]]^2 + J_{nc}(u_h^\gamma - u_h, u_h^\gamma - u_h) = 0.$$

Démonstration. Montrons que $(u_{dG}^\gamma)_\gamma$ est bornée dans l'espace D_h par rapport à γ . On considère la fonction test $v_h = u_{dG}^\gamma$ dans (2.80), nous avons donc

$$a_{dG}(u_{dG}^\gamma, u_{dG}^\gamma) = L(u_{dG}^\gamma).$$

En utilisant la continuité de la forme $l(\cdot)$ et la coercivité de $a_{dG}(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$[[u_h^\gamma]]^2 + J_{nc}(u_{dG}^\gamma, u_{dG}^\gamma) \leq C.$$

Par conséquent, la suite $(u_{dG}^\gamma)_\gamma$ est bornée dans D_h indépendamment de γ .

On en déduit donc qu'il existe une sous-suite de $(u_{dG}^\gamma)_\gamma$ qui converge faiblement (donc fortement, en dimension finie) vers une limite notée u_h^∞ , qui appartient à

$$(\text{Ker} J_{in} \times \text{Ker} J_{ex}) \cap \text{Ker} J_{nc} = \tilde{V}_h.$$

En passant à la limite dans (2.80), on obtient que $u_h^\infty \in \tilde{V}_h$ est solution du problème limite suivant :

$$u_h^\infty \in \tilde{V}_h \quad a_{dG}(u_h^\infty, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h.$$

D'après la définition de \tilde{V}_h , il vient que

$$J_{in}(u_h^\infty, v_h) = J_{ex}(u_h^\infty, v_h) = J_{nc}(u_h^\infty, v_h) = 0.$$

Comme $\nabla_n u_h^\infty$ et $\nabla_n v_h$ sont constants par morceaux, nous avons aussi

$$A_{in}(u_h^\infty, v_h) = A_{ex}(u_h^\infty, v_h) = D(u_h^\infty, v_h) = 0.$$

D'où u_h^∞ est solution de notre première formulation variationnelle (2.36).

Or, on a vu que celle-ci est bien posée d'où

$$u_h = u_h^\infty.$$

L'unicité de la limite assure que toute la suite $(u_{dG}^\gamma)_\gamma$ est convergente. ■

Remarque 2.4.1. Dans [82], l'ordre de convergence $\frac{1}{\gamma}$ a été aussi établi (et ce, pour un problème elliptique ou de Stokes) mais en absence d'interface. Ce résultat pourrait être étendu au cas NXFEM.

2.5 Conclusion

En guise de conclusion de ce chapitre, nous avons démontré que les problèmes discrets des deux approches traitées précédemment sont stables, et que l'erreur globale commise par la méthode NXFEM pour les deux approches converge de manière optimale (voir le théorème suivant). Une discussion entre les deux approches faisant intervenir la méthode de Galerkin discontinue a été faite.

Théorème 2.5.1. *Supposons que la solution u du problème (1.4) vérifie $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$. Soit u_h la solution du problème variationnel (2.36) (respectivement (2.77)) sur l'espace \tilde{V}_h (respectivement V_h), alors on a :*

$$|||u - u_h||| \leq C h |\mu|^{1/2} u|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h , de μ et où $||| \cdot |||$ désigne la norme $||| \cdot |||$ (respectivement $[[\cdot]]$).

Nous avons mis en évidence pour chaque cas la dépendance de la constante C en fonction de la position de l'interface.

L'étape suivante, constituant le chapitre à venir, est de valider numériquement les deux approches. Une attention particulière sera portée au cas limite $\alpha = \beta \rightarrow 0$, qui d'un point de vue théorique conduit à une estimation d'erreur en $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$; nous verrons cependant que d'un point de vue numérique, les méthodes sont robustes par rapport à la position de l'interface.

Résultats numériques pour le problème elliptique

Dans ce chapitre, on présente des résultats numériques pour illustrer et valider les résultats théoriques développés dans le chapitre 2. On expose d'abord les formulations variationnelles dans un cadre plus général avec des conditions aux limites non-homogènes, ainsi que les cas tests envisagés. Puis, on s'intéresse à l'ordre de convergence de ces méthodes par rapport au raffinement de maillage et à la robustesse par rapport à la position de l'interface. Ensuite, on compare les deux méthodes non-conformes à la méthode NX-FEM originale, avec les éléments finis conformes. Enfin, on présente la méthode DG et le passage à la limite. Les deux méthodes développées ont été implémentées dans la librairie C++ CONCHA.

Sommaire

3.1	Préliminaires	70
3.2	Cas tests considérés	72
3.3	Première approche : modification des fonctions de base sur les triangles coupés	75
3.3.1	Tests de validation	76
3.3.2	Test de comparaison - ordre de convergence	77
3.3.3	Robustesse	81
3.4	Deuxième approche : rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées	83
3.4.1	Tests de validation	84
3.4.2	Test de comparaison - ordre de convergence	84
3.4.3	Robustesse	88
3.5	Lien entre les approches : passage à la limite	89

3.1 Préliminaires

Il s'agit ici de présenter les problèmes variationnels discrets avec des conditions de Dirichlet et Neumann non homogènes. Le triangle T (respectivement \hat{T}) représente l'élément courant (respectivement l'élément de référence). On désigne par P (respectivement \hat{P}) la partie courante (respectivement la partie de référence) coupée par la discontinuité, et F_T (respectivement F_P) désigne la transformation affine allant de \hat{T} vers T (respectivement \hat{P} vers P). La figure Fig. 3.1 illustre la transformation des maillages triangulaires (coupées ou non coupées).

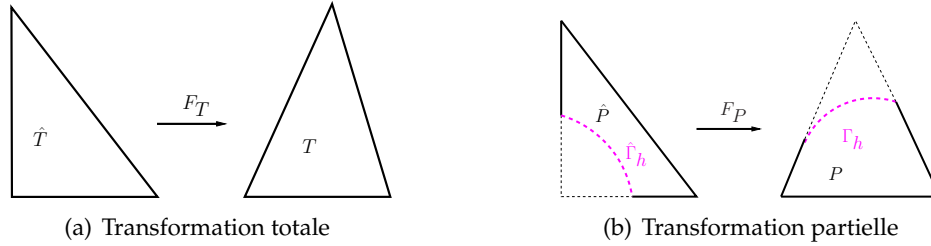


Fig. 3.1 – Transformation de maillages triangulaires

Les discontinuités considérées sont :

- Une droite d'équation $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Un cercle centré en (x_c, y_c) et de rayon r_0 , d'équation : $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r_0^2$.

Nous utiliserons dans la suite deux types de maillages dans la librairie :

- La triangulation est obtenue en divisant d'abord le domaine en carrés, puis en décomposant chaque carré en deux triangles, voir Fig. 3.2(a). On obtient donc un maillage triangulaire classique que l'on notera TC.
- La triangulation est obtenue en divisant d'abord le domaine en carrés, puis en décomposant chaque carré en quatre triangles comme on peut le voir sur la figure Fig. 3.2(b). L'avantage d'un tel découpage est que l'on a un maillage symétrique, ce qui permet de déceler d'éventuels problèmes plus facilement. On obtient un maillage de type "CrissCross" qu'on notera par CC.

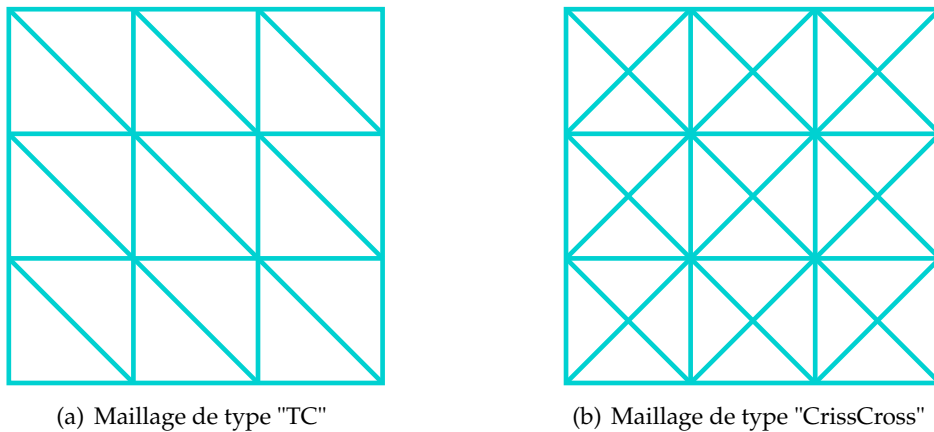


Fig. 3.2 – Maillages triangulaires

À chaque pas de raffinement, le pas de discrétisation h sera donc divisé par 2. On notera N le nombre de triangles.

Pour tout $v_h \in \tilde{V}_h$, la restriction de v_h sur Ω_h^i ($i = in, ex$) est une combinaison linéaire des fonctions de base de \tilde{V}_h des triangles recouvrant Ω^i pour $i = in, ex$.

Dans un triangle coupé, $v_h|_{T^i}$ s'écrit de façon unique à l'aide des fonctions de base $(\tilde{\varphi}_1^i, \tilde{\varphi}_2^i, \tilde{\varphi}_3^i)$ de T^i (voir la section 2.2 du chapitre 2) :

$$v_h|_{T^i} = \sum_{j=1}^3 m_j^i \tilde{\varphi}_j^i, \quad i = in, ex. \quad (3.1)$$

De même, pour tout $v_h \in V_h$, la fonction v_h peut être exprimée en utilisant la restriction des fonctions de base classiques de Crouzeix-Raviart aux triangles recouvrant Ω^i pour $i = in, ex$:

$$v_h|_{T^i} = \sum_{j=1}^3 m_j^i \varphi_j|_{T^i}, \quad i = in, ex. \quad (3.2)$$

La répartition des degrés de liberté est illustrée dans la figure Fig. 3.3.

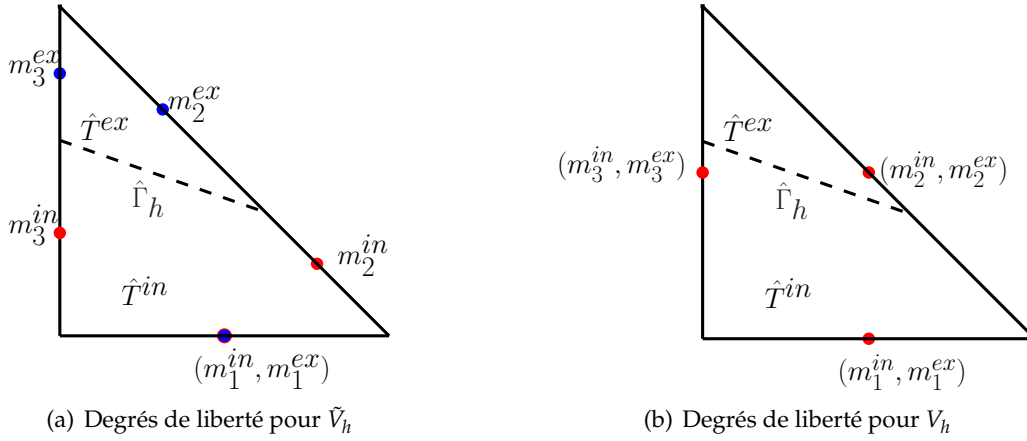


Fig. 3.3 – Degrés de liberté sur les mailles coupées pour les deux approches

On rappelle ci-dessous le problème modèle elliptique (1.4) donné dans la section 1.2 du chapitre 1, avec cette fois-ci des conditions de Dirichlet et Neumann non-homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u &= u_D \quad \text{sur } \Gamma_D, \\ \mu \nabla_n u &= u_N \quad \text{sur } \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \\ [u] &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_n u] &= g \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

On présente les formulations variationnelles que nous avons implémentées dans la librairie C++ CONCHA.

- Modification des fonctions de base sur les triangles coupés

La méthode NXFEM pour la formulation variationnelle associée au problème (3.3) se met sous la forme suivante :

$$u_h \in \tilde{V}_h, \quad a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h \quad (3.4)$$

avec les notations suivantes pour la forme bilinéaire et celle linéaire :

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n u_h\} [v_h] ds - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n v_h\} [u_h] ds \\
 &\quad + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_{\Gamma_T} \lambda_T [u_h] [v_h] ds + \lambda_D \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{\partial}} \frac{\mu}{h_e} \int_e u_h v_h ds, \\
 l(v_h) &= \int_{\Omega} f v_h dx + \int_{\Gamma} g \{v_h\}_* ds + \int_{\Gamma_N} u_N v_h ds - \int_{\Gamma_D} \mu \nabla_n v_h u_D ds + \lambda_D \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{\partial}} \frac{\mu}{h_e} \int_e u_D v_h ds,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\tag{3.6}$$

où λ et λ_D désignent des paramètres des stabilisation sur Γ et sur Γ_D indépendants de h .

Les conditions de bord de Dirichlet non homogènes sont traitées de façon faible via la méthode de Nitsche dans la formulation variationnelle et l'espace \tilde{V}_h fait intervenir uniquement des degrés de liberté sur les arêtes intérieures.

Pour cette approche, nous avons créé une classe C++, permettant de calculer les nouvelles fonctions de base sur chaque maille. Nous avons aussi modifié les classes qui permettent de calculer les intégrales sur les cellules coupées et les arêtes du bord coupées par l'interface Γ aussi que sur Γ . Les résultats sont stockés dans des matrices et vecteurs locaux que l'on assemble ensuite dans la matrice et second membre du système.

- Rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées

Dans ce cas, on rappelle qu'on conserve l'espace de Crouzeix-Raviart classique et qu'on rajoute des termes de stabilisation. Le problème approché obtenu via la méthode NXFEM s'écrit comme suit :

$$u_h \in V_h, \quad a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.7}$$

où la forme bilinéaire modifiée s'écrit de la manière suivante :

$$a_n(u_h, v_h) = a_h(u_h, v_h) + \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \mu_i \int_e \left(\{\nabla_n u_h^i\}^e [v_h^i] + \{\nabla_n v_h^i\}^e [u_h^i] \right) ds \tag{3.8}$$

$$+ \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \gamma_i \mu_i \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \int_e [\pi_0 u_h^i] [\pi_0 v_h^i] ds. \tag{3.9}$$

On note que les conditions de Dirichlet non homogènes sont traitées de manière faible dans la formulation variationnelle par la méthode de Nitsche [100], où l'espace V_h est décrit par des degrés de liberté uniquement sur les arêtes intérieures.

Nous avons créé des classes permettant d'effectuer, pour un jeu de variables donné, des calculs d'intégrales sur les cellules et sur les arêtes intérieures et de bord coupées, ainsi que sur Γ . Il s'agit ici d'intégrer tous les nouveaux termes ; pour cela il a fallu en particulier repérer, pour une arête coupée donnée, les parties des triangles voisins.

3.2 Cas tests considérés

Il s'agit dans cette section de présenter les différents cas tests que nous envisageons dans la suite pour valider les résultats théoriques du chapitre 2.

- Solution exacte linéaire (interface droite)

On considère le problème modèle elliptique (3.3) où le domaine physique est le carré $\Omega =]0; 1[\times]0; 1[$, dont l'interface de discontinuité Γ est une droite d'équation $x = 1/2$ telle que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ [u(1/2)] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mu_{in} \nabla_n u^{in}(1/2) = \mu_{ex} \nabla_n u^{ex}(1/2) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

L'interface Γ sépare le domaine Ω à deux sous-domaine suivants :

$$\Omega^{in} =]0; \frac{1}{2}[\times]0; 1[, \quad \Omega^{ex} =]\frac{1}{2}; 1[\times]0; 1[.$$

On choisit $\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$ et on impose des conditions de Neumann non-homogènes en $y = 0$ et $y = 1$ sur Γ_N et des conditions de Dirichlet non-homogènes en $x = 0$ et $x = 1$ sur Γ_D (cf. Fig. 3.4) pour que la solution du problème soit :

$$u(x, y) = \begin{cases} -5 + 4x + 2y & \text{dans } \Omega^{in}, \\ -5 + 4x + 2y & \text{dans } \Omega^{ex} \end{cases}$$

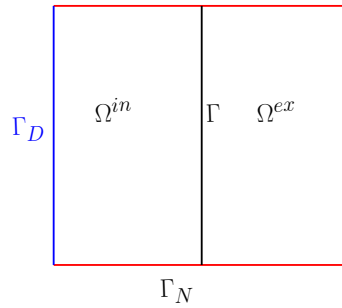


Fig. 3.4 – Domaine de simulation Ω

- Solution exacte quadratique (interface droite)

Dans cet exemple, nous nous sommes inspirés du cas test proposé dans [75]. On considère le problème modèle elliptique (3.3) où le domaine de simulation est le carré unité $\Omega =]0; 1[\times]0; 1[$. L'interface de discontinuité Γ est une droite d'équation $x = 1/2$, voir Fig. 3.4. Nous cherchons une solution indépendante de y , d'où les équations ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} -\sum_{i=in,ex} \frac{d}{dx} \left(\mu_i \frac{du}{dx} \right) = 1 & \text{dans } \Omega, \\ [u(1/2)] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \mu_{in} \frac{du^{in}}{dx}(1/2) = \mu_{ex} \frac{du^{ex}}{dx}(1/2) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ce problème admet la solution exacte suivante :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{3\mu_{in} + \mu_{ex}}{4\mu_{in}^2 + 4\mu_{in}\mu_{ex}}x - \frac{x^2}{2\mu_{in}} & \text{si } x < 1/2, \\ \frac{\mu_{ex} - \mu_{in} + (3\mu_{in} + \mu_{ex})x}{4\mu_{ex}^2 + 4\mu_{in}\mu_{ex}} - \frac{x^2}{2\mu_{ex}} & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

La solution $u(x)$ satisfait alors des conditions de Neumann nulles en $y = 0$ et $y = 1$. Nous choisissons dans ce cas test $\mu_{in} = 1/2$, $\mu_{ex} = 3$.

- Solution exacte quadratique (interface courbe)

Dans la suite, pour faciliter les comparaisons, nous considérons le cas-test cité dans [75] et [88]. Ce cas-test a déjà été implémenté la librairie C++ CONCHA lors d'une approximation par éléments finis conformes.

On considère le problème elliptique (3.3) où le domaine de simulation est le carré unité $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$. On définit l'interface courbe Γ par le cercle centré à l'origine de rayon $r_0 = 3/4$ et on considère les coefficients de diffusion $\mu_{in} = 1$ et $\mu_{ex} = 10^3$. Notons que les coefficients sont fortement discontinus. L'interface Γ sépare le domaine Ω à deux sous-domaine suivants :

$$\Omega^{in} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r_0^2\}, \quad \Omega^{ex} = \{(x, y) : x^2 + y^2 > r_0^2\}.$$

Les conditions de bord de Dirichlet sont prises en $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$ et le saut du flux $[\mu \nabla_n u] = 0$ sur Γ pour que la solution exacte soit

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mu_{in}} & \text{si } r \leq r_0, \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mu_{ex}} + \frac{r_0^2}{\mu_{in}} & \text{si } r > r_0. \end{cases}$$

Le second membre vaut $f = -4$. La figure Fig. 3.5 illustre le domaine physique :

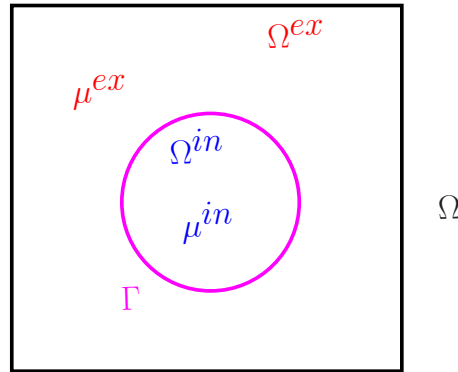


Fig. 3.5 – Problème physique dans Ω

Pour tester la prise en compte des sauts sur Γ dans les formulations variationnelles pour les deux approches développées, nous proposons les deux cas tests :

- Solution exacte avec $[u] = -0,25$ sur Γ

Soit le problème modèle dans le domaine de simulation $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u = u_D & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = -0,25 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

où l'interface Γ est une droite d'équation $x = x_0 = 0,74$.

On choisit les données de telle sorte que la fonction

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mu_{in}} & \text{si } x \leq x_0, \\ \frac{\mu_{in}}{\mu_{ex}} \frac{x^2 - x_0^2}{\mu_{ex}} + \frac{x_0^2}{\mu_{in}} + 0.25 & \text{si } x > x_0, \end{cases}$$

soit une solution exacte.

Prenons les coefficients de diffusion $\mu_{in} = 1$ et $\mu_{ex} = 10^3$. Les conditions de bord sont de type Dirichlet et le second membre est $f = -2$.

- Solution exacte avec $[\mu \nabla_n u] = -0,25$ sur Γ

Comme précédemment, on considère le carré unité $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$ comme domaine physique, l'interface droite Γ d'équation $x = x_0 = 0.74$. On considère à présent le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u = u_D & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_n u] = -0.25 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Les données sont choisies telles que

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mu_{in}} & \text{si } x \leq x_0, \\ \frac{\mu_{in}}{\mu_{ex}} \frac{x^2 - x_0^2}{\mu_{ex}} + \frac{x_0^2}{\mu_{in}} + 0.25 \frac{x - x_0}{\mu_{ex}} & \text{si } x > x_0, \end{cases}$$

soit une solution exacte.

On prend les coefficients $\mu_{in} = 1$ et $\mu_{ex} = 10^3$. Les conditions de bord sont de type Dirichlet et le terme source est $f = -2$.

3.3 Première approche : modification des fonctions de base sur les triangles coupés

Ce paragraphe s'organise en trois parties : dans la première, on vérifie et on valide la méthode pour des solutions exactes (linéaire et quadratique) pour une interface droite. La deuxième partie s'occupe de l'ordre de convergence et de la comparaison de la solution analytique avec celle discrète. La dernière partie est consacrée à la robustesse de la méthode par rapport à la fois à la position de l'interface et aux coefficients de diffusion.

Conformément à l'étude de la stabilité de notre approche, on choisit les paramètres de stabilisation suffisamment grands, $\lambda_D = 100$ et $\lambda = 100$. Nous rappelons ici que la norme énergie est définie par :

$$|||u - u_h|||^2 := \|u - u_h\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^T} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_n(u - u_h)\}\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^T} \lambda_T \| [u - u_h] \|_{0,\Gamma_T}^2.$$

3.3.1 Tests de validation

Nous avons validé la méthode d'abord pour une solution exacte linéaire, puis quadratique dans le cas d'une interface droite. Ensuite, nous nous sommes intéressés à comparer les résultats de notre approche à ceux de la littérature [75].

- Solution exacte linéaire (interface droite)

On considère la solution linéaire de la sous-section 3.2 avec une interface droite. Pour différentes valeurs des coefficients μ_{in} et μ_{ex} , on retrouve que les erreurs en norme énergie et norme L^2 sont nulles (zéro machine). On présente les deux erreurs dans le tableau Tab. 3.1 pour des coefficients $\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$.

N	$ u - u_h $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$
64	$2,85 \cdot 10^{-14}$	$7,81 \cdot 10^{-15}$
256	$3,64 \cdot 10^{-14}$	$6,08 \cdot 10^{-14}$
1 024	$6,53 \cdot 10^{-14}$	$1,37 \cdot 10^{-14}$
4 096	$1,93 \cdot 10^{-13}$	$4,56 \cdot 10^{-14}$
16 384	$3,24 \cdot 10^{-13}$	$6,08 \cdot 10^{-14}$

Tab. 3.1 – Erreurs : solution exacte linéaire

- Solution exacte quadratique (interface droite)

On considère ici la solution quadratique de la sous-section 3.2 avec une interface droite. On présente les deux erreurs dans le tableau Tab. 3.2 pour des coefficients $\mu_{in} = 0,5$ et $\mu_{ex} = 3$. On retrouve l'ordre de convergence optimal pour notre approche.

N	$ u - u_h $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3,52 \cdot 10^{-1}$	—	$2,63 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,60 \cdot 10^{-1}$	1,13	$5,34 \cdot 10^{-3}$	2,30
1 024	$7,98 \cdot 10^{-2}$	1,00	$1,29 \cdot 10^{-3}$	2,05
4 096	$4,02 \cdot 10^{-2}$	0,99	$3,18 \cdot 10^{-4}$	2,02
16 384	$1,99 \cdot 10^{-2}$	1,01	$7,67 \cdot 10^{-5}$	2,05

Tab. 3.2 – Erreurs : solution exacte quadratique

3.3.2 Test de comparaison - ordre de convergence

Afin de valider la méthode pour une interface courbe, nous étudions l'ordre de convergence sur le cas-test suivant : la solution exacte quadratique dans le domaine de simulation $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 3.2 et aux articles [75, 88].

- Solution exacte quadratique avec interface courbe

On montre dans le tableau Tab. 3.3 les erreurs en norme énergie et norme L^2 obtenues pour $u - u_h$ en fonction du nombre de triangles N pour un raffinement uniforme. On présente les erreurs et l'ordre de convergence r , i.e $\mathcal{O}(h^r) = \mathcal{O}(N^{-r/2})$ où $r = \log_2 \rho$, ρ est le rapport entre l'erreur sur la maille N et l'erreur sur $4N$ éléments.

N	$\ u - u_h\ $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3.43 \cdot 10^{-1}$	—	$3.13 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1.53 \cdot 10^{-1}$	1,16	$5.40 \cdot 10^{-3}$	2,53
1 024	$7.61 \cdot 10^{-2}$	1,01	$1.28 \cdot 10^{-3}$	2,08
4 096	$3.79 \cdot 10^{-2}$	1,01	$3.20 \cdot 10^{-4}$	2,00
16 384	$1.87 \cdot 10^{-2}$	1,02	$7.63 \cdot 10^{-5}$	2,06
65 536	$9.31 \cdot 10^{-3}$	1,01	$1.90 \cdot 10^{-5}$	2,01

Tab. 3.3 – Erreurs : solution exacte quadratique avec interface courbe

On retrouve bien numériquement l'ordre de convergence $\mathcal{O}(h)$ pour la norme énergie et $\mathcal{O}(h^2)$ pour la norme L^2 , c'est-à-dire

$$\|u - u_h\| = \mathcal{O}(h), \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} = \mathcal{O}(h^2).$$

On trace maintenant, en échelle logarithmique, les droites de meilleure approximation des erreurs obtenues. Nous retrouvons dans la figure Fig. 3.6 l'ordre de convergence théorique.

À titre indicatif, nous présentons également la répartition de l'erreur en norme énergie et de l'erreur en norme L^2 dans la figure Fig. 3.7 pour $N = 16\,384$. La solution considérée ne présente pas de singularité, et la discontinuité est correctement approchée. Les erreurs sont plus grandes dans les triangles coupés, là où la solution varie le plus.

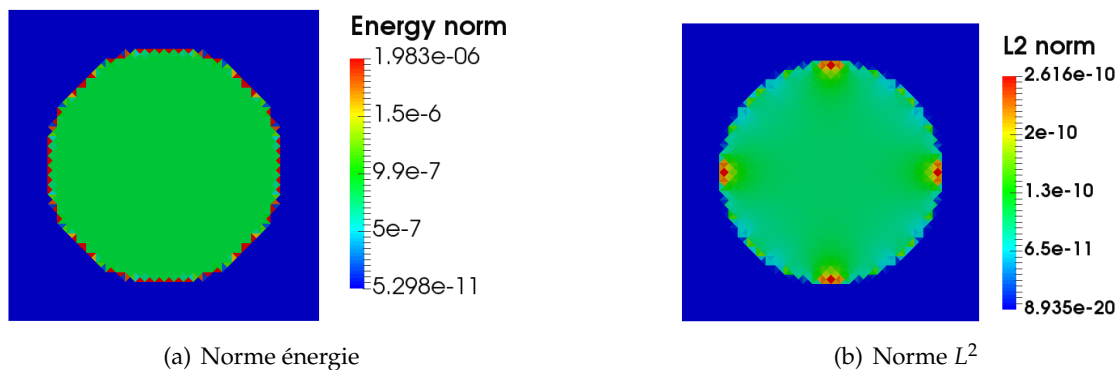


Fig. 3.7 – Répartition de la norme énergie et la norme L^2 de l'erreur pour $N = 16\,384$

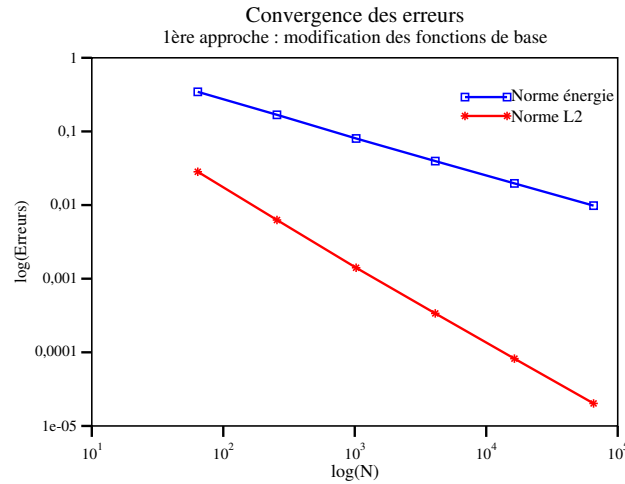


Fig. 3.6 – Ordre de convergence en norme énergie et en norme L^2

Pour cet exemple, Hansbo et al. [75] et Becker et al. [12] montrent également une figure donnant l'élévation de la solution approchée avec leurs méthodes basées sur les éléments finis conformes. La figure Fig. 3.8(a) illustre la même élévation avec notre méthode des éléments finis non-conformes pour un nombre de maillage qui vaut $N = 65\,536$.

On présente également un exemple de maillage pour $N = 10\,24$, voir Fig. 3.8.

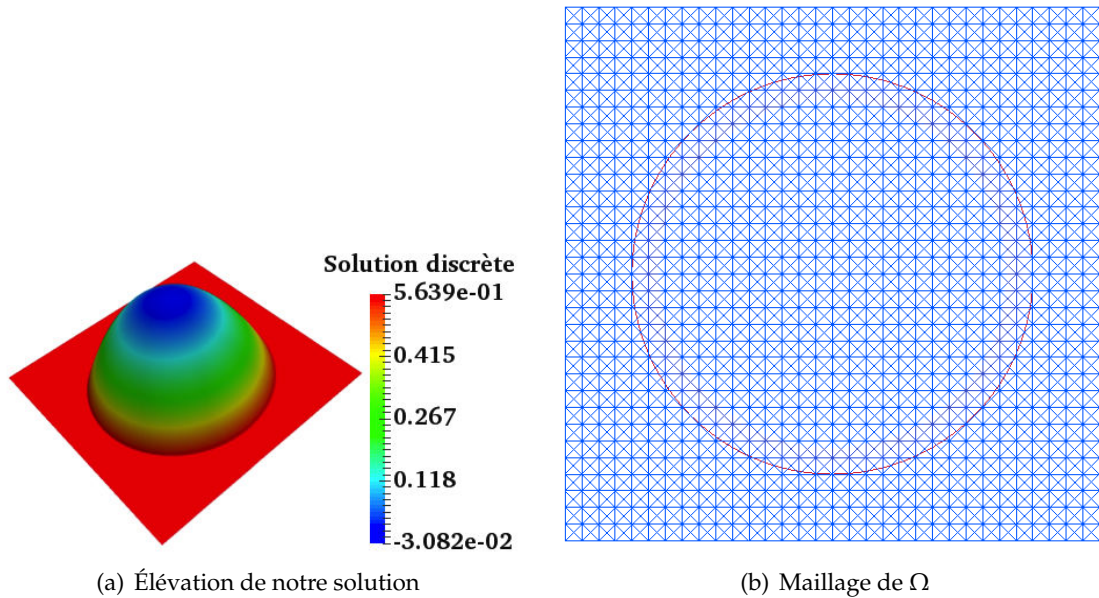


Fig. 3.8 – Simulation sur $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$ pour un maillage CC

- Comparaison de notre approche avec celle des éléments finis conformes

Nous présentons également les erreurs et les ordres de convergence de la méthode NXFEM développée dans [12] avec des éléments finis conformes, voir Tab. 3.4. En com-

parant les tableaux Tab. 3.3 de notre approche avec le tableau Tab. 3.4, on obtient les mêmes ordres de convergence et les erreurs en norme énergie et en norme L^2 sont de même ordre.

N	$\ u - u_h\ $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3,45 \cdot 10^{-1}$	—	$1,500 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,035	$6,27 \cdot 10^{-3}$	2,176
1 024	$8,03 \cdot 10^{-2}$	1,063	$1,41 \cdot 10^{-3}$	2,153
4 096	$3,95 \cdot 10^{-2}$	1,021	$3,38 \cdot 10^{-4}$	2,060
16 384	$1,97 \cdot 10^{-2}$	1,007	$8,21 \cdot 10^{-5}$	2,039
65 536	$9,82 \cdot 10^{-2}$	1	$2,02 \cdot 10^{-5}$	2,021

Tab. 3.4 – Erreurs : solution exacte quadratique avec interface courbe

- Comparaison avec la solution exacte

Nous représentons ici les solutions exacte et approchée. D'un point de vue qualitatif, nous pouvons voir que la solution calculée est très proche de celle exacte. Ce résultat est confirmé en comparant les coupes diagonales des deux solutions, voir Fig. 3.10.

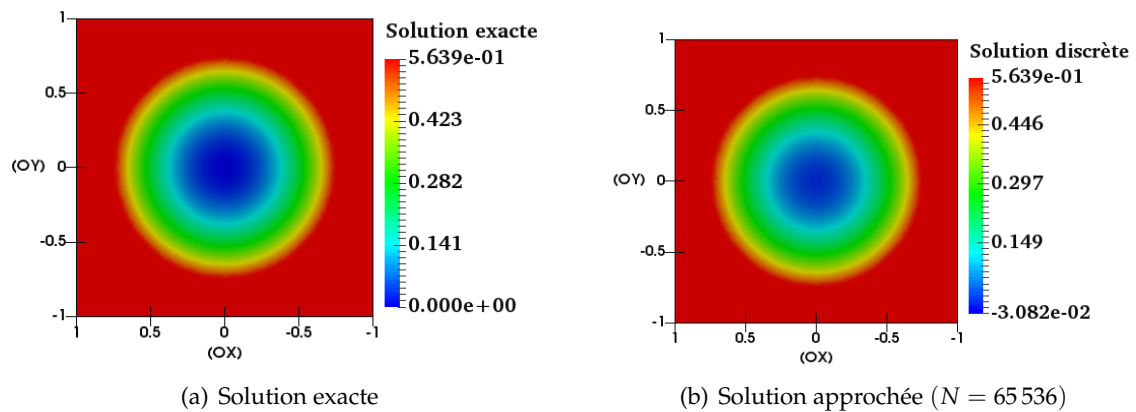


Fig. 3.9 – Comparaison entre la solution exacte et celle approchée

- Solution exacte avec $[u] = -0,25$

Comme précédemment, le tableau Tab. 3.5 récapitule les erreurs en norme énergie et en norme L^2 en fonction du nombre de mailles.

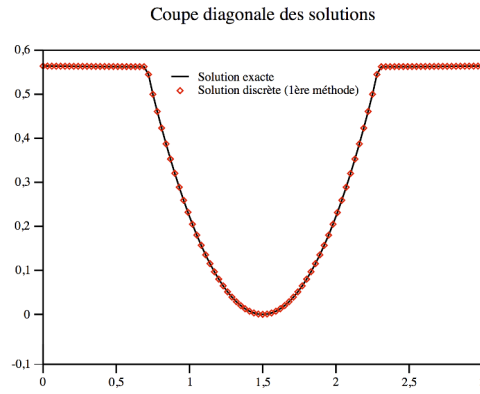


Fig. 3.10 – Comparaison entre la coupe diagonale de la solution exacte et celle de la solution discrète

N	$\ u - u_h\ $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3,45 \cdot 10^{-1}$	—	$2,83 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,03	$6,27 \cdot 10^{-3}$	2,17
1 024	$8,03 \cdot 10^{-2}$	1,06	$1,41 \cdot 10^{-3}$	2,15
4 096	$3,95 \cdot 10^{-2}$	1,02	$3,38 \cdot 10^{-4}$	2,06
16 384	$1,97 \cdot 10^{-2}$	1,01	$8,21 \cdot 10^{-5}$	2,04
65 536	$9,82 \cdot 10^{-3}$	1,00	$2,02 \cdot 10^{-5}$	2,02

Tab. 3.5 – Erreurs : solution avec saut $[u] = -0,25$

Comme précédemment, on représente le logarithme des erreurs en fonction du logarithme du nombre de triangles. Le tableau Tab. 3.5 et les courbes de convergence confirment le bon traitement de la condition $[u] \neq 0$.

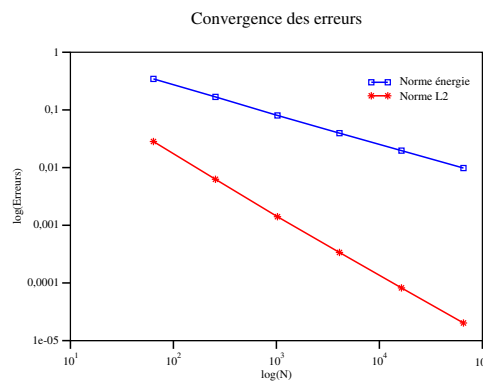
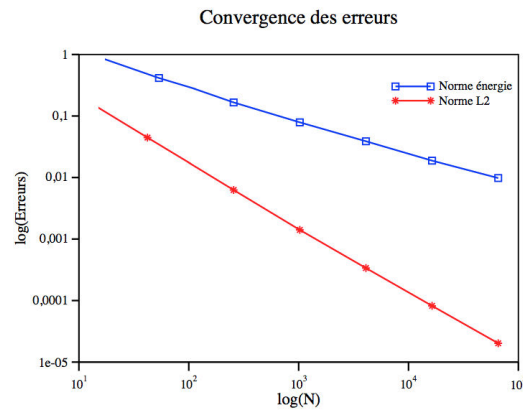


Fig. 3.11 – Ordre de convergence en norme énergie et en norme L^2

- Solution exacte avec $[\mu \nabla_n u] = -0,25$

De même, on donne les erreurs et les ordres de convergence dans le tableau :

N	$\ u - u_h\ $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3,43 \cdot 10^{-1}$	—	$2,78 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,03	$6,23 \cdot 10^{-3}$	2,16
1 024	$8,06 \cdot 10^{-2}$	1,06	$1,40 \cdot 10^{-3}$	2,15
4 096	$3,97 \cdot 10^{-2}$	1,02	$3,37 \cdot 10^{-4}$	2,06
16 384	$1,98 \cdot 10^{-2}$	1,01	$8,20 \cdot 10^{-5}$	2,04
65 536	$9,88 \cdot 10^{-3}$	1,00	$2,02 \cdot 10^{-5}$	2,02

Tab. 3.6 – Erreurs : solution avec saut du flux $[\mu \nabla u] = -0,25$ Fig. 3.12 – Ordre de convergence en norme énergie et en norme L^2

La condition $[\mu \nabla_n u] \neq 0$ est correctement prise en compte dans la formulation variationnelle, voir la figure Fig. 3.12.

On conclut que l'approche "modification des fonctions de base sur les triangles coupés" basée sur NXFEM conduit à une bonne approximation de solution. Elle permet d'obtenir l'ordre $O(h)$ en norme énergie et l'ordre $O(h^2)$ en norme L^2 pour le problème variationnel (2.36).

3.3.3 Robustesse

Pour illustrer la robustesse de l'approche développée avec les éléments finis non-conformes, nous avons deux points à tester : la robustesse par rapport aux coefficients (μ_{in}, μ_{ex}) et celle en fonction de la géométrie de l'interface. De ce fait, nous avons choisi une forte variation des coefficients pour vérifier le premier point. En ce qui concerne le deuxième point, nous avons translaté la discontinuité sur un maillage fixe de type "TC", afin de tester l'influence du rapport des longueurs des arêtes coupées α et β sur la convergence de notre méthode. Puis, nous avons comparé les normes sur les cellules coupées par l'interface.

Pour valider nos résultats par comparaison avec ceux de la littérature, nous nous sommes inspirés du cas test proposé dans [75, 88]. Considérons le problème elliptique (1.4) avec $g = 0$. On se place maintenant sur le carré unité $\Omega =]0; 1[\times]0; 1[$ et on note $\Gamma_\varepsilon := x_\varepsilon \times [0; 1]$, $\varepsilon > 0$ l'interface droite qu'on fera bouger en fonction de ε .

Les données choisies sont de telle sorte que la fonction quadratique u définie par

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mu_{in}} & \text{si } x \leq x_\varepsilon, \\ \frac{x^2 - x_\varepsilon^2}{\mu_{ex}} + \frac{x_\varepsilon^2}{\mu_{in}} & \text{si } x > x_\varepsilon, \end{cases}$$

soit solution exacte du problème (3.3), avec des conditions de raccord nulles $[u] = 0$, $[\mu \nabla_n u] = 0$ sur Γ et des conditions du bord de Dirichlet.

On fixe un maillage de type "TC" avec $N = 512$, ce qui donne $h = |e| = \frac{1}{16}$ la longueur d'une arête. Pour éviter le problème des conditions du bord de Dirichlet, on considère $x_\varepsilon = \frac{1}{16} + \varepsilon$ avec $\varepsilon = \frac{\alpha_\varepsilon}{16}$. Ça implique $\alpha_\varepsilon = \beta_\varepsilon = 16\varepsilon$ sur le triangle inférieur et $\alpha_\varepsilon = \beta_\varepsilon = 1 - 16\varepsilon$ sur le triangle supérieur, voir Fig. 3.13 qui donne .

On prend d'abord $\mu_{in} = 1$, $\mu_{ex} = 10$ et on fait bouger la position de l'interface sur la maille fixe avec $N = 512$ tel que α_ε varie de $5 \cdot 10^{-1}$ à 10^{-5} . La figure Fig. 3.13 illustre la position de l'interface Γ_ε et le rapport des arêtes coupées.

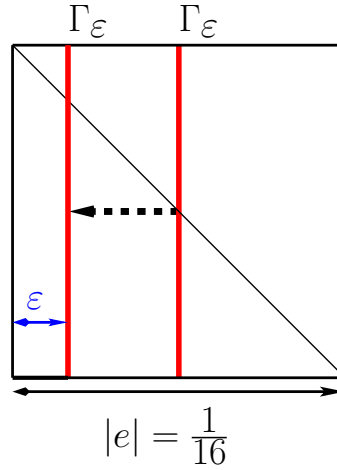


Fig. 3.13 – Position de l'interface : zoom du maillage de type TC sur une maille coupée

Le tableau Tab. 3.7 montre les erreurs dans les normes $|\cdot|_*$, $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\lambda$ pour $u - u_h$, calculées uniquement sur les cellules coupées pour différentes valeurs de ε . On note que les normes ci-dessous sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} |u - u_h|_*^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\mu^{1/2} \nabla(u - u_h)\|_{0,T}^2, \\ \|u - u_h\|_*^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|u - u_h\|_{0,T}^2, \\ \|u - u_h\|_\lambda^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [u - u_h] \|_{0,T}^2. \end{aligned}$$

On montre aussi dans le tableau Tab. 3.7 les erreurs globales sur Ω .

α_ε	$ u - u_h _*$	$\ u - u_h\ _*$	$\ u - u_h\ _\lambda$	$ u - u_h $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}$
$5 \cdot 10^{-1}$	$9,498 \cdot 10^{-3}$	$2,920 \cdot 10^{-4}$	$2,521 \cdot 10^{-3}$	$1,134 \cdot 10^{-1}$	$2,357 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$1,247 \cdot 10^{-2}$	$4,244 \cdot 10^{-4}$	$3,508 \cdot 10^{-3}$	$1,137 \cdot 10^{-1}$	$2,372 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	$1,376 \cdot 10^{-2}$	$4,722 \cdot 10^{-4}$	$4,035 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-1}$	$2,380 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	$1,390 \cdot 10^{-2}$	$4,773 \cdot 10^{-4}$	$4,093 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-1}$	$2,381 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$1,392 \cdot 10^{-2}$	$4,778 \cdot 10^{-4}$	$4,099 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-1}$	$2,381 \cdot 10^{-2}$

Tab. 3.7 – Variation de la position de l'interface : erreurs ($\mu_{in} = 1$, $\mu_{ex} = 10$)

On s'intéresse maintenant au cas où les coefficients sont fortement discontinus $\mu_{in} = 0,1$; $\mu_{ex} = 10^5$ et on fait bouger la position de l'interface sur la maille fixe avec $N = 512$ tel que α_ε varie entre $0,5$ et 10^{-5} . On présente dans le tableau Tab. 3.8 les erreurs calculées.

α_ε	$ u - u_h _*$	$\ u - u_h\ _*$	$\ u - u_h\ _\lambda$	$ u - u_h $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}$
$5 \cdot 10^{-1}$	$1,561 \cdot 10^{-2}$	$6,553 \cdot 10^{-4}$	$6,987 \cdot 10^{-3}$	$3,387 \cdot 10^{-1}$	$2,399 \cdot 10^{-2}$
10^{-1}	$3,559 \cdot 10^{-2}$	$2,338 \cdot 10^{-3}$	$1,229 \cdot 10^{-2}$	$3,403 \cdot 10^{-1}$	$2,393 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$4,080 \cdot 10^{-2}$	$2,890 \cdot 10^{-3}$	$1,388 \cdot 10^{-2}$	$3,409 \cdot 10^{-1}$	$2,396 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	$4,133 \cdot 10^{-2}$	$2,949 \cdot 10^{-3}$	$1,405 \cdot 10^{-2}$	$3,410 \cdot 10^{-1}$	$2,397 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$4,139 \cdot 10^{-2}$	$2,955 \cdot 10^{-3}$	$1,407 \cdot 10^{-2}$	$3,410 \cdot 10^{-1}$	$2,397 \cdot 10^{-2}$

Tab. 3.8 – Variation de la position de l'interface : erreurs ($\mu_{in} = 0.1$, $\mu_{ex} = 10^5$)

Comme la solution exacte choisie dépend de la position de l'interface, la méthode montre une légère augmentation de l'erreur lorsqu'on déplace l'interface de la droite vers la gauche (i.e. ε diminue), voir Fig. 3.13 et Tab. 3.7, c'est-à-dire lorsque α_ε devient de plus en plus petit.

On conclut donc que la méthode "modification des fonctions de base" pour les éléments finis non-conformes est numériquement robuste par rapport à la position de l'interface, indépendamment du rapport entre les paramètres de diffusion, voir Tab. 3.7 et Tab. 3.8.

Ces résultats numériques nous permettent de croire que l'estimation d'erreur théorique pourrait être améliorée par rapport à la position de l'interface Γ .

3.4 Deuxième approche : rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées

On s'intéresse d'abord à valider la deuxième approche pour des solutions exactes sur un domaine physique contenant une interface droite. Ensuite, on utilise un cas test de [75] pour comparer nos résultats à ceux des éléments finis conformes. Enfin, on étudie la robustesse de notre approche par rapport à la fois aux coefficients de diffusion et à la position d'interface.

On choisit les paramètres de stabilisation suffisamment grands, $\lambda = \lambda_D = 100$ et $\gamma_{in} = \gamma_{ex} = 300$. On rappelle ici que la norme énergie est définie par :

$$[[u - u_h]]^2 = |||u - u_h|||^2 + J_{in}(u - u_h, u - u_h) + J_{ex}(u - u_h, u - u_h).$$

3.4.1 Tests de validation

- Solution exacte linéaire

Il s'agit ici de valider la deuxième approche pour la solution exacte linéaire du paragraphe 3.2. On retrouve que les erreurs en norme énergie et norme L^2 sont nulles pour différentes valeurs des coefficients μ_{in} et μ_{ex} . On présente les deux erreurs dans le tableau Tab. 3.9 pour des coefficients $\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$.

N	$[[u - u_h]]$	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$
64	$9,11 \cdot 10^{-13}$	$3,27 \cdot 10^{-13}$
256	$3,62 \cdot 10^{-13}$	$1,07 \cdot 10^{-13}$
1 024	$4,28 \cdot 10^{-13}$	$1,17 \cdot 10^{-13}$
4 096	$1,89 \cdot 10^{-12}$	$7,62 \cdot 10^{-13}$
16 384	$1,53 \cdot 10^{-12}$	$6,10 \cdot 10^{-13}$

Tab. 3.9 – Erreurs : solution exacte linéaire

- Solution exacte quadratique avec interface droite

On reprend le même cas test que dans la sous-section 3.2 avec une interface droite. On présente les deux erreurs dans le tableau Tab. 3.10 pour des coefficients $\mu_{in} = 0,5$ et $\mu_{ex} = 3$. On retrouve l'ordre de convergence optimal pour cette approche.

N	$[[u - u_h]]$	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	1,06	—	$3,29 \cdot 10^{-1}$	—
256	$5,29 \cdot 10^{-1}$	1,01	$8,75 \cdot 10^{-2}$	1,91
1 024	$2,64 \cdot 10^{-1}$	1,00	$2,27 \cdot 10^{-2}$	1,95
4 096	$1,32 \cdot 10^{-1}$	1,00	$5,78 \cdot 10^{-3}$	1,97
16 384	$6,58 \cdot 10^{-2}$	1,00	$1,46 \cdot 10^{-3}$	1,99

Tab. 3.10 – Erreurs : solution exacte quadratique (interface droite)

3.4.2 Test de comparaison - ordre de convergence

Pour tester cette méthode d'approximation sur une interface courbe, on procède maintenant au cas test d'une solution exacte donnée dans la section 3.2. Dans ce cas, on utilise la formulation variationnelle (2.77) du chapitre 2 où $a_n(\cdot, \cdot)$ et $l(\cdot)$ sont définies respectivement dans (3.8) et (3.6). C'est-à-dire on résout le problème variationnel en utilisant les éléments finis de Crouzeix-Raviart et on rajoute des termes de stabilisation à la forme bilinéaire définie dans la première méthode.

- Solution exacte quadratique avec interface courbe

Comme précédemment, le tableau Tab. 3.11 récapitule les résultats obtenus par la méthode de rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées. Ici, les paramètres de stabilisation associés aux termes de stabilisation valent : $\gamma_{in} = \gamma_{ex} = 100$.

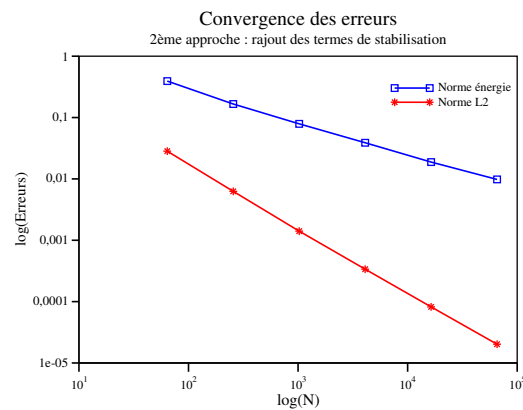
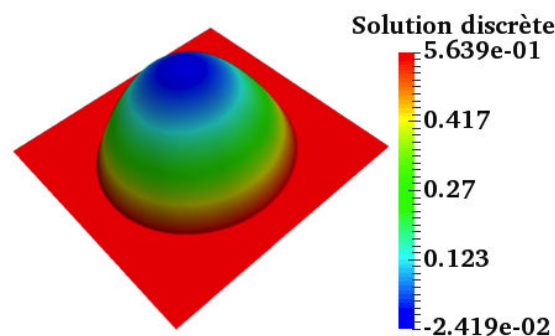
N	$[[u - u_h]]$	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3,95 \cdot 10^{-1}$	—	$3,21 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,67 \cdot 10^{-1}$	1,24	$6,11 \cdot 10^{-3}$	2,39
1 024	$7,91 \cdot 10^{-2}$	1,08	$1,36 \cdot 10^{-3}$	2,16
4 096	$4,88 \cdot 10^{-2}$	1,03	$3,24 \cdot 10^{-4}$	2,07
16 384	$1,98 \cdot 10^{-2}$	1,05	$7,70 \cdot 10^{-5}$	2,07
65 536	$9,87 \cdot 10^{-3}$	1,04	$2,71 \cdot 10^{-5}$	2,05

Tab. 3.11 – Erreurs : solution exacte quadratique (interface courbe)

Les résultats numériques obtenus sont en accord avec la théorie, c'est-à-dire :

$$[[u - u_h]] = \mathcal{O}(h), \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} = \mathcal{O}(h^2).$$

On montre ensuite les courbes représentant le logarithme des deux erreurs, en fonction du logarithme du nombre d'éléments. On retrouve numériquement les ordres de convergence optimaux prouvés antérieurement (voir Fig. 3.14). La figure Fig. 3.15 représente l'élévation de la solution pour un nombre de mailles $N = 65\,536$.

Fig. 3.14 – Convergence de l'erreur en norme énergie et norme L^2 Fig. 3.15 – Élévation de la solution sur $\Omega =]-1; 1[x] - 1; 1[$

Pour cette méthode, nous donnons également la répartition de l'erreur en norme énergie et l'erreur en norme L^2 pour $N = 16\,384$ dans la figure Fig. 3.16. Nous avons retrouvé

que cette répartition d'erreur est similaire à celle obtenue dans le paragraphe précédent pour la première approche.

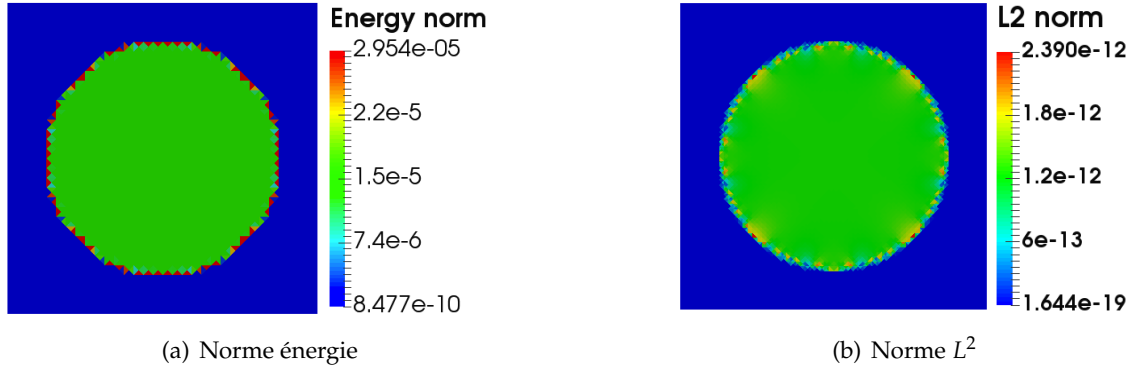


Fig. 3.16 – Répartition de la norme énergie et la norme L^2 , $N = 16\,384$

Nous avons obtenu des résultats semblables pour différentes valeurs de μ_{in} et μ_{ex} , ce qui confirme, comme nous l'avions prévu théoriquement, que la valeur des paramètres μ_{in} et μ_{ex} n'a pas d'influence sur la vitesse de convergence. La figure Fig. 3.17 représente les courbes d'erreur obtenues pour $\mu_{in} = 10$, $\mu_{in} = 10^6$ et par une approximation P^1 pour la vitesse dans les deux approches.

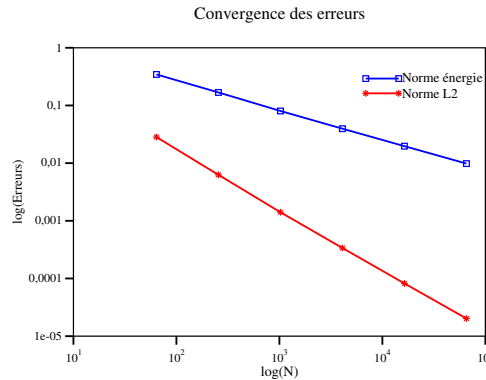


Fig. 3.17 – Convergence de l'erreur en norme énergie et en norme L^2 : coefficients fortement discontinus

Comparaison avec la méthode des éléments finis conformes

Comme précédemment, on montre dans le tableau Tab. 3.12 les erreurs et les ordres de convergence de la méthode NXFEM développée dans [12] avec des éléments finis conformes. En comparant le tableau Tab. 3.11 de notre approche avec le tableau Tab. 3.12, on obtient les mêmes ordres de convergence et les erreurs en norme énergie et en norme L^2 sont de même ordre.

N	$\ u - u_h\ $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{im} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
64	$3,45 \cdot 10^{-1}$	—	$1,500 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,035	$6,27 \cdot 10^{-3}$	2,176
1 024	$8,03 \cdot 10^{-2}$	1,063	$1,41 \cdot 10^{-3}$	2,153
4 096	$3,95 \cdot 10^{-2}$	1,021	$3,38 \cdot 10^{-4}$	2,060
16 384	$1,97 \cdot 10^{-2}$	1,007	$8,21 \cdot 10^{-5}$	2,039
65 536	$9,82 \cdot 10^{-2}$	1	$2,02 \cdot 10^{-5}$	2,021

Tab. 3.12 – Erreurs : solution exacte quadratique avec interface courbe

Comparaison avec la solution exacte

Nous présentons ici les solutions exactes et approchées pour nos problèmes variationnels associés à la deuxième approche. De même, on remarque que la solution calculée est très proche de celle exacte et leurs profils le long d'une diagonale coïncident également ; la figure Fig. 3.19 montre que les deux solutions sont superposées.

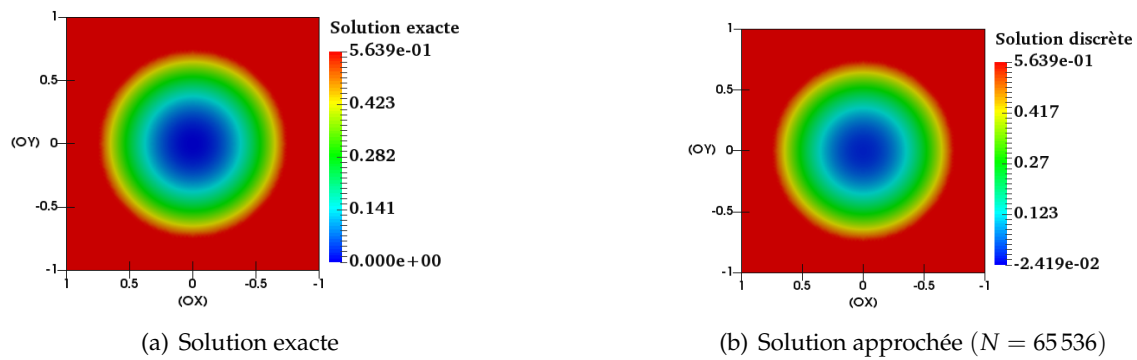


Fig. 3.18 – Comparaison entre la solution exacte et celle approchée

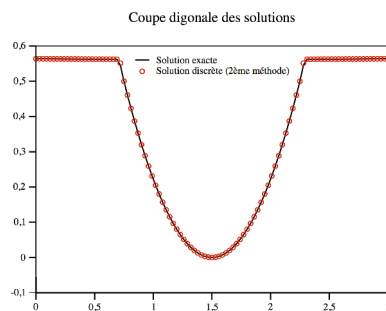


Fig. 3.19 – Comparaison entre la coupe diagonale de la solution exacte et de la solution discrète

- Solution exacte avec $[u] = -0,25$

En utilisant la méthode de rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées, les courbes de convergence de la figure Fig. 3.20 confirment que la condition $[u] = -0,25$ est correctement prise en compte par la méthode.

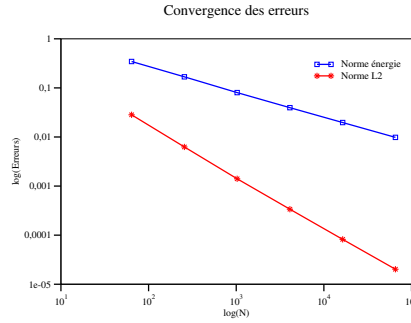


Fig. 3.20 – Ordre de convergence en norme énergie et en norme L^2 ($[u] \neq 0$ sur Γ)

- Solution exacte avec $[\mu \nabla_n u] = -0,25$

De même, on présente les courbes de convergence pour cette solution. La figure Fig. 3.21 montre que la condition $[\mu \nabla_n u] = -0,25$ est correctement traitée dans le problème variationnel.

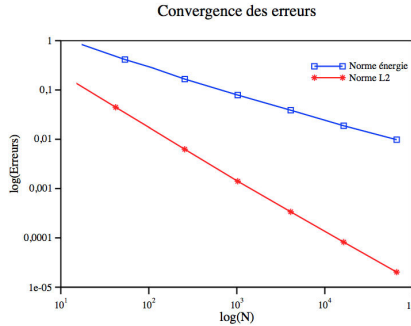


Fig. 3.21 – Ordre de convergence en norme énergie et en norme L^2

3.4.3 Robustesse

Pour tester la robustesse de cette méthode ; nous procédons de la même façon que dans le paragraphe 3.3.3, c'est-à-dire nous traitons la robustesse par rapport aux coefficients (μ_{in}, μ_{ex}) et à la géométrie de l'interface.

Ces tests nous permettent de justifier l'efficacité de nos améliorations et sont effectués pour des maillages triangulaires. Pour cela, nous considérons le même cas test du paragraphe 3.3.3, et nous avons pour un maillage fixe de type "TC" ($N = 512$). Dans les tableaux ci-dessous, on présente les erreurs dans les normes $|\cdot|_*$, $||\cdot||$ et $||\cdot||_\lambda$ pour $u - u_h$, calculées uniquement sur les cellules coupées. On rappelle que les normes ci-

dessous définies par :

$$\begin{aligned} |u - u_h|_*^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\mu^{1/2} \nabla(u - u_h)\|_{0,T}^2 + J_{in}(u - u_h, u - u_h) + J_{ex}(u - u_h, u - u_h), \\ \|u - u_h\|_*^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|u - u_h\|_{0,T}^2, \\ \|u - u_h\|_\lambda^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [u - u_h] \|_{0,T}^2. \end{aligned}$$

On traite d'abord le cas où les coefficients sont proches $\mu_{in} = 1$ et $\mu_{ex} = 10$ et on fait bouger la position de l'interface sur la maille fixe avec $N = 512$ tel que α_ε varie entre 0,5 et 10^{-5} . Le tableau Tab. 3.13 présente les erreurs globales sur Ω .

α_ε	$ u - u_h _*$	$\ u - u_h\ _*$	$\ u - u_h\ _\lambda$	$ u - u_h $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$
0,5	$1,756 \cdot 10^{-2}$	$4,866 \cdot 10^{-4}$	$2,923 \cdot 10^{-3}$	$1,241 \cdot 10^{-1}$	$2,457 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$1,648 \cdot 10^{-2}$	$4,985 \cdot 10^{-4}$	$3,754 \cdot 10^{-3}$	$1,243 \cdot 10^{-1}$	$2,472 \cdot 10^{-3}$
10^{-2}	$1,676 \cdot 10^{-2}$	$5,375 \cdot 10^{-4}$	$4,017 \cdot 10^{-3}$	$1,246 \cdot 10^{-1}$	$2,460 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	$1,142 \cdot 10^{-1}$	$5,664 \cdot 10^{-4}$	$4,026 \cdot 10^{-3}$	$1,246 \cdot 10^{-1}$	$2,465 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$1,144 \cdot 10^{-1}$	$5,668 \cdot 10^{-4}$	$4,235 \cdot 10^{-3}$	$1,246 \cdot 10^{-1}$	$2,465 \cdot 10^{-2}$

Tab. 3.13 – Variation de la position de l'interface : erreurs ($\mu_{in} = 1$; $\mu_{ex} = 10$)

On traite maintenant le cas où les coefficients sont fortement discontinus et on fait bouger la position de l'interface sur la maille fixe avec $N = 512$ tel que α_ε varie entre 0,5 et 10^{-5} . On présente dans le tableau Tab. 3.14 les erreurs calculées.

α_ε	$ u - u_h _*$	$\ u - u_h\ _*$	$\ u - u_h\ _\lambda$	$ u - u_h $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$
0,5	$1,735 \cdot 10^{-2}$	$6,871 \cdot 10^{-4}$	$7,564 \cdot 10^{-3}$	$3,492 \cdot 10^{-1}$	$2,411 \cdot 10^{-2}$
10^{-1}	$4,274 \cdot 10^{-2}$	$3,091 \cdot 10^{-3}$	$1,349 \cdot 10^{-2}$	$3,516 \cdot 10^{-1}$	$2,412 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$4,168 \cdot 10^{-2}$	$3,397 \cdot 10^{-3}$	$1,479 \cdot 10^{-2}$	$3,524 \cdot 10^{-1}$	$2,417 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	$4,201 \cdot 10^{-2}$	$3,478 \cdot 10^{-3}$	$1,526 \cdot 10^{-2}$	$3,527 \cdot 10^{-1}$	$2,419 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$4,209 \cdot 10^{-2}$	$3,486 \cdot 10^{-3}$	$1,531 \cdot 10^{-2}$	$3,527 \cdot 10^{-1}$	$2,419 \cdot 10^{-2}$

Tab. 3.14 – Variation de la position de l'interface : erreurs ($\mu_{in} = 0,1$; $\mu_{ex} = 10^5$)

La solution analytique dépend de la position de l'interface, alors la méthode "rajout des termes de stabilisation sur les arêtes coupées" montre une légère augmentation de l'erreur lorsque l'interface se déplace de la droite vers la gauche, voir Fig. 3.13 pour tout $\alpha_\varepsilon < 10^{-5}$.

On conclut que notre méthode conduit à des erreurs lorsque l'interface s'approche de l'arête du de maillage, voir Tab. 3.13 et Tab. 3.14. Elle est numériquement robuste pour par rapport à la position de l'interface, indépendamment du rapport entre les paramètres de diffusion.

3.5 Lien entre les approches : passage à la limite

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la relation entre la formulation DG (2.80) et la première approche lorsque les paramètres de stabilisation γ_{in} , γ_{ex} et γ_{nc} tendent vers ∞ .

On considère le cas-test 3.2 de [75, 88]. On utilise le même domaine de simulation que précédemment, $\Omega =]-1; 1[\times]-1; 1[$ et un maillage fixe composé de 16 384 triangles.

Nous avons tracé la solution obtenue par la méthode de Galerkin discontinue pour différentes valeurs de $\gamma = \gamma_{in} = \gamma_{ex} = \gamma_{nc}$ et la solution de la première approche, voir la figure Fig. 3.22.

Plus γ augmente, plus la solution obtenue avec la méthode de Galerkin discontinue est proche de celle obtenue avec la première méthode, comme on peut le voir dans la figure Fig. 3.22 où nous avons montré une coupe diagonale des solutions. Cet exemple illustre bien la convergence de la méthode de Galerkin discontinue vers la méthode NX-FEM avec modification de fonctions de base sur les triangles coupés.

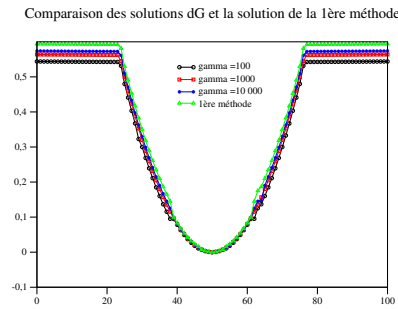


Fig. 3.22 – Convergence de la solution dG vers la solution de la première approche

Pour étudier la vitesse de convergence par rapport à γ de la méthode de Galerkin discontinue vers la première méthode, il faudrait calculer l'erreur $\|u_{dG}^\gamma - u_h\|$ pour différentes valeurs de γ .

Approximation non-conforme d'un problème modèle de Stokes

Ce chapitre a pour objectif d'étendre les deux approches traitées dans le chapitre 2, au problème de Stokes. Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution des deux formulations variationnelles associées au problème de Stokes en présence d'interface, discrétisé par les éléments finis P^1 -non-conformes pour la vitesse et P^0 pour la pression. La condition *inf-sup* uniforme de Babuška-Brezzi est établie pour les deux formulations variationnelles. Enfin, nous nous intéressons à l'estimation d'erreur *a priori* commise par ces deux approches pour la vitesse et la pression.

Sommaire

4.1	Problème de Stokes avec une interface	91
4.2	Formulation variationnelle et état de l'art	92
4.3	Première approche : fonctions de base modifiées	94
4.3.1	Problème discret - Existence et unicité	95
4.3.2	Condition <i>inf-sup</i>	97
4.3.3	Estimation d'erreur <i>a priori</i>	107
4.4	Deuxième approche : rajout de termes de stabilisation	116
4.4.1	Problème discret - Existence et unicité	116
4.4.2	Condition <i>inf-sup</i>	119
4.4.3	Estimation d'erreur <i>a priori</i>	120
4.5	Conclusion	121

4.1 Problème de Stokes avec une interface

On s'intéresse au problème de Stokes qui décrit l'écoulement stationnaire de deux fluides newtoniens, incompressibles dans deux domaines Ω^{in} et Ω^{ex} , séparés par une interface de contact lisse Γ . Les équations régissant l'écoulement dans chaque milieu sont les suivantes :

— Conservation de la quantité du mouvement :

$$-\operatorname{div} \underline{\tau} + \nabla p = \mathbf{f}; \tag{4.1}$$

— Conservation de la masse :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (4.2)$$

— Équation constitutive d'un fluide newtonien :

$$\underline{\tau} = 2\mu \underline{D}(\mathbf{u}); \quad (4.3)$$

où $\underline{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ est le tenseur des vitesses de déformation et où $\underline{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses.

On considère le problème modèle de Stokes modélisant l'écoulement de deux fluides avec des viscosités différentes : Trouver la vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n}] = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où μ est la viscosité discontinue et strictement positive, supposée ici constante par sous-domaine : $\mu = \mu_{in}$ dans Ω^{in} et $\mu = \mu_{ex}$ dans Ω^{ex} .

On notera désormais $\mathbf{u}|_{\Omega^i} = \mathbf{u}^i$ et $p|_{\Omega^i} = p^i$ pour $i = in, ex$ et $[\mathbf{u}] = (\mathbf{u}^{in} - \mathbf{u}^{ex})|_{\Gamma}$. On impose la continuité de la solution \mathbf{u} le long de l'interface, mais on s'autorise un saut des contraintes normales non-nul $\mathbf{g} \in (H^{1/2}(\Gamma))^2$ et une force $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$.

Pour simplifier la présentation, on a considéré dans ce problème des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord du domaine Ω .

4.2 Formulation variationnelle et état de l'art

Dans cette section, nous définissons le cadre fonctionnel dans lequel nous allons définir la formulation faible du problème (4.4).

Nous introduisons les espaces suivants et leurs normes associées :

$$Q = L^2_{\mu,0}(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} \mu^{-1} p \, dx = 0\}, \quad \|p\|_Q := \|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \quad (4.5)$$

et

$$\mathbf{V} = [H^1_0(\Omega)]^2 = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad \|\mathbf{v}\|_V := \|\mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.6)$$

La formulation faible de (4.4) est la suivante : trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(q, \mathbf{u}) = 0, & \forall q \in Q \end{array} \right. \quad (4.7)$$

où les formes bilinéaires correspondant respectivement à l'opérateur elliptique de la vitesse et celui du gradient de la pression sont définies comme suit :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \text{et} \quad b(p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx.$$

Pour des fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} supposées régulières, la forme linéaire $l(\cdot)$, donnée par

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, ds,$$

est bien définie.

Il est bien connu que la forme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_V$. Dans [101], les auteurs ont démontré que la forme $b(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition *inf-sup* avec une constante $C > 0$ indépendante des coefficients de viscosité μ_{in} et μ_{ex} sous l'hypothèse suivante : il existe deux constantes strictement positives c et C telles que

$$c \leq \mu_{in} \leq C, \quad 0 < \mu_{ex} \leq C. \quad (4.8)$$

Il est bien connu que le problème (4.4) est bien posé et admet une unique solution dans $\mathbf{V} \times Q$ (voir [33]).

Dans le contexte d'approximation par des éléments finis conformes, plusieurs travaux ont été effectués sur le problème de Stokes avec interface. En 2008, Becker et al. [16] ont utilisé la méthode NXFEM avec le choix d'éléments finis $(P^1)^2$ continus pour la vitesse et P^0 pour la pression. La méthode proposée consiste à rajouter des termes de stabilisation sur les arêtes (faces) intérieures de \mathcal{T}_h^i , $i = in, ex$, basés sur le saut de la pression, de la forme :

$$c_h(p_h, q_h) = \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^i} \int_e \frac{\gamma_i}{\mu_i} h_e [p_h^i] [q_h^i] \, ds. \quad (4.9)$$

Ils ont montré que le problème variationnel associé au problème continu (4.4) est bien posé et l'erreur *a priori* est d'ordre optimal pour $\gamma_{in}, \gamma_{ex} > 0$ suffisamment grands.

Il existe d'autres méthodes de stabilisation pour le problème d'interface de Stokes avec une viscosité homogène pour les deux milieux Ω^{in} et Ω^{ex} et égale à 1. On retrouve la méthode de Nitsche avec recouvrement [93] avec des termes de stabilisation définis comme suit :

$$S_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = \delta \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{int,in} \cup \mathcal{T}^T \cup \mathcal{T}^{over,ex}} h_T^2 \int_T (-\Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h)(-\alpha \Delta \mathbf{v}_h + \beta \nabla q_h) \, dx \quad (4.10)$$

où $\delta > 0$ et $\mathcal{T}^{over,ex}$ est l'ensemble de maillages triangulaires classiques du domaine Ω^{ex} , et les paramètres α, β prennent respectivement les valeurs $\{-1, 0, 1\}$ et $\{-1, 1\}$; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [13, 14] et ses références.

Une autre méthode pour résoudre le problème d'interface de Stokes où $\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$ est la méthode de domaines fictifs avec des termes de stabilisation, présentée par Larson et al. dans [92]. Cette méthode nécessite un rajout de termes de stabilisation pour prouver qu'elle est consistante et d'ordre optimal.

Burman et Hansbo [34] ont proposé aussi une méthode d'éléments finis conformes $(P^1)^2 \times P^1$ pour le problème (4.4). Ils ont rajouté des termes de stabilisation de type gradient pour la vitesse et la pression sur les arêtes (faces) coupées par l'interface Γ . Ils ont prouvé que la méthode satisfait la condition *inf-sup* et que l'erreur d'estimation est d'ordre optimal.

En 2014, Hansbo et al. [77] ont proposé une méthode NXFEM avec des éléments finis $(P^1 \oplus \mathcal{B})^2 \times P^1$ pour le problème (4.4) où \mathcal{B} est l'espace vectoriel des fonctions « bulle » (polynôme de degré 3 sur chaque élément, à support compact dans l'élément) ; avec

des termes de stabilisation du gradient de la vitesse et celui de la pression sur les arêtes coupées, définis comme suit :

$$J_p(p_h, q_h) = \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{F}_h^i} \mu_i^{-1} h^3 \int_F [\mathbf{n}_F \cdot \nabla p_h^i] [\mathbf{n}_F \cdot \nabla q_h^i] dx,$$

$$J_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{F}_h^i} \mu_i h^s \int_F [\mathbf{n}_F \cdot \nabla \mathbf{u}_{h,j}^i] [\mathbf{n}_F \cdot \nabla \mathbf{v}_{h,j}^i] dx,$$

où la valeur de s vaut 1 si l'interface Γ coupe un élément du domaine $T \in \mathcal{T}_h^\partial$ tel que $T \cap \Omega^i \neq \emptyset$. Dans le cas où l'interface coupe une élément $T \in \mathcal{T}_h^{i,cut}$, la valeur de s est égale à 3.

Avec ces termes de stabilisation rajoutés, les auteurs ont démontré que le problème discret est consistant et satisfait la condition *inf-sup*. En effet, le terme $J_u(\cdot, \cdot)$ assure la coercivité de la forme bilinéaire associée au problème variationnel et le terme $J_p(\cdot, \cdot)$ est utilisé pour assurer la condition *inf-sup*. En plus, ils ont prouvé que la méthode est d'ordre optimal.

Dans la suite, nous nous intéressons à étendre les deux approches développées dans le chapitre 2 afin de résoudre le problème (4.4) par la méthode NXFEM. L'avantage est que la première approche, des fonctions de base modifiées, ne nécessite pas de terme de stabilisation pour que le problème variationnel soit stable. La deuxième approche demande un rajout de stabilisation sur les arêtes coupées par l'interface. Ces termes de stabilisation font apparaître des moyennes pondérées et des sauts de vitesse uniquement sur les arêtes coupées, ainsi que de pression.

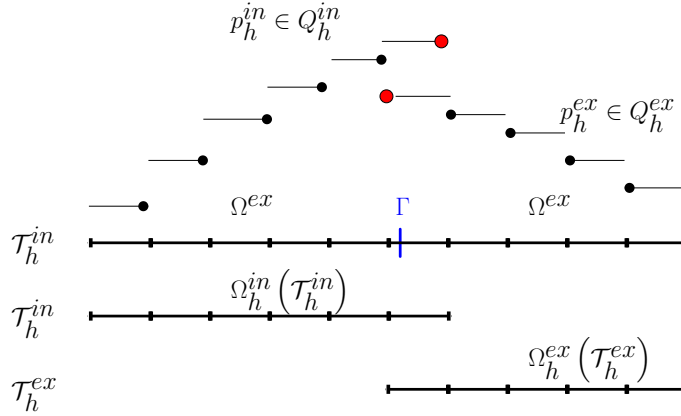
4.3 Première approche : fonctions de base modifiées

Dans le contexte des éléments finis non-conformes sur les triangles, nous nous intéressons à résoudre le problème d'interface de Stokes (4.4) en présence d'une interface. Nous utilisons les résultats théoriques établis dans la section 2.2 du chapitre 2 pour les équations de Darcy et on les étend au problème de Stokes.

On considère maintenant l'espace d'approximation $\tilde{\mathbf{V}}_h = \tilde{V}_h \times \tilde{V}_h$ des éléments finis P^1 -non-conformes où \tilde{V}_h est l'espace défini dans le paragraphe 2.2.2 du chapitre 2 pour la vitesse \mathbf{u} .

Ensuite, on définit $Q_h := Q_h^{in} \times Q_h^{ex}$ l'espace produit d'approximation pour la pression p , illustré en dimension 1 dans la figure Fig. 4.1, tel que

$$Q_h^i = \{q \in L_0^2(\Omega^i) : q|_T \in P^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i\}, \quad i = in, ex. \quad (4.11)$$

Fig. 4.1 – Espace produit Q_h : dédoublement de degrés de liberté.

4.3.1 Problème discret - Existence et unicité

La formulation variationnelle associée au problème (4.4) issue de la méthode de Nitsche s'écrit : chercher $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \tilde{\mathbf{V}}_h \times Q_h$ tels que

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h \end{cases} \quad (4.12)$$

où les formes bilinéaires sont définies par :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T \mu \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h dx - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n \mathbf{u}_h\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n \mathbf{v}_h\} \cdot [\mathbf{u}_h] ds + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [\mathbf{u}_h] \cdot [\mathbf{v}_h] ds, \\ b_h(p_h, \mathbf{v}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx + \int_{\Gamma} \{p_h\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \end{aligned}$$

et la forme linéaire $l_h(\cdot)$ est donnée par :

$$l_h(\mathbf{v}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \{\mathbf{v}_h\}_* ds,$$

où $\lambda > 0$ désigne un paramètre de stabilisation indépendant des coefficients de viscosité et de la géométrie du maillage ; λ_T est le paramètre donné par (1.14) dans le paragraphe 1.3 du chapitre 1.

Pour définir le saut et la moyenne pondérée à travers Γ , nous utilisons les coefficients k^{in} et k^{ex} de [12] précisés dans le paragraphe 1.3 du chapitre 1. On ré-écrit donc, pour toute fonction \mathbf{u} :

$$\{\mathbf{u}\} = k^{in} \mathbf{u}^{in} + k^{ex} \mathbf{u}^{ex}, \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{u}^{in} - \mathbf{u}^{ex}. \quad (4.13)$$

La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est symétrique ; $a_h(\cdot, \cdot)$, $b_h(\cdot, \cdot)$, $l_h(\cdot)$ sont continues, pour plus de détails voir [46, 77]. $a_h(\cdot, \cdot)$ est l'extension au cas vectoriel de la forme linéaire du chapitre 2 pour les équations de Darcy.

Nous rappelons ici les semi-normes et normes définies dans le paragraphe 1.2 du chapitre 1 :

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|_{1,h}^2 &:= \sum_{i=in,ex} \|\nabla \mathbf{u}^i\|_{0,\Omega^i}^2, & \|u\|_h^2 &:= \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{1/2} \nabla \mathbf{u}^i\|_{0,\Omega^i}^2, \\ \|\mathbf{u}\|^2 &:= \|\mathbf{u}\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla \mathbf{n} \mathbf{u}\}\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket\|_{0,\Gamma_T}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

On munit l'espace $\tilde{\mathbf{V}}_h$ des vitesses de la norme $\|\cdot\|$ et l'espace Q_h de pression de la norme suivante :

$$\|p\|_{\mu,\Omega}^2 := \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2} p^i\|_{0,\Omega^i}^2. \quad (4.15)$$

Existence et unicité de la solution du problème discret

Pour établir l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte discret (4.12), on va montrer que le problème (4.12) vérifie les hypothèses du théorème de Babuška-Brezzi (cf. [33]). On va tout d'abord vérifier la coercivité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ sur le noyau discret $\text{Ker}_h b_h$, puis la condition *inf-sup* pour $b_h(\cdot, \cdot)$. On en déduira que le problème (4.12) est bien posé.

Dans la suite, si aucune spécification n'est donnée, les constantes $C > 0$ utilisées sont indépendantes du paramètre de discrétisation h , de la viscosité $\mu = (\mu_{in}, \mu_{ex})$ et du paramètre de stabilisation γ .

Continuité des formes $a_h(\cdot, \cdot)$ et $b_h(\cdot, \cdot)$

Nous avons démontré dans la section 2.2.2 du chapitre 2 que la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est continue par rapport à la norme $\|\cdot\|$ sur $\tilde{\mathbf{V}}_h$, d'où :

Lemme 4.3.1. *Pour λ suffisamment grand, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_h. \quad (4.16)$$

Nous allons étudier maintenant la continuité de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$. Il suffit d'étudier le terme $\int_{\Gamma} \{p_h\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds$. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \{p_h\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \right| &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{1}{\lambda_T} \|\{p_h\}\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|\llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{1}{\lambda_T} \|\{p_h\}\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|\llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{1}{\lambda_T} \|\{p_h\}\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \|\llbracket \mathbf{v}_h \rrbracket\|. \end{aligned}$$

À l'aide de $\frac{1}{\lambda_T} = \frac{|T^i|}{\mu_i k^i |\Gamma_T|}$, de $0 \leq k^{in}, k^{ex} \leq 1$ et de p_h constant sur T , nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} \|\{p_h\}\|_{0,\Gamma_T} \leq \sqrt{\frac{|T^{in}|}{|\Gamma_T|}} \|\mu_{in}^{-1/2} p_h^{in}\|_{0,\Gamma_T} + \sqrt{\frac{|T^{ex}|}{|\Gamma_T|}} \|\mu_{ex}^{-1/2} p_h^{ex}\|_{0,\Gamma_T} \leq \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,T^i},$$

ce qui nous donne

$$\left| \int_{\Gamma} \{p_h\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \right| \leq C \|p_h\|_{\mu,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|.$$

Nous en déduisons :

Lemme 4.3.2. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de μ telle que*

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) \leq C \|p_h\|_{\mu,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|, \quad \forall (p_h, \mathbf{v}_h) \in Q_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h. \quad (4.17)$$

Coercivité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$

Nous avons déjà démontré dans le chapitre 2 que la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est coercive dans le cas scalaire (cf. Lemme 2.2.1). On utilise le même raisonnement dans le cas vectoriel et on obtient :

Lemme 4.3.3. *Pour λ suffisamment grand, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq C \|\mathbf{u}_h\|^2, \quad \forall \mathbf{u}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h. \quad (4.18)$$

La forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$ est donc coercive sur $\tilde{\mathbf{V}}_h$, et pas seulement sur $\text{Ker}_h b_h$.

4.3.2 Condition *inf-sup*

On s'intéresse maintenant à la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ par rapport aux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\mu,\Omega}$. Pour ce faire, nous utilisons quelques idées de [46] et [76]. On décompose $p_h \in Q_h$ sous la forme $p_h = \tilde{p}_h + \bar{p}_h$ tels que

$$\bar{p}_h^i = \pi_0^i p^i = \frac{1}{|\Omega^i|} \int_{\Omega^i} p^i dx,$$

ceci qui donne

$$\sum_{i=in,ex} |\Omega^i| \bar{p}_h^i = 0 \text{ et } \bar{p}_h^i \in L_0^2(\Omega^i).$$

Pour plus de clarté, nous précisons ci-dessous les étapes de la preuve :

1. On construit $\bar{\mathbf{v}}_h$ associé à \tilde{p}_h tel que

$$b_h(\tilde{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) \geq C \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2. \quad (4.19)$$

2. On construit $\bar{\mathbf{v}}_h$ associé à \bar{p}_h tel que

$$b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) \geq C \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2. \quad (4.20)$$

3. On cherche $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \bar{\mathbf{v}}_h$ avec $\delta > 0$ à préciser, \mathbf{v}_h associé à p_h tel que $b_h(\cdot, \cdot)$ satisfait la condition *inf-sup*.

Étape 1 :

On s'intéresse ici uniquement à $\tilde{p}_h = (\tilde{p}_h^{in}, \tilde{p}_h^{ex}) \in L_0^2(\Omega^{in}) \times L_0^2(\Omega^{ex})$. Il est utile d'établir la majoration suivante :

Lemme 4.3.4. *Nous avons, $\forall p_h \in Q_h$ et $\forall \varphi \in \tilde{V}$,*

$$\left| \int_{\Gamma} [p_h] \{\varphi\}_* ds \right| \leq C \|p_h\|_{\mu, \Omega} \left(\sum_{i=in, ex} \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \|\mu_i^{1/2} \varphi^i\|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.21)$$

Démonstration. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$\left| \int_{\Gamma} [p_h] \{\varphi\}_* ds \right| \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \frac{k^{in} k^{ex}}{\lambda_T} \| [p_h] \|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \frac{\lambda_T}{k^{in} k^{ex}} \| \{\varphi\}_* \|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2}.$$

D'une part, on a

$$\frac{k^{in} k^{ex}}{\lambda_T} \| [p_h] \|_{0, \Gamma_T}^2 \leq 2 \frac{k^{in} k^{ex}}{\lambda_T} \left(\| p_h^{in} \|_{0, \Gamma_T}^2 + \| p_h^{ex} \|_{0, \Gamma_T}^2 \right).$$

À l'aide de $\frac{k^i}{\lambda_T} = \frac{|T^i|}{\mu_i |\Gamma_T|}$, de $0 \leq k^{in}, k^{ex} \leq 1$ et de p_h constant sur T , nous avons

$$\frac{k^{in} k^{ex}}{\lambda_T} \| [p_h] \|_{0, \Gamma_T}^2 \leq C \left(\frac{|T^{in}|}{|\Gamma_T|} \| p_h^{in} \|_{0, \Gamma_T}^2 + \frac{|T^{ex}|}{|\Gamma_T|} \| p_h^{ex} \|_{0, \Gamma_T}^2 \right) \leq \sum_{i=in, ex} \| \mu_i^{-1/2} p_h^i \|_{0, T^i}^2. \quad (4.22)$$

D'autre part, grâce à $\{\varphi\}_* = k^{ex} \varphi^{in} + k^{in} \varphi^{ex}$ et à $\frac{\lambda_T}{k^i} = \frac{\mu_i |\Gamma_T|}{|T^i|}$, nous avons

$$\frac{\lambda_T}{k^{in} k^{ex}} \| \{\varphi\}_* \|_{0, \Gamma_T}^2 \leq 2 \left(\frac{\lambda_T}{k^{in}} \| \varphi^{in} \|_{0, \Gamma_T}^2 + \frac{\lambda_T}{k^{ex}} \| \varphi^{ex} \|_{0, \Gamma_T}^2 \right) = \sum_{i=in, ex} \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \| \mu_i^{1/2} \varphi^i \|_{0, \Gamma_T}^2. \quad (4.23)$$

■

Dans la suite nous aurons besoin de l'estimation de la quantité $\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^i|}} \| v - I_h^i v \|_{0, \Gamma_T}$. Pour ce faire, nous nous intéressons d'abord au cas où α et β sont bornées avec les notations du chapitre 2. Ensuite, nous distinguerons les cas limite traités dans le chapitre 2 : $\alpha = \beta \rightarrow 1$ et $\alpha = \beta \rightarrow 0$.

Pour α et β uniformément "bornés" (i.e. $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 1$, $0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1 < 1$), nous utilisons le théorème de trace sur Γ_T et les propriétés de l'opérateur d'interpolation I_h . On obtient donc

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^i|}} \| \mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v} \|_{0, \Gamma_T} &\leq C \sqrt{\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^i|}} \left(\frac{1}{h_T} \| E^i \mathbf{v} - I_h^i (E^i \mathbf{v}) \|_{0, T} + |E \mathbf{v} - I_h^i (E^i \mathbf{v})|_{1, T} \right) \\ &\leq C \sqrt{\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^i|}} |E^i \mathbf{v}|_{1, T}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}. \end{aligned}$$

En utilisant $\frac{|\Gamma_T| h_T}{|T^i|}$ est borné, il s'en suit que

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^i|}} \| \mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v} \|_{0, \Gamma_T} \leq C |E^i \mathbf{v}|_{1, T} \leq C_i |\mathbf{v}|_{1, \Omega^i}. \quad (4.24)$$

Nous nous intéressons maintenant aux deux cas limite $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 1$ et $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 0$. Ici, on détaille le cas limite $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 1$; pour l'autre cas, on utilise le même raisonnement avec l'inégalité de trace. Sur la partie T^{in} nous utilisons le théorème de trace (1.16) avec l'opérateur d'extension, et sur T^{ex} nous appliquons les inégalités de trace. Nous avons donc

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^{ex}|}} \|\mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \frac{|\Gamma_T|}{\sqrt{|T^{ex}|}} \left(\frac{1}{(1-\alpha)h_T} \|\mathbf{v} - I_h^{ex} \mathbf{v}\|_{0,T^{ex}} + |\mathbf{v} - I_h^{ex} \mathbf{v}|_{1,T^{ex}} \right).$$

À l'aide des Lemmes 2.2.7 et 2.2.6, il vient que

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^{ex}|}} \|\mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v}\|_{0,\Gamma_T} \leq C \frac{|\Gamma_T|}{\sqrt{|T^{ex}|}} |\mathbf{v}|_{1,T^{ex}} \leq C_{ex} |\mathbf{v}|_{1,T^{ex}}. \quad (4.25)$$

Ci-dessus, nous avons utilisé $|T^{ex}| = (1-\alpha)^2 |T|$ et $|\Gamma_T| \leq (1-\alpha)h_T$.

Par conséquent, nous avons :

Lemme 4.3.5. *Il existe $C, C_{ex}, C_{in} > 0$ indépendantes de h telles que
(a). Si α et β sont bornés, alors on a*

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^i|}} \|\mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v}\|_{0,\Gamma_T} \leq C |\mathbf{v}|_{1,\Omega^i}, \quad i = in, ex. \quad (4.26)$$

(b). Si $\alpha = \beta$ et α tend vers 1, alors on a

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^{ex}|}} \|\mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v}\|_{0,\Gamma_T} \leq C_{ex} |\mathbf{v}|_{1,T^{ex}}. \quad (4.27)$$

(c). De même, si $\alpha = \beta$ et α tend vers 0, alors on obtient

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{|T^{in}|}} \|\mathbf{v} - I_h^i \mathbf{v}\|_{0,\Gamma_T} \leq \frac{C_{in}}{\sqrt{\alpha}} |\mathbf{v}|_{1,T^{in}}. \quad (4.28)$$

Remarque 4.3.1. *On pourrait améliorer l'estimation (4.28), si on majore avec des constantes qui dépendent de μ . Dans la suite, on ne s'intéresse pas au cas limite $\alpha = \beta$ et $\alpha \rightarrow 0$. Nous prévoyons traiter la robustesse par rapport à μ et par rapport à la position de l'interface pour ce cas limite.*

Nous établissons maintenant le lemme suivant :

Lemme 4.3.6. *Pour tout $\tilde{p}_h^i \in L_0^2(\Omega^i)$ et tout $\theta_i > 0$ suffisamment grand, il existe $\tilde{\mathbf{v}}_h^i \in \mathbf{V}_h^i$, $i = in, ex$ tel que*

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \theta_i \|\mu^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2$$

et

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_h\| \leq C \sum_{i=in,ex} \theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h\|_{0,\Omega^i}$$

où $C > 0$ est indépendant de h et de θ_i .

Démonstration. D'après [68], on sait que pour tout $\tilde{p}_h^i \in L_0^2(\Omega^i)$ et tout $\theta_i > 0$, $i = in, ex$, il existe $\tilde{\mathbf{v}}_i \in H_0^1(\Omega^i)$, tel que

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^i = -\theta_i \mu_i^{-1} \tilde{p}_h^i \text{ dans } \Omega^i, \quad (4.29)$$

$$\|\mu_i^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}^i\|_{1,\Omega^i} \leq c \theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}. \quad (4.30)$$

On choisit maintenant $\tilde{\mathbf{v}}_h^i = \tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i$, $i = in, ex$ avec \tilde{I}_h^i l'opérateur d'interpolation défini de $H^1(\Omega^i)$ dans $\tilde{\mathbf{V}}_h^i$, introduit dans le chapitre 2. On considère tout d'abord le fait que $\tilde{\mathbf{v}}^i|_\Gamma = 0$. On obtient donc que

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}) = - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T \tilde{p}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^i dx.$$

En utilisant les propriétés de l'interpolation de Crouzeix-Raviart, nous avons

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}) = - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{int,i}} \int_T \tilde{p}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_h^i dx - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma,i}} \int_T \tilde{p}_h^i \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{v}}^i - \tilde{\mathbf{v}}_h^i) dx.$$

Par intégration par parties sur les triangles coupés, on obtient avec $\tilde{\mathbf{v}}^i = \mathbf{0}$ sur Γ :

$$\begin{aligned} b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}) &= - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{int,i}} \int_T \tilde{p}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_h^i dx - \sum_{i=in,ex} \int_\Gamma \tilde{p}_h^i (\tilde{\mathbf{v}}^i - \tilde{\mathbf{v}}_h^i) \cdot \mathbf{n}_i ds \\ &= - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{int,i}} \int_T \tilde{p}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_h^i dx + \int_\Gamma [\tilde{p}_h \tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds. \end{aligned}$$

Grâce à la relation $[\tilde{p}_h \tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] - \{\tilde{p}_h\}[\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] = [\tilde{p}_h]\{\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\}_*$, il vient que

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}) = b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \int_\Gamma [\tilde{p}_h]\{\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\}_* ds.$$

Par conséquent,

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) = - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T \tilde{p}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^i dx - \int_\Gamma [\tilde{p}_h]\{\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\}_* ds.$$

En utilisant (4.29) et $\tilde{\mathbf{v}}|_\Gamma = 0$, on a donc

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) = \sum_{i=in,ex} \theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 - \int_\Gamma [\tilde{p}_h]\{(I_h \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n}\}_* ds.$$

On applique l'inégalité (4.21) à $\varphi = (\tilde{\mathbf{v}} - I_h \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n}$, on a

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 - C \|\tilde{p}_h\|_{\mu,\Omega} \left(\sum_{i=in,ex} \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \|\mu_i^{1/2}(\tilde{\mathbf{v}}^i - I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i)\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2}.$$

On utilise l'inégalité de Young (1.3) et (4.15), on obtient pour tout $\varepsilon_i > 0$:

$$\begin{aligned} b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) &\geq \sum_{i=in,ex} \left(\theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 - \frac{C}{2\varepsilon_i} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 \right) \\ &\quad - C \sum_{i=in,ex} \frac{\varepsilon_i}{2} \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \|\mu_i^{1/2}(\tilde{\mathbf{v}}^i - \tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i)\|_{0,\Gamma_T}^2. \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \left(\theta_i - \frac{C}{2\varepsilon_i} \right) \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 - C \sum_{i=in,ex} \frac{\varepsilon_i}{2} \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \|\mu_i^{1/2} (\tilde{\mathbf{v}}^i - \tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i)\|_{0,\Gamma_T}^2.$$

En utilisant les inégalités (4.26), (4.27), (4.28) et (4.30), il vient que

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \left(\theta_i (1 - \frac{\varepsilon_i}{2} C C_i) - \frac{C}{2\varepsilon_i} \right) \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

On prend $\varepsilon_i = \frac{1}{C C_i}$ et on pose $\lambda_i = \frac{C^2 C_i}{2}$, on obtient alors :

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \frac{\theta_i - \lambda_i}{2} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

Par conséquent, pour θ_i suffisamment grand nous avons

$$b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

D'autre part, on a :

$$|||I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i||| = \left(\|\tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_{\mathbf{n}} I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i\}\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|[I_h \tilde{\mathbf{v}}]\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2}.$$

Or, nous avons

$$\|I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i\|_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} |\mu_i^{1/2} \tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i|_{1,T}^2 \leq c \theta_i^2 \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

En utilisant $\tilde{\mathbf{v}}|_\Gamma = 0$, il vient que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|[I_h \tilde{\mathbf{v}}]\|_{0,\Gamma_T}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|[I_h \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}]\|_{0,\Gamma_T}^2.$$

De même, nous avons

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_{\mathbf{n}} I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i\}\|_{0,\Gamma_T}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_{\mathbf{n}} (I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i - \tilde{\mathbf{v}}^i)\}\|_{0,\Gamma_T}^2.$$

À l'aide du Lemme 2.2.10, il vient que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \|\tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq C |\mu_i^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}^i|_{1,\Omega^i}^2 \leq \theta_i^2 C \|\mu_i^{-1} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

De même, en utilisant le Lemme 2.2.9 on a

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_{\mathbf{n}} \tilde{I}_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i\}\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq \theta_i^2 C \|\mu_i^{-1} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

Ce qui nous donne

$$|||I_h^i \tilde{\mathbf{v}}^i|||^2 \leq \theta_i^2 C \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2, \quad i = in, ex.$$

Par conséquent, nous avons

$$|||\tilde{\mathbf{v}}_h||| \leq C \sum_{i=in,ex} \theta_i \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

■

Étape 2 :

Nous présentons ici un lemme technique qui permet de construire une fonction auxiliaire selon l'absence ou la présence d'une frontière de Neumann Γ_N^i . L'existence d'une frontière de Neumann permet de construire facilement $\bar{\mathbf{v}}_h$ associé à \bar{p}_h tel que l'inégalité (4.20) soit satisfaite.

Nous nous intéressons à prouver le résultat suivant :

Lemme 4.3.7. *Pour tout $i = in, ex$, il existe une fonction $\mathbf{w}_h^i \in \tilde{\mathbf{V}}_h^i$ telle que*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w}_h^i \cdot \mathbf{n} \, ds = |\Gamma|, \quad |\mathbf{w}_h^i|_{1,\Omega^i} \leq C, \quad \sqrt{\lambda_T} \|[\mathbf{w}_h^i \cdot \mathbf{n}]\|_{0,\Gamma_T} \leq C. \quad (4.31)$$

☛ **Présence d'une frontière de Neumann $\Gamma_N^i \subset \partial\Omega^i$:**

On traite ici trois cas possibles de configurations géométriques où la frontière de Neumann Γ_N^i peuvent être un segment . Nous avons les situations suivantes, voir Fig. 4.2.

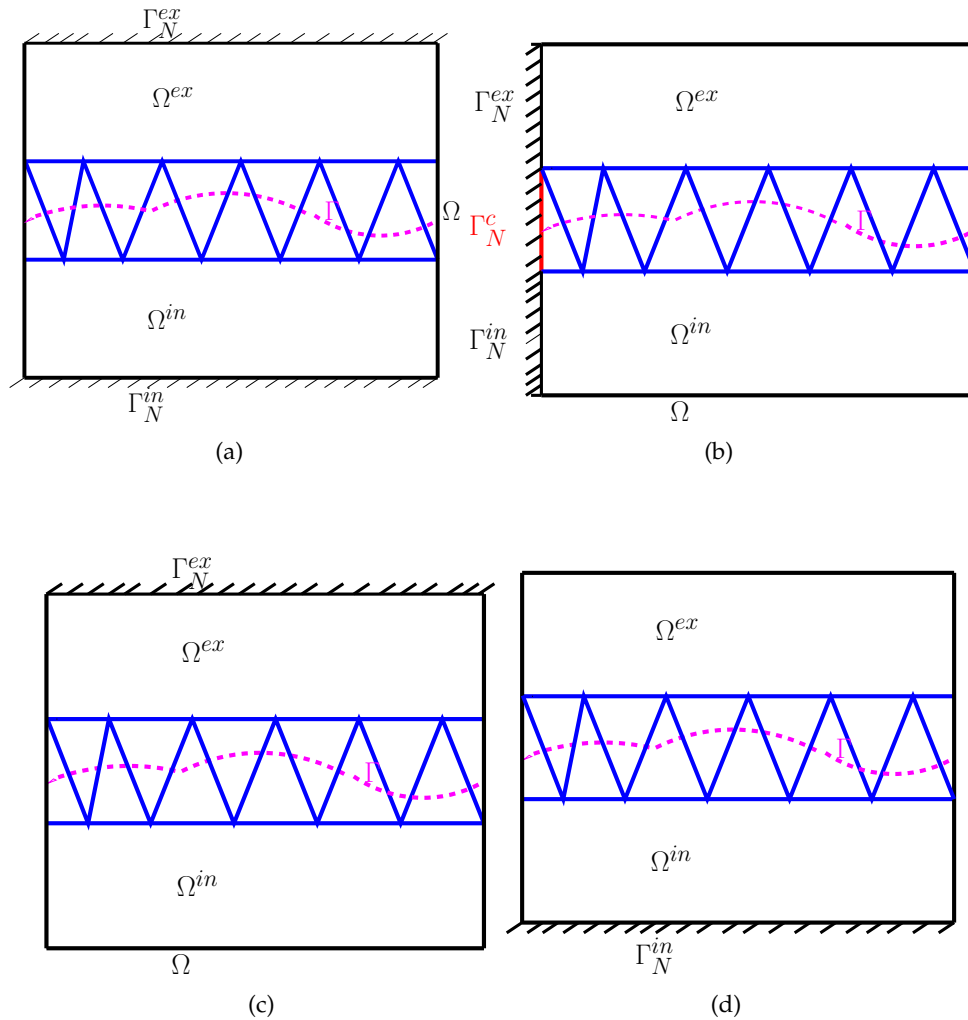


Fig. 4.2 – Configurations géométriques

Démonstration. On présente ici la démarche à suivre pour construire la fonction \mathbf{w}_h^i en traitant les quatre cas suivants :

- **Cas 1** : $\Gamma_N^i \neq \emptyset$, $\Gamma_N^i \cap \Gamma = \emptyset$ pour $i = in, ex$, voir Fig. 4.2(a) .

Ici, on s'intéresse à construire w_h^i tel que l'égalité (4.31) vérifiée. On prend tout simplement pour $e \in \mathcal{E}_h^i$,

$$w_h^i \cdot n = \sum_{e \in \Gamma_N^i} \varphi_e, \quad w_h^i \cdot \tau = 0$$

où φ_e est la fonction classique de Crouzeix-Raviart associée à l'arête $e \subset \Gamma_n^i$.

- **Cas 2** : $\Gamma_N^i \neq \emptyset$, $\Gamma_n^i \cap \Gamma \neq \emptyset$ pour $i = in, ex$, voir Fig. 4.2(b).

Désormais, on note $\Gamma_N^{i,*} = \{\Gamma_n^i \setminus e \text{ tel que } e \subset \partial T \in \mathcal{T}_h^\Gamma\}$ la partie colorée en bleu indiquée dans la figure Fig. 4.2(b) et la partie colorée en rouge par Γ_n^c . On construit $w_h^i \in \tilde{\mathbf{V}}_h^i$ de cette manière : $\forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\partial}$,

$$w_h^i \cdot n = \sum_{e \in \Gamma_N^{i,*}} \varphi_e, \quad w_h^i \cdot \tau = 0.$$

Alors, l'égalité (4.31) est satisfaite. En effet, nous avons

$$\int_{\Gamma_n} w_h^i \cdot n \, ds = \sum_{i=in, ex} \int_{\Gamma_N^{i,*}} w_h^i \, ds = |\Gamma_N^{in,*}| + |\Gamma_N^{ex,*}|.$$

- **Cas 3** : $\Gamma_N^i \neq \emptyset$, $\Gamma_N^j = \emptyset$ pour $i \neq j$, voir Fig. 4.2(c).

Dans ce cas, on est obligé de construire $w_h^i \neq 0$ sur Γ même si on peut prendre $w_h^j \cdot n = 0$ sur l'interface Γ et $w_h^j \cdot n \neq 0$ sur la frontière de Neumann $\Gamma_N^j = \emptyset$. Pour cela, on utilise la même construction que dans les deux cas précédents.

- **Cas 4** : $\Gamma_N^i = \emptyset$, $\Gamma_N^j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$, voir Fig. 4.2(d) : on utilise la même démarche que celle du troisième cas.

☛ Absence de la frontière de Neumann :

Dans ce cas, nous nous intéressons à construire $w_h^i \in \tilde{\mathbf{V}}_h^i$ en fonction de nouvelles fonctions de base modifiées sur les arêtes coupées, notées $\{\tilde{\varphi}^i\}_{1 \leq i \leq 3}$. On considère la configuration géométrique suivante :

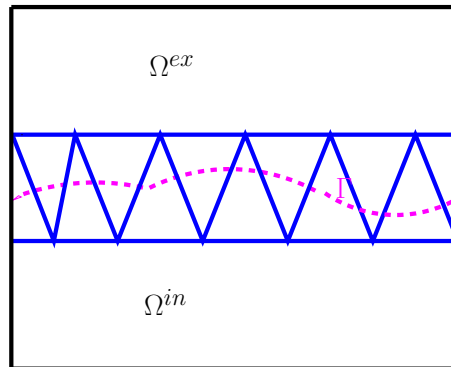


Fig. 4.3 – Configuration géométrique considérée.

On définit la fonction $w_h^i \in \tilde{\mathbf{V}}_h^i$ par :

$$w_h^i \cdot n = \delta_l \tilde{\varphi}_{e^l} + \delta_r \tilde{\varphi}_{e^r}, \quad w_h^i \cdot \tau = 0$$

avec $\delta_l = \delta_r = \frac{1}{2}$ si $T^l \cap T^r = e \in \mathcal{E}_h^{int,i}$ et $\delta_l = \delta_r = 1$ si $e \in \mathcal{E}_h^{i,\partial}$, et où $\tilde{\varphi}|_T$ est la fonction modifiée sur les arêtes coupées $\partial T^r \cap \partial T^l = e$. Par construction de w_h^i , on a

$$\int_{\Gamma} w_h^i \cdot \mathbf{n} ds = \sum_T \int_{\Gamma_T} w_h^i ds = |\Gamma|.$$

On s'intéresse ici à prouver les inégalités (4.31). On sait que la norme H^1 des fonctions classiques de Crouzeix-Raviart est majorée par une constante indépendante de h . Or la fonction w_h^i construite dans les deux cas dépend seulement de la fonction de Crouzeix-Raviart.

Pour le troisième cas, la fonction w_h^i dépend de la nouvelle fonction de base modifiée sur les arêtes coupées.

D'une part, en utilisant l'estimation des fonctions de base (2.2.3), il vient que

$$|w_h^i|_{1,\Omega^i} \leq C, \quad i = in, ex.$$

D'autre part, en remplaçant w_h^i par son expression dans les différents cas et en utilisant la norme L^2 des fonctions de base (2.2.2), $0 \leq k^i \leq 1$ ($i = in, ex$) et le Lemme 3.4 (cf. [77]), on obtient

$$\lambda_T \|w_h^i\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq \frac{k^i \mu_i |\Gamma_T|}{|T^i|} \|w_h^i\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq C$$

■

Soit maintenant $\bar{p}_h = (\bar{p}_h^{in}, \bar{p}_h^{ex})$ constant par sous domaine Ω^i ($i = in, ex$) tel que $\sum_{i=in,ex} |\Omega^i| \bar{p}_h^i = 0$. Nous pouvons donc établir le résultat suivant :

Lemme 4.3.8. *Pour tout \bar{p}_h^i constant sur chaque sous domaine Ω^i , il existe $\bar{\mathbf{v}}_h^i \in \tilde{\mathbf{V}}_h^i$ tel que*

$$b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) \geq \bar{C} \|\mu^{-1/2} \bar{p}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2, \quad |||\bar{\mathbf{v}}_h||| \leq C_1 \|\mu^{-1/2} \bar{p}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}},$$

où $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de h .

Démonstration. On distingue deux cas :

Cas 1 : présence d'une frontière de Neuman.

Par intégration par parties, on obtient, $\forall \bar{\mathbf{v}}_h^i \in \tilde{\mathbf{V}}_h^i$

$$\begin{aligned} b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) &= - \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut} \cup \mathcal{E}_h^{nc}} \bar{p}_h^i \int_e [\bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds - \sum_{i=in,ex} \int_{\Gamma_h^i} \bar{p}_h^i \bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}_i ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} [\bar{p}_h \bar{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds + \int_{\Gamma} \{\bar{p}_h\} [\bar{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\int_e [\bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds = 0, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^i, \quad i = in, ex, nc.$$

A l'aide de l'égalité (1.2), il vient que

$$\begin{aligned} b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) &= - \sum_{i=in,ex} \int_{\Gamma_h^i} \bar{p}_h^i \bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}_i ds - \int_{\Gamma} [\bar{p}_h] \{\bar{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\} ds \\ &= - \sum_{i=in,ex} \int_{\Gamma_h^i} \bar{p}_h^i \bar{\mathbf{v}}_h^i \cdot \mathbf{n}_i ds - (\bar{p}_h^{in} - \bar{p}_h^{ex}) \int_{\Gamma} k^{ex} \bar{\mathbf{v}}_h^{ex} \cdot \mathbf{n} ds - (\bar{p}_h^{in} - \bar{p}_h^{ex}) \int_{\Gamma} k^{in} \bar{\mathbf{v}}_h^{in} \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.3.7, on considère $\bar{\mathbf{v}}_h^i = -\mu_i^{-1}|\Omega^i|\bar{p}_h^i \mathbf{w}_h^i \cdot \mathbf{n}$ avec \mathbf{w}_h^i défini dans le lemme 4.3.7. D'une part, on obtient

$$\|\mu^{1/2}\bar{\mathbf{v}}_h^i\|_{1,\Omega^i} \leq C\|\mu_i^{-1/2}\bar{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}.$$

D'autre part, nous avons

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \lambda_T \|[\bar{\mathbf{v}}_h]\|_{0,T}^2 \leq C \sum_{i=in,ex} \mu_i^{-1} |\Omega^i| (\bar{p}_h^i)^2 = C \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2}\bar{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

Par conséquent

$$b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) = \sum_{i=in,ex} |\Gamma_N^i| \mu_i^{-1} |\Omega^i| (\bar{p}_h^i)^2 = \sum_{i=in,ex} |\Gamma_N^i| \|\mu_i^{-1/2}\bar{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2, \quad (4.32)$$

$$\|\bar{\mathbf{v}}_h\| \leq C \|\mu^{-1/2}\bar{p}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2. \quad (4.33)$$

Cas 2 : absence d'une frontière de Neumann.

On s'intéresse ici justement à l'interface Γ . Par intégration par partie, on obtient

$$b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) = -(\bar{p}_h^{in} - \bar{p}_h^{ex}) \int_{\Gamma} k^{ex} \bar{\mathbf{v}}_h^{ex} \cdot \mathbf{n} ds - (\bar{p}_h^{in} - \bar{p}_h^{ex}) \int_{\Gamma} k^{in} \bar{\mathbf{v}}_h^{in} \cdot \mathbf{n} ds.$$

Ici, on considère $\bar{\mathbf{v}}_h^i = -\frac{|\Omega^i|}{k^i \mu_i} (\bar{p}_h^{in} - \bar{p}_h^{ex}) \mathbf{w}_h^i \cdot \mathbf{n}$ tel que la fonction \mathbf{w}_h^i vérifie le Lemme 4.3.7.

En utilisant $\bar{p}_h^{ex} = -\frac{|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}|} \bar{p}_h^{in}$, il vient que

$$\begin{aligned} b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) &= |\Gamma| \left(\mu_{in}^{-1} |\Omega^{in}| \left(1 + \frac{|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}|} \right)^2 (\bar{p}_h^{in})^2 + \mu_{ex}^{-1} |\Omega^{ex}| \left(1 + \frac{|\Omega^{ex}|}{|\Omega^{in}|} \right)^2 (\bar{p}_h^{ex})^2 \right) \\ &= |\Gamma| \left(\left(1 + \frac{|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}|} \right)^2 \|\mu_{in}^{-1/2} \bar{p}_h^{in}\|_{0,\Omega^{in}}^2 + \left(1 + \frac{|\Omega^{ex}|}{|\Omega^{in}|} \right)^2 \|\mu_{ex}^{-1/2} \bar{p}_h^{ex}\|_{0,\Omega^{ex}}^2 \right) \\ &= |\Gamma| |\Omega|^2 \left(|\Omega^{ex}|^{-2} \|\mu_{in}^{-1/2} \bar{p}_h^{in}\|_{0,\Omega^{in}}^2 + |\Omega^{in}|^{-2} \|\mu_{ex}^{-1/2} \bar{p}_h^{ex}\|_{0,\Omega^{ex}}^2 \right). \end{aligned}$$

Posons $C = |\Gamma| |\Omega|^2 \min(|\Omega^{in}|^{-2}, |\Omega^{ex}|^{-2})$, on obtient

$$b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) \geq C \|\mu^{-1/2} \bar{p}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2, \quad \|\bar{\mathbf{v}}_h\| \leq C \|\mu^{-1/2} \bar{p}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.34)$$

En rassemblant les inégalités (4.32) et (4.34), on obtient le résultat souhaité. ■

Étape 3 :

Il s'agit ici de trouver $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \bar{\mathbf{v}}_h$ associé à $p_h = \tilde{p}_h + \bar{p}_h$ tel que la condition *inf-sup* de $b_h(\cdot, \cdot)$ est vérifiée.

Nous utilisons les résultats précédents, nous en déduisons le résultat suivant :

Lemme 4.3.9. Pour tout $p_h \in Q_h$, il existe $\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h$ tel que

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) \geq C \|p_h\|_{\mu,\Omega}^2, \quad \|\mathbf{v}_h\| \leq C \|p_h\|_{\mu,\Omega}$$

où $C > 0$ est indépendante de μ et de h .

Démonstration. On considère $p_h = \tilde{p}_h + \bar{p}_h$ et $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{v}}_h + \delta \bar{\mathbf{v}}_h$ avec $\delta > 0$ à déterminer. Alors, nous avons

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) = b_h(\tilde{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + b_h(\bar{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \delta b_h(\tilde{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) + \delta b_h(\bar{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h). \quad (4.35)$$

Il reste à majorer les formes bilinéaires $b_h(\bar{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h)$ et $b_h(\tilde{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h)$. D'une part, nous avons

$$b_h(\bar{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) = - \sum_{i=in,ex} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T \bar{p}_h^i \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_h^i dx + \int_{\Gamma} \{\bar{p}_h\} [\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds.$$

A l'aide de l'intégration par parties, on a :

$$b_h(\bar{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) = - \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e [\bar{p}_h^i \tilde{\mathbf{v}}_h^i] ds - \int_{\Gamma} [\bar{p}_h \tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds + \int_{\Gamma} \{\bar{p}_h\} [\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds.$$

Comme \bar{p}_h^i est constant et $\int_e [\tilde{\mathbf{v}}_h^i] ds = 0$ pour $i = in, ex$ et $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut} \cup \mathcal{E}_h^{nc}$, nous avons d'après l'inégalité (4.21)

$$b_h(\bar{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) = - \int_{\Gamma} [\bar{p}_h] \{\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\} ds \geq - \|\bar{p}_h\|_{\mu, \Omega} \left(\sum_{i=in,ex} \frac{|\Gamma_T|}{|T^i|} \|\mu_i^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2}.$$

En utilisant les inégalités (4.26), (4.27), (4.28) et en appliquant l'inégalité de Young (1.3) pour $\eta_i > 0$, il vient que

$$b_h(\bar{p}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq - \sum_{i=in,ex} \left(\frac{c_1 \eta_i}{2} \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 + \frac{c_2 \theta_i}{2 \eta_i} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h\|_{0, \Omega^i}^2 \right). \quad (4.36)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} b_h(\tilde{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T \tilde{p}_h \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_h dx + \int_{\Gamma} \{\tilde{p}_h\} [\bar{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}] ds \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy - Schwartz, on a :

$$I \geq - \|\mu^{-1/2} \tilde{p}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \|\mu^{1/2} \bar{\mathbf{v}}_h\|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \geq -C_1 \|\mu^{-1/2} \tilde{p}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \|\mu^{-1/2} \bar{p}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

A l'aide de l'inégalité de Young (1.3), il vient que :

$$I \geq - \sum_{i=in,ex} C_{1,i} \left(\frac{\varepsilon_{1,i}}{2} \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 + \frac{1}{2 \varepsilon_{1,i}} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 \right).$$

De même, en utilisant l'inégalité (4.21) et celle de Young (1.3), on obtient

$$II \geq - \sum_{i=in,ex} C_{2,i} \left(\frac{\varepsilon_{2,i}}{2} \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 + \frac{1}{2 \varepsilon_{2,i}} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 \right),$$

par conséquent, on a avec (4.15),

$$b_h(\tilde{p}_h, \bar{\mathbf{v}}_h) \geq - \sum_{i=in,ex} \left(\frac{\varepsilon_i C_i}{2} \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 - \frac{C_i}{2 \varepsilon_i} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0, \Omega^i}^2 \right). \quad (4.37)$$

Pour finir, en injectant les inégalités des Lemmes 4.3.6, 4.3.8 et les inégalités (4.36) et (4.37) dans (4.35), il vient que

$$\begin{aligned} b_h(p_h, \mathbf{v}_h) &\geq \sum_{i=in,ex} \left(\frac{\theta_i}{2} \left(1 - \frac{c_2}{\eta_i} \right) - \frac{c_i}{2} - \frac{\delta C_i}{2\varepsilon_i} \right) \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 \\ &\quad + \sum_{i=in,ex} \left(\delta \left(\bar{C}_i - \frac{\varepsilon_i}{2} C_i \right) - \frac{c_1 \eta_i}{2} \right) \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2, \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon_i = \frac{\bar{C}_i}{C_i}$, $\eta_i = 2c_2$ et $\delta = 4c_1c_2$, nous avons :

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) \geq \sum_{i=in,ex} \left(\frac{\theta_i}{4} - \frac{c_i}{2} - 2 \frac{c_1 c_2 C_i^2}{\bar{C}_i} \right) \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 + c_1 c_2 \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2} \bar{p}_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

Pour θ_i suffisamment grand, on prend par exemple $\theta_i = 4c_i + 16 \frac{c_1 c_2 C_i^2}{\bar{C}_i}$, nous en déduisons donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$b_h(p_h, v_h) \geq C \|\mu^{-1/2} p_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2.$$

Nous avons aussi :

$$|||\mathbf{v}_h||| \leq |||\tilde{\mathbf{v}}_h||| + \delta |||\bar{\mathbf{v}}_h||| \leq \tilde{C} \|\mu^{-1/2} p_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

■

D'après le Lemme 4.3.9, nous en déduisons la condition *inf-sup* de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$:

Lemme 4.3.10. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\inf_{p_h \in Q_h} \sup_{v_h \in \tilde{V}_h} \frac{b_h(p_h, v_h)}{\|p_h\|_{\mu,\Omega} |||v_h|||} \geq C.$$

D'après les Lemmes 4.3.10 et 2.3.2, le problème (4.12) satisfait les conditions du théorème de Babuška-Brezzi (cf. [33]). D'où le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Pour γ_{in} et γ_{ex} suffisamment grands, le problème variationnel (4.12) admet une unique solution.*

4.3.3 Estimation d'erreur a priori

Afin de pouvoir énoncer le théorème d'estimation d'erreur a priori, nous nous intéressons à l'orthogonalité de Galerkin dans le cas non-conforme. Par intégration par parties, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.3.11. *Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème de Stokes continu (4.4) et (\mathbf{u}_h, p_h) la solution de la formulation variationnelle (4.12). Alors, on a*

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p - p_h, v_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \left(\int_e \mu \nabla_n \mathbf{u} [\mathbf{v}_h] ds - \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \right) \\ &\quad + \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \left(\int_e \mu_i \nabla_n \mathbf{u}^i [\mathbf{v}_h^i] ds - \int_e p^i [\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}] ds \right), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{V}_h, \\ b_h(q_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème de Stokes continu (4.4). La seconde relation est triviale, en effet on a $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ et $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0$ à travers chaque arête.

D'après un résultat de la preuve du Lemme 2.2.11 du chapitre 2, on a

$$a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = - \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v}_h dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [\mathbf{v}_h] ds + \int_{\Gamma} [\mu \nabla \mathbf{u}] \{\mathbf{v}_h\}_* ds. \quad (4.38)$$

En intégrant par parties le terme $b_h(p, \mathbf{v}_h)$, on obtient

$$b_h(p, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \nabla p \mathbf{v}_h dx - \sum_T \int_{\partial T \setminus \Gamma} [p \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds - \int_{\Gamma} [p \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds + \int_{\Gamma} \{p\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds.$$

En utilisant $[ab] = \{a\}[b] + [a]\{b\}_*$, il vient que

$$b_h(p, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \nabla p \mathbf{v}_h dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{p\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds - \int_{\Gamma} [p \mathbf{n}] \{\mathbf{v}_h\}_* ds. \quad (4.39)$$

D'après (4.38) et (4.39), nous avons

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(p, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx + \int_{\Gamma} [\mu \nabla \mathbf{u} - p \mathbf{n}] \{\mathbf{v}_h\}_* ds \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [\mathbf{v}_h] ds - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{p\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \\ &= a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \left(\int_e \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e [\mathbf{v}_h] ds - \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_e] ds \right), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Remarque 4.3.2. Les termes $\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \left(\int_e \mu \nabla_n \mathbf{u} [\mathbf{v}_h] ds - \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \right)$ traduisent l'erreur de consistance due au fait que la méthode n'est pas conforme, i.e. $\tilde{\mathbf{V}}_h \not\subset \mathbf{V}$. Les termes

$\sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \left(\int_e \mu_i \nabla_n \mathbf{u}^i [\mathbf{v}_h^i] ds - \int_e p^i [\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}] ds \right)$ traduisent l'erreur de consistance due à la méthode NXFEM.

Dans la suite, on notera

$$\begin{aligned} \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n \mathbf{u} [\mathbf{v}_h] ds, \\ \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e \mu_i \nabla_n \mathbf{u}^i [\mathbf{v}_h^i] ds, \\ \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds, \\ \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e p^i [\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}] ds, \end{aligned}$$

On rappelle que les termes $\Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ et $\Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ sont déjà estimés dans la section 2.2.4 du chapitre 2 avec u est un scalaire. En utilisant la même stratégie pour \mathbf{u} vectoriel, nous avons

Lemme 4.3.12. *Soit $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})]^2$, alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de h et de μ telles que*

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n \mathbf{u} [\mathbf{v}_h] ds &\leq C_1 h |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{v}_h|||, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e \mu_i \nabla_n \mathbf{u}^i [\mathbf{v}_h^i] ds &\leq C_2 h |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{v}_h|||, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h. \end{aligned}$$

Pour estimer les termes $\Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h)$ et $\Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h)$, il est utile d'introduire les résultats préliminaires :

Soit π_h^i l'opérateur d'interpolation sur $T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma, i}$ défini par :

$$\pi_h^i p^i = \frac{1}{|T^i|} \int_{T^i} p^i ds,$$

si $T \in \mathcal{T}_h^{int, i}$, π_h^i est l'opérateur de projection définie de $L^2(\Omega^i)$ dans Q_h^i .

Par application de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, nous en déduisons que l'opérateur π_h^i satisfait l'estimation suivante :

Lemme 4.3.13. *Soit $T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|p^{in} - \pi_h^{in} p^{in}\|_{0, T^{in}} \leq C \sqrt{|T^{in}|} \|p^{in}\|_{1, T^{in}} \quad \forall p \in H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}) \cap L_0^2(\Omega) \quad (4.40)$$

$$\|p^{ex} - \pi_h^{ex} p^{ex}\|_{0, T^{ex}} \leq C \sqrt{|T^{ex}|} \|p^{ex}\|_{1, T^{ex}}, \quad \forall p \in H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}) \cap L_0^2(\Omega). \quad (4.41)$$

Remarque 4.3.3. *En utilisant $|T^{in}| = \alpha|T|$ et $|T^{ex}| = (1 - \alpha)^2|T|$, les estimations (4.40) et (4.41) s'écrivent sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} \|p^{in} - \pi_h^{in} p^{in}\|_{0, T^{in}} &\leq C \sqrt{\alpha} h_T \|p^{in}\|_{1, T^{in}}, \\ \|p^{ex} - \pi_h^{ex} p^{ex}\|_{0, T^{ex}} &\leq C(1 - \alpha) h_T \|p^{ex}\|_{1, T^{ex}}. \end{aligned}$$

Lemme 4.3.14. *Soit $p \in H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}) \cap L_0^2(\Omega)$, alors il existe deux constantes $C_3, C_4 > 0$ indépendantes de h et de μ telles que*

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds &\leq C_3 h |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{v}_h|||, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds &\leq C_4 h |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{v}_h|||, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h. \end{aligned}$$

Démonstration. Le terme $\Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h)$ est traité de manière analogue que dans [115]. On a

$$\begin{aligned} \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, nc}} \int_e (p - \pi_h^e p) [(\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}] ds \\ &\leq \sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, nc}} \|p - \pi_h^e p\|_{0, e} |||(\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}|||_{0, e}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de trace classique, on en déduit

$$\sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,nc}} \|p - \pi_h^e p\|_{0,e} \leq C\sqrt{h}|p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

Toujours à l'aide de l'inégalité de trace sur $\{e\} = T^r \cap T^l$, on a

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h]\|_{0,e} &\leq C\sqrt{h} \left(\frac{1}{h} \|(\mathbf{v}_h - \pi_0^{T^r} \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{0,T^r} + \|(\mathbf{v}_h - \pi_0^{T^r} \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{1,T^r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} \|(\mathbf{v}_h - \pi_0^{T^l} \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{0,T^l} + \|(\mathbf{v}_h - \pi_0^{T^l} \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{1,T^l} \right) \\ &\leq C\sqrt{h} |\mathbf{v}_h|_{1,T^r \cup T^l}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,nc}} \|[\mathbf{v}_h - \pi_0^e \mathbf{v}_h]\|_{0,e} \leq C\sqrt{h} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq C\sqrt{h} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|[\mathbf{v}_h]\|,$$

ce qui nous permet de conclure

$$\Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) \leq Ch|\mu|^{-1/2} p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \|[\mathbf{v}_h]\|.$$

On parcourt les mêmes étapes pour estimer le terme $\Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h)$. On a

$$\begin{aligned} \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \int_e (p^i - \pi_h^e p^i) [(\mathbf{v}_h^i - \pi_0^e \mathbf{v}_h^i) \cdot \mathbf{n}] ds \\ &\leq \sum_{i=in,ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \|p^i - \pi_h^e p^i\|_{0,e} \|[(\mathbf{v}_h^i - \pi_0^e \mathbf{v}_h^i) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e}. \end{aligned}$$

Pour se faire, on étudie les deux cas limites $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 0$ et $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 1$. En utilisant les inégalités de trace sur les parties coupées, on obtient

$$\begin{aligned} \|p^{in} - \pi_h^e p^{in}\|_{0,e} &\leq C\sqrt{\frac{|e|}{\alpha}} \left(\frac{1}{h_T} \|p^{in} - \pi_h^e p^{in}\|_{0,T^{in}} + \|p^{in} - \pi_h^e p^{in}\|_{1,T^{in}} \right), \\ \|p^{ex} - \pi_h^e p^{ex}\|_{0,e} &\leq C\sqrt{|e|} \left(\frac{1}{(1-\alpha)h_T} \|p^{ex} - \pi_h^e p^{ex}\|_{0,T^{ex}} + \|p^{ex} - \pi_h^e p^{ex}\|_{1,T^{ex}} \right). \end{aligned}$$

À l'aide du Lemme 4.3.13 et $|T^{in}| = \alpha|T|$ et $|T^{ex}| = (1-\alpha)|T|$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{in,cut}} \|p^{in} - \pi_h^e p^{in}\|_{0,e} &\leq C\sqrt{|e|} |p|_{1,\Omega^{in}} \leq C\sqrt{|\tilde{e}|} |p|_{1,\Omega^{in}}, \forall \tilde{e} \in \mathcal{E}_h^{cut}, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{ex,cut}} \|p^{ex} - \pi_h^e p^{ex}\|_{0,e} &\leq C\sqrt{|e|} |p|_{1,\Omega^{ex}} \leq C\sqrt{(1-\alpha)|\tilde{e}|} |p|_{1,\Omega^{ex}}, \forall \tilde{e} \in \mathcal{E}_h^{cut}. \end{aligned}$$

Ci-dessus, nous avons utilisé $|e| = \alpha|\tilde{e}|$, $\forall e \in \mathcal{E}_h^{in,cut}$ et $|e| = (1-\alpha)|\tilde{e}|$, $\forall e \in \mathcal{E}_h^{ex,cut}$ avec $\tilde{e} \in \mathcal{E}_h^{cut}$ est l'arête entière contenant $e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}$, $i = in, ex$.

De même, on a

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{in,cut}} \|[(\mathbf{v}_h^{in} - \pi_0^e \mathbf{v}_h^{in}) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e} &\leq C\sqrt{\frac{|e|}{\alpha}} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{in}} \leq C\sqrt{\frac{|e|}{\alpha\mu_{in}}} |\mu_{in}^{1/2} \mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{in}}, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{ex,cut}} \|[(\mathbf{v}_h^{ex} - \pi_0^e \mathbf{v}_h^{ex}) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e} &\leq C\sqrt{\frac{|e|}{1-\alpha}} |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{ex}} \leq \sqrt{\frac{|e|}{(1-\alpha)\mu_{ex}}} |\mu_{ex}^{1/2} \mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{ex}}. \end{aligned}$$

En utilisant $|e| = \alpha|\tilde{e}|$, $\forall e \in \mathcal{E}_h^{in,cut}$ et $|e| = (1 - \alpha)|\tilde{e}|$, $\forall e \in \mathcal{E}_h^{ex,cut}$ avec $\tilde{e} \in \mathcal{E}_h^{cut}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{in,cut}} ||[(\mathbf{v}_h^{in} - \pi_0^e \mathbf{v}_h^{in}) \cdot \mathbf{n}]||_{0,e} &\leq C \sqrt{|\tilde{e}|} \frac{1}{\sqrt{\mu_{in}}} |\mu_{in}^{1/2} \mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{in}}, \\ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{ex,cut}} ||[(\mathbf{v}_h^{ex} - \pi_0^e \mathbf{v}_h^{ex}) \cdot \mathbf{n}]||_{0,e} &\leq C \sqrt{|\tilde{e}|} \frac{1}{\sqrt{\mu_{ex}}} |\mu_{ex}^{1/2} \mathbf{v}_h|_{1,\Omega^{ex}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure à l'aide de $(1 - \alpha)$ borné :

$$\Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) \leq Ch |\mu^{-1/2} p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} ||\mathbf{v}_h||.$$

■

Théorème 4.3.2. (Estimation d'erreur a priori) Soit $(\mathbf{u}, p) \in [H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})]^2 \times H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})$ la solution du problème de Stokes continu et λ suffisamment grand. Alors la solution (\mathbf{u}_h, p) du problème variationnel (4.12) satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h||| + \|p - p_h\|_{\mu,\Omega} \leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right),$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h et de μ . Cette majoration est d'ordre optimal.

Démonstration. D'après le Lemme 4.3.11, on a :

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h).$$

On considère $I_h \mathbf{u}$ l'erreur d'interpolation défini précédemment dans le chapitre 2, on a $I_h \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_h$ et on peut écrire

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) &= a_h(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

On prend maintenant $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}$ et d'après le Lemme 4.3.3, la coercivité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ nous donne

$$\begin{aligned} C |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}|||^2 &\leq a_h(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) + b_h(p_h, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) + \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) \\ &\quad + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}). \end{aligned}$$

D'une part, par la continuité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ et $|||\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}||| \leq Ch |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$ (cf Théorème 2.2.1) on obtient

$$|a_h(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u})| \leq Ch |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}|||.$$

D'autre part, on peut écrire

$$b_h(p - p_h, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) = b_h(p - \pi_h p, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) + b_h(\pi_h p - p_h, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}).$$

La deuxième équation du problème (4.12), nous donne que

$$b_h(\pi_h^i p - p_h, \mathbf{u}_h) = 0$$

et donc on obtient en utilisant une propriété de l'opérateur d'interpolation $I_h \mathbf{u}$:

$$b_h(\pi_h p - p_h, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) = -b_h(\pi_h p - p_h, I_h \mathbf{u}) = b_h(\pi_h p - p_h, \mathbf{u}) = 0.$$

De plus, par continuité de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$ et d'après la propriété de l'interpolateur $\pi_h p$ (cf Lemme 4.3.13), on obtient

$$b_h(p - \pi_h p, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) \leq Ch |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}|||.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} C |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}|||^2 &\leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}||| + \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) \\ &\quad + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Posons $\mathbf{w}_h = \mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}$, on a

$$\begin{aligned} C |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}||| &\leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) \\ &\quad + \sup_{\mathbf{w}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{\Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{w}_h) + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{w}_h) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h)}{|||\mathbf{w}_h|||}. \end{aligned}$$

D'après les Lemmes 4.3.12, 4.3.14 on a

$$\begin{aligned} \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) &\leq C_1 h |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{w}_h|||, \\ \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) &\leq C_2 h |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{w}_h|||, \\ \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{w}_h) &\leq C_3 h |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{w}_h|||, \\ \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{w}_h) &\leq C_4 h |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{w}_h|||. \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} C |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}||| &\leq Ch \left(C |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + C |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + C_1 |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) \\ &\quad + C_2 h |\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + C_3 h |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + C_4 h |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \end{aligned}$$

\Longleftrightarrow

$$|||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}||| \leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right), \quad (4.42)$$

ce qui à l'aide de l'inégalité triangulaire nous donne

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h||| \leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right). \quad (4.43)$$

On s'intéresse maintenant à l'erreur sur la pression. On suit les étapes classiques de la démonstration. On écrit

$$||p - p_h||_{\mu, \Omega} = ||p - \pi_h p||_{\mu, \Omega} + ||\pi_h p - p_h||_{\mu, \Omega},$$

et la condition *inf-sup* discrète de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$ (cf Lemme 4.3.10) nous donne

$$||\pi_h p - p_h||_{\mu, \Omega} \leq \frac{1}{C} \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{b_h(\pi_h p - p, \mathbf{v}_h) + b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h)}{|||\mathbf{v}_h|||}. \quad (4.44)$$

Or, grâce au Lemme 4.3.11 et à la première équation du problème variationnel (4.12) on peut écrire

$$-b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h) = a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h).$$

On introduit alors l'interpolateur I_h , ce qui nous donne

$$\begin{aligned} -b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h) &= a_h(\mathbf{u} - I_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + a_h(I_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ et ainsi que les Lemmes 4.3.12, 4.3.14, on trouve

$$|b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h)| \leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) |||\mathbf{v}_h||| + |||I_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h||| |||\mathbf{v}_h|||.$$

On injecte cette expression dans (4.44) et en utilisant la continuité de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$, les propriétés de l'opérateur d'interpolation π_h et $0 < \alpha < 1$, on obtient

$$|||\pi_h p - p_h|||_{\mu, \Omega} \leq Ch \left(|\mu^{1/2} \mathbf{u}|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1/2} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) + |||I_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h|||. \quad (4.45)$$

En utilisant l'inégalité (4.42) et en combinant les inégalités (4.45) et (4.43) on obtient alors le résultat du théorème. ■

Par l'argument d'Aubin-Nitsche, nous avons l'estimation d'erreur pour la vitesse dans L^2 :

Théorème 4.3.3. *On suppose que Ω est convexe, $(\mathbf{u}, p) \in [H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})]^2 \times H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})$ la solution du problème de Stokes continu et λ suffisamment grand. Alors, il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et de μ telle que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq Ch^2 \left(\|\mathbf{u}\|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right).$$

Démonstration. On adapte l'argument d'Aubin-Nitsche à notre problème variationnel. On suit le même raisonnement que dans [69], mais avec la norme $||| \cdot |||$ provenant de la méthode NXFEM. On rappelle tout d'abord que grâce à la convexité du domaine Ω , le problème de Stokes

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla \boldsymbol{\phi}) + \nabla \xi &= \boldsymbol{\psi} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} &= 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\boldsymbol{\phi}] &= \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_{\mathbf{n}} \boldsymbol{\phi} - \xi \mathbf{n}] &= 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

admet une unique solution $(\boldsymbol{\phi}, \xi) \in [H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})]^2 \times H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})$. De plus cette solution satisfait :

$$\|\mu^{1/2} \boldsymbol{\phi}\|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\xi|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq c \|\boldsymbol{\psi}\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.46)$$

On considère maintenant le problème dual avec $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}$ et on écrit, après intégration par parties sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ et en utilisant la régularité de $\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}^{in}, \boldsymbol{\phi}^{ex})$ et de $\xi = (\xi^{in}, \xi^{ex})$, que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \operatorname{div}(-\mu \nabla \boldsymbol{\phi} + \nabla \xi \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})) \, dx \\ &= a_h(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + b_h(\xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.3.11 d'orthogonalité de Galerkin, on obtient

$$a_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h - p, \mathbf{v}_h) = \Sigma_p^{nc}(p, \mathbf{v}_h) + \Sigma_p^{cut}(p, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h). \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

$$b_h(q_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h,$$

en prenant $\mathbf{v}_h = I_h \boldsymbol{\phi}$ et $q_h = \pi_h \xi$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 &= a_h(\boldsymbol{\phi} - I_h \boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + b_h(\xi - \pi_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - b_h(p_h - p, I_h \boldsymbol{\phi}) \\ &\quad + \Sigma_p^{nc}(p, I_h \boldsymbol{\phi}) + \Sigma_p^{cut}(p, I_h \boldsymbol{\phi}) - \Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, I_h \boldsymbol{\phi}) - \Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, I_h \boldsymbol{\phi}). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons donc à estimer chaque terme du second membre (4.47).

Le terme $b_h(p_h - p, I_h \boldsymbol{\phi})$ peut être borné de la même manière que dans [69]. Nous allons donner quelques détails de la démonstration. D'une part, grâce aux propriétés de $\boldsymbol{\phi}$ et des interpolateurs I_h et π_h et la deuxième équation du Lemme 4.3.11, on a

$$b_h(p_h - p, I_h \boldsymbol{\phi}) = b_h(\pi_h p - p, I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}) = \int_{\Gamma} \{\pi_h p - p\} [(I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}] ds.$$

D'autre part, on utilise la continuité de la forme $b_h(\cdot, \cdot)$ (cf. Lemme 4.3.2), l'estimation des interpolations et la régularité (4.46) pour conclure

$$b_h(p_h - p, I_h \boldsymbol{\phi}) \leq Ch^2 |\mu^{-1} p|_{1, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.48)$$

Pour le terme $b_h(\xi - \pi_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$, on peut écrire grâce à l'ingélaité de Cauchy-Schwartz et le Théorème 4.3.2 que

$$\begin{aligned} b_h(\xi - \pi_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) &= \int_{\Gamma} \{\xi - \pi_h \xi\} [(I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}] ds \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\lambda_T} \|\{\xi - \pi_h \xi\}\|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \|[(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]\|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\lambda_T} \|\{\xi - \pi_h \xi\}\|_{0, \Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|. \end{aligned}$$

D'une part, si α et β sont bornés alors, à l'aide de $\frac{1}{\lambda_T} = \frac{|T^i|}{\mu_i k^i |\Gamma_T|}$, $0 \leq k^{in}, k^{ex} \leq 1$ et l'inégalité de trace, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} \|\{\xi - \pi_h \xi\}\|_{0, \Gamma_T} &\leq \sqrt{\frac{|T^{in}|}{|\Gamma_T|}} \|\mu_{in}^{-1/2} (\xi^{in} - \pi_h^{in} \xi^{in})\|_{0, \Gamma_T} + \sqrt{\frac{|T^{ex}|}{|\Gamma_T|}} \|\mu_{ex}^{-1/2} (\xi^{ex} - \pi_h^{ex} \xi^{ex})\|_{0, \Gamma_T} \\ &\leq C \sum_{i=in, ex} \sqrt{|T^i|} \left(\frac{1}{h_T} \|\mu_i^{-1/2} (\xi^i - \pi_h^i \xi^i)\|_{0, T} + |\mu_i^{-1/2} (\xi^i - \pi_h^i \xi^i)|_{1, T} \right). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur d'interpolateur π_h (cf. Lemme 4.3.13), $|T^{in}| = \alpha |T|$, $|T^{ex}| = (1 - \alpha)^2 |T|$, $0 < \alpha < 1$ et la régularité (4.46), il vient que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} \|\{\xi - \pi_h \xi\}\|_{0, \Gamma_T} \leq Ch \|\mu^{-1/2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

D'autre part, on s'intéresse aux cas limite $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 0$ et $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 1$. On détaille le cas limite $\alpha = \beta$, $\alpha \rightarrow 1$ et l'autre cas se traite de la même manière. Pour se faire, on utilise les inégalités de trace sur les parties coupées, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} \|\{\xi - \pi_h \xi\}\|_{0,\Gamma_T} &\leq \sqrt{\frac{|T^{in}|}{|\Gamma_T|}} \|\mu_{in}^{-1/2}(\xi^{in} - \pi_h^{in} \xi^{in})\|_{0,\Gamma_T} + \sqrt{\frac{|T^{ex}|}{|\Gamma_T|}} \|\mu_{ex}^{-1/2}(\xi^{ex} - \pi_h^{ex} \xi^{ex})\|_{0,\Gamma_T} \\ &\leq C \sqrt{|T^{in}|} \left(\frac{1}{h_T} \|\mu_{in}^{-1/2}(\xi^{in} - \pi_h^{in} \xi^{in})\|_{0,T} + \|\mu_{in}^{-1/2}(\xi^{in} - \pi_h^{in} \xi^{in})\|_{1,T} \right) \\ &\quad + C \sqrt{|T^{ex}|} \left(\frac{1}{(1-\alpha)h_T} \|\mu_{ex}^{-1/2}(\xi^{ex} - \pi_h^{ex} \xi^{ex})\|_{0,T} \right. \\ &\quad \left. + \|\mu_{ex}^{-1/2}(\xi^{ex} - \pi_h^{ex} \xi^{ex})\|_{1,T} \right). \end{aligned}$$

Toujours, à l'aide des propriétés de l'interpolateur π_h (cf. Lemme 4.3.13), $|T^{in}| = \alpha|T|$, $|T^{ex}| = (1-\alpha)^2|T|$, $0 < \alpha < 1$ et la régularité (4.46), on obtient

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} \|\{\xi - \pi_h \xi\}\|_{0,\Gamma_T} \leq Ch \|\mu^{-1/2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}},$$

ce qui à l'aide du Théorème 4.3.2 nous donne

$$b_h(\xi - \pi_h \xi, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \leq Ch^2 \left(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + \|\mu^{-1}p\|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.49)$$

Pour contrôler le terme $a_h(\boldsymbol{\phi} - I_h \boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})$, on utilise la continuité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$, $|||\boldsymbol{\phi} - I_h \boldsymbol{\phi}||| \leq Ch \|\mu^{1/2} \boldsymbol{\phi}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$ (cf Théorème 2.2.1) et la régularité (4.46). On obtient que

$$\begin{aligned} |a_h(\boldsymbol{\phi} - I_h \boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u})| &\leq Ch \|\mu^{-1/2}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||\mathbf{u}_h - I_h \mathbf{u}||| \\ &\leq Ch^2 \left(\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + \|\mu^{-1}p\|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

On contrôle maintenant les termes dus à la non-conformité de la méthode et à la méthode NXFEM. D'après le Lemme 4.3.12 et les propriétés de $\boldsymbol{\phi}$, on a

$$\Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, I_h \boldsymbol{\phi}) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e \mu \nabla_n \mathbf{u} [I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}] ds \leq C_1 h \|\mu^{1/2} \mathbf{u}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}|||,$$

à l'aide de $|||\boldsymbol{\phi} - I_h \boldsymbol{\phi}||| \leq Ch \|\mu^{1/2} \boldsymbol{\phi}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$ et de la régularité (4.46), il vient que

$$\Sigma_u^{nc}(\mathbf{u}, I_h \boldsymbol{\phi}) \leq Ch^2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.51)$$

On suit la même stratégie pour $\Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, I_h \boldsymbol{\phi})$, on obtient

$$\Sigma_u^{cut}(\mathbf{u}, I_h \boldsymbol{\phi}) \leq Ch^2 \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.52)$$

On traite maintenant le terme $\Sigma_p^{nc}(p, I_h \boldsymbol{\phi})$. On a, à l'aide des propriétés de $\boldsymbol{\phi}$ et celles de l'interpolateur I_h et du Lemme 4.3.14 :

$$\Sigma_p^{nc}(p, I_h \boldsymbol{\phi}) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \int_e p [(I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n}] ds \leq C_3 h \|\mu^{-1/2} \mathbf{u}\|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} |||I_h \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}|||,$$

en utilisant $|||\phi - I_h \phi||| \leq Ch|\mu^{1/2} \phi|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$ et la régularité (4.46), on obtient

$$\Sigma_p^{nc}(p, I_h \phi) \leq Ch^2 |\mu^{-1} p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} ||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h||_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.53)$$

De même, on a

$$\Sigma_p^{cut}(p, I_h \phi) \leq Ch^2 |\mu^{-1} p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} ||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h||_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}. \quad (4.54)$$

En rassemblant (4.48),(4.49),(4.50),(4.51),(4.52),(4.53) et (4.54), on retrouve le résultat du théorème. ■

4.4 Deuxième approche : rajout de termes de stabilisation

Cette section est consacrée à l'approximation du problème d'interface de Stokes. Nous reprenons les résultats théoriques de cette approche dans la section 2.3 du chapitre 2 et en les appliquant au problème de Stokes (4.4). En d'autres termes, il s'agit de rajouter des termes de stabilisation afin de compenser les termes dûs à la méthode NXFEM.

Cette partie est découpée comme suit. Tout d'abord, on présente le problème discret et les nouveaux termes de stabilisation à rajouter pour que le problème soit consistant.

Ensuite, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel. Ici, nous cherchons à vérifier les conditions du théorème de Babuška-Brezzi. Finalement, on aborde l'estimation d'erreur *a priori* correspondante à cette approximation.

4.4.1 Problème discret - Existence et unicité

Nous définissons les espaces produits d'approximation de la vitesse \mathbf{u}_h et de la pression p_h comme suit :

$$\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h^{in} \times \mathbf{V}_h^{ex}, \quad Q_h := Q_h^{in} \times Q_h^{ex} \quad (4.55)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h^i &= \{v_h \in L^2(\Omega_h^i) : v_h|_T \in [P^1(T)]^2, \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \int_e [v_h] ds = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^\partial\}, \\ Q_h^i &= \{q \in L_0^2(\Omega^i) : q|_T \in P^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i\}, \quad i = in, ex. \end{aligned}$$

Les espaces \mathbf{V}_h et Q_h sont respectivement équipées des normes suivantes :

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]]^2 &:= |||\mathbf{u}|||^2 + J_{in}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + J_{ex}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ \|p\|_{\mu, \Omega}^2 &:= \sum_{i=in, ex} \|\mu_i^{-1/2} p^i\|_{0, \Omega^i}^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Remarque 4.4.1. Il est facile de prouver que l'application $\mathbf{u} \rightarrow [[\mathbf{u}]]$ est une norme sur l'espace d'approximation \mathbf{V}_h .

Nous rappelons maintenant la forme bilinéaire $a_{stab}(\cdot, \cdot)$, donnée par (2.76) dans le chapitre 2, correspondante à l'opérateur elliptique et nous introduisons le nouveau terme de stabilisation pour la pression sur les arêtes coupées.

$$B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e \{p_h^i\} [\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds, \quad i = in, ex.$$

Nous introduisons la formulation variationnelle associé au problème (4.4) via la méthode de Nitsche : chercher $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ tels que

$$\begin{cases} a_{stab}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_{stab}(p_h, \mathbf{v}_h) = l(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b_{stab}(q_h, \mathbf{u}_h) = 0, & \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \quad (4.57)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{stab}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=in,ex} A_h^i(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=in,ex} \gamma_i J_h^i(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \\ b_{stab}(p, \mathbf{v}_h) &= b_h(p, \mathbf{v}_h) + \sum_{i=in,ex} B_h^i(p, \mathbf{v}_h), \end{aligned}$$

Nous rappelons ici que les termes de stabilisation $A_h^i(\cdot, \cdot)$ et $J_h^i(\cdot, \cdot)$ sont les termes déjà utilisés pour approcher le problème elliptique d'interface dans la section 2.3 du chapitre 2 :

$$\begin{aligned} A_h^i(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= -\mu_i \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{\Gamma,i}} \int_e \left(\{\nabla_n \mathbf{u}_h^i\} [\mathbf{v}_h^i] + \{\nabla_n \mathbf{v}_h^i\} [\mathbf{u}_h^i] \right) ds, \\ J_h^i(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{\Gamma,i}} \mu_i \gamma_i^e \int_e [\pi_0 \mathbf{u}_h^i] [\pi_0 \mathbf{v}_h^i] ds, \quad \gamma_i^e = \frac{2|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}. \end{aligned}$$

où nous avons défini la moyenne d'une fonction φ sur les arrêtes coupées $\{\varphi\} = \kappa^l \varphi^l + \kappa^r \varphi^r$ avec

$$\kappa^l = \frac{|T^{i,l}|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}, \quad \kappa^r = \frac{|T^{i,r}|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|}. \quad (4.58)$$

Existence et unicité de la solution du problème discret

Dans cette section, on souhaite prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (4.57). Pour cela, on va donc montrer que la formulation (4.57), vérifient les hypothèses discrètes du théorème de Babuška-Brezzi. On va tout d'abord vérifier la coercivité de la forme $a_{stab}(\cdot, \cdot)$ sur le noyau discret $\text{Ker}_h b_{stab}$, puis la condition *inf-sup* de la forme $b_{stab}(\cdot, \cdot)$ par rapport à la norme $[[\cdot]]$.

On précise si aucune spécification n'est donnée, les constantes $C > 0$ utilisées sont indépendantes du paramètre de discrétisation h , de la viscosité $\mu = (\mu_{in}, \mu_{ex})$ et des paramètres de stabilisation λ et $\gamma = (\gamma_{in}, \gamma_{ex})$.

Continuité des formes $a_{stab}(\cdot, \cdot)$ et $b_{stab}(\cdot, \cdot)$

Nous avons déjà prouvé que la forme bilinéaire $a_{stab}(\cdot, \cdot)$ est continue par rapport à la norme $[[\cdot]]$ sur \mathbf{V}_h , d'où

Lemme 4.4.1. *Pour λ et γ suffisamment grands, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$a_{stab}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq C [[\mathbf{u}]] [[\mathbf{v}]], \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h. \quad (4.59)$$

Pour prouver la continuité de la forme $b_{stab}(\cdot, \cdot)$, il suffit de contrôler le terme $B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h)$. D'une part, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h) \leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \frac{1}{\gamma_i^e} \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,cut}} \mu_i \gamma_i^e \|[\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2},$$

en utilisant l'inégalité (4.61) et $\int_e [\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds = \int_e [\pi_0 \mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds$, on obtient

$$\begin{aligned} B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h) &\leq \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,\Omega^i} \sqrt{J_h^i(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)} \\ &\leq \frac{1}{2\gamma_i} \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,\Omega^i}^2 + \frac{\gamma_i}{2} J_h^i(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$|||\mathbf{v}_h||| \leq C[[\mathbf{v}_h]].$$

Nous en déduisons :

Lemme 4.4.2. *Pour λ et γ suffisamment grands, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$b_{stab}(p_h, \mathbf{v}) \leq C[[\mathbf{v}]] \|p\|_{\mu, \Omega}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \forall p_h \in Q_h. \quad (4.60)$$

Coercivité de la forme $a_{stab}(\cdot, \cdot)$

D'après le Lemme 2.3.2 du chapitre 2, on démontre que la forme bilinéaire $a_{stab}(\cdot, \cdot)$ est continue sur \mathbf{V}_h par rapport à la norme $[[\cdot]]$ définie dans (4.56), et pas seulement sur $\text{Ker}_h b_{stab}$. Nous avons

Lemme 4.4.3. *Pour λ , γ_{in} et γ_{ex} suffisamment grands, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que*

$$a_{stab}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq C_1 [[\mathbf{u}_h]]^2, \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h.$$

Il est utile d'introduire le résultat préliminaire qui nous permet de majorer les nouveaux termes de stabilisation sur les arrêtes coupées.

Lemme 4.4.4. *Pour tout $T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma, i}$ et pour tout $e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}$, $i = in, ex$, nous avons*

$$\|\{p_h\}\|_{0,e}^2 \leq \gamma_i^e \left(\|p_h\|_{0,T^{i,l}}^2 + \|p_h\|_{0,T^{i,r}}^2 \right), \quad \forall p_h \in Q_h^i. \quad (4.61)$$

Démonstration. On a, par définition

$$\frac{1}{2} \int_e \{p_h\}^2 ds \leq (\kappa^l)^2 \int_{T^{i,l}} |p_h|^2 ds + (\kappa^r)^2 \int_{T^{i,r}} |p_h|^2 ds.$$

Comme $p_h \in P^0(T)$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_e \{p_h\}^2 ds &\leq (\kappa^l)^2 \frac{|e|}{|T^{i,l}|} \int_{T^{i,l}} |p_h|^2 ds + (\kappa^r)^2 \frac{|e|}{|T^{i,r}|} \int_{T^{i,r}} |p_h|^2 ds \\ &\leq \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \int_{T^{i,l}} |p_h|^2 ds + \frac{|e|}{|T^{i,l}| + |T^{i,r}|} \int_{T^{i,r}} |p_h|^2 ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_e \{p_h\}^2 ds \leq \gamma_i^e \left(\int_{T^{i,l}} |p_h|^2 ds + \int_{T^{i,r}} |p_h|^2 ds \right).$$

■

4.4.2 Condition *inf-sup*

On s'intéresse ici à prouver la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b_{stab}(\cdot, \cdot)$. On utilise le même raisonnement que pour la première approche. On rappelle que \mathbf{V}_h est l'espace des éléments finis P^1 -non-conformes de Crouzeix-Raviart pour la vitesse et Q_h est l'espace des éléments finis P^0 pour la pression.

On suit les mêmes démarches que dans la première approche (voir le paragraphe 4.3.2) pour montrer les résultats des lemmes qui entrent en jeu. On établit :

Lemme 4.4.5. *Il existe une constante $C > 0$, pour tout $p_h \in Q_h$, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ tel que*

$$b_{stab}(p_h, \mathbf{v}_h) \geq C \|p_h\|_{\mu, \Omega}^2, \quad [[\mathbf{v}_h]] \leq C \|p_h\|_{\mu, \Omega}.$$

Démonstration. Pour montrer la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b_n(\cdot, \cdot)$, il suffit de contrôler le terme $B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h)$. Puis, on suit le même raisonnement que pour la première approche. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h) \leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \frac{1}{\gamma_i^e} \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \mu_i \gamma_i^e \|[\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e]\|_{0,e}^2 \right)^{1/2},$$

en utilisant l'inégalité (4.61) et $\int_e [\mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds = \int_e [\pi_0 \mathbf{v}_h^i \cdot \mathbf{n}_e] ds$, on obtient

$$B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,T} \sqrt{J_h^i(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)}. \quad (4.62)$$

On suit le même raisonnement que pour le lemme de la condition *inf-sup* de la première approche. On associe à un $p_h \in Q_h$ arbitraire la même fonction $\mathbf{v}_h = I_h \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ que précédemment. Il suffit donc de montrer que

$$[[\mathbf{v}_h]]^2 = ||[\mathbf{v}_h]||^2 + J_h^{in}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + J_h^{ex}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq C \|\mu^{-1/2} p_h\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2.$$

On doit donc contrôler le terme :

$$J_h^i(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \mu_i \gamma_i^e \int_e [\pi_0 \mathbf{v}_h^i]^2 ds, \quad i = in, ex$$

Nous utilisons $[\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n}_e] = 0$ et l'inégalité de trace sur $\partial T^r \cap \partial T^l = \tilde{e} \in \mathcal{E}_h^{cut}$:

$$\begin{aligned} ||[I_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e} &\leq ||[(I_h \mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}]\|_{0,\tilde{e}} \\ &\leq c \sqrt{|\tilde{e}|} \left(\frac{1}{h^{T^r}} \|I_h \mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_{0,T^r} + \frac{1}{h^{T^l}} \|I_h \mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_{0,T^l} + |I_h \mathbf{v}_h - \mathbf{v}|_{1,T^r} + |I_h \mathbf{v}_h - \mathbf{v}|_{1,T^l} \right). \end{aligned}$$

puis, les propriétés d'interpolation de l'opérateur de Crouzeix-Raviart I_h . On obtient donc que

$$||[I_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e} \leq c \sqrt{|\tilde{e}|} (|\mathbf{v}|_{1,T^r} + |\mathbf{v}|_{1,T^l}) \leq C \sqrt{|\tilde{e}|} \left(\sqrt{\frac{|T^r|}{|T^{i,r}|}} |\mathbf{v}|_{1,T^{i,r}} + \sqrt{\frac{|T^l|}{|T^{i,l}|}} |\mathbf{v}|_{1,T^{i,l}} \right).$$

Par conséquent,

$$(J_h^i(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h))^{1/2} \leq C |\mu_i^{1/2} \mathbf{v}^i|_{1, \Omega^i} \leq C \|\mu_i^{-1/2} p^i\|_{0, \Omega^i}.$$

Enfin, l'inégalité (4.62) devient

$$B_h^i(p_h, \mathbf{v}_h) \leq \tilde{C}_i \|\mu_i^{-1/2} p_h^i\|_{0,\Omega^i}^2.$$

D'après le Lemme 4.3.9 qui nous donne la coercivité de $b_h(\cdot, \cdot)$, il vient que

$$\begin{aligned} b_{stab}(p_h, \mathbf{v}_h) &\geq C \|\mu^{-1/2} p_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 - \delta_{in} \tilde{C}_{in} \|\mu_{in}^{-1/2} p_h^{in}\|_{0,\Omega^{in}}^2 - \delta_{ex} \tilde{C}_{ex} \|\mu_{ex}^{-1/2} p_h^{ex}\|_{0,\Omega^{ex}}^2 \\ &\geq (C - \delta_{in} \tilde{C}_{in}) \|\mu^{-1/2} p_h^{in}\|_{0,\Omega^{in}}^2 + (C - \delta_{ex} \tilde{C}_{ex}) \|\mu_{ex}^{-1/2} p_h^{ex}\|_{0,\Omega^{ex}}^2. \end{aligned}$$

On prend par exemple $\delta_i = \frac{C}{2\tilde{C}_i}$, $i = in, ex$. Alors, il existe une constante C_0 telle que

$$b_{stab}(p_h, \mathbf{v}_h) \geq C_0 \|\mu^{-1/2} p_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2$$

et nous avons aussi

$$[[\mathbf{v}_h]] \leq C_1 \|\mu^{-1/2} p_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} = C_1 \|p_h\|_{\mu,\Omega}.$$

■

En utilisant le résultat du Lemme 4.4.5, nous avons la condition *inf-sup* de la forme $b_{stab}(\cdot, \cdot)$:

Lemme 4.4.6. *Il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de h , de μ et de (λ, γ) telle que*

$$\inf_{p_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b_{stab}(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|p_h\|_{\mu,\Omega} [[\mathbf{v}_h]]} \geq C_2.$$

4.4.3 Estimation d'erreur *a priori*

Dans cette section, nous allons étudier maintenant les estimations d'erreur *a priori* pour la formulation variationnelle (4.57).

La différence entre cette approche et la première approche consiste sur l'ajout des termes de stabilisation $A_h^i(\cdot, \cdot)$ et $J_h^i(\cdot, \cdot)$ pour la vitesse ; ces termes sont similaires à ceux de la méthode de Galerkin discontinue. En plus des termes de stabilisation pour \mathbf{u} , nous avons aussi rajouté des termes de stabilisation $B_h^i(\cdot, \cdot)$ pour la pression. Le but de ces termes est de compenser les termes dûs à la méthode NXFEM sur les arêtes coupées par l'interface Γ .

D'après le Lemme 4.3.11 et le Lemme 2.2.11 du Chapitre 2, nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme 4.4.7. *Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème de Stokes continu (4.4) et $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solution de la formulation variationnelle (4.57). Alors, on a*

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p - p_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{nc}} \left(\int_e \mu \nabla_n \mathbf{u} [\mathbf{v}_h] ds - \int_e p [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds \right), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b_h(q_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Nous appliquons le Lemme de Strang [42] et nous utilisons les majorations classiques vues précédemment des termes sur les arrêtes non-coupées, nous en déduisons le théorème d'estimation d'erreur *a priori* :

Théorème 4.4.1. Soit $(\mathbf{u}, p) \in [H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})]^2 \times H^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})$ la solution du problème de Stokes continu et soit λ et γ suffisamment grands. Alors la solution (\mathbf{u}_h, p) du problème variationnel (4.57) satisfait l'estimation d'erreur suivante :

$$[[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]] + \|\mu^{-1/2}(p - p_h)\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq Ch \left(|\mu^{1/2}\mathbf{u}|_{2,\Omega^{ex} \cup \Omega^{in}} + |\mu^{-1/2}p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right).$$

Si, de plus Ω est convexe, alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \leq Ch^2 \left(|\mathbf{u}|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + |\mu^{-1}p|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right).$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celles des Théorèmes 4.3.2 et 4.3.3.

En ce qui concerne l'erreur en norme énergie $[[\cdot]]$, nous avons juste besoin d'utiliser les nouvelles estimations suivantes, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$J_{ex}(u - I_h u, u - I_h u) + J_{in}(u - I_h u, u - I_h u) \leq Ch_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} u|_{2,\Omega^i},$$

$$|||\mathbf{v}_h||| \leq C[[\mathbf{v}_h]],$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h et de (μ, λ, γ) . La première estimation vient du Lemme 2.3.5 démontré dans le chapitre 2.

Concernant l'erreur en norme L^2 de la vitesse, on utilise les Lemmes 4.3.12 et 4.3.14.

■

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons démontré que les problèmes variationnels du Stokes des deux approches traitées précédemment sont stables, et que l'erreur globale commise par la méthode NXFEM pour les deux approches est d'ordre optimal pour la vitesse et pour la pression.

Nous prévoyons de traiter dans la suite la robustesse des deux approches par rapport à la géométrie d'interface particulièrement les deux cas limite $\alpha = \beta \rightarrow 0$ et $\alpha = \beta \rightarrow 1$.

Résultats numériques pour le problème de Stokes

Dans ce chapitre, on présente des résultats numériques dans le but d'illustrer les résultats théoriques proposés dans le chapitre 4 pour la première méthode. Cette dernière a été implémentée dans la librairie C++ CONCHA. D'une part, on s'intéresse à l'ordre de convergence de la méthode par rapport au raffinement de maillage. D'autre part, on étudie un écoulement biphase de Poiseuille pour lequel on connaît la solution analytique.

Sommaire

5.1	Formulation variationnelle associée aux équations de Stokes	124
5.2	Cas tests académiques	125
5.2.1	Solution exacte linéaire avec une interface droite	125
5.2.2	Solution exacte continue avec une interface artificielle	125
5.2.3	Solution exacte quadratique avec une interface courbe	125
5.2.4	Résultats numériques	126
5.3	Écoulement de Poiseuille biphase où $\mu_{in} = \mu_{ex}$	129
5.3.1	Vitesse entrante parabolique	129
5.3.2	Vitesse entrante quasi constante	130
5.4	Écoulement de Poiseuille biphase	131
5.4.1	Vitesse entrante parabolique	132
5.4.2	Vitesse entrante quasi constante	133
5.4.3	Comparaison avec la solution analytique dans l'écoulement développé	134

5.1 Formulation variationnelle associée aux équations de Stokes

Considérons le problème modèle de Stokes (4.4) dans un domaine Ω , séparé par une interface lisse Γ en deux sous-domaine Ω^{in} et Ω^{ex} . Contrairement au chapitre 4, on prend ici des second-membres non-nuls, afin d'identifier tous les termes qu'on sera amené à programmer pour tester divers cas-tests. On cherche la vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = \sigma & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}] = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où μ est la viscosité discontinue et strictement positive, supposée ici constante par sous-domaine : $\mu = \mu_{in}$ dans Ω^{in} et $\mu = \mu_{ex}$ dans Ω^{ex} .

On s'intéresse à la formulation variationnelle du problème (5.1) utilisant la première approche développée dans le chapitre 4. Les conditions de bord sont traitées de manière faible via la méthode de Nitsche.

Dans ce cas, nous avons les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T \mu \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h dx - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n \mathbf{u}_h\} \cdot [\mathbf{v}_h] ds - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n \mathbf{v}_h\} \cdot [\mathbf{u}_h] ds \\ &\quad + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [\mathbf{u}_h] \cdot [\mathbf{v}_h] ds - \int_{\partial\Omega} \mu \nabla_n \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h ds - \int_{\partial\Omega} \mu \nabla_n \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h ds \\ &\quad + \lambda_D \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial}} \frac{\mu}{h_T} \int_T \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h ds, \\ b_h(p_h, \mathbf{v}_h) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h dx + \int_{\Gamma} \{p_h\} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] ds + \int_{\partial\Omega} p_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

et les formes linéaires :

$$\begin{aligned} l_h(\mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h dx + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \{\mathbf{v}_h\}_* ds + \lambda_D \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial}} \frac{\mu}{h_T} \int_T \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{v}_h ds - \int_{\partial\Omega} \mu \nabla_n \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_D ds, \\ \sigma_h(q) &= \int_{\Omega} \sigma q dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} q dx, \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ et $\lambda_D > 0$ désignent des paramètres de stabilisation indépendants des coefficients de viscosité et de la géométrie du maillage ; λ_T est le paramètre donné par (1.14).

La formulation variationnelle discrète associée au problème (5.1) se met sous la forme mixte suivante : trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \tilde{\mathbf{V}}_h \times Q_h$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) &= l_h(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h) &= \sigma_h(q), \quad \forall q_h \in Q_h. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Ci-dessus, l'espace $\tilde{\mathbf{V}}_h$ tient compte des degrés de liberté sur toutes les arêtes (bord inclus).

Ce problème est ramené à la résolution d'un système linéaire sous la forme condensée :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_h \\ \sigma_h \end{pmatrix}.$$

5.2 Cas tests académiques

5.2.1 Solution exacte linéaire avec une interface droite

Afin de valider notre code, on considère le problème modèle de Stokes (4.4) dans le carré unité $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$, séparé par l'interface Γ d'équation $x = 1/2$ en deux milieux $\Omega^{in} = [-1; 1/2] \times [-1; 1]$ et $\Omega^{ex} =]1/2; 1] \times [-1; 1]$. Nous avons choisi la solution exacte linéaire suivante :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -0,5 + 2x + y \\ -0,5 + x - 2y \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = 1.$$

5.2.2 Solution exacte continue avec une interface artificielle

Nous analysons le cas d'une interface artificielle dans un fluide incompressible avec les propriétés des matériaux constantes sur l'ensemble du domaine de simulation, comme proposé dans [16, 77]. Pour le problème de Stokes (4.4) avec coefficients de viscosité $\mu_{in} = \mu_{ex}$, la solution analytique est :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 20xy^3 \\ 5x^4 - 5y^4 \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = 60x^2y - 20y^3 - 5.$$

Elle satisfait des conditions de bord de type Dirichlet homogènes et le second membre est $\mathbf{f} = 0$.

5.2.3 Solution exacte quadratique avec une interface courbe

Dans la suite, pour faciliter les comparaisons, nous considérons une interface elliptique et le même cas-test que R. Becker et al. [16]. Ceci est un problème élastique linéaire incompressible qui peut être réinterprété comme un problème Stokes avec un terme source \mathbf{f} approprié.

Plaçons-nous maintenant sur le carré unité $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$, séparé par l'interface de discontinuité

$$\Gamma = \{(x, y) : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = a^2\},$$

en deux milieux Ω^{in} et Ω^{ex} tels que

$$\Omega^{in} = \{(x, y) : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < a^2\},$$

$$\Omega^{ex} = \{(x, y) : (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 > a^2\}.$$

La figure Fig. 5.1 illustre le domaine physique étudié :

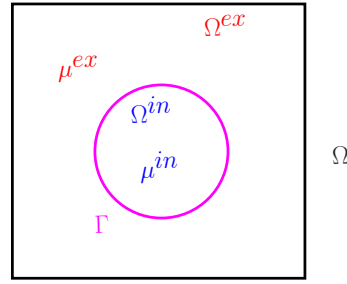


Fig. 5.1 – Problème physique

Fixons $a = 1/4$, $x_c = y_c = 1/2$, $E_{in} = E_{ex} = 1$, $v_{ex} = 1/4$ et $v_{in} = 0,49$. Les coefficients de viscosité μ_i sont définis comme suit :

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + v_i)}, \quad i = in, ex. \quad (5.3)$$

En utilisant les coordonnées polaires, avec $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$, $b = 1/2$, la vitesse $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta)$ et la pression p sont données sous cette forme :

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= \begin{cases} c_{in}r & \text{si } \Omega^{in}, \\ (r - \frac{b^2}{r})c_{ex} + \frac{b^2}{r} & \text{si } \Omega^{ex}, \end{cases} \\ u_\theta(r, \theta) &= 0, \\ p(r, \theta) &= \begin{cases} -2c_{in}\lambda_{in} & \text{si } \Omega^{in}, \\ -2c_{ex}\lambda_{ex} & \text{si } \Omega^{ex} \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_{in} &= \frac{E_{in}v_{in}}{(1 + v_{in})(1 - 2v_{in})}, \\ \lambda_{ex} &= \frac{E_{ex}v_{ex}}{(1 + v_{ex})(1 - 2v_{ex})}, \\ c_{in} &= \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)c_{ex} + \frac{b^2}{a^2}, \\ c_{ex} &= \frac{(\lambda_{in} + \mu_{in} + \mu_{ex})b^2}{(\lambda_{ex} + \mu_{ex})a^2 + (\lambda_{in} + \mu_{in})(b^2 - a^2) + \mu_{ex}b^2}. \end{aligned}$$

C'est une solution analytique qui vérifie le problème de Stokes (4.4) avec des conditions de raccord nulles sur Γ . Le second membre est $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ et la fonction σ est définie par :

$$\sigma = \frac{p}{\lambda} \quad \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}.$$

5.2.4 Résultats numériques

Nous avons implémenté les trois tests numériques dans la librairie C++CONCHA.

Dans un premier temps, pour valider notre code, nous avons considéré la solution exacte avec une interface droite et différentes viscosités dans chaque sous-domaine du carré unité. Toujours dans le carré unité séparé par une interface artificielle, on considère une solution exacte continue avec deux viscosités égales. Ensuite, on s'intéresse à une solution exacte dans le carré unité, qui contient une interface courbe.

On fixe maintenant les valeurs de $\lambda = 100$ et $\lambda_D = 100$ pour les tests numériques.

- Solution exacte linéaire avec une interface droite

Pour différentes valeurs des coefficients μ_{in} et μ_{ex} , on retrouve que les erreurs en norme énergie et en norme L^2 pour la vitesse sont nulles, ainsi que la norme L^2 pour la pression. Le tableau Tab. 5.1 récapitule ces résultats pour des coefficients $\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$ Pa.s.

N	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	$ u - u_h $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$
64	$1,75 \cdot 10^{-14}$	$4,98 \cdot 10^{-14}$	$1,65 \cdot 10^{-14}$
256	$1,88 \cdot 10^{-14}$	$8,70 \cdot 10^{-15}$	$9,31 \cdot 10^{-16}$
1 024	$4,31 \cdot 10^{-14}$	$1,57 \cdot 10^{-14}$	$1,21 \cdot 10^{-15}$
4 096	$5,04 \cdot 10^{-14}$	$2,90 \cdot 10^{-14}$	$1,59 \cdot 10^{-15}$
16 384	$7,59 \cdot 10^{-14}$	$5,01 \cdot 10^{-14}$	$2,11 \cdot 10^{-15}$
65 536	$1,36 \cdot 10^{-13}$	$1,04 \cdot 10^{-13}$	$5,57 \cdot 10^{-15}$

Tab. 5.1 – Erreurs : solution exacte linéaire ($\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$ Pa.s)

- Solution exacte continue avec une interface artificielle

Comme précédemment, on montre dans le tableau Tab. 5.2 les erreurs en norme énergie et en norme L^2 obtenues pour la vitesse \mathbf{u} et en norme L^2 pour la pression p , en fonction du nombre de triangles N pour un raffinement uniforme. On présente les erreurs et l'ordre de convergence r , i.e. $\mathcal{O}(h^r) = \mathcal{O}(N^{-r/2})$ où $r = \log_2 \rho$, ρ est le rapport entre l'erreur sur la maille N et l'erreur sur $4N$ éléments.

N	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	ordre	$ u - u_h $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	ordre
64	1,09	—	1,24	—	$6,58 \cdot 10^{-2}$	—
256	$4,68 \cdot 10^{-1}$	1,00	$6,51 \cdot 10^{-1}$	0,93	$2,27 \cdot 10^{-2}$	1,95
1 024	$2,23 \cdot 10^{-1}$	1,07	$3,14 \cdot 10^{-1}$	0,99	$4,90 \cdot 10^{-3}$	1,83
4 096	$1,10 \cdot 10^{-1}$	1,02	$1,58 \cdot 10^{-1}$	0,99	$1,34 \cdot 10^{-3}$	1,88
16 384	$5,49 \cdot 10^{-2}$	1,01	$7,90 \cdot 10^{-2}$	1,00	$3,52 \cdot 10^{-4}$	1,92
65 536	$2,74 \cdot 10^{-2}$	1,00	$3,96 \cdot 10^{-2}$	1,00	$9,07 \cdot 10^{-5}$	1,96

Tab. 5.2 – Erreurs : solution exacte continue ($\mu_{in} = \mu_{ex} = 1$ Pa.s)

Les résultats obtenus sont en accord avec la théorie, c'est-à-dire :

$$|||u - u_h||| = \mathcal{O}(N^{-1/2}) = \mathcal{O}(h), \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \approx \mathcal{O}(N^{-1}) = \mathcal{O}(h^2),$$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \approx \mathcal{O}(N^{-1/2}) = \mathcal{O}(h).$$

Pour différentes valeurs de viscosités $\mu_{in} = \mu_{ex}$, on retrouve les ordres de convergence précédents pour la vitesse et la pression.

On représente maintenant les erreurs, en échelle logarithmique, sur la vitesse en norme énergie et en norme L^2 et sur la pression en norme L^2 . Nous retrouvons dans la figure Fig. 3.6 l'ordre de convergence théorique.

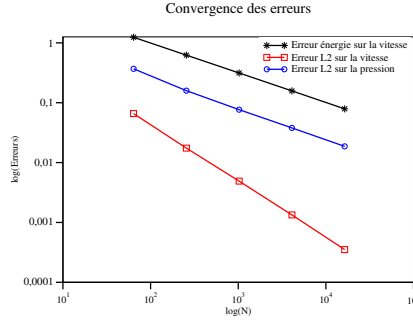


Fig. 5.2 – Ordre de convergence pour les erreurs

- Solution exacte avec une interface courbe

On montre dans le tableau Tab. 5.3 les erreurs en norme énergie et en norme H^1 obtenues pour la vitesse u et celles en norme L^2 pour la pression p , en fonction du nombre de triangles N pour un raffinement uniforme. On présente les erreurs et les rapports α qui nous donnent l'ordre de convergence.

N	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	ordre	$\ u - u_h\ $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	ordre
64	$9,00 \cdot 10^{-1}$	—	5,27	—	$3,11 \cdot 10^{-1}$	—
256	$4,40 \cdot 10^{-1}$	1,03	3,09	0,77	$1,05 \cdot 10^{-1}$	1,57
1 024	$8,30 \cdot 10^{-1}$	1,30	1,49	1,05	$2,50 \cdot 10^{-2}$	2,07
4 096	$3,73 \cdot 10^{-1}$	1,15	$7,35 \cdot 10^{-1}$	1,02	$5,97 \cdot 10^{-3}$	2,06
16 384	$1,77 \cdot 10^{-1}$	1,08	$3,64 \cdot 10^{-1}$	1,01	$1,45 \cdot 10^{-3}$	2,05

Tab. 5.3 – Erreurs et ordres de convergence : solution exacte quadratique

On retrouve numériquement l'ordre de convergence $\mathcal{O}(h)$ pour la vitesse u en norme énergie et $\mathcal{O}(h^2)$ en norme L^2 , c'est-à-dire :

$$\|u - u_h\| = \mathcal{O}(N^{-1/2}) = \mathcal{O}(h), \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(N^{-1}) = \mathcal{O}(h^2),$$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(N^{-1/2}) = \mathcal{O}(h).$$

On trace maintenant les courbes représentant le logarithme des erreurs calculées en fonction du logarithme du nombre d'éléments, pour une approximation P^1 non-conforme pour la vitesse et P^0 pour la pression. Nous retrouvons dans la figure Fig. 3.6 l'ordre de convergence théorique.

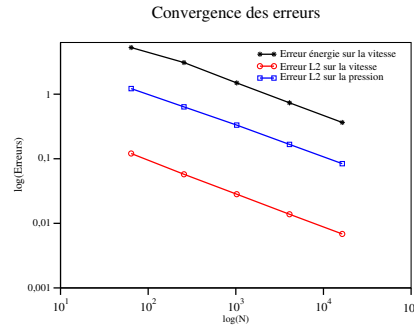


Fig. 5.3 – Ordre de convergence pour les erreurs

5.3 Écoulement de Poiseuille biphase où $\mu_{in} = \mu_{ex}$

Il s'agit ici d'étudier un écoulement d'un fluide de viscosité $\mu_{in} = \mu_{ex} = 10$ Pa.s, afin de valider notre méthode.

On considère maintenant un écoulement de type Poiseuille biphase. On considère le domaine de simulation $\Omega = [0; 0, 1] \times [-0, 01; 0, 01]$, séparé par l'interface Γ d'équation $y = -0, 002$ (représentée par des tirets dans les figures) en deux sous-domaines $\Omega^{ex} =]0; 0, 1[\times] - 0, 01; -0, 002[$ et $\Omega^{in} =]0; 0, 1[\times] - 0, 002; 0, 01[$.

On rappelle que le paramètre de stabilisation est fixé à $\lambda_D = 100$, afin de traiter les conditions de type Dirichlet de façon faible dans la formulation variationnelle via la méthode de Nitsche.

5.3.1 Vitesse entrante parabolique

On désigne par $\boldsymbol{\tau}$ et \boldsymbol{n} respectivement la tangente unitaire et la normale unitaire à $\partial\Omega$ et les conditions de bord sont les suivantes :

— Γ_{in} est le bord entrant, on impose

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0; \quad \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{3}{2} \frac{a^2 - y^2}{a^2}, \quad a = 0, 01.$$

— Γ_{out} est la sortie, on impose une condition de Neumann homogène.

— Sur l'interface Γ , on impose des conditions de raccord : $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, $[\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{n} - p \mathbf{n}] = 0$.

— Sur Γ_D , on impose une condition de type Dirichlet homogène.

La figure Fig. 5.4 illustre les conditions ainsi que les notations mises en jeu cet écoulement.

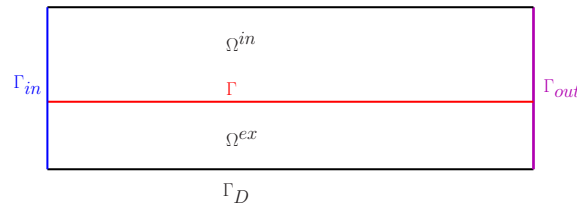


Fig. 5.4 – Configuration géométrique

Nous avons considéré un maillage CrissCross composé de 81 920 triangles pour réaliser les tests numériques. Les tirets des deux côtés de chaque figure désignent la position de l'interface d'équation $y = -0,002$.

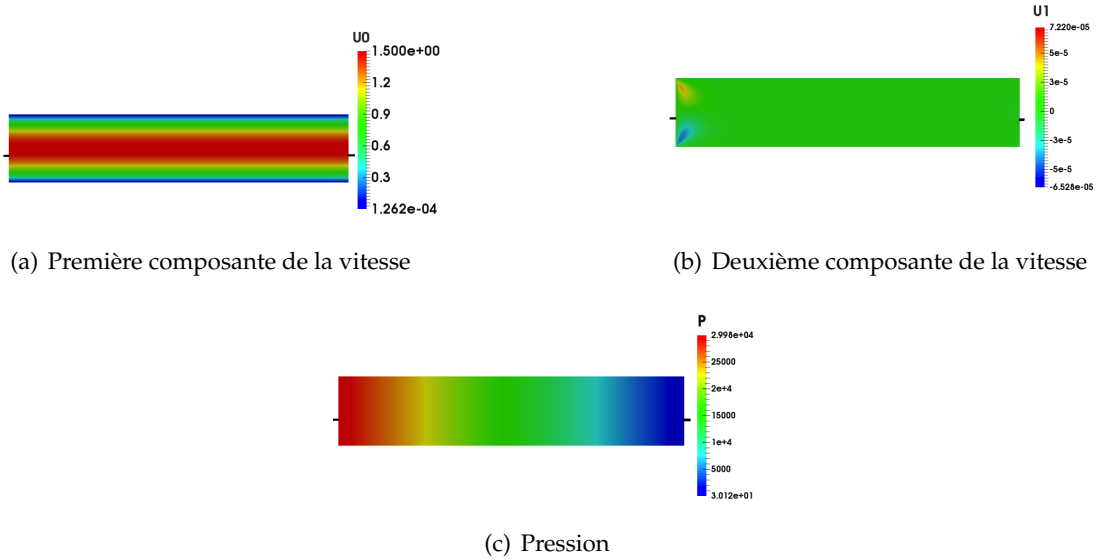


Fig. 5.5 – Écoulement de Poiseuille avec profil d'entrée parabolique

La Fig. 5.5 présente la première composante V_0 et la deuxième composante V_1 de la vitesse. On observe que la pression est linéaire et la vitesse verticale est presque nulle.

5.3.2 Vitesse entrante quasi constante

On veut tester notre méthode avec une solution non régulière aux coins du domaine. Pour cela, on impose à l'entrée Γ_{in} une vitesse normale :

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+0,01)} & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{k(y-0,01)} & \text{si } y > 0 \end{cases}, k = 2000.$$

Remarque 5.3.1. Sur le bord entrant Γ_{in} , nous avons imposé $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sous la forme exponentielle pour que la vitesse soit nulle en $y \pm 0,01$.

Les autres conditions de bord et de raccord restent inchangées. Pour Nous avons considérés le même maillage que précédemment.

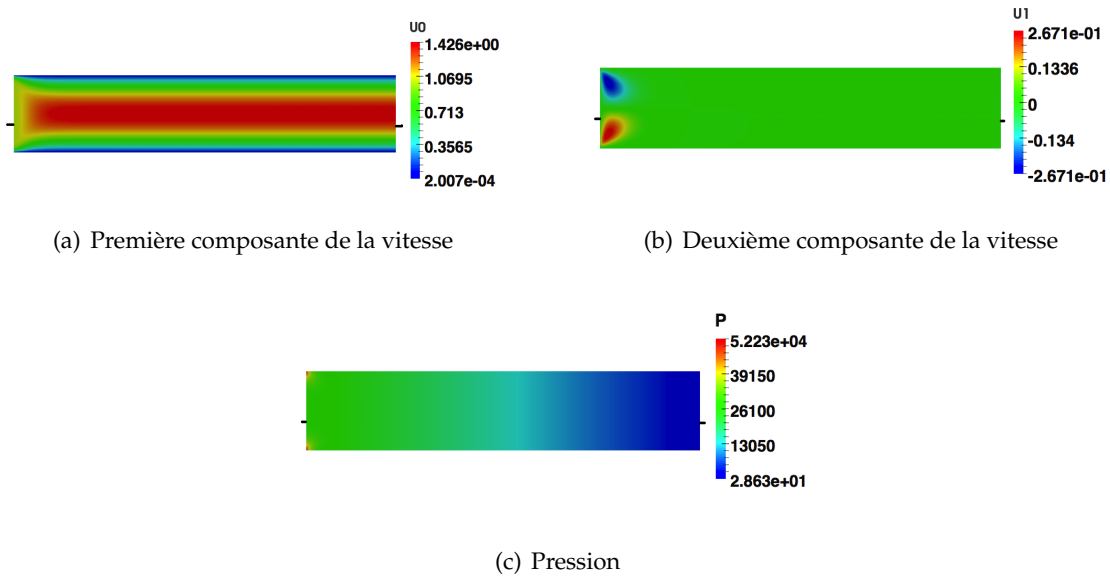


Fig. 5.6 – Écoulement de Poiseuille avec profil d'entrée constant

On observe que les deux liquides immergés dans les milieux Ω^{in} et Ω^{ex} , s'écoulent comme un seul liquide.

Les valeurs plus élevées de la pression sont situées au voisinage du paroi pour les deux liquides.

On présente dans la figure Fig. 5.7 le profil de vitesse U_0 d'une coupe à $x = 0,05$. On obtient donc le profil d'écoulement de Poiseuille monophasique.

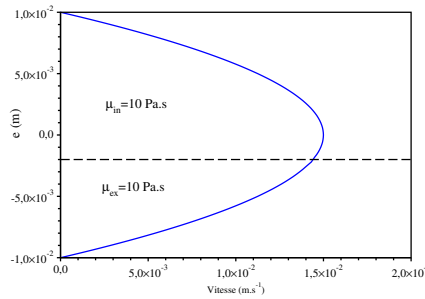


Fig. 5.7 – Profil d'écoulement de Poiseuille

5.4 Écoulement de Poiseuille biphase

On considère maintenant un écoulement de type Poiseuille biphase. On considère le domaine de simulation $\Omega = [0; 0,1] \times [-t; t]$ avec $t = 0,01\text{m}$, séparé par l'interface Γ d'équation $y = \zeta t$ avec $\zeta = -0,2$ en deux sous-domaines $\Omega^{ex} =]0; 0,1[\times] -0,01; -0,002[$ et $\Omega^{in} =]0; 0,1[\times] -0,002; 0,01[$.

On définit μ la viscosité des fluides dans chaque sous-domaine telle que

$$\mu = \begin{cases} \mu_{in} = 100 \text{ Pa.s} & \text{sur } \Omega^{in}, \\ \mu_{ex} = 10 \text{ Pa.s} & \text{sur } \Omega^{ex}. \end{cases}$$

On fixe le paramètre de stabilisation $\lambda_D = 100$ pour les tests numériques, afin de traiter les conditions de type Dirichlet de façon faible dans la formulation variationnelle via la méthode de Nitsche.

5.4.1 Vitesse entrante parabolique

On désigne par $\boldsymbol{\tau}$ et \boldsymbol{n} respectivement la tangente unitaire et la normale unitaire à $\partial\Omega$ et on impose ici les conditions de bord suivantes :

— À l'entrée Γ_{in}

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{a^2 - y^2}{a^2}, \quad a = 0,01.$$

— À la sortie Γ_{out} , condition de Neumann homogène

$$\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = 0.$$

— Sur l'interface Γ , conditions de raccord

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad [\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}] = 0.$$

— Condition de type Dirichlet sur Γ_D

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Dans la figure Fig. 5.8, les conditions ainsi que les notations mises en jeu dans notre exemple sont illustrées.

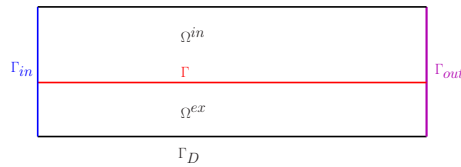


Fig. 5.8 – Configuration géométrique

Les tests numériques ont été réalisés sur un maillage CrissCross composé de 81 920 triangles. Les tirets sur les figures désignent la position de l'interface d'équation $y = \zeta t = -0,002$.

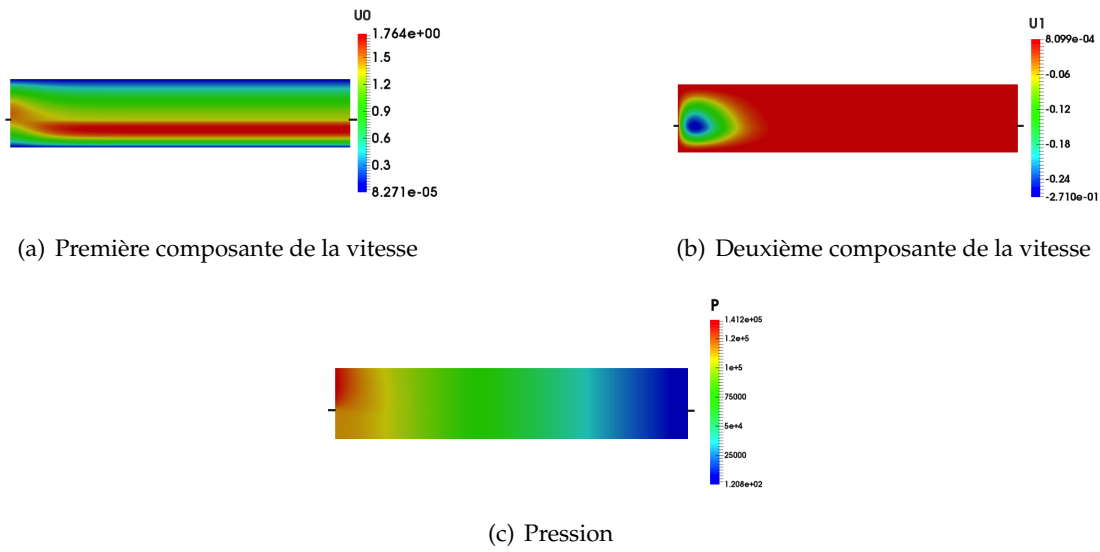


Fig. 5.9 – Écoulement de Poiseuille biphase avec profil d'entrée parabolique

On présente dans Fig. 5.9, la solution obtenue ; $U0$ et $U1$ correspondent à la première, respectivement à la deuxième, composante de la vitesse.

Après la mise en équilibre de l'écoulement, on observe que la pression est linéaire et la vitesse verticale presque nulle (comme on pourrait s'y attendre).

5.4.2 Vitesse entrante quasi constante

On souhaite maintenant tester notre approche sur un cas physique. On considère pour cela un profil d'entrée quasi-plat, tel que la solution se raccorde aux coins du domaine. On reprend les mêmes conditions imposées dans le cas test précédent. Cependant, on impose à l'entrée Γ_{in} une vitesse normale de la forme :

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0; \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+t)} & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{k(y-t)} & \text{si } y > 0 \end{cases}, k = 2000.$$

Les autres conditions de bord et de raccord à travers l'interface restent inchangées. Pour faire les tests numériques, on considère le même maillage que précédemment. On note que les tirets sur les figures précisent la position de l'interface d'équation $y = \zeta t$ avec $\zeta = -0,2$. On reprend les viscosités suivantes :

$$\mu = \begin{cases} \mu_{in} = 100 \text{ Pa.s} & \text{sur } \Omega^{in}, \\ \mu_{ex} = 10 \text{ Pa.s} & \text{sur } \Omega^{ex}. \end{cases}$$

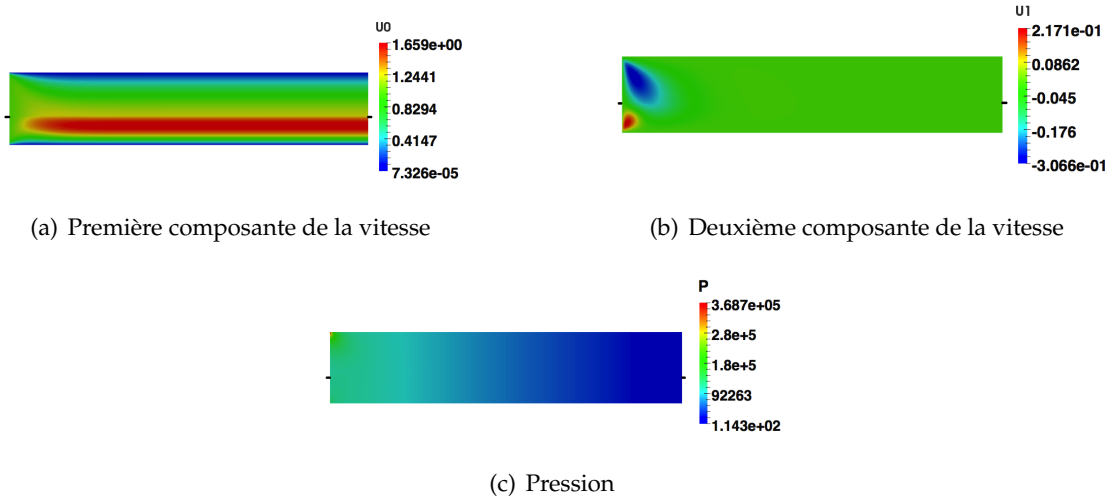


Fig. 5.10 – Écoulement de Poiseuille biphasique avec profil d'entrée quasi constant

On observe dans la figure Fig. 5.10(a) que l'écoulement est développé rapidement. Le liquide plus visqueux, dans la partie supérieure Ω^{in} , s'écoule plus lentement au voisinage de la paroi que le liquide moins visqueux du milieu Ω^{ex} .

On présente dans la figure Fig. 5.10(c) la pression calculée. On observe que la pression est plus élevée pour le liquide immergé dans le milieu Ω^{in} ayant une viscosité plus grande.

Comme prévu, dans la zone où l'écoulement est développé, la pression est linéaire par rapport à x et indépendante de y . On observe un pic dans le coin supérieur à l'entrée, qui est dû aux valeurs élevées de la viscosité μ_{in} et du taux de cisaillement $\frac{\partial u^{in}}{\partial y}$ près de ce coin ; ceux-ci implique une valeur élevée de la contrainte de cisaillement τ_{12} .

5.4.3 Comparaison avec la solution analytique dans l'écoulement développé

Il existe une solution analytique dans le cas d'un écoulement biphasique développé de liquides newtoniens incompressibles.

Pour la déterminer, on cherche la pression p indépendante de y telle que $p(x) = ax + b$ et la vitesse sous la forme $\mathbf{u} = (u(y), 0)$. Les différentes constantes sont déterminées à partir des conditions aux limites et des conditions de transmission $[u(\zeta t)] = [\tau_{12}(\zeta t)] = 0$.

Nous obtenons finalement les expressions suivantes des vitesses :

$$\begin{cases} u^{in} = \frac{a}{2\mu_{in}} (t - y) ((k - 1)t - y), \\ u^{ex} = \frac{a}{2\mu_{ex}} (t + y) (y - (k + 1)t), \end{cases}$$

avec $k = \frac{(\mu_{ex} - \mu_{in})(1 - \zeta^2)}{\mu_{in}(1 + \zeta) + \mu_{ex}(1 - \zeta)}.$

Nous allons comparer les résultats de la simulation numérique avec cette solution analytique.

La simulation numérique est réalisée dans le domaine $\Omega = [0; 0, 1] \times [-0, 01; 0, 01]$, séparé par l'interface Γ d'équation $y = -0, 002$, dont la géométrie est présentée dans la figure Fig. 5.11. On considère un maillage CrissCross composé de 81 920 triangles. On impose les mêmes conditions de bord que dans le paragraphe 5.4.2.

La figure Fig. 5.11 présente une comparaison entre la solution numérique et la solution analytique. Il s'agit d'une coupe verticale à $x = 0,05\text{m}$ (où l'écoulement est développé) des profils des vitesses horizontales. Ces résultats ont été obtenus pour : $\mu_{in} = 100\text{ Pa.s}$, $\mu_{ex} = 10\text{ Pa.s}$ et $\lambda = \lambda_D = 100$.

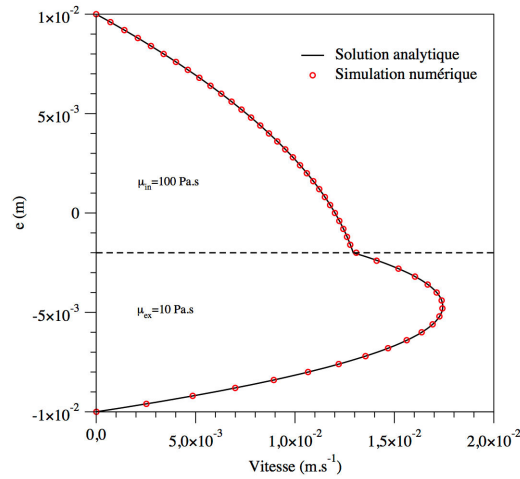


Fig. 5.11 – Écoulement de Poiseuille biphase : comparaison entre la solution numérique et la solution analytique

Nous constatons une très bonne concordance entre la solution analytique et la solution numérique obtenue à l'aide de la librairie CONCHA.

Dans la figure Fig. 5.12, on présente les pressions calculées dans les deux domaines. Nous constatons qu'une pression plus importante est nécessaire pour déplacer le fluide plus visqueux de Ω^{in} (voir la figure Fig. 5.10(c)) ; nous voyons encore une fois que les deux pressions deviennent linéaires et égales l'une à l'autre à partir de $x = 0,02\text{m}$.

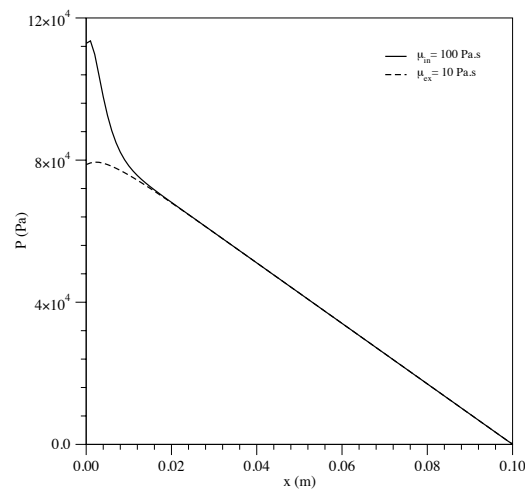


Fig. 5.12 – Pression

La Figure Fig. 5.13 montre les profils de vitesse de la solution numérique à différentes valeurs de x dans la zone de transition ($0 \leq x \leq 0,02$); nous pouvons voir à nouveau l'accélération du fluide moins visqueux et la décélération de celui plus visqueux.

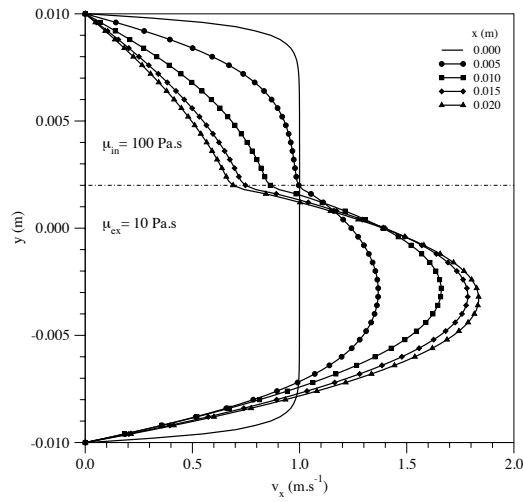


Fig. 5.13 – Profils de vitesse dans la zone de transition

Nous rappelons que le maillage utilisé n'est pas aligné avec l'interface. En conclusion, les simulations numériques montrent que nous obtenons le comportement physique attendu, sans aucune oscillation numérique à l'interface.

PARTIE II

PROBLÈME D'INTERPHASE : MODÉLISATION ASYMPTOTIQUE ET APPROXIMATION PAR NXFEM

Dans cette seconde partie, scindée en trois chapitres, nous nous intéressons à l'approche asymptotique et à l'approximation par méthode NXFEM des problèmes d'interphase. Le premier chapitre de cette seconde partie est dédié à un état de l'art sur la modélisation asymptotique et à la présentation des problèmes d'interphase considérés. Nous donnons aussi quelques outils et notations qui seront utiles dans les chapitres suivants. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons à un problème modèle elliptique de type Darcy avec une fracture. Nous justifierons le problème aux limites obtenu après passage à la limite sur l'épaisseur de la couche mince dans le problème variationnel. Nous développerons ensuite une méthode de type NXFEM avec des éléments finis conformes. Enfin, des simulations numériques seront effectuées et comparées avec des résultats de la littérature. Dans le dernier chapitre, l'extension des résultats de chapitre précédent au problème de Stokes sera développée. Nous proposerons et justifierons un modèle asymptotique pour les équations de Stokes, lorsque l'épaisseur de la couche mince comprise entre deux fluides tend vers 0.

Interphase et problème asymptotique

Ce chapitre a pour but de présenter brièvement les problèmes modèles que l'on traitera dans les chapitres suivants. Nous présentons les notations et les changements de variables mises en jeu dans le cas d'une interface rectiligne ainsi que pour une interface courbe.

Sommaire

6.1	Introduction	139
6.2	Présentation de problèmes modèles	140
6.3	Modélisation asymptotique	142
6.3.1	Cas d'une interface rectiligne	142
6.3.2	Cas d'une interface courbe	143

6.1 Introduction

L'utilisation de l'approche asymptotique est assez courante dans la littérature. Ainsi, à cause de la taille des problèmes à résoudre, on tient compte du fait que le domaine considéré (couche mince, lac, faille, membrane,...) a une faible épaisseur. Cette approche est au cœur de nombreuses applications, qui peuvent être industrielles (aérospatiale, milieu pétrolier ...) mais également bio-médicales (écoulement du sang, déformation des globules rouges ...).

Les milieux pétroliers hétérogènes constituent un exemple important. L'une des raisons est la présence de fractures pouvant jouer un rôle hydraulique, par contribution de manière considérable à la capacité des sols transportés par l'eau et les polluants ; ceci montre l'utilité de la modélisation des failles et de leur prise en compte lors d'une simulation d'écoulement de fluide dans un milieux poreux fracturé. L'épaisseur de ces fractures joue un rôle très important pour l'écoulement des différents fluides.

La connaissance quantitative de l'écoulement d'un fluide dans les milieux poreux trouve de nombreuses applications notamment en géologie (gestion des nappes phréatiques, écoulement souterrain), en ingénierie pétrolière et peut aider à la compréhension des phénomènes géophysiques comme le volcanisme ou la tectonique des plaques. Une autre application est en thermodynamique, où la couche mince représente un matériau très conducteur. La modélisation mathématique et la simulation numérique sont fondamentales pour la compréhension et la gestion de ces phénomènes. De plus, les études de propagation de polluants (stockage des déchets nucléaires, propagation dans les nappes

phréatiques) nécessitent une étude préalable de l'écoulement des fluides qui les transportent.

En médecine, dans la modélisation de l'écoulement de globules rouges, l'intérêt de développement asymptotique est présent, afin d'éviter le problème de faible épaisseur de la membrane, voir le dernier chapitre de la thèse.

Aussi, nous nous sommes intéressés aux problèmes qui font apparaître des domaines de faible épaisseur. Beaucoup de projets de recherche nécessitent le développement des méthodes robustes pour la prise en compte de cette épaisseur tels que la prise en compte des fissures ou des perforations. Cela nous a conduit aux problèmes d'interface, ce qui s'inscrit dans la thématique de l'équipe CONCHA et de cette thèse, voir la première partie.

Le chapitre est constitué comme suit : nous commençons par présenter les équations qui gouvernent l'écoulement dans le domaine du calcul pour chaque problème modèle. Dans la section suivante, nous distinguons deux types d'interface qui nous intéressent dans les chapitres suivants. Ici, on présente les changements de variables et les notations mises en jeu dans la modélisation asymptotique.

6.2 Présentation de problèmes modèles

Dans cette partie, on considère un domaine physique Ω_ε borné régulier, séparé par les interfaces Γ_ε^{in} et Γ_ε^{ex} en trois domaines différents Ω_ε^{in} , Ω_ε^m , Ω_ε^{ex} tel que

$$\overline{\Omega_\varepsilon} = \overline{\Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex} \cup \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}}$$

où ε est un petit paramètre représentant l'épaisseur de Ω_ε^m . On suppose qu'on peut décrire le domaine Ω_ε^m (représentant une couche mince) à partir d'une interface régulière Γ sous cette forme :

$$\Omega_\varepsilon^m = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^2; \zeta = \xi + \varepsilon l n(\xi), \xi \in \Gamma \text{ et } -\frac{h(\xi)}{2} < l < \frac{h(\xi)}{2} \right\} \quad (6.1)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire à l'interface Γ et la fonction épaisseur $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière et bornée.

La figure Fig. 6.1 illustre un exemple de la géométrie du domaine fracturé, d'intérieur Ω_ε^m , et fixe les autres notations.

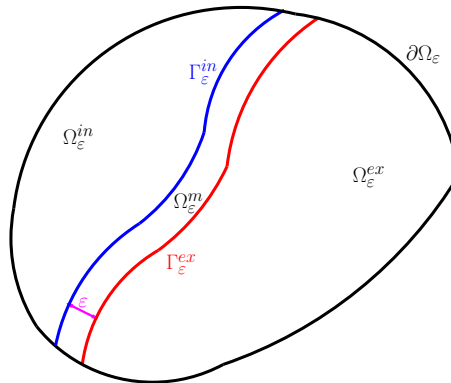


Fig. 6.1 – Exemple du domaine fracturé

Les problèmes modèles considérés dans cette thèse s'inscrivent dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous présentons deux exemples types que l'on souhaite résoudre dans les deux chapitres suivants. Pour simplifier la présentation, on se limite aux conditions de bord homogènes de type Dirichlet.

1. **Modèle de type Darcy** : pour la configuration Ω_ε , on souhaite trouver l'inconnue \tilde{u}_ε dans tout le domaine Ω_ε . Le problème initial est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \tilde{u}_\varepsilon) = \tilde{f} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{u}_\varepsilon] = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}, \\ [\mathbf{K} \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}] = \tilde{g} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \end{array} \right. \quad (6.2)$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{cases} \mathbf{K}^{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \mathbf{K}_\varepsilon^m & \text{dans } \Omega_\varepsilon^m, \\ \mathbf{K}^{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}, \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} \tilde{f}^{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \tilde{f}^m & \text{dans } \Omega_\varepsilon^m, \\ \tilde{f}^{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}, \end{cases} \quad \tilde{g} = \begin{cases} \tilde{g}^{in} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in}, \\ \tilde{g}^{ex} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{ex}. \end{cases}$$

On suppose que les tenseurs de diffusion (\mathbf{K}) par sous domaine sont symétriques, à valeurs dans $L^\infty(\Omega_\varepsilon^i)$ et vérifient la condition d'ellipticité suivante :

$$\begin{aligned} \exists \beta_i > 0, \quad {}^t X \mathbf{K}^i X &\geq \beta_i |X|^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad i = in, ex, \\ \exists \beta_m > 0, \quad {}^t X (\varepsilon \mathbf{K}_\varepsilon^m) X &\geq \beta_m |X|^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

et on note

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \mathbf{K}_\varepsilon^m = \mathbf{K}^m.$$

2. **Modèle de Stokes** : on s'intéresse ici à trouver le champ de vitesse du fluide et sa pression dans tout le domaine Ω_ε . Le problème modèle que l'on considère est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \nabla \tilde{p}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}, \\ [\mu \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \tilde{p}_\varepsilon \mathbf{n}] = \tilde{\mathbf{g}} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \end{array} \right. \quad (6.3)$$

avec $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ la vitesse définie par sous-domaine, $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^i = \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^i}$, $i = in, m, ex$ et \tilde{p}_ε la pression définie aussi sur chaque sous-domaine, $\tilde{p}_\varepsilon^i = \tilde{p}_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon^i}$, $i = in, m, ex$.

La première équation est l'équation de conservation de la quantité de mouvement et la seconde est l'équation de conservation de la masse, qui traduit l'hypothèse que le fluide est incompressible.

On suppose que la viscosité est constante par sous domaine et on suppose aussi que $\tilde{\mathbf{f}}$ et $\tilde{\mathbf{g}}$ sont des fonctions régulières de L^2 telles que

$$\mu = \begin{cases} \mu_{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \mu_m / \varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon^m, \\ \mu_{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}, \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}^{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \tilde{\mathbf{f}}^m & \text{dans } \Omega_\varepsilon^m, \\ \tilde{\mathbf{f}}^{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}, \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{g}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}^{in} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in}, \\ \tilde{\mathbf{g}}^{ex} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{ex}. \end{cases}$$

6.3 Modélisation asymptotique

Dans cette section, on donne les notations et les changements de variables que l'on va considérer dans la suite, afin d'obtenir le modèle asymptotique.

Nous nous limiterons dans la suite au cas bidimensionnel, le cas tridimensionnel se traitant d'une manière rigoureusement analogue.

6.3.1 Cas d'une interface rectiligne

On suppose ici que l'interface est $\Gamma = [0; 1]$ (i.e. la courbe moyenne de Ω_ε^m); l'épaisseur de Ω_ε^m est constante, $h = 1$. Nous donnons les éléments qui entrent en jeu pour définir le problème variationnel obtenu lorsque ε tend vers 0.

Pour simplifier la présentation, on considère le domaine $\bar{\Omega}_\varepsilon = \bar{\Omega}_\varepsilon^{in} \cup \bar{\Omega}_\varepsilon^m \cup \bar{\Omega}_\varepsilon^{ex}$ (voir Fig. 6.2) tel que

$$\begin{aligned}\Omega_\varepsilon^{in} &=]0; 1[\times] -1 - \frac{\varepsilon}{2}; -\frac{\varepsilon}{2}[, \\ \Omega_\varepsilon^m &=]0; 1[\times] -\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}[, \\ \Omega_\varepsilon^{ex} &=]0; 1[\times] \frac{\varepsilon}{2}; 1 + \frac{\varepsilon}{2}[\end{aligned}$$

Nous faisons les changements de variables pour que chaque sous-domaine de Ω_ε soit indépendant de ε . Notons respectivement \tilde{v} et $\nabla \tilde{v}$ la fonction \tilde{v} et son gradient exprimés dans ce nouveau repère.

Domaine initial	Domaine après changement	Changement de variables
Ω_ε^{in}	$\Omega^{in} =]0; 1[\times] \frac{-3}{2}; \frac{-1}{2} [$	$s = x, \quad l = y + \frac{\varepsilon - 1}{2}$
Ω_ε^m	$\Omega^m =]0; 1[\times] \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} [$	$s = x, \quad l = \frac{1}{\varepsilon} y$
Ω_ε^{ex}	$\Omega^{ex} =]0; 1[\times] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} [$	$s = x, \quad l = y - \frac{\varepsilon - 1}{2}$

Tab. 6.1 – Changement d'échelle dans le domaine Ω_ε

Avec ce changement de variables, l'opérateur de dérivation gradient reste invariant dans les domaines Ω^{in} et Ω^{ex} ; et vaut $\nabla_{s,l} v = \nabla_{x,y} \tilde{v}$ ainsi que la mesure de Lebesgue $dsdl = dx dy$. Cependant, nous avons les nouvelles définitions de ces quantités dans le domaine Ω^m :

$$\partial_s v = \partial_x \tilde{v}, \quad \partial_l v = \varepsilon \partial_y \tilde{v}, \quad dx dy = \varepsilon ds dl$$

et le domaine Ω_ε devient alors $\omega =]0; 1[\times] -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} [$ avec $\Gamma =]0; 1[$.

La figure Fig. 6.2 illustre la géométrie avant et après changement d'échelle :

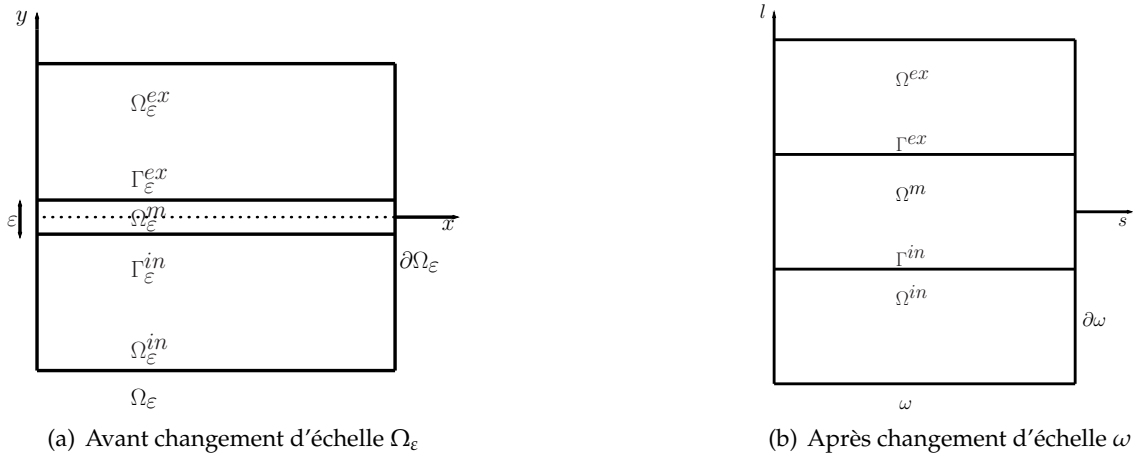


Fig. 6.2 – Géométrie avant et après changement d'échelle

6.3.2 Cas d'une interface courbe

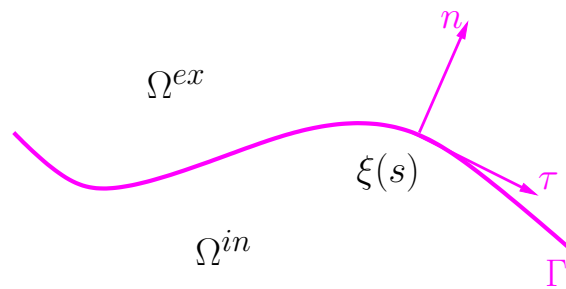
On considère $\xi : I = [0; 1] \longrightarrow \Gamma$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne notée s , croissante dans le sens direct par rapport à Ω^{in} .

En utilisant un changement de variables dans le repère de Frenet, on décrit le domaine de faible épaisseur comme suit :

$$\Omega_\varepsilon^m = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^2; \zeta = \xi(s) + \varepsilon l \mathbf{n}(s), s \in I \text{ and } -\frac{h(\xi)}{2} < l < \frac{h(\xi)}{2} \right\}.$$

Pour simplifier l'étude, on suppose ici que l'épaisseur de l'interface Γ est constante dans le sens de la normale ($h = 1$) et que la courbure moyenne de Γ est lisse.

On désigne par $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\xi}{ds}$ le vecteur unitaire tangent à Γ orienté dans le sens des s croissants, voir Fig. 6.3.

Fig. 6.3 – Système de coordonnées locales sur Γ .

On rappelle ici les formules de Frenet :

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = r\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -r\boldsymbol{\tau}$$

où $r = r(s)$ est la courbure de Γ au point $\xi = \xi(s)$.

Dans la suite, pour alléger les notations, on posera $r(s) = r$ et on supposera que la courbure r est bornée et indépendante de ε .

Pour tout ζ de Ω_ε^m de coordonnées curvilignes $(s, l) \in \Omega^m = I \times]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, nous avons

$$d\zeta = \boldsymbol{\tau}(s) ds + \varepsilon (l \mathbf{n}'(s) ds + \mathbf{n}(s) dl) = (1 - \varepsilon r l) \boldsymbol{\tau}(s) ds + \varepsilon \mathbf{n}(s) dl$$

et

$$dw = \varepsilon |1 - \varepsilon r l| ds dl.$$

En utilisant la relation

$$du = \nabla u \cdot d\zeta,$$

on obtient, en coordonnées curvilignes (s, l) , l'opérateur de dérivation gradient ∇u dans le repère local de Frenet $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$:

$$\nabla u = \frac{\partial_s u}{1 - \varepsilon r l} \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial_l u}{\varepsilon} \mathbf{n}. \quad (6.4)$$

Problème modèle elliptique

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la méthode NXFEM pour un problème elliptique d'interface avec des conditions de transmission non-standard. Dans un premier temps, nous présentons comment obtenir ce problème modèle à partir d'un modèle de fracture, en faisant tendre l'épaisseur de la fracture vers 0. Nous proposons ensuite une méthode NXFEM pour approcher le modèle asymptotique, puis nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel discret. Finalement, nous présentons des tests numériques illustrant les résultats théoriques. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'un article intitulé « *Nitsche's extended finite element method for a fracture model in porous media* », accepté dans la revue *Applicable Analysis : An International Journal* (cf. [36]).

Sommaire

7.1	Introduction	145
7.2	Modèle asymptotique continu	146
7.2.1	Cas d'une interface droite	147
7.2.2	Problème obtenu après passage à la limite	149
7.2.3	Extension à une interface courbe	152
7.2.4	Extension à une solution discontinue à travers l'interface	153
7.3	Méthode d'approximation de type NXFEM	154
7.4	Résultats numériques	163
7.4.1	Tests de comparaison : fracture rectiligne	163
7.4.2	Tests de comparaison : fracture courbe	167
7.4.3	Modèle asymptotique : fracture courbe et solution discontinue	168
7.4.4	Ordre de convergence	169

7.1 Introduction

Ce problème modèle modélise de nombreux phénomènes dans des domaines avec une couche mince. On trouve par exemple, des phénomènes en thermique, en élasticité et en électromagnétisme ; on peut citer la répartition de la chaleur dans un corps recouvert partiellement d'une couche mince de très haute conductivité thermique, la répartition du courant dans une plaque bordée d'une tige fortement conductrice, ou encore des failles en milieux poreux, en mécanique de rupture, etc.

Afin d'éviter de mailler le domaine d'épaisseur faible représentant la couche mince, nous proposons d'étudier un problème modèle aux limites, obtenu lorsque l'épaisseur de la couche mince tend vers 0 et lorsque la perméabilité de la couche tend vers l'infini dans la formulation faible. Cette approche suit celle de [106] pour les perméabilités scalaires et des interfaces planes (en 3D) ; elle a été étendue dans [97, 98] pour prendre en compte la forme de la couche mince, ainsi que le cas non-stationnaire.

D'autres travaux et modèles existent pour traiter le problème modèle elliptique des failles comme on peut le voir par exemple dans [2, 29, 63, 64, 91] ; ils traitent à la fois le cas très perméable (comme dans notre travail) et le cas imperméable d'une barrière géologique. Cette approche consiste à décomposer la solution dans l'épaisseur de la faille dans une base à petite dimension et à utiliser la technique de décomposition de domaine, voir aussi [3, 4]. Une possibilité est de choisir une base d'éléments finis mixtes en considérant une maille dans l'épaisseur de la faille, basés sur des grilles alignés avec l'interface. Dans [5, 61], la méthode de volumes finis a été utilisée pour la discrétisation. Une autre approche utilise le développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur de la faille et permet de trouver les équations vérifiées par les différents termes du développement. Cette dernière approche a été beaucoup utilisée pour la prise en compte de la couche mince [48, 119] et pour les problèmes d'élasticité [43]. Il est difficile de dire qu'une telle approche est meilleure qu'une autre.

Le chapitre se découpe comme suit : nous commençons par rappeler le modèle à résoudre pour une interface rectiligne. Puis, nous écrivons la formulation variationnelle faible associée à ce problème ainsi que la formulation variationnelle en effectuant un changement d'échelle. Ensuite, nous faisons l'analyse asymptotique du problème d'origine afin d'écrire le modèle aux limites. Nous montrons dans la section 7.2.2 le passage à la limite lorsque l'épaisseur de la faille ε tend vers 0 et lorsque la perméabilité de la fracture tend vers ∞ et nous obtenons la formulation faible du problème au limite.

Dans la section 7.2.2, le modèle asymptotique peut être finalement interprété comme un problème aux limites écrit sur les deux domaines indépendants ε et délimités par la courbe moyenne Γ de la faille.

Dans la section 7.2.3 nous montrons l'extension de cette approche à une interface courbe. Nous écrivons le problème limite avec des conditions de transmission non-standards. Nous étendons les résultats à une solution discontinue à travers l'interface.

Nous adaptons la méthode NXFEM développée dans le chapitre 2 pour résoudre le problème asymptotique dans la section 7.3. Nous prouvons la consistance et la stabilité de la formulation discrète proposée.

Enfin, dans la section 7.4, nous présentons quelques tests numériques illustrant le cadre théorique. Nous montrons numériquement que l'erreur de la méthode est optimale d'ordre h pour la norme énergie et d'ordre h^2 pour la norme L^2 .

7.2 Modèle asymptotique continu

On considère le problème modèle elliptique d'interface (6.2) du chapitre 6, que l'on rappelle ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \tilde{u}_\varepsilon) = \tilde{f} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \tilde{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{u}_\varepsilon] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}, \\ [\mathbf{K} \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}] = \tilde{g} \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}. \end{array} \right. \quad (7.1)$$

On considère le cas des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, pour simplifier la présentation, mais la généralisation aux conditions non-homogènes ou à d'autres types de conditions de bord (Neumann, Fourier-Robin) ne pose pas de difficulté particulière.

On définit la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $l_\varepsilon(\cdot)$:

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \int_{\Omega_\varepsilon^{in}} \mathbf{K}^{in} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, d\omega + \int_{\Omega_\varepsilon^m} \mathbf{K}_\varepsilon^m \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, d\omega + \int_{\Omega_\varepsilon^{ex}} \mathbf{K}^{ex} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \, d\omega, \\ l_\varepsilon(\tilde{v}) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \tilde{f} \tilde{v} \, d\omega + \int_{\Gamma_\varepsilon^{in}} \tilde{g}^{in} \tilde{v} \, d\gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon^{ex}} \tilde{g}^{ex} \tilde{v} \, d\gamma. \end{aligned}$$

Il est clair que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est coercive uniformément par rapport à ε et continue sur $\tilde{V}_\varepsilon \times \tilde{V}_\varepsilon$, avec $\tilde{V}_\varepsilon = H_0^1(\Omega_\varepsilon)$.

On introduit alors le problème variationnel associé au problème modèle (6.2) :

$$\tilde{u}_\varepsilon \in \tilde{V}_\varepsilon, \quad a_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}) = l_\varepsilon(\tilde{v}), \quad \tilde{v} \in \tilde{V}_\varepsilon$$

qui admet une solution unique pour des données suffisamment régulières.

Pour simplifier la présentation, on commence tout d'abord par le cas d'une interface rectiligne, puis on étend les résultats à une interface courbe.

7.2.1 Cas d'une interface droite

Nous nous intéressons maintenant au cas d'interface rectiligne $\Gamma = [0; 1]$ représentant une couche mince Ω_ε^m d'épaisseur constante $h = 1$. On considère le domaine $\overline{\Omega}_\varepsilon = \overline{\Omega}_\varepsilon^{in} \cup \overline{\Omega}_\varepsilon^m \cup \overline{\Omega}_\varepsilon^{ex}$ (voir Fig. 6.2) tel que

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon^{in} &=]0; 1[\times] -1 - \frac{\varepsilon}{2}; -\frac{\varepsilon}{2}[, \\ \Omega_\varepsilon^m &=]0; 1[\times] -\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}[, \\ \Omega_\varepsilon^{ex} &=]0; 1[\times] \frac{\varepsilon}{2}; 1 + \frac{\varepsilon}{2}[, \end{aligned}$$

On reprend les notations et les changements de variables décrits dans le chapitre 6. On écrit alors

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, v) &= \int_{\Omega^{in}} \mathbf{K}^{in} \nabla u \cdot \nabla v \, dsdl + \int_{\Omega^{ex}} \mathbf{K}^{ex} \nabla u \cdot \nabla v \, dsdl \\ &\quad + \int_{\Omega^m} \left(K_{11}^m \partial_s u \partial_s v + \frac{1}{\varepsilon} K_{12}^m (\partial_s u \partial_l v + \partial_l u \partial_s v) + \frac{1}{\varepsilon^2} K_{22}^m \partial_l u \partial_l v \right) dsdl, \\ l_\varepsilon(v) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} f v \, dsdl + \int_{\Omega^m} \varepsilon f^m v \, dsdl + \int_{\Gamma^{in} \cup \Gamma^{ex}} g v \, ds. \end{aligned}$$

On désigne par

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v = (v^{in}, v^m, v^{ex}) \in H^1(\Omega^{in}) \times H^1(\Omega^m) \times H^1(\Omega^{ex}); \right. \\ &\quad \left. v^{in} = v^m \text{ sur } \Gamma^{in}, v^{ex} = v^m \text{ sur } \Gamma^{ex} \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = H_0^1(w) \end{aligned}$$

où le domaine ω est obtenu à partir de Ω_ε via le changement de variables précédemment, $\omega =]0; 1[\times]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[$. Le problème variationnel correspondant est :

$$u_\varepsilon \in V, \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V. \quad (7.2)$$

Remarque 7.2.1. *Seulement la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ dépend singulièrement du paramètre ε , puisque le second membre $l_\varepsilon(\cdot)$ est borné par rapport à ε . Ce problème entre donc dans le cadre général des problèmes elliptiques dépendant d'un paramètre. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [37, 41].*

Grâce à l'inégalité de Poincaré et à la positivité de tenseur \mathbf{K}^i pour $i = in, m, ex$, on obtient facilement l'ellipticité de $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$, avec une constante $\alpha > 0$ indépendante de ε :

$$\forall u_\varepsilon \in V, \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \alpha |u_\varepsilon|_{1, \omega}^2. \quad (7.3)$$

Le lemme de Lax-Milgram donne ensuite l'existence et l'unicité de la solution du problème (7.2), pour tout $(f^{in}, f^m, f^{ex}) \in L^2(\Omega^{in}) \times L^2(\Omega^m) \times L^2(\Omega^{ex})$ et $(g^{in}, g^{ex}) \in L^2(\Gamma^{in}) \times L^2(\Gamma^{ex})$. En même temps, on obtient, à l'aide de (7.3) et de l'inégalité de trace, le résultat suivant :

Proposition 7.2.1. *Soient $\varepsilon < 1$, $(f^{in}, f^m, f^{ex}) \in L^2(\Omega^{in}) \times L^2(\Omega^m) \times L^2(\Omega^{ex})$ et $(g^{in}, g^{ex}) \in L^2(\Gamma^{in}) \times L^2(\Gamma^{ex})$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + \|\partial_s u_\varepsilon\|_{0, \Omega^m} + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_l u_\varepsilon\|_{0, \Omega^m} \leq C. \quad (7.4)$$

Comme conséquence directe de cette proposition, la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est bornée dans V et nous avons aussi :

Proposition 7.2.2. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que*

$$\|\partial_l u_\varepsilon\|_{0, \Omega^m} \leq C\varepsilon. \quad (7.5)$$

Par conséquent, il existe une sous-suite de (u_ε) notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ qui converge faiblement dans V ; on note u_0 sa limite lorsque ε tend vers 0. D'où la proposition suivante :

Proposition 7.2.3. *Il existe $u_0 \in V$ tel que*

- (u_ε) converge faiblement dans V vers u_0 ,
- $(\partial_l u_\varepsilon)$ converge fortement dans $L^2(\Omega^m)$ vers 0,
- il existe $w_0 \in L^2(\Omega^m)$ tel que $(\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon)$ converge faiblement dans $L^2(\Omega^m)$ vers w_0 .

Pour identifier la limite w_0 , nous rappelons le Lemme suivant (voir [11] et [119]) :

Lemme 7.2.1. *Soit $\lambda \in L^2(\Omega^m)$ et $H = \{v \in H^1(\Omega^m) ; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega^m \setminus \Gamma^{ex}\}$. Alors*

$$\int_{\Omega^m} \lambda \partial_l v \, dlds = 0, \quad \forall v \in H \implies \lambda = 0.$$

Démonstration. On prend tout d'abord $v \in \mathcal{D}(\Omega^m)$ on obtient $\partial_l \lambda = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega^m)$ au sens de distributions : λ ne dépend donc que de la variable s (i.e. $\lambda = \lambda(s)$).

On considère maintenant $\mathcal{H} = \{v \in \mathcal{D}(\Omega^m); v = 0 \text{ sur } \partial\Omega^m \setminus \Gamma^{ex}\}$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{H}$ on a :

$$0 = \int_{\Omega^m} \lambda \partial_l v \, dl \, ds = \int_0^1 \lambda(s) \left(\int_{-1/2}^{1/2} \partial_l v(s, l) \, dl \right) ds = \int_0^1 \lambda(s) v(s, \frac{1}{2}) ds.$$

Par densité de \mathcal{H} dans H , cette relation reste vraie pour tout $v \in H$.

On définit maintenant l'opérateur de trace sur Γ^{ex} par

$$\begin{aligned} \gamma^{ex} : H &\longrightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma^{ex}) \\ v &\longmapsto v|_{\Gamma^{ex}}. \end{aligned}$$

Cet opérateur est linéaire, continu et surjectif. Il vient donc que

$$\int_{\Gamma^{ex}} \lambda(s) \mu(s) ds = \int_0^1 \lambda(s) v(s, \frac{1}{2}) ds = 0, \quad \forall \mu \in H_{00}^{1/2}(\Gamma^{ex}). \quad (7.6)$$

Par conséquent,

$$\lambda = 0.$$

■

Nous obtenons alors la proposition suivante :

Proposition 7.2.4. *On a*

$$w_0(s, l) = -\frac{K_{12}^m}{K_{22}^m} \partial_s u_0(s, 0), \quad p.p \text{ dans } \Omega^m.$$

De plus, si \mathbf{K}_ε^m est une matrice diagonale alors $w_0 = 0$.

Démonstration. On multiplie le problème variationnel (7.2) par ε , on passe à la limite quand ε tend vers 0 et on utilise la Proposition 7.2.3. On obtient alors :

$$\int_{\Omega^m} (K_{12}^m \partial_s u_0 \partial_l v + K_{22}^m w_0 \partial_l v) \, ds \, dl = 0, \quad \forall v \in V.$$

On applique le Lemme 7.2.1 avec $\lambda = K_{12}^m \partial_s u_0 + K_{22}^m w_0$, on obtient le résultat souhaité. ■

7.2.2 Problème obtenu après passage à la limite

Nous pouvons maintenant passer à la limite dans la formulation variationnelle (7.2) et obtenir le problème variationnel limite vérifié par u_0 .

On définit V_0 par

$$V_0 = \left\{ v_0 \in V; \quad \partial_l v_0 = 0 \text{ dans } \Omega^m \right\}.$$

Remarquons que pour tout $v_0 \in V_0$, nous avons

$$v_0(s, l) = v_0(s, 0)$$

et donc

$$\partial_s v_0(s, l) = \partial_s v_0(s, 0).$$

De plus $v_0 \in H^1(\Omega^m)$, $v_0|_{\Gamma^{ex}}$ et $\partial_s v_0$ sont dans $L^2(\Gamma^{ex})$, donc $v_0|_{\Gamma^{ex}}$ appartient à $H_0^1(\Gamma^{ex})$. En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et en utilisant la Proposition 7.2.3, il vient que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{K}^i \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dsdl + \int_{\Omega^m} (K_{11}^m \partial_s u_0 + K_{12}^m w_0) \partial_s v \, dsdl. \quad (7.7)$$

On remplace maintenant w_0 de la Proposition 7.2.4 dans (7.7). On obtient alors le problème variationnel limite suivant :

$$u_0 \in V_0, \quad a_0(u_0, v) = l_0(v), \quad \forall v \in V_0 \quad (7.8)$$

où

$$\begin{aligned} a_0(u, v) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{K}^i \nabla u \cdot \nabla v \, dsdl + \int_{\Omega^m} \alpha^m \partial_s u \partial_s v \, dsdl, \\ l_0(v) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} f v \, dsdl + \sum_{i=in,ex} \int_{\Gamma^i} g^i v \, ds \end{aligned}$$

et

$$\alpha^m(s, l) = \frac{\det \mathbf{K}^m(s, l)}{K_{22}^m(s, l)}.$$

Puisque α^m est borné inférieurement par une constante strictement positive, le problème (7.8) admet une solution unique. Par conséquent, par des arguments standards, il s'ensuit que toute la suite (u_ε) converge faiblement dans V vers u_0 .

En plus, nous pouvons également montrer que (∇u_ε) converge fortement dans $L^2(\omega)$ vers ∇u_0 , tandis que $(\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon)$ converge fortement dans $L^2(\Omega^m)$ vers ∇u_0 . En effet, grâce au problème variationnel satisfait par u_ε et en utilisant la fonction test $u_\varepsilon - u_0$ et l'égalité $K_{12}^m \partial_s u_0 + K_{22}^m w_0 = 0$ de la Proposition 7.2.4, nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{K}^i \nabla (u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0) \, dsdl \\ & + \int_{\Omega^m} \left(K_{11}^m (\partial_s (u_\varepsilon - u_0))^2 + 2K_{12}^m \partial_s (u_\varepsilon - u_0) \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon - w_0 \right) + K_{22}^m \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon - w_0 \right)^2 \right) \, dsdl \\ & = l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) - \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{K}^i \nabla u_0 \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0) \, dsdl - \int_{\Omega^m} K_{11}^m \partial_s u_0 \partial_s (u_\varepsilon - u_0) \, dsdl \\ & \quad - \int_{\Omega^m} K_{12}^m \left(2w_0 \partial_s (u_\varepsilon - u_0) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon \partial_s u_0 \right) \, dsdl - \int_{\Omega^m} K_{22}^m w_0 \left(\frac{2}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon - w_0 \right) \, dsdl \\ & = l_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) - \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{K}^i \nabla u_0 \cdot \nabla (u_\varepsilon - u_0) \, dsdl \\ & \quad - \int_{\Omega^m} (K_{11}^m \partial_s u_0 + K_{12}^m w_0) \partial_s (u_\varepsilon - u_0) \, dsdl \\ & \quad - \int_{\Omega^m} \left(K_{12}^m \partial_s (u_\varepsilon - u_0) + K_{22}^m \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon - w_0 \right) \right) w_0 \, dsdl. \end{aligned}$$

Clairement, le terme de droite tend vers 0, en utilisant les limites faibles établis dans la Proposition 7.2.3. Alors nous obtenons les résultats souhaités de convergence forte grâce à la positivité des tenseurs \mathbf{K}^i avec $i = in, m, ex$.

Dans la suite, on utilise les résultats de convergence et on identifie $\Gamma = \Gamma^{in} = \Gamma^{ex}$, il est utile d'introduire un dernier changement du domaine cité dans la figure Fig. 8.1. On termine donc avec le domaine $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^{in} \cup \bar{\Omega}^{ex}$ coupé par l'interface Γ .

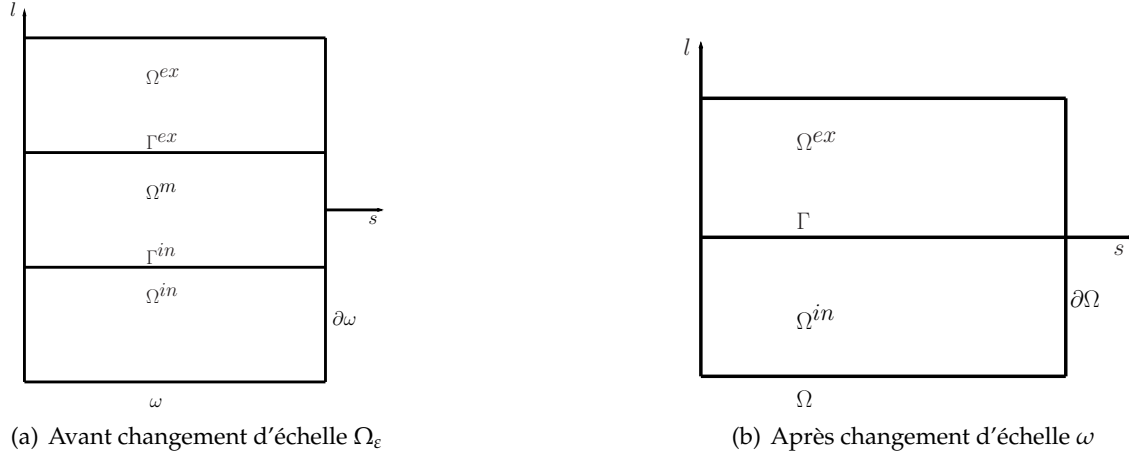


Fig. 7.1 – Domaine Ω coupé par l'interface Γ

On introduit l'espace de Hilbert

$$W = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), v|_\Gamma \in H_0^1(\Gamma), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|v\|_W^2 = \sum_{i=in,ex} \|(\mathbf{K}^i)^{1/2} \nabla v\|_{0,\Omega^i}^2 + \|\alpha^{1/2} \partial_s v\|_{0,\Gamma}^2$$

avec

$$\alpha(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \alpha^m(s, l) dl = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\det \mathbf{K}^m(s, l)}{K_{22}^m(s, l)} dl$$

et on pose

$$g = g^{in} + g^{ex}.$$

Remarque 7.2.2. On note que la fonction $v = (v^{in}, v^m, v^{ex})$ appartient à V_0 si et seulement si $v = (v^{in}, v^{ex})$ appartient à W .

Interprétation comme problème aux limites

On peut réinterpréter le problème variationnel (7.8) en termes d'équations aux dérivées partielles, en intégrant par parties dans les domaines Ω^{in} et Ω^{ex} et sur l'interface Γ . On obtient des nouvelles conditions de transmission entre les sous-domaines

Ω^i , $i = in, ex$; sur Γ des conditions de bord de type Ventcel (cf. [86, 119]). Le modèle asymptotique obtenu s'écrit :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u_0) = f & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_0] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathbf{K} \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}] - \partial_s(\alpha \partial_s u_0) = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (7.9)$$

Il est intéressant de remarquer que, pour un tenseur diagonal \mathbf{K}^m , nous mettons à jour le modèle correspondant de [106], comme prévu, ou [2]. Cependant, le modèle est légèrement différent de ceux de [5, 91] qui peut traiter les deux régimes d'écoulement très perméables et très imperméables.

7.2.3 Extension à une interface courbe

Dans cette section, on utilise les notations et les changements de variables cités dans la section 6.3.2 du chapitre 6.

On écrit la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ à l'aide des coordonnées curvilignes comme suit :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, v) &= \int_{\Omega^{in}} \mathbf{K}^{in} \nabla u \cdot \nabla v \, dsdl + \int_{\Omega^{ex}} \mathbf{K}^{ex} \nabla u \cdot \nabla v \, dsdl \\ &+ \int_{\Omega^m} \left(\frac{1}{|1 - \varepsilon r l|} K_{11}^m \partial_s u \partial_s v + \frac{1}{\varepsilon} K_{12}^m (\partial_s u \partial_l v + \partial_l u \partial_s v) + \frac{|1 - \varepsilon r l|}{\varepsilon^2} K_{22}^m \partial_l u \partial_l v \right) dsdl. \end{aligned}$$

On utilise le fait que la courbure r est bornée et indépendante de ε , on retrouve les mêmes résultats d'analyse asymptotique que dans le paragraphe précédent. Par conséquent, pour tout $u, v \in V_0$ on a :

$$\begin{aligned} a_0(u_0, v) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) \\ &= \int_{\Omega^{in}} \mathbf{K}^{in} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dsdl + \int_{\Omega^{ex}} \mathbf{K}^{ex} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dsdl + \int_I \alpha(s) \partial_s u_0(\xi(s)) \partial_s v(\xi(s)) \, ds \end{aligned}$$

avec

$$\alpha(s) = \alpha^m(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\det \mathbf{K}^m(s, l)}{K_{22}^m(s, l)} \, dl.$$

En utilisant $\partial_\tau u = \frac{du(\xi(s))}{ds}$ la dérivée tangentielle de u et $d\gamma = \left\| \frac{d\xi}{ds} \right\| ds = ds$, on obtient

$$\int_I \alpha^m(s) \partial_s u_0(\xi(s)) \partial_s v(\xi(s)) \, ds = \int_\Gamma \alpha \partial_\tau u_0 \partial_\tau v \, d\gamma,$$

d'où

$$a_0(u_0, v) = \int_{\Omega^{in}} \mathbf{K}^{in} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dsdl + \int_{\Omega^{ex}} \mathbf{K}^{ex} \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dsdl + \int_\Gamma \alpha \partial_\tau u_0 \partial_\tau v \, d\Gamma.$$

On réécrit la formulation variationnelle (7.8) pour $a_0(\cdot, \cdot)$, on obtient finalement la même condition d'interface sur Γ :

$$[\mathbf{K} \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}] - \partial_\tau(\alpha \partial_\tau u_0) = g^{in} + g^{ex} = g. \quad (7.10)$$

Remarque 7.2.3. Dans le cas d'un seul domaine avec une couche mince, la condition de transmission (7.10) sur Γ est connu dans la littérature sous le nom de la condition de Ventcel, voir par exemple [86] et [119]. Il s'agit d'un opérateur pseudo-différentiel et s'écrit sous cette forme :

$$\mathbf{K}\nabla u_0 \cdot \mathbf{n} - \partial_\tau(\alpha \partial_\tau u_0) = g \quad \text{sur} \quad \Gamma \subset \partial\Omega.$$

7.2.4 Extension à une solution discontinue à travers l'interface

Revenons au problème initial de type Darcy (6.2) et considérons une condition moins restrictive que la continuité de la solution à travers les frontières de la fracture, à savoir

$$\tilde{u}_\varepsilon^{in} - \tilde{u}_\varepsilon^m = \tilde{\chi}^{in} \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varepsilon^{in}, \quad \tilde{u}_\varepsilon^{ex} - \tilde{u}_\varepsilon^m = \tilde{\chi}^{ex} \quad \text{sur} \quad \Gamma_\varepsilon^{ex}. \quad (7.11)$$

Donc le saut sur $\Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}$ est $[\tilde{u}_\varepsilon] = \tilde{\chi}$.

Cette situation se produit dans la modélisation thermique des composants électroniques (voir par exemple [44]), où χ joue le rôle de la résistance thermique et u est la température, ou dans la modélisation des fissures (voir par exemple [96]), où χ peut être une fonction (non-linéaire) de l'inconnue u .

Le problème à résoudre s'écrit donc de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla \tilde{u}_\varepsilon) = \tilde{f} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \tilde{u}_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{u}_\varepsilon] = \tilde{\chi} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}, \\ [\mathbf{K}\nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{n}] = \tilde{g} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}. \end{cases} \quad (7.12)$$

Ce problème admet la même formulation variationnelle que le problème (6.2) :

$$u_\varepsilon \in V^\chi, \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V^\chi$$

où la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $l_\varepsilon(\cdot)$ sont inchangées et définies dans la section 7.2. Mais, l'espace V^χ est défini maintenant par

$$V^\chi = \left\{ v \in H^1(\Omega^{in}) \times H^1(\Omega^m) \times H^1(\Omega^{ex}); [v] = \chi \text{ sur } \Gamma^{in} \cup \Gamma^{ex}, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

L'analyse asymptotique faite au paragraphe précédant en utilisant la condition de transmission (7.11) reste valable. Lorsque ε tend vers 0, on obtient le problème variationnel dans le domaine ω (voir Fig. 6.2(b)) :

$$u_0 \in V_0^\chi, \quad a_0(u_0, v) = l_0(v), \quad \forall v \in V_0^\chi$$

où l'on pose

$$V_0^\chi = \left\{ v \in V^\chi; \partial_l v = 0 \text{ dans } \Omega^m \right\}.$$

On peut clairement identifier une fonction $v = (v^{in}, v^m, v^{ex})$ de V_0^χ par $(v^{in}, v^\Gamma, v^{ex})$ dans $H^1(\Omega^{in}) \times H^1(\Gamma) \times H^1(\Omega^{ex})$ qui satisfait $v^{in} - v^\Gamma = \chi^{in}$, $v^{ex} - v^\Gamma = \chi^{ex}$ sur Γ . Les conditions de transmission sur l'interface Γ s'écrivent ici :

$$u_0^{in} - u_0^\Gamma = \chi^{in}, \quad u_0^{ex} - u_0^\Gamma = \chi^{ex},$$

$$\mathbf{K}^{in} \nabla u_0^{in} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{K}^{ex} \nabla u_0^{ex} \cdot \mathbf{n} - \partial_\tau(\alpha \partial_\tau u_0^\Gamma) = g$$

avec \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à Ω^{in} .

On peut facilement éliminer l'inconnue u_0^Γ dans la condition de transmission via la relation

$$u_0^\Gamma = u_0^{in} - \chi^{in} = u_0^{ex} - \chi^{ex}.$$

Ceci nous permet d'écrire $[u_0 - \chi] = 0$ sur Γ et $u_0^\Gamma = u_0 - \chi$.

Le problème asymptotique qu'on obtient s'écrit alors de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u_0) & = & f \quad \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u_0 & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ [u_0 - \chi] & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ [\mathbf{K} \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}] - \partial_\tau(\alpha \partial_\tau(u_0 - \chi)) & = & g \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (7.13)$$

7.3 Méthode d'approximation de type NXFEM

Nous nous intéressons à développer une méthode numérique de type NXFEM consistante et stable pour le problème asymptotique (7.13). D'abord, nous rappelons brièvement la méthode NXFEM originale (cf. [75]) pour les conditions de transmission $[u - \chi] = 0$ et $[\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}] = g$ sur Γ (cas où $\alpha = 0$) à l'aide des éléments finis conformes. Puis, nous proposons une méthode NXFEM pour le problème (7.13), avec $\alpha \neq 0$.

Pour des raisons techniques, nous supposons dès maintenant que

- les tenseurs de diffusion \mathbf{K}^{in} et \mathbf{K}^{ex} sont constants sur chaque triangle et la fonction scalaire α est constante sur $\Gamma_T = \Gamma \cap T$, pour tout $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$.
- \mathbf{K}^{in} et \mathbf{K}^{ex} sont diagonaux tels que $\mathbf{K}^i = \kappa^i \mathbf{I}$ pour $i = in, ex$ où \mathbf{I} est la matrice identité.

Remarque 7.3.1. La deuxième hypothèse n'est pas essentielle pour la méthode NXFEM. En effet, dans le cas où les tenseurs ne sont pas diagonaux, la définition (7.14) des coefficients de pondération k^{in} et k^{ex} fait apparaître $\mathbf{K}^i \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$, $i = in, ex$ au lieu de κ^i ($i = in, ex$). Par conséquent, la preuve du Lemme 7.3.5 est satisfaite sous l'hypothèse " Γ_T est un segment" sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$.

On rappelle, pour faciliter la lecture, quelques notations introduites au chapitre 1

$$\mathcal{T}_h^i = \{T \in \mathcal{T}_h; T \cap \Omega^i \neq \emptyset\}, \quad i = in, ex,$$

$$W_h^i = \{v \in H^1(\Omega_h^i); v|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h^i, v|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad i = in, ex,$$

$$[u] = u^{in} - u^{ex}, \quad \{u\} = k^{ex} u^{ex} + k^{in} u^{in}, \quad \{u\}_* = k^{in} u^{ex} + k^{ex} u^{in}$$

avec

$$k^{in} = \frac{\kappa^{ex} |T^{in}|}{\kappa^{ex} |T^{in}| + \kappa^{in} |T^{ex}|}, \quad k^{ex} = \frac{\kappa^{in} |T^{ex}|}{\kappa^{ex} |T^{in}| + \kappa^{in} |T^{ex}|}. \quad (7.14)$$

Par conséquent, avec $W_h = W_h^{in} \times W_h^{ex}$, la formulation variationnelle du problème (7.13) où $\alpha = 0$ consiste à trouver $u_h \in W_h$ tel que

$$a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h. \quad (7.15)$$

Les notations suivantes ont été employées pour l'écriture de (7.15) :

$$\begin{aligned}
a_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \mathbf{K} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\omega - \int_{\Gamma} (\{\mathbf{K} \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\} [v_h] + \{\mathbf{K} \nabla v_h \cdot \mathbf{n}\} [u_h]) d\gamma \\
&\quad + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_T} \lambda_T [u_h] [v_h] d\gamma, \\
l_h(v_h) &= \int_{\Omega} f v_h d\omega + \int_{\Gamma} g \{v_h\}_* d\gamma - \int_{\Gamma} \{\mathbf{K} \nabla v_h \cdot \mathbf{n}\} [\chi] d\gamma + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_T} \lambda_T [\chi] [v_h] d\gamma, \\
\lambda_T &= \frac{\kappa^{in} \kappa^{ex} |\Gamma_T|}{\kappa^{in} |T^{ex}| + \kappa^{ex} |T^{in}|}
\end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ est un le paramètre de stabilisation.

De manière similaire à [75], il a été prouvé dans [6, 12] que (7.15) est consistant et stable sous réserve que λ soit suffisamment grand, par rapport à la norme suivante :

$$\|v\|_h^2 := \sum_{i=in,ex} \|\mathbf{K}^{1/2} \nabla v\|_{0,\Omega^i}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} |\Gamma_T| \|\{\mathbf{K} \nabla v \cdot \mathbf{n}\}\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [v] \|_{0,\Gamma_T}^2. \quad (7.16)$$

Cette norme est proche de celle définie dans [75] mais elle prend en considération les coefficients κ^{in} , κ^{ex} et λ_T définis précédemment.

Remarque 7.3.2. On peut améliorer la robustesse par rapport à la norme précédente en remplaçant $|\Gamma_T|$ devant $\{\mathbf{K} \nabla v \cdot \mathbf{n}\}$ par le poids $\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}$, voir le chapitre 2.

De manière classique, l'estimation d'erreur a priori est vérifiée :

$$\|u - u_h\|_h \leq C \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_h,$$

où u est la solution exacte du problème (7.13) avec $\alpha = 0$ et u_h est la solution approchée de (7.15).

Dans le cas où la solution $u \in H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})$, on retrouve l'ordre de convergence optimal $O(h)$ en utilisant l'opérateur d'interpolation introduit dans [75]. C'est-à-dire, pour tout $u \in H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex})$, nous avons

$$\|u - u_h\|_h \leq Ch |\mathbf{K}^{1/2} u|_{2,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

Toujours dans le contexte des éléments finis conformes, nous nous intéressons à proposer une méthode numérique basée sur NXFEM pour le problème (7.13) avec $\alpha \neq 0$ qui soit stable, consistante et donne une estimation d'erreur optimale.

Les conditions standards sur l'interface Γ , considérées dans (7.15) :

$$[u - \chi] = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}] = g$$

sont désormais remplacées par

$$[u - \chi] = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{K} \nabla (u - \chi) \cdot \mathbf{n}] - \partial_\tau (\alpha \partial_\tau u) = g.$$

Dans la suite, on désigne par

— N un nœud d'intersection de l'interface Γ avec l'arête du triangle $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$.

- \mathcal{T}_N^l et \mathcal{T}_N^r deux triangles adjacents coupés par l'interface Γ , dont l'arête commune contient N .
- \mathcal{N}_h^Γ l'ensemble des nœuds d'intersection entre l'interface Γ et les arêtes de la triangulation. La figure Fig. 7.2 rappelle les notations qui entrent en jeu.

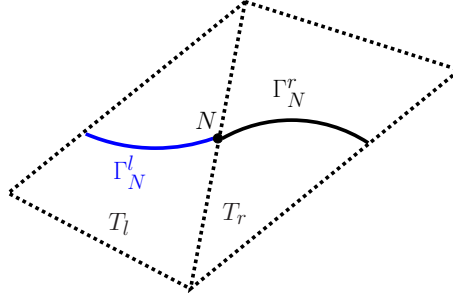


Fig. 7.2 – Illustration de deux morceaux consécutifs de l'interface Γ .

On définit le saut d'une fonction φ au nœud $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$ par :

$$[\varphi]^N = \varphi^l - \varphi^r, \quad \varphi^i = \varphi|_{\Gamma_N^i}, \quad i = l, r \quad (7.17)$$

et la moyenne pondérée de φ au nœud $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$ par :

$$\{\varphi\}^N = v_N^l \varphi^l + v_N^r \varphi^r, \quad v_N^l = \frac{\alpha_N^r |\Gamma_N^l|}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}, \quad v_N^r = \frac{\alpha_N^l |\Gamma_N^r|}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|} \quad (7.18)$$

où α_N^j représente la valeur de α sur Γ_N^j , $j = l, r$, et où les coefficients v^l et v^r vérifient $v^l + v^r = 1$ avec $0 \leq v^j \leq 1$ ($j = l, r$).

Afin de vérifier la consistance du problème discret, on utilise l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) - l_h(v_h) &= \int_{\Gamma} \partial_\tau(\alpha \partial_\tau(u - \chi)) \{v_h\}_* d\gamma \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \alpha \partial_\tau(u - \chi) \partial_\tau \{v_h\}_* d\gamma + \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} (\alpha \partial_\tau(u - \chi))(N) [\{v_h\}_*]^N. \end{aligned} \quad (7.19)$$

où u est la solution suffisamment lisse du problème continu (7.13) avec $\alpha \neq 0$; Notons que si $\alpha \partial_\tau(u - \chi) \in H^1(\Gamma)$, alors il est continu à tout nœud $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$. Ci-dessus, $[\varphi]^N = \varphi^l - \varphi^r$ désigne le saut au niveau du nœud $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$ d'une fonction φ définie le long de l'interface (avec $\varphi^j = \varphi|_{\Gamma_N^j}$, $j = l, r$).

Notez que la moyenne pondérée $\{v_h\}_*$ dans Γ est discontinue long de l'interface en raison de la discontinuité des poids k^{in}, k^{ex} au les nœuds de \mathcal{N}_h^Γ . Cette fonction est indépendante des éléments utilisés finis (conformes ou non conformes) et semble inévitable, en raison de la présence de $|T^{in}|, |T^{ex}|$ dans la définition de k^{in}, k^{ex} .

Par conséquent, afin de récupérer la cohérence, nous proposons d'ajouter quelques termes de stabilisation au niveau des nœuds de \mathcal{N}_h^Γ . À cette fin, nous présentons d'abord la moyenne pondérée suivante à $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$ d'une fonction φ définie sur Γ :

$$\{\varphi\}^N = v_N^l \varphi^l + v_N^r \varphi^r, \quad v_N^l = \frac{\alpha_N^r |\Gamma_N^l|}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}, \quad v_N^r = \frac{\alpha_N^l |\Gamma_N^r|}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}$$

où α_N^j représente la valeur de α sur Γ_N^j , avec $j = l, r$.

La méthode NXFEM pour la formulation variationnelle de (7.13) est donnée par :

$$_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex}, \quad a_h^{new}(u_h, v_h) = L_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex} \quad (7.20)$$

où les formes bilinéaires et linéaires sont données par :

$$\begin{aligned} a_h^{new}(u_h, v_h) = & a_h(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \alpha \partial_\tau \{u_h\}_* \partial_\tau \{v_h\}_* d\gamma + \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N [\{u_h\}_*]^N [\{v_h\}_*]^N \\ & - \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \left(\{\alpha \partial_\tau \{u_h\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N + \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{u_h\}_*]^N \right), \\ L_h(v_h) = & l_h(v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \alpha \partial_\tau \{\chi\}_* \partial_\tau \{v_h\}_* d\gamma + \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N [\{\chi\}_*]^N [\{v_h\}_*]^N \\ & - \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \left(\{\alpha \partial_\tau \{\chi\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N + \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{\chi\}_*]^N \right) \end{aligned}$$

avec

$$\delta_N = \frac{\alpha_N^l \alpha_N^r}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}$$

et $\delta > 0$ un paramètre de stabilisation indépendant de Γ_N , α et de la discrétisation h .

Consistance du problème discret

Lemme 7.3.1. *Le problème discret (7.20) est consistant, dans le sens où pour u solution de (7.13) qui vérifie $u \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$, on a :*

$$a_h^{new}(u, v_h) = L_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex}.$$

Démonstration. On a par définition

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) = & \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{K} \nabla u \cdot \nabla v_h dx - \int_\Gamma (\{\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}\} [v_h] + \{\mathbf{K} \nabla v_h \cdot \mathbf{n}\} [u]) ds \\ & + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [u] [v_h] ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_h^{new}(u, v_h) = & a_h(u, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \alpha \partial_\tau \{u\}_*^\Gamma \partial_\tau \{v_h\}_*^\Gamma d\gamma \\ & - \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \alpha(N) \left(\{\partial_\tau \{u\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N + \{\partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{u\}_*]^N \right) \\ & + \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N [\{u\}_*]^N [\{v_h\}_*]^N. \end{aligned}$$

À l'aide de l'intégration par parties, de $[u - \chi] = 0$ sur Γ et de l'égalité (7.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} a_h^{new}(u, v_h) - L_h(v_h) = & \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \delta_N [\{u - \chi\}_*]^N [\{v_h\}_*]^N - \sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{u - \chi\}_*]^N \\ & + \sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \left((\alpha \partial_\tau (u - \chi))(N) - \{\alpha \partial_\tau \{u - \chi\}_*\}^N \right) [\{v_h\}_*]^N. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de $u - \chi$ à travers l'interface Γ et la continuité de $u - \chi$ et de $\alpha \partial_\tau (u - \chi)$ le long de Γ , on en déduit que

$$[\{u - \chi\}_*]^N = [u - \chi]^N = 0, \quad \{\alpha \partial_\tau \{u - \chi\}_*\}^N = \{\alpha \partial_\tau (u - \chi)\}^N = (\alpha \partial_\tau (u - \chi))(N).$$

Par conséquent,

$$a_h^{new}(u, v_h) - L_h(v_h) = 0,$$

d'où le résultat souhaité. ■

Avec pour conséquence directe du Lemme 7.3.1 :

Lemme 7.3.2. (Orthogonalité de Galerkin) Pour u solution de (7.20) satisfait $H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$ et $u_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex}$, on a :

$$a_h^{new}(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex}.$$

Stabilité du problème discret

Nous nous intéressons à la stabilité du problème variationnel (7.20). Nous rappelons ici que nous avons considéré un espace d'approximation $W_h = W_h^{in} \times W_h^{ex}$ par des éléments finis P^1 conformes que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_{new}$ définie par :

$$\|v\|_{new}^2 = \|v\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^T} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v\}_*\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \delta_N ([\{v\}_*]^N)^2, \quad (7.21)$$

où la norme $\|\cdot\|_h$ est donnée par (7.16).

Pour montrer la continuité de la forme bilinéaire $a_h^{new}(\cdot, \cdot)$, il suffit de contrôler le terme :

$$A(u_h, v_h) = - \sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \left(\{\alpha \partial_\tau \{u_h\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N + \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{u_h\}_*]^N \right).$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} |A(u_h, v_h)| \leq & \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \frac{1}{\delta_N} (\{\alpha \partial_\tau \{u_h\}_*\}_N)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \delta_N ([\{v_h\}_*]^N)^2 \right)^{1/2} \\ & + \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \frac{1}{\delta_N} (\{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}_N)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \delta_N ([\{u_h\}_*]^N)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il résulte du Lemme 7.3.4 que

$$|A(u_h, v_h)| \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u_h\}_* \|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N \left([\{v_h\}_*]^N \right)^2 \right)^{1/2} \\ + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N \left([\{u_h\}_*]^N \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Nous en déduisons donc le résultat ci-dessous :

Lemme 7.3.3. (Continuité) Pour λ et δ suffisamment grands, il existe une constante $C_4 > 0$ telle que

$$|a_h^{new}(u_h, v_h)| \leq C_4 \|u_h\|_{new} \|v_h\|_{new}, \quad \forall u_h, v_h \in W_h.$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a_h^{new}(\cdot, \cdot)$ est basée sur l'estimation suivante :

Lemme 7.3.4. Pour tout $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$, nous avons

$$|\{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N|^2 \leq \delta_N \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_N^l \cup \Gamma_N^r}^2, \quad \forall v_h \in W_h.$$

Démonstration. Comme $v^l + v^r = 1$ avec $0 \leq v^j \leq 1$, $j = l, r$, nous avons à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\{\varphi\}^N|^2 \leq v^l |\varphi^l|^2 + v^r |\varphi^r|^2$$

Pour $\varphi = \alpha \partial_\tau \{v_h\}_*$, qui est constant sur Γ_N^l et sur Γ_N^r , on en déduit que

$$|\{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N|^2 \leq \left(\frac{v_N^l \alpha_N^l}{\Gamma_N^l} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_N^l}^2 + \frac{v_N^r \alpha_N^r}{\Gamma_N^r} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_N^r}^2 \right).$$

En utilisant (7.18), on obtient

$$\frac{v_N^l \alpha_N^l}{\Gamma_N^l} = \frac{v_N^r \alpha_N^r}{\Gamma_N^r} = \delta_N.$$

Par conséquent,

$$|\{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N|^2 \leq \delta_N \left(\|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_N^l}^2 + \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_N^r}^2 \right),$$

d'où le résultat du lemme. ■

Lemme 7.3.5. (coercivité) Pour λ et δ suffisamment grands, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$a_h^{new}(v_h, v_h) \geq C_3 \|v_h\|_{new}^2, \quad \forall v_h \in W_h. \quad (7.22)$$

Démonstration. Par définition, on a

$$a_h^{new}(v_h, v_h) = a_h(v_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_T}^2 + \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N \left([\{v_h\}_*]^N \right)^2 \\ - 2 \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N.$$

En utilisant le coercivité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_h$ pour λ suffisamment grand, nous avons

$$\begin{aligned} a_h^{new}(v_h, v_h) &\geq C_1 \|v_h\|_h^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_*\|_{0,\Gamma_T}^2 + \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N \left([\{v_h\}_*]^N \right)^2 \\ &\quad - 2 \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Il reste donc à contrôler le terme

$$A(v_h, v_h) = -2 \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N [\{v_h\}_*]^N.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient que

$$A(v_h, v_h) \geq -2 \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \frac{1}{\delta_N} (\{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}^N)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N ([\{v_h\}_*]^N)^2 \right)^{1/2}.$$

D'après le Lemme 7.3.4, on obtient

$$A(v_h, v_h) \geq -2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_*\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N ([\{v_h\}_*]^N)^2 \right)^{1/2}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, (7.23) devient

$$a_h^{new}(v_h, v_h) \geq C_1 \|v_h\|_h^2 + (1 - \varepsilon) \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_*\|_{0,\Gamma_T}^2 + \left(\delta - \frac{2}{\varepsilon} \right) \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N ([\{v_h\}_*]^N)^2.$$

Avec ε suffisamment petit et δ suffisamment grand, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$a_h^{new}(v_h, v_h) \geq C_3 \left(\|v_h\|^2 + \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_*\|_{0,\Gamma}^2 + \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N ([\{v_h\}_*]^N)^2 \right).$$

■

D'après les Lemmes 7.3.3 et 7.22, nous en déduisons :

Théorème 7.3.1. *Pour λ et δ suffisamment grands, le problème variationnel (7.20) admet une unique solution. De plus, l'estimation d'erreur a priori satisfait :*

$$\|u - u_h\|_{new} \leq C \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{new}.$$

où $C > 0$ est constante indépendante de h .

Erreur d'interpolation

On considère ici les opérateurs d'interpolation définis dans [75], utilisées lors d'une approximation par les éléments finis P^1 - conformes. C'est-à-dire, nous utilisons :

— l'opérateur d'extension $E^i : H^2(\Omega^i) \longrightarrow H^2(\Omega), i = in, ex$ tel que

$$(E^i \omega)|_{\Omega^i} = \omega, \quad \|E^i \omega\|_{s, \Omega^i} \leq C \|\omega\|_{s, \Omega^i} \quad \forall \omega \in H^s(\Omega^i), \quad s = 0, 1, 2 \quad (7.24)$$

— l'opérateur d'interpolation I_h^* défini par

$$I_h^* v := (I_h^{*in} v^{in}, I_h^{*ex} v^{ex}) \quad \text{où} \quad I_h^{*i} v^i := (I_h E^i v^i)|_{\Omega_h^i}$$

où I_h est l'opérateur d'interpolation nodale standard.

D'après les résultats de [75] sur l'estimation d'erreur a priori et les Lemmes 7.3.6, 7.3.7, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|u - I_h u\|_h \leq C |\kappa^{1/2} u|_{2, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}.$$

L'estimation d'erreur d'interpolation est basée donc sur les résultats des lemmes successives :

Lemme 7.3.6. *Il existe une constante $C_4 > 0$ indépendante de h telle que*

$$\left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \delta_N \left([\{u - I_h u\}_*]^N \right)^2 \right)^{1/2} \leq C_4 h^{1/2} |\alpha^{1/2} u|_{2, \Gamma_h^T}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}).$$

Démonstration. On a par définition

$$\delta_N^{1/2} |[\{u - I_h u\}_*]^N| \leq \delta_N^{1/2} |\{u - I_h^* u\}_*^l(N)| + \delta_N^{1/2} |\{u - I_h^* u\}_*^r(N)|.$$

Comme $\delta_N \leq \frac{\alpha_N^i}{|\Gamma_T^i|}$ ($i = r, l$), il vient que

$$\delta_N^{1/2} |[\{u - I_h u\}_*]^N| \leq \sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} |\{u - I_h^* u\}_*^l(N)| + \sqrt{\frac{\alpha_N^r}{|\Gamma_T^r|}} |\{u - I_h^* u\}_*^r(N)|.$$

D'une part, nous avons, car $0 \leq k^i \leq 1$ ($i = in, ex$) :

$$\sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} |\{u - I_h^* u\}_*^l(N)| \leq \sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} \left(|(u - I_h^* u)_{|_{\Gamma_T^{in}}}^l(N)| + |(u - I_h^* u)_{|_{\Gamma_T^{ex}}}^l(N)| \right).$$

D'autre part, nous utilisons le théorème de trace en dimension 1 :

$$|(u - I_h^* u)(N)| \leq C \left(\frac{1}{\sqrt{h_{T^l}}} \|u - I_h^* u\|_{0, \Gamma_T^l} + \sqrt{h_{T^l}} |u - I_h^* u|_{1, \Gamma_T^l} \right),$$

d'où

$$\sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} |(u - I_h^* u)_{|_{\Gamma_T^{in}}}^l(N)| \leq C \sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_{T^l}}} \|u - I_h^* u\|_{0, \Gamma_T^l} + \sqrt{h_{T^l}} |u - I_h^* u|_{1, \Gamma_T^l} \right),$$

toujours, à l'aide du théorème de trace (1.16), il vient que

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} |(u - I_h^* u)_{|_{\Gamma_T^{in}}}^l(N)| &\leq C \sqrt{\frac{\alpha_N^l}{h_{T^l}}} \left(\frac{1}{h_{T^l}} \|u - I_h^* u\|_{0, T^l} + |u - I_h^* u|_{0, T^l} \right) \\ &\quad + C \sqrt{\alpha_N^l h_{T^l}} \left(\frac{1}{h_{T^l}} |u - I_h^* u|_{1, T^l} + |u|_{2, T^l} \right). \end{aligned}$$

À l'aide des propriétés de l'opérateur d'interpolation, nous avons

$$\sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} |(u - I_h^* u)_*^l|_{T^{in}}(N) \leq C \sqrt{\alpha_N^l h_{T^l}} \sum_{i=in,ex} |u|_{2,T^i}.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{\frac{\alpha_N^l}{|\Gamma_T^l|}} |\{u - I_h^* u\}_*^l| \leq C \sqrt{\alpha_N^l h_{T^l}} \sum_{i=in,ex} |u|_{2,T^i}.$$

De même, nous avons

$$\sqrt{\frac{\alpha_N^r}{|\Gamma_T^r|}} |\{u - I_h^* u\}_*^r| \leq C \sqrt{\alpha_N^r h_{T^r}} \sum_{i=in,ex} |u|_{2,T^i}.$$

En sommant les deux dernières inégalités et en utilisant $\alpha = \alpha_N^j|_{\Gamma_N^j}$, on trouve

$$\delta_N^{1/2} |[\{u - I_h u\}_*]^N| \leq C h_T^{1/2} |\alpha^{1/2} u|_{2,T^{in} \cup T^{ex}}.$$

la conclusion est immédiate. ■

On établit aussi l'estimation suivante :

Lemme 7.3.7. *Il existe une constante $C_5 > 0$ indépendante de h telle que*

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u - I_h^* u\}_*^2\|_{0,\Gamma_T}^2 \right)^{1/2} \leq C_5 h^{1/2} |\alpha^{1/2} u|_{2,\mathcal{T}_h^\Gamma}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}).$$

Démonstration. On a

$$\|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u - I_h^* u\}_*^2\|_{0,\Gamma_T} \leq \|k^{ex} \alpha^{1/2} \partial_\tau (u - I_h^{*,in} u)|_{T^{in}}\|_{0,\Gamma_T} + \|k^{in} \alpha^{1/2} \partial_\tau (u - I_h^{*,ex} u)|_{T^{ex}}\|_{0,\Gamma_T},$$

En utilisant $\partial_\tau \phi = \nabla \phi \cdot \tau$ où τ est le vecteur unitaire tangentiel, puis en appliquant le théorème de trace à chaque terme et en utilisant $0 \leq k^i \leq 1$ ($i = in, ex$), il vient que

$$\begin{aligned} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u - I_h^* u\}_*^2\|_{0,\Gamma_T} &\leq c h_T^{1/2} \left(\frac{1}{h_T} \|\alpha^{1/2} \nabla (u - I_h^{*,in} u)\|_{0,T} + |\alpha^{1/2} \nabla (u - I_h^{*,in} u)|_{1,T} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_T} \|\alpha^{1/2} \nabla (u - I_h^{*,ex} u)\|_{0,T} + |\alpha^{1/2} \nabla (u - I_h^{*,ex} u)|_{1,T} \right). \end{aligned}$$

À l'aide des propriétés de l'opérateur d'interpolation, il en résulte que

$$\|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u - I_h^* u\}_*^2\|_{0,\Gamma_T} \leq C_4 h_T^{1/2} |\alpha^{1/2} u|_{2,T}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u - I_h^* u\}_*^2\|_{0,\Gamma_T}^2 \leq C_4 h^{1/2} |\alpha^{1/2} u|_{2,\mathcal{T}_h^\Gamma}^2.$$

■

On conclut que l'estimation de $\left(\sum_{N \in \mathcal{N}_h^T} \delta_N (\{u - I_h u\}_*)^N\right)^{1/2}$ et l'estimation de $\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^T} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{u - I_h^* u\}_*\|_{0,\Gamma_T}^2\right)^{1/2}$ sont sous-optimales et d'ordre $h^{1/2}$. Pour obtenir l'ordre optimal (que nous avons validé numériquement), il faut estimer l'erreur d'interpolation sur l'interface Γ , sous l'hypothèse de régularité naturelle $u|_\Gamma \in H^2(\Gamma)$. Ceci est un point technique, qui pourrait être développé dans les futurs travaux (nous proposons la construction d'un opérateur spécifique d'interpolation sur l'interface Γ).

Remarque 7.3.3. Il est également possible d'utiliser des éléments finis non-conformes à la place de ceux conformes. Ce choix induit des modifications de la méthode de NXFEM originale afin d'estimer l'erreur de consistance. Pour ce faire, deux approches sont traitées dans le chapitre 2.

7.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons quelques tests numériques afin de valider notre modèle et son approximation par la méthode NXFEM. Nous avons programmé ces tests dans la librairie C++ CONCHA développée par notre équipe.

Dans le premier test, nous avons pris le même exemple de l'article [91]. Le domaine rectangulaire présente une fracture rectiligne d'épaisseur $\varepsilon = 10^{-3}$. Pour le deuxième test, nous nous intéressons à une fracture courbe de la même épaisseur et le dernier test est consacré au cas d'une solution discontinue le long de l'interface Γ , avec un saut constant ou variable. Nous rappelons que la méthode NXFEM utilise un maillage qui ne suit pas l'interface, contrairement à la méthode utilisée dans [91] (décomposition de domaine). Malgré le fait que les deux méthodes soient différentes, nous avons trouvé des résultats numériques similaires.

7.4.1 Tests de comparaison : fracture rectiligne

Considérons ici le problème modèle de type Darcy avec $\chi^{in} = \chi^{ex} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = f & \text{dans } \omega = \Omega^{in} \cup \Omega^m \cup \Omega^{ex}, \\ u = u_D & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} = u_N & \text{sur } \Gamma_N, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma^{in} \cup \Gamma^{ex}, \\ [\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}] = g & \text{sur } \Gamma^{in} \cup \Gamma^{ex} \end{array} \right. \quad (7.25)$$

où le domaine $\omega = \Omega^{ex} \cup \Omega^m \cup \Omega^{in}$ tel que

$$\Omega^{ex} =]0; 1[\times]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}[, \quad \Omega^m = [0; 1] \times]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[, \quad \Omega^{in} = [0; 1] \times]-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}[.$$

et les tenseurs de perméabilité \mathbf{K} sont diagonaux ($\mathbf{K} = \kappa^i \mathbf{I}_2$, $i = in, ex, m$) tels que

$$\kappa^{in} = \kappa^{ex} = 1$$

et $\alpha = 2$, ce qui correspond à $\mathbf{K}_\varepsilon^m = \frac{2}{\varepsilon} \mathbf{I}_2 = 2000 \mathbf{I}_2$ où \mathbf{I}_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Notons que nous avons inversé le rôle des axes Ox et Oy (Ox est un axe vertical) pour gagner de l'espace lors de la repérage graphique.

En ce qui concerne les conditions aux limites, la frontière $\partial\omega$ du domaine ω est composé d'une frontière de Dirichlet

$$\Gamma_D :=]0; 1[\times \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \cup]0; 1[\times \left\{ \frac{3}{2} \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \cup \left\{ 1 \right\} \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

et d'une de Neumann Γ_N . On impose des conditions de Neumann homogènes $\kappa \nabla_{\mathbf{n}} u = 0$ sur Γ_N . Pour les conditions de Dirichlet, on considère

$$u_D = 0 \quad \text{sur} \quad]0; 1[\times \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \cup \left\{ 1 \right\} \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$$

et

$$u_D = 1 \quad \text{sur} \quad]0; 1[\times \left\{ \frac{3}{2} \right\} \cup \left\{ 0 \right\} \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

En plus, les termes source f et g sont nuls. La figure Fig. 7.3 illustre les données qui entrent en jeu dans notre exemple.

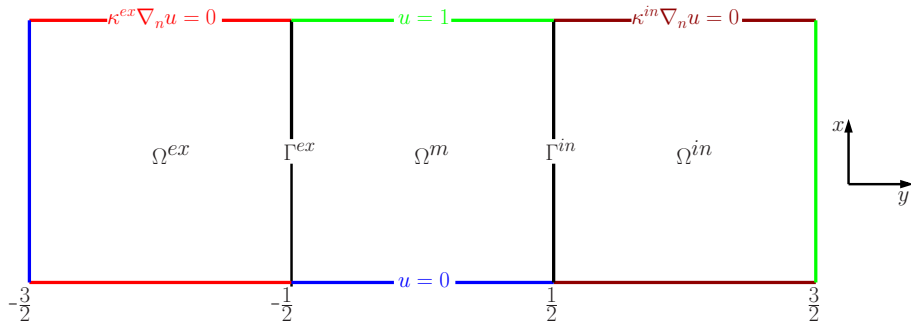


Fig. 7.3 – Configuration $\omega = \Omega^{in} \cup \Omega^m \cup \Omega^{ex}$

Nous nous intéressons maintenant à analyser les données traitées : supposons que u représente la pression dans le problème modèle (7.25), $-\mathbf{K} \nabla u$ représente la vitesse de Darcy, dite encore la vitesse de filtration.

Dans les sous-domaines Ω^{in} et Ω^{ex} , les deux perméabilités considérées sont égales $\kappa^{in} = \kappa^{ex} = 1$, le haut et le bas des deux sous-domaines sont imperméables puisque $\kappa \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$, et nous avons aussi une chute de pression ($u = 1$) du haut de Ω^m vers le bas ($u = 0$) ainsi que de côté droit de Ω^{ex} vers le côté gauche de Ω^{in} .

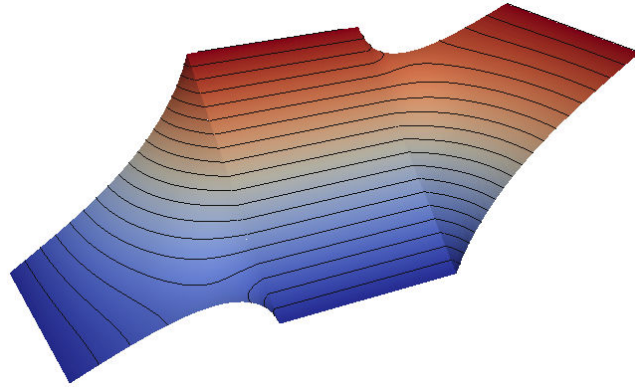


Fig. 7.4 – Modèle original dans $\bar{\omega} = \bar{\Omega}^{in} \cup \bar{\Omega}^m \cup \bar{\Omega}^{ex}$: interface rectiligne Γ

Nous avons choisi une perméabilité de la fracture Ω^m , $\mathbf{K}_\varepsilon^m = 2000 \mathbf{I}_2$ (la fracture Ω^m est très perméable), elle se laisse très facilement traverser. Une chute de pression (condition de bord de Dirichlet) est imposée du haut vers le bas de la fracture, de sorte que le fluide s'écoule facilement le long de la fracture, ainsi que de la droite vers la gauche, voir Fig. 7.4.

Lorsque l'épaisseur ε tend vers 0, le problème (7.25) converge vers le problème de [63] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ u = u_D & \text{sur } \Gamma_D, \\ \mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n} = u_N & \text{sur } \Gamma_N, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mathbf{K} \nabla u \cdot \mathbf{n}] - \partial_\tau(\alpha \partial_\tau u) = g & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (7.26)$$

où le domaine $\Omega = \Omega^{ex} \cup \Omega^{in} =]0, 1[\times]-1, 1[$.

Nous avons repris les mêmes valeurs des conditions de bord que celles prises dans le premier test, voir Fig. 7.5. Comme nous avons vu précédemment, le haut et le bas des milieux Ω^{ex} et Ω^{in} sont imperméables et il existe une chute de pression de la droite du milieu Ω^{ex} vers la gauche du milieu Ω^{in} .

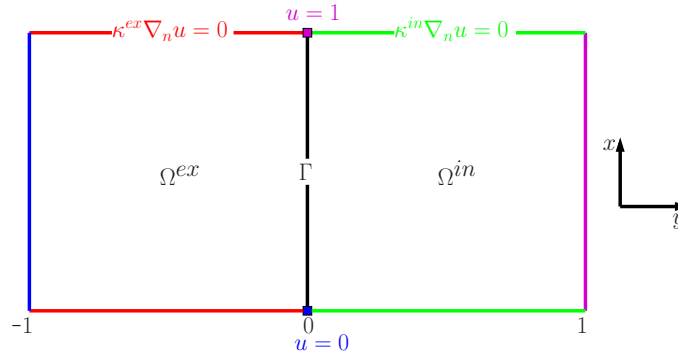


Fig. 7.5 – Configuration $\Omega = \Omega^{in} \cup \Omega^m \cup \Omega^{ex}$

Dans la figure Fig. 7.5, nous avons imposé des conditions de Dirichlet d'une façon ponctuelle, ceci mène à une chute de la pression du point supérieur de la fracture au point inférieur. Cette affirmation est validée par la figure Fig. 7.6 ; le fluide s'écoule facilement de droite à gauche et ainsi il circule rapidement le long de la fracture de haut en bas grâce à la perméabilité de la fracture. Il existe donc un échange entre la fracture et les deux milieux Ω^{ex} et Ω^{in} .

Après comparaison des solutions obtenues dans les figures Fig. 7.4 et Fig. 7.6, on conclut que les résultats dans les milieux Ω^{ex} et Ω^{in} sont similaires dans le cas d'une interface rectiligne.

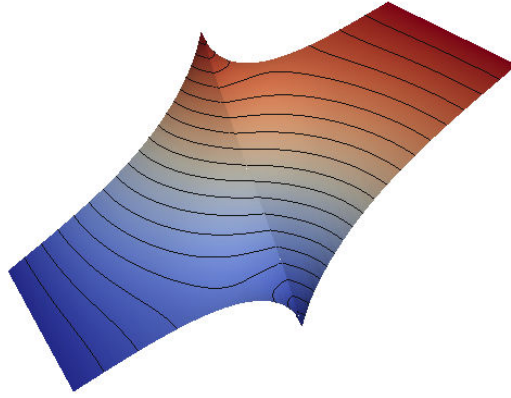
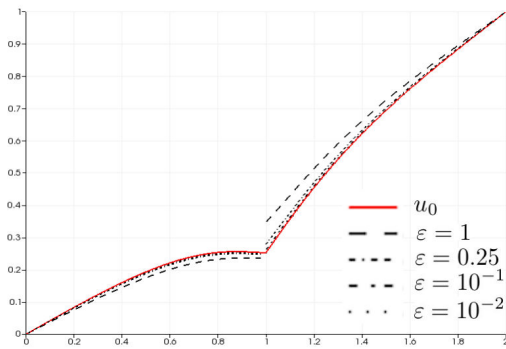
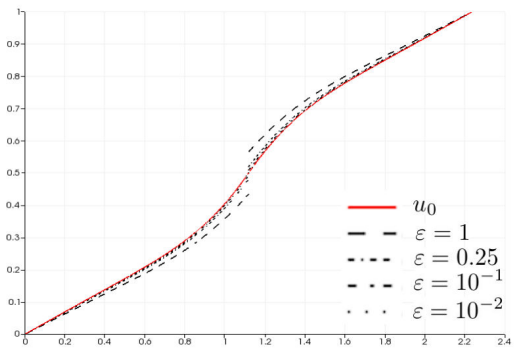


Fig. 7.6 – Modèle asymptotique dans $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^{in} \cup \bar{\Omega}^{ex}$: interface rectiligne Γ

On s'intéresse maintenant à calculer les pressions u_0 et u_ε pour différentes valeurs de ε . Puis, on compare les pressions obtenues u_ε et u_0 dans les figures Fig. 7.7(a), Fig. 7.7(b) et Fig. 7.8 le long des différentes lignes sur un maillage qui ne suit pas l'interface Γ et pour un paramètre de discrétisation $h = 0.03$. Dans Fig. 7.7(a), on considère la ligne orthogonale Γ^\perp d'équation $x = 0.25$. Alors que dans Fig. 7.7(b), on considère la ligne diagonale Γ^* de Ω ; les solutions u_ε^{in} et u_ε^{ex} sont comparées avec $u_0 = (u_0^{in}, u_0^{ex})$. Les résultats le long de l'interface Γ sont présentés dans la figure Fig. 7.8; les solutions discrètes du modèle asymptotique et original sont discontinues à travers Γ . On a présenté la moyenne des solutions u_ε obtenues le long de Γ^{in} et Γ^{ex} pour les différentes valeurs de ε , ainsi que la moyenne de la solution u_0 du problème limite le long de Γ . On remarque que la différence entre les solutions u_ε et u_0 diminue avec ε , les courbes étant presque superposées pour $\varepsilon \leq 10^{-2}$.



(a) Ligne orthogonale Γ^\perp à l'interface Γ



(b) Ligne diagonale Γ^* de Ω

Fig. 7.7 – Comparaison pour différentes valeurs de ε entre u_ε et u_0 le long des interfaces Γ^\perp et Γ^*

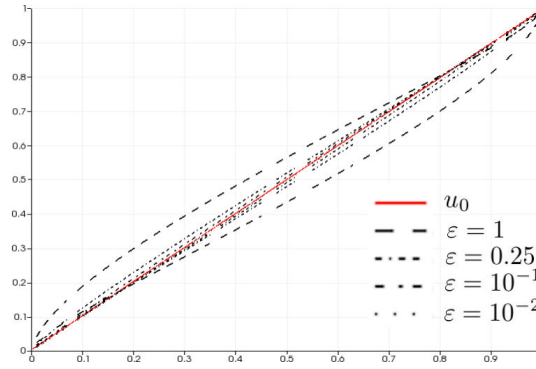


Fig. 7.8 – Comparaison pour différentes valeurs de ε entre u_ε le long des interfaces Γ^{in} , Γ^{ex} et u_0 le long de Γ

On considère maintenant le cas d'un tenseur de perméabilité non-diagonal dans la fracture. Nous prenons $\mathbf{K}^m = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui implique la limite w_0 de $\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon$ n'est plus 0 mais égale à $-\frac{1}{2} \partial_s u_0$ le long de Γ . Nous montrons dans la figure Fig. 7.9 une comparaison entre les moyens de $\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon$ et w_0 sur les interfaces, sur un maillage plus fin cette fois-ci où le paramètre de discrétisation est $h = 0,015$. On conclut que les courbes coïncident pour $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

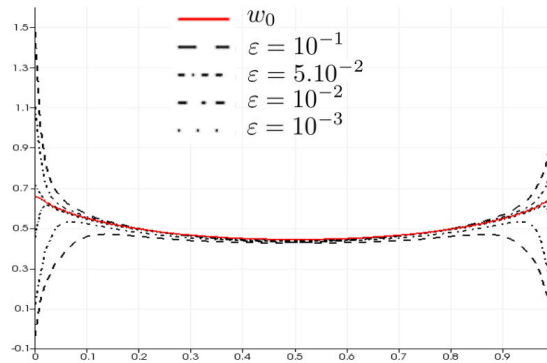


Fig. 7.9 – Comparaison pour différentes valeurs de ε entre $\{\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon\}$ le long de Γ^{in} , Γ^{ex} et $\{w_0\}$ le long de Γ

En conclusion, le modèle asymptotique semble être une bonne alternative au modèle (7.2), qui est plus cher car il nécessite le maillage de la fracture.

7.4.2 Tests de comparaison : fracture courbe

On reprend le même problème modèle (7.25) traité dans le premier test, cependant nous considérons deux frontières courbes qui séparent les trois sous-domaines. La figure Fig. 7.11 illustre un exemple de maillage qui ne suit pas l'interface, pour le problème limite avec une interface courbe. Les solutions obtenues par le modèle original et asymptotique sont similaires dans le cas d'une interface courbe, voir les figures Fig. 7.10(a) et Fig. 7.10(b).

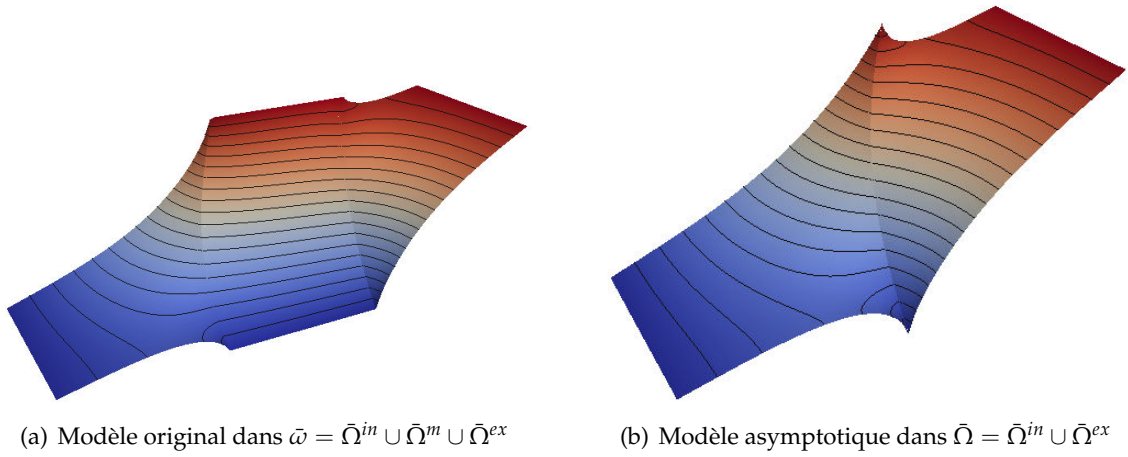


Fig. 7.10 – Comparaison entre le modèle original et asymptotique : interface courbe Γ

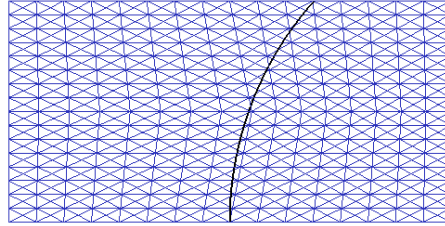
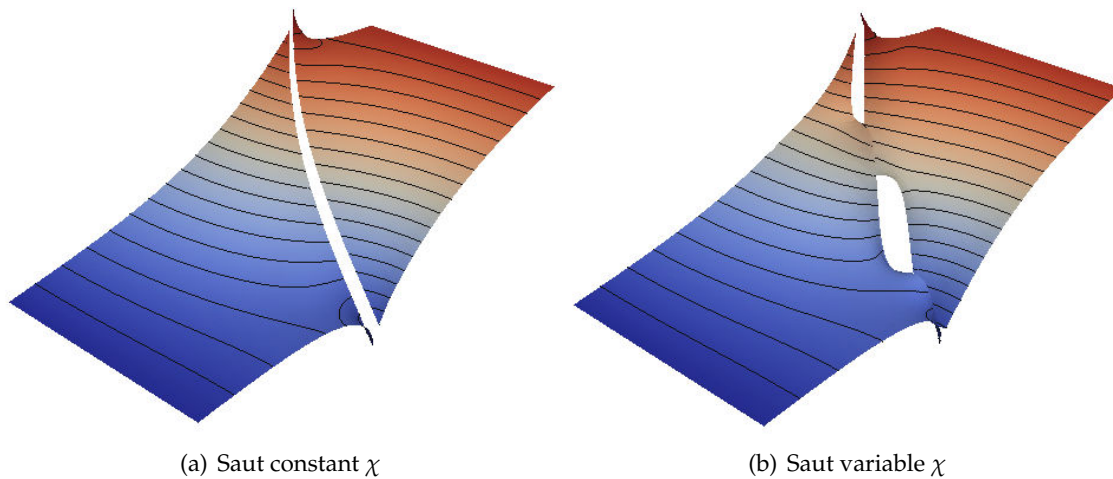


Fig. 7.11 – Domaine Ω coupé par l'interface courbe Γ : exemple de maillage

7.4.3 Modèle asymptotique : fracture courbe et solution discontinue

Dans ce cas-test, nous avons résolu le problème asymptotique d'abord avec un saut constant χ de la solution exacte sur l'interface Γ , ensuite avec un saut variable χ . La figure Fig. 7.12(a) montre la solution pour un saut constant ; ici la forme linéaire reste invariante à cause du fait que $\partial_\tau \chi = 0$. La figure Fig. 7.12(b) illustre la solution du problème pour un saut variable le long de l'interface courbe Γ .

Fig. 7.12 – Modèle asymptotique : pression discontinue à travers l'interface Γ

7.4.4 Ordre de convergence

Afin de valider le code pour le modèle asymptotique, on considère le problème (7.26) avec la géométrie proposée dans Fig. 7.5 et avec les coefficients de perméabilité suivants : $\kappa^{in} = \kappa^{ex} = 1$, $\alpha = 2$. On prend les mêmes types de conditions aux limites que dans le cas test du paragraphe 7.4.1 et le terme source f tel que la solution exacte soit donnée par :

$$u(x, y) = \begin{cases} x^3 + y^2 + 6xy & \text{dans } \Omega^{ex}, \\ x^3 + 2y^2 - 6xy & \text{dans } \Omega^{in}. \end{cases}$$

Ce problème répond à des conditions de transmission homogènes sur $\Gamma =]0; 1[\times \{0\}$ mais des conditions aux limites non homogènes.

Nous montrons dans le tableau Tab. 7.1 les erreurs obtenues pour l'inconnue u en fonction du nombre d'éléments du maillage N . Nous obtenons un taux de convergence optimal $O(h)$ en norme énergie $\|\cdot\|_{new}$ et l'ordre $O(h^2)$ en norme $\|\cdot\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$ pour $u - u_h$.

N	$\ u - u_h\ _{new}$	ordre	$\ u - u_h\ _{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}$	ordre
256	1,01	—	$2,75 \cdot 10^{-2}$	—
1 024	$5,05 \cdot 10^{-1}$	1,00	$7,04 \cdot 10^{-3}$	1,97
4 096	$2,53 \cdot 10^{-1}$	1,00	$1,79 \cdot 10^{-3}$	1,98
16 384	$1,26 \cdot 10^{-1}$	1,00	$4,49 \cdot 10^{-4}$	1,99
65 536	$6,32 \cdot 10^{-2}$	1,00	$1,13 \cdot 10^{-4}$	2,00

Tab. 7.1 – Convergence par rapport au raffinement de maillage pour le modèle asymptotique

On trace maintenant les courbes représentant le logarithme des erreurs calculées (en norme énergie et en norme L^2) en fonction du logarithme du nombre de triangles. Nous retrouvons dans la figure Fig. 7.13 l'ordre de convergence.

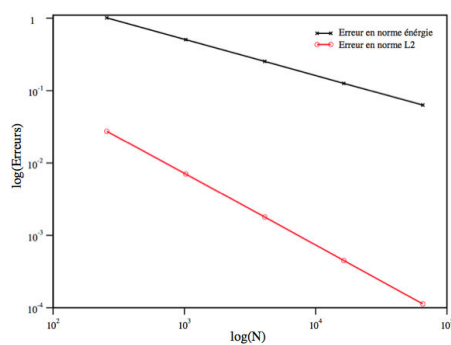


Fig. 7.13 – Erreurs en norme énergie et norme L^2

Ces tests numériques montrent la grande flexibilité de la méthode de NXFEM par rapport à la géométrie et aux conditions de transmission. Cette méthode est capable de gérer des conditions d'interface non-standard et pourrait être étendue au couplage de différents modèles dans chaque sous-domaine.

Problème modèle de Stokes

Le but de ce chapitre est d'étendre l'étude asymptotique du cas elliptique précédent au problème de Stokes. Nous justifions la dérivation du problème au limite pour une interface quelconque.

Sommaire

8.1	Présentation du problème	172
8.2	Modèle asymptotique continu	173
8.2.1	Cas d'une interface droite	173
8.2.2	Passage à la limite dans la formulation faible	174
8.2.3	Interprétation comme problème aux limites	182
8.2.4	Extension à une interface courbe	183

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations de Stokes incompressible dans trois domaines, dont une couche mince très visqueuse au milieu. Nous nous intéressons à réduire la dimension de l'espace pour se ramener à un domaine composé de deux milieux et où les équations dans la couche mince sont remplacées par des conditions de transmission. Ce problème modélise de nombreux phénomènes en génie pétrolier, en génie civil, en océanographie et en biologie cellulaire.

Le chapitre est organisé comme suit. Tout d'abord, on présente le problème modèle de Stokes dans le domaine d'épaisseur faible. Ensuite, on écrit sa formulation variationnelle puis, on donne l'approche asymptotique du problème en faisant apparaître l'épaisseur de la couche. Une partie novatrice importante et difficile de l'étude est la condition *inf-sup* de Babuska-Brezis, qui nous permet de trouver le problème limite. Enfin, on donne le problème limite dans un domaine séparé par l'interface moyenne Γ . À notre connaissance, il s'agit de la première étude faite sur ce type de modèle.

Les lettres capitales en gras (par exemple \mathbf{V}_h , \mathbf{G}) indiquent des espaces fonctionnels pour des champs de vecteurs.

Dans toute la suite, nous nous limitons au cas bidimensionnel et à un écoulement stationnaire.

8.1 Présentation du problème

On considère les équations de Stokes dans trois domaines (voir aussi le chapitre 6), dont une couche mince $\Omega_\varepsilon^m \subset \mathbb{R}^2$, où $0 < \varepsilon < 1$ est l'épaisseur de la couche destinée à tendre vers zéro, qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \nabla \tilde{p}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}, \\ [\mu \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \cdot \mathbf{n} - \tilde{p}_\varepsilon \mathbf{n}] = \tilde{\mathbf{g}} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \end{array} \right. \quad (8.1)$$

où

- $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ est la vitesse de chaque fluide par sous-domaine Ω_ε^i , $i = in, m, ex$
- \tilde{p}_ε est sa pression par sous-domaine Ω_ε^i , $i = in, m, ex$,
- $[\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon]$ représente le saut de la vitesse $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$.

Le symbole div représente l'opérateur divergence d'une fonction vectorielle $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ et il est défini par

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}.$$

On suppose que la viscosité est constante par sous-domaine et que dans Ω^m le fluide est très visqueux. On suppose aussi que $\tilde{\mathbf{f}}$ et $\tilde{\mathbf{g}}$ sont des fonctions régulières respectivement de $(L^2(\Omega_\varepsilon))^2$ et de $(L^2(\Gamma_\varepsilon))^2$ telles que

$$\mu^\varepsilon = \begin{cases} \mu_{in}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \mu_m^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon^m, \\ \mu_{ex}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}, \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}^{in} & \text{sur } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \tilde{\mathbf{f}}^m & \text{sur } \Omega_\varepsilon^m, \\ \tilde{\mathbf{f}}^{ex} & \text{sur } \Omega_\varepsilon^{ex}, \end{cases} \quad \tilde{\mathbf{g}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}^{in} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in}, \\ \tilde{\mathbf{g}}^{ex} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{ex}, \end{cases}$$

avec les coefficients de viscosité vérifiant :

$$\mu_{in}^\varepsilon = \mu_{in}, \quad \mu_{ex}^\varepsilon = \mu_{ex}, \quad \mu_m^\varepsilon = \frac{\mu_m}{\varepsilon}.$$

On introduit maintenant le cadre fonctionnel dans lequel on va travailler :

$$\mathbf{V}^\varepsilon = \mathbf{H}_0^1(\Omega_\varepsilon), \quad M^\varepsilon = L_0^2(\Omega_\varepsilon) = \{\tilde{p} \in L^2(\Omega_\varepsilon) : \sum_{i=in,ex,m} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \tilde{p} dx dy = 0\}.$$

On considère les formes bilinéaires suivantes

$$\forall \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^\varepsilon, \quad a_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i=in,ex,m} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \mu_i^\varepsilon \nabla \tilde{\mathbf{u}} : \nabla \tilde{\mathbf{v}} dx dy,$$

$$\forall \tilde{p} \in M^\varepsilon, \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^\varepsilon, \quad b^\varepsilon(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i=in,ex,m} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \tilde{p} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} dx dy$$

et la forme linéaire

$$\forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^\varepsilon, \quad l_\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i=in,ex,m} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dx dy + \int_{\Gamma_\varepsilon^{in}} \tilde{\mathbf{g}}^{in} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dx + \int_{\Gamma_\varepsilon^{ex}} \tilde{\mathbf{g}}^{ex} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dx.$$

Le problème (8.1) se met sous la formulation variationnelle suivante :
Trouver $(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon) \in \mathbf{V}^\varepsilon \times M^\varepsilon$ tels que

$$\begin{cases} a_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) - b_\varepsilon(\tilde{p}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) = l_\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), & \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^\varepsilon, \\ b_\varepsilon(\tilde{q}, \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) = 0, & \forall \tilde{q} \in M^\varepsilon, \end{cases} \quad (8.2)$$

qui admet une solution unique, voir [118].

8.2 Modèle asymptotique continu

Ce paragraphe est consacré à l'obtention d'un modèle asymptotique pour le problème (8.1).

Pour simplifier la présentation, on traite tout d'abord le cas d'une interface rectiligne, puis on étend les résultats à une interface courbe.

8.2.1 Cas d'une interface droite

On s'intéresse maintenant au cas d'une interface rectiligne $\Gamma = [0; 1]$ (i.e. d'une courbe moyenne de Ω_ε^m); l'épaisseur de Ω_ε^m est supposée constante, $h = 1$. On se donne le domaine $\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega_\varepsilon^{in}} \cup \overline{\Omega_\varepsilon^m} \cup \overline{\Omega_\varepsilon^{ex}}$ comme illustré dans la figure Fig. 6.2(a). En d'autres termes, on se donne un nombre réel $0 < \varepsilon < 1$ et avec les notations du chapitre 6, on a

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon^{in} &=]0; 1[\times] -1 - \frac{\varepsilon}{2}; -\frac{\varepsilon}{2}[, \\ \Omega_\varepsilon^m &=]0; 1[\times] -\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}[, \\ \Omega_\varepsilon^{ex} &=]0; 1[\times] \frac{\varepsilon}{2}; 1 + \frac{\varepsilon}{2}[, \end{aligned}$$

Suite au changement d'échelle que nous avons décrit dans le chapitre 6 le domaine Ω_ε est transformé en $\omega =]0; 1[\times] -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[,$ indépendant de ε .

Avec le changement de variables décrit au chapitre 6, les opérateurs de dérivations gradient et divergence restent invariants dans les domaines Ω^{in} et Ω^{ex} ainsi que la mesure de Lebesgue $dsdl = dxdy$. Cependant, nous avons les nouvelles définitions de ces opérateurs pour $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ dans le domaine Ω^m :

$$\nabla_{x,y} \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \nabla_{s,l} \mathbf{v}, \quad \text{div} \tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial l}, \quad dxdy = \varepsilon dsdl.$$

On rappelle ici que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ correspond à l'opérateur elliptique traité dans le chapitre 7 avec $\mathbf{K} = \mu \mathbf{I}_2$ où \mathbf{I}_2 est la matrice identité d'ordre 2, on a

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où les formes bilinéaires sont définies par

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dsdl + \int_{\Omega^m} \mu_m \partial_s \mathbf{u} \cdot \partial_s \mathbf{v} dsdl, \\ a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^m} \mu_m \partial_l \mathbf{u} \cdot \partial_l \mathbf{v} dsdl. \end{aligned}$$

La forme linéaire $l_\varepsilon(\cdot)$ se met sous la forme

$$l_\varepsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{v} \, dsdl + \varepsilon \int_{\Omega^m} \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Gamma_\varepsilon^{in}} \mathbf{g}^{in} \cdot \mathbf{v} \, ds + \int_{\Gamma_\varepsilon^{ex}} \mathbf{g}^{ex} \cdot \mathbf{v} \, ds.$$

On définit une nouvelle pression sur Ω^m par

$$p^m = \varepsilon p$$

et on définit

$$b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) = b(p, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} b_0(p, \mathbf{v})$$

où

$$b(p, \mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Omega^m} p^m \partial_s v_1 \, dsdl,$$

$$b_0(p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^m} p^m \partial_l v_2 \, dsdl.$$

On introduit le cadre fonctionnel sur Ω comme suit

$$\mathbf{V} = H_0^1(\Omega), \quad M = L_0^2(\Omega).$$

En introduisant les nouvelles fonctions et les nouvelles formes, le problème (8.2) est équivalent à trouver $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in \mathbf{V} \times M$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} a_0(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) - b(p^\varepsilon, \mathbf{v}) - \frac{1}{\varepsilon} b_0(p^\varepsilon, \mathbf{v}) = l_\varepsilon(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(q, \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b_0(q, \mathbf{u}^\varepsilon) = 0, & \forall q \in M. \end{cases} \quad (8.3)$$

8.2.2 Passage à la limite dans la formulation faible

Ce paragraphe est consacré à l'obtention du problème limite obtenu lorsque ε tend vers 0 dans (8.3). Nous nous intéressons à montrer la convergence forte de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$ vers une limite à déterminer. La démonstration de ces résultats est basée sur la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ et la condition *inf-sup* de Babuška-Brézzi pour la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ sur le noyau de la forme bilinéaire $a_0(\cdot, \cdot)$ que nous démontrerons dans la suite.

Convergence faible de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$

On considère la formulation variationnelle (8.3) et on définit la norme associée à l'espace \mathbf{V} par :

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 := \sum_{i=in,ex,m} \|\mu^{1/2} \nabla \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^i}^2.$$

Nous avons besoin de deux points suivants :

1. Pour $\varepsilon \in]0; 1]$, nous pouvons établir que la forme $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est coercive, de constante de coercivité indépendante de ε (égale à 1) :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad a_\varepsilon(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2.$$

2. La forme bilinéaire $a_0(\cdot, \cdot)$ est positive : $a_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$, de noyau

$$\mathbf{V}_0 = \text{Ker } a_0 = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{V} ; a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \right\} = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{V} ; \partial_l \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega^m \right\}.$$

En additionnant les deux équations de (8.3) et en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\varepsilon$ et $q = p^\varepsilon$, on obtient

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) = l_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon). \quad (8.4)$$

En utilisant la continuité de $l_\varepsilon(\cdot)$ et la coercivité de $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ sur \mathbf{V} , alors nous avons :

Proposition 8.2.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}} \leq C \sum_{i=in,m,ex} \left(\|\mathbf{f}^i\|_{0,\Omega^i} + \|\mathbf{g}^{in}\|_{0,\Gamma_\varepsilon^i} \right) \leq C, \quad (8.5)$$

$$\|\partial_l \mathbf{u}^\varepsilon\|_{0,\Omega^m} \leq C \varepsilon. \quad (8.6)$$

Démonstration. En utilisant (8.4), la continuité de $l_\varepsilon(\cdot)$ et (8.5), on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq C \left(\sum_{i=in,m,ex} \|\mathbf{f}^i\|_{0,\Omega^i} + \sum_{i=in,m,ex} \|\mathbf{g}^{in}\|_{0,\Gamma_\varepsilon^i} \right) \leq C.$$

D'autre part, en utilisant la coercivité de $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ on obtient

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{V}}^2 \leq a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq C.$$

Par conséquent,

$$\frac{\mu_m}{\varepsilon^2} \int_{\tilde{\Omega}^m} |\partial_y \mathbf{u}^\varepsilon|^2 dx dy \leq a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) \leq C,$$

d'où le résultat énoncé. ■

Par conséquent la suite $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans \mathbf{V} . Donc, il existe une sous-suite de (\mathbf{u}^ε) , notée encore $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faiblement dans \mathbf{V} lorsque ε tend vers 0 ; on note \mathbf{u}^0 sa limite. D'où la proposition suivante :

Proposition 8.2.2. *Il existe $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}$ tel que*

- \mathbf{u}^ε converge faiblement dans \mathbf{V} vers \mathbf{u}^0 ,
- $\partial_y \mathbf{u}^\varepsilon$ converge fortement dans $L^2(\Omega^m)$ vers 0 et $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}_0$.

On définit une nouvelle pression p^* sur Ω^m , indépendante de l , par :

$$p^*(s) = \int_{-1/2}^{1/2} p^m(s, l) dl = \varepsilon \int_{-1/2}^{1/2} p(s, l) dl$$

et on introduit le cadre fonctionnel sur Ω comme ce qui suit

$$M_0 = \left\{ p \in L_0^2(\Omega) ; p = p(s) \text{ dans } \Omega^m \right\},$$

muni de la norme

$$\|p\|_{M_0}^2 = \|\mu^{-1/2}p\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2}p^*\|_{0,\Gamma}^2.$$

Il reste à montrer que p^ε converge faiblement vers une limite que l'on notera p^0 . Pour ce faire, on utilise la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ sur $M_0 \times \mathbf{V}_0$ que nous démontrerons dans la suite (voir le lemme 8.2.5). Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|p^\varepsilon\|_{M_0}^2 &= \|\mu^{-1/2}p^\varepsilon\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2}p^{*\varepsilon}\|_{0,\Gamma}^2 \leq \frac{1}{C_1} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{b(p^\varepsilon, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0}} \\ &\leq \frac{1}{C_1} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{a(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) - l_\varepsilon(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0}}. \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de $l_\varepsilon(\cdot)$ et de $a(\cdot, \cdot)$ et le fait que u^ε est bornée, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|p^\varepsilon\|_{M_0} \leq C, \quad (8.7)$$

d'où (p^ε) est bornée dans $L^2(\Omega)$ où $\Omega = \Omega^{in} \cup \Omega^{ex} \cup \Omega^m$. Alors, il existe une sous-suite de (p^ε) , notée encore $(p^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faiblement vers p^0 . On en déduit la proposition suivante :

Proposition 8.2.3. *Il existe $p^0 \in L^2(\Omega)$ tel que p^ε converge faiblement dans $L_0^2(\Omega)$ vers p^0 .*

Convergence forte de $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$

Nous rappelons ici le problème variationnel vérifié par le couple $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon)$: Trouver $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in \mathbf{V} \times M$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon}a_0(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) - b(p^\varepsilon, \mathbf{v}) - \frac{1}{\varepsilon}b_0(p^\varepsilon, \mathbf{v}) = l_\varepsilon(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(q, \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}b_0(q, \mathbf{u}^\varepsilon) = 0, & \forall q \in M. \end{cases} \quad (8.8)$$

On passe à la limite dans le problème variationnel (8.8), en prenant des fonctions tests dans \mathbf{V}_0 et dans M_0 . Le problème variationnel satisfait par (\mathbf{u}^0, p^0) est : trouver $(\mathbf{u}^0, p^0) \in \mathbf{V}_0 \times M_0$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) - b(p^0, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(q, \mathbf{u}^0) = 0, & \forall q \in M_0. \end{cases} \quad (8.9)$$

Premièrement, nous nous intéressons à la convergence forte de \mathbf{u}^ε vers \mathbf{u}^0 : on considère donc la sous-suite $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faiblement vers $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}_0$. D'après la coercivité de $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{V}}^2 \leq a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0).$$

Or nous avons

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0) = a^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) - 2a_\varepsilon(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^\varepsilon) + a_\varepsilon(\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^0)$$

et

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) = l_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) + b_\varepsilon(p^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon) = l_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon)$$

En utilisant la convergence faible de p^ε vers p^0 et celle de \mathbf{u}^ε vers \mathbf{u}^0 , nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{V}}^2 = 0.$$

Par conséquent (\mathbf{u}^ε) converge fortement vers \mathbf{u}^0 dans \mathbf{V}_0 .

Deuxièmement, on utilise le même raisonnement que dans le cas de la convergence faible, basé sur la condition *inf-sup*; nous avons

$$\begin{aligned} \|p^\varepsilon - p^0\|_{M_0}^2 &\leq \frac{1}{C_1} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{b(p^\varepsilon - p^0, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0}} \\ &\leq \frac{1}{C_1} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{a(u^\varepsilon - u^0, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0}} \\ &\leq C \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0\|_{\mathbf{V}_0}. \end{aligned}$$

Or \mathbf{u}^ε converge fortement vers \mathbf{u}^0 , alors on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p^\varepsilon - p^0\|_{M_0} = 0.$$

D'où (p^ε) converge fortement vers p^0 dans $L^2_0(\Omega)$, où $p^0 \in M_0$.

Condition *inf-sup* de $b(\cdot, \cdot)$ sur $M_0 \times \mathbf{V}_0$

Nous nous intéressons à prouver la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b^\varepsilon(\cdot, \cdot)$ sur $M_0 \times \mathbf{V}_0$. Par définition, nous avons donc

$$\begin{aligned} b(p, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Omega^m} p \partial_s v_1 \, dsdl \\ &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Gamma} p^* \partial_s v_1 \, ds. \end{aligned}$$

On décompose maintenant p sous cette forme : $p = \tilde{p} + \bar{p}$ tel que \bar{p} est la projection $L^2(\omega)$ -orthogonale de p définie par :

$$\bar{p} = \begin{cases} \pi_{\Omega^{in}} p & \text{sur } \Omega^{in}, \\ \pi_{\Gamma} p^* & \text{sur } \Gamma, \\ \pi_{\Omega^{ex}} p & \text{sur } \Omega^{ex} \end{cases}$$

et vérifie l'égalité suivante :

$$|\Omega^{in}| \bar{p}^{in} + |\Gamma| \bar{p}^* + |\Omega^{ex}| \bar{p}^{ex} = 0. \quad (8.10)$$

On peut donc écrire la forme bilinéaire $b_1(\cdot, \cdot)$ comme suit

$$b(p, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \tilde{p} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \bar{p} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy + \int_{\Gamma} \tilde{p}^* \partial_s v_1 \, ds + \int_{\Gamma} \bar{p}^* \partial_s v_1 \, ds.$$

Par intégration par parties et grâce aux conditions de bord de Dirichlet homogènes sur $\partial\Omega$ et sur $\partial\Gamma$, on obtient

$$\begin{aligned} b(p, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \tilde{p} \operatorname{div} \mathbf{v} \, ds dl + \int_{\Gamma} \tilde{p}^* \partial_s v_1 \, ds + \int_{\Gamma} [\tilde{p}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= T_1 + T_2 + T_3 \end{aligned}$$

où $[\tilde{p}] = \tilde{p}^{in} - \tilde{p}^{ex}$.

On s'intéresse maintenant au terme

$$T_1 = b(p, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \tilde{p} \operatorname{div} \mathbf{v} \, ds dl,$$

avec $\tilde{\mathbf{v}}$ associé à $(\tilde{p}^{in}, \tilde{p}^{ex}) \in L_0^2(\Omega^{in}) \times L_0^2(\Omega^{ex})$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 8.2.1. *Pour tout $(\tilde{p}^{in}, \tilde{p}^{ex}) \in L_0^2(\Omega^{in}) \times L_0^2(\Omega^{ex})$ et tout $\tilde{p}^* \in L_0^2(\Gamma)$, il existe $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{v}}^{in}, 0, \tilde{\mathbf{v}}^{ex}) \in \mathbf{V}_0$ tel que*

$$\begin{aligned} b(p, \tilde{\mathbf{v}}) &= T_1 = \|\tilde{p}\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2, \\ \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq C \|\mu^{-1/2} \tilde{p}^i\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après [68], on sait que pour tout $\tilde{p}^i \in L_0^2(\Omega^i)$, il existe un $\tilde{\mathbf{v}}^i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega^i)$ tel que

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}^i = \mu_i^{-1} \tilde{p}^i, \quad \|\mu^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}^i\|_{0, \Omega^i} \leq c \|\mu^{-1/2} \tilde{p}^i\|_{0, \Omega^i}, \quad i = in, ex.$$

On pose $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{\mathbf{v}}^{in}, 0, \tilde{\mathbf{v}}^{ex})$ qui appartient à \mathbf{V}_0 , nous avons alors

$$b(p, \tilde{\mathbf{v}}) = T_1 = \sum_{i=in, ex} \int_{\Omega^i} \mu^{-1} \tilde{p}^2 \, ds dl, \quad \|\mu^{1/2} \tilde{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}} \leq C \sum_{i=in, ex} \|\mu_i^{-1/2} \tilde{p}^i\|_{0, \Omega^i},$$

d'où le résultat énoncé. ■

Nous avons le lemme ci-dessous qui nous permet de contrôler le terme :

$$T_2 = b(p, \mathbf{v}^\Gamma).$$

Lemme 8.2.2. *Pour tout $\tilde{p}^* \in L_0^2(\Gamma)$ et tout $\tilde{p} = (\tilde{p}^{in}, \tilde{p}^{ex}) \in L_0^2(\Omega^{in}) \times L_0^2(\Omega^{ex})$, il existe $\mathbf{v}^\Gamma \in \mathbf{V}_0$ tel que*

$$b(p, \mathbf{v}^\Gamma) = T_2 = \|\mu_m^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0, \Gamma}^2 + \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v}^\Gamma \, ds dl, \quad (8.11)$$

$$\|\mathbf{v}^\Gamma\|_{\mathbf{V}} \leq C_1 \|\mu_m^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0, \Gamma}. \quad (8.12)$$

Démonstration. On considère $\tilde{p}^* \in L_0^2(\Gamma)$, donc il existe un $\tilde{\mathbf{v}}^* \in \mathbf{H}_0^1(\Gamma)$ tel que

$$\tilde{\mathbf{v}}^*(s) = \mu_m^{-1} \int_0^s \tilde{p}^*(r) \, dr, \quad \|\mu_m^{1/2} \partial_s \tilde{\mathbf{v}}^i\|_{0, \Gamma} \leq C \|\mu^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0, \Gamma}.$$

On désigne par \mathbf{v}^Γ l'extension continue de $\tilde{\mathbf{v}}^* \in \mathbf{H}_0^1(\Gamma)$ telle que $\mathbf{v}^\Gamma|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = 0$, donc nous avons $\mathbf{v}^\Gamma \in \mathbf{V}_0$ et

$$b(p, \mathbf{v}^\Gamma) = \int_{\Gamma} \mu_m^{-1} (\tilde{p}^*)^2 \, dx + \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v}^\Gamma \, dx dy, \quad \|\mathbf{v}^\Gamma\|_{\mathbf{V}} \leq C_1 \|\mu_m^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0, \Gamma}.$$

ce qui prouve le résultat du lemme. ■

Pour contrôler le terme $T_3 = \int_{\Gamma} [\bar{p}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$, il est utile d'introduire le lemme suivant :

Lemme 8.2.3. *Il existe une fonction $h \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_{\Gamma} h(s, 0) ds = 1, \quad \|h\|_{1,\Omega} \leq C \quad (8.13)$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration. On construit une fonction à variables séparés $h(s, l) = g(s)f(l)$ telle que

$$f(0) = 1, \quad f(\pm 1) = 0, \quad \int_{\Gamma} g(s) ds = 1, \quad g(0) = g(1) = 0.$$

Nous prenons par exemple

$$h(s, l) = 6s(1-s)(1-l^2).$$

Il est clair que la fonction h vérifie

$$\int_{\Gamma} h(s, 0) ds = 1, \quad \|h\|_{1,\Omega} \leq C. \quad (8.14)$$

■

Nous pouvons établir le lemme suivant concernant $T_3 = \int_{\Gamma} [\bar{p}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$:

Lemme 8.2.4. *Pour tout $\bar{p}^i \in \mathbb{R}$ ($i = in, *, ex$), il existe $\bar{\mathbf{v}}^i \in \mathbf{V}_0$ tel que*

$$T_3 \geq C_2 \|\bar{p}\|_M^2, \quad (8.15)$$

$$\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}} \leq C_3 \|\mu^{-1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \quad (8.16)$$

où $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ dépendent uniquement de Ω^{in} , Ω^{ex} , Γ et μ .

Démonstration. On considère la fonction h définie dans le Lemme 8.2.3 et on pose

$$w(s, l) = (\bar{p}^{in} - \bar{p}^{ex})h(s, l) \in H_0^1(\Omega).$$

Puis, on écrit $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{\mathbf{v}}^{in}, \bar{\mathbf{v}}^*, \bar{\mathbf{v}}^{ex})$ dans la base du repère du Frenet $(\tau, \mathbf{n}) = (e_1, e_2)$ (la base canonique de \mathbb{R}^2) tel que :

$$\bar{\mathbf{v}}^i = (0, w(s, l)), \quad i = in, ex, \quad \bar{\mathbf{v}}^* = (0, w(s, 0)). \quad (8.17)$$

Alors, nous avons

$$T_3 = \int_{\Gamma} [\bar{p}] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx = (\bar{p}^{in} - \bar{p}^{ex})^2.$$

On pose $|\Omega| = |\Omega^{in}| + |\Omega^{ex}|$, puis on utilise l'égalité (8.10). On peut écrire avec $\theta > 0$ à choisir :

$$\begin{aligned} T_3 &= \theta \left(|\Omega^{in}| \bar{p}^{in} + |\Omega^{ex}| \bar{p}^{ex} + |\Gamma| \bar{p}^* \right)^2 + \frac{1}{|\Omega^{in}|^2} (|\Omega| \bar{p}^{ex} + |\Gamma| \bar{p}^*)^2 \\ &= \theta |\Omega^{in}|^2 (\bar{p}^{in})^2 + 2\theta |\Omega^{in}| \bar{p}^{in} (|\Omega^{ex}| \bar{p}^{ex} + |\Gamma| \bar{p}^*) + \theta (|\Omega^{ex}| \bar{p}^{ex} + |\Gamma| \bar{p}^*)^2 \\ &\quad + \frac{1}{|\Omega^{in}|^2} (|\Omega| \bar{p}^{ex} + |\Gamma| \bar{p}^*)^2. \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Young avec $\varepsilon > 0$, il vient que

$$\begin{aligned} T_3 &\geq \theta(1-\varepsilon)|\Omega^{in}|^2 (\bar{p}^{in})^2 + \theta(1-\frac{1}{\varepsilon}) (|\Omega^{ex}|\bar{p}^{ex} + |\Gamma|\bar{p}^*)^2 + \frac{1}{|\Omega^{in}|^2} (|\Omega|\bar{p}^{ex} + |\Gamma|\bar{p}^*)^2 \\ &\geq \theta(1-\varepsilon)|\Omega^{in}|^2 (\bar{p}^{in})^2 + \left(\theta(1-\frac{1}{\varepsilon})|\Omega^{ex}|^2 + \frac{|\Omega|^2}{|\Omega^{in}|^2} \right) (\bar{p}^{ex})^2 \\ &\quad + \left(\theta(1-\frac{1}{\varepsilon}) + \frac{1}{|\Omega^{in}|^2} \right) |\Gamma|^2 (\bar{p}^*)^2 + 2 \left(\theta(1-\frac{1}{\varepsilon})|\Omega^{ex}| + \frac{|\Omega|}{|\Omega^{in}|^2} \right) |\Gamma|\bar{p}^{ex}\bar{p}^*. \end{aligned}$$

Toujours à l'aide de l'inégalité de Young avec $\eta > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} T_3 &\geq \theta(1-\varepsilon)|\Omega^{in}|^2 (\bar{p}^{in})^2 + \left[\theta|\Omega^{ex}| \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(|\Omega^{ex}| - \eta \right) + \frac{|\Omega|}{|\Omega^{in}|^2} \left(|\Omega| - \eta \right) \right] (\bar{p}^{ex})^2 \\ &\quad + \left[\theta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{|\Omega^{ex}|}{\eta} \right) + \frac{1}{|\Omega^{in}|^2} \left(1 - \frac{|\Omega|}{\eta} \right) \right] |\Gamma|^2 (\bar{p}^*)^2. \end{aligned}$$

On prend par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $\eta = \frac{|\Omega^{ex}|}{2}$, nous avons alors

$$\begin{aligned} T_3 &\geq \frac{\theta}{2}|\Omega^{in}|^2 (\bar{p}^{in})^2 + \frac{1}{2} \left(-\theta|\Omega^{ex}|^2 + \frac{|\Omega|(|\Omega^{ex}| + 2|\Omega^{in}|)}{|\Omega^{in}|^2} \right) (\bar{p}^{ex})^2 \\ &\quad + \left(\theta - \frac{|\Omega^{ex}| + 2|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}||\Omega^{in}|^2} \right) |\Gamma|^2 (\bar{p}^*)^2. \end{aligned}$$

On pose $C = \frac{|\Omega^{ex}| + 2|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}||\Omega^{in}|^2}$ et on choisit un $\theta > 0$ tel que $C < \theta < C \left(1 + \frac{|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}|} \right)$, par exemple $\theta = C \left(1 + \frac{1}{2} \frac{|\Omega^{in}|}{|\Omega^{ex}|} \right)$. Alors il existe une constante strictement positive $C_2 > 0$ telle que

$$T_3 \geq C_2 \left(\|\mu_{in}^{-1/2}\bar{p}^{in}\|_{0,\Omega^{in}}^2 + \|\mu_{ex}^{-1/2}\bar{p}^{ex}\|_{0,\Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2}\bar{p}^*\|_{0,\Gamma}^2 \right).$$

En utilisant l'inégalité (8.13) du Lemme 8.2.3, nous avons

$$\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}} \leq C_3 \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2}\bar{p}^i\|_{0,\Omega^i} = \|\mu^{-1/2}\bar{p}\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}.$$

■

Pour prouver la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b_\varepsilon(\cdot, \cdot) = b(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}_0 \times M_0$, on considère $\mathbf{v} = \alpha\tilde{\mathbf{v}} + \beta\mathbf{v}^\Gamma + \gamma\bar{\mathbf{v}}$ qui appartient à \mathbf{V}_0 où α, β et γ sont des constantes strictement positives à choisir. Alors, nous avons

$$b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) = b(p, \mathbf{v}) = \alpha b(p, \tilde{\mathbf{v}}) + \beta b(p, \tilde{\mathbf{v}}^\Gamma) + \gamma b(p, \bar{\mathbf{v}}).$$

En utilisant les résultats des Lemmes 8.2.1 et 8.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &= \alpha \|\mu^{1/2}\tilde{p}\|_{0,\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}}^2 + \beta \|\mu_m^{-1/2}\tilde{p}^*\|_{0,\Gamma}^2 + \beta \int_{\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v}^\Gamma ds dl \\ &\quad + \gamma \int_{\Omega^{in}\cup\Omega^{ex}} \tilde{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} ds dl + \gamma \int_{\Gamma} [\tilde{p}] \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} ds. \end{aligned} \tag{8.18}$$

D'une part, par inégalité de Young avec $\varepsilon > 0$, il vient que

$$\int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v}^\Gamma ds dl \geq -\varepsilon \|\mu^{1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 - \frac{1}{4\varepsilon \mu} |\mathbf{v}^\Gamma|_{1,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2.$$

En utilisant le Lemme 8.2.2, on obtient

$$\int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v}^\Gamma ds dl \geq -\varepsilon \|\mu^{1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 - \frac{C_4}{\varepsilon} \|\mu_m^{1/2} \tilde{p}^*\|_{0,\Gamma}^2. \quad (8.19)$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 8.2.4, nous avons avec $\delta > 0$:

$$\int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \tilde{p} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} ds dl \geq -\delta \|\mu^{1/2} \tilde{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 - \frac{C_5}{\delta} \|\mu^{1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2. \quad (8.20)$$

En injectant les inégalités (8.19), (8.20) et l'inégalité du Lemme 8.2.4 dans (8.18), on obtient

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &\geq (\alpha - \gamma\delta) \|\mu^{-1/2} \tilde{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \beta \left(1 - \frac{C_4}{\varepsilon}\right) \|\mu_m^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0,\Gamma}^2 \\ &\quad - \beta\varepsilon \|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \gamma \left(C_2 - \frac{C_5}{\delta}\right) \|\mu^{-1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \gamma C_2 \|\mu_m^{-1/2} \bar{p}^*\|_{0,\Gamma}^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et $\tilde{p} = p - \bar{p}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\mu^{-1/2} \tilde{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 &\geq \left(\|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} - \|\mu^{-1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 - \|\mu^{-1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2. \end{aligned} \quad (8.21)$$

À l'aide de l'inégalité (8.21), nous avons

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &\geq \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma\delta}{2} - \beta\varepsilon \right) \|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \beta \left(1 - \frac{C_4}{\varepsilon}\right) \|\mu_m^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0,\Gamma}^2 \\ &\quad + \left(\gamma \left(C_2 - \frac{C_5}{\delta}\right) + \gamma\delta - \alpha \right) \|\mu^{-1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \gamma C_3 \|\mu_m^{-1/2} \bar{p}^*\|_{0,\Gamma}^2. \end{aligned}$$

On prend $\varepsilon = 2C_4$ et $\delta = \frac{2C_5}{C_2} = \frac{1}{\gamma}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &\geq \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} - 2\beta C_4 \right) \|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \frac{\beta}{2} \|\mu_m^{-1/2} \tilde{p}^*\|_{0,\Gamma}^2 \\ &\quad + \left(\frac{C_2^2}{4C_5} + 1 - \alpha \right) \|\mu^{-1/2} \bar{p}\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \frac{C_2 C_3}{2C_5} \|\mu_m^{-1/2} \bar{p}^*\|_{0,\Gamma}^2. \end{aligned}$$

On choisit par exemple $\alpha = \frac{C_2^2}{8C_5} + 1$ et $\beta = \frac{C_2^2}{64C_4C_5}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &\geq C \left(\|\mu^{-1/2} p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2} (p^m - \pi_\Gamma p^m)\|_{0,\Gamma}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\mu^{-1/2} \pi_0 p\|_{0,\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2} \pi_\Gamma p^m\|_{0,\Gamma}^2 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$b^\varepsilon(p, \mathbf{v}) \geq C \left(\|\mu^{-1/2} p\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2} p^m\|_{0, \Gamma}^2 \right)$$

et nous avons aussi

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \left(\|\mu^{-1/2} p\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + \|\mu_m^{-1/2} p^m\|_{0, \Gamma} \right).$$

D'où le lemme de la condition *inf-sup* de la forme bilinéaire $b_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ sur $M_0 \times \mathbf{V}_0$:

Lemme 8.2.5. *Pour tout $p \in M_0$, il existe $v \in V_0$ tel que*

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(p, v) &\geq C_1 \|\mu^{-1/2} p\|_{0, \Omega}^2, \\ \|v\|_{\mathbf{V}} &\leq C_2 \|\mu^{-1/2} p\|_{0, \Omega} \end{aligned}$$

où $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ sont des constantes dépendant du domaine physique Ω .

8.2.3 Interprétation comme problème aux limites

Il est utile d'introduire le dernier changement du domaine cité dans la figure Fig. 8.1 :

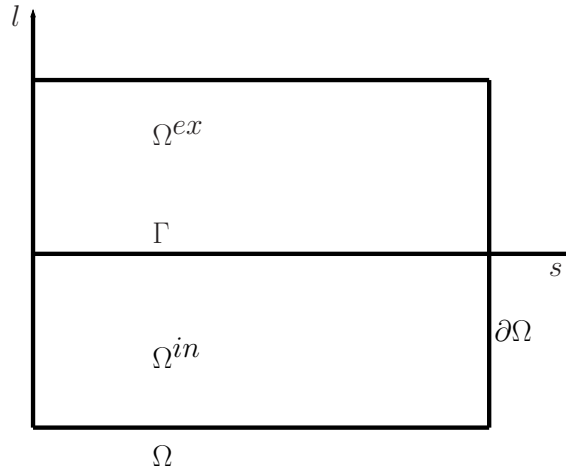


Fig. 8.1 – Domaine Ω après mise à l'échelle.

On identifie Γ à la courbe moyenne de $\Gamma_\varepsilon^{ex} = \Gamma_\varepsilon^{in} = \Gamma$, puis on introduit maintenant les espaces de Hilbert \mathbf{V}_0 et M_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}) : v|_\Gamma \in \mathbf{H}_0^1(\Gamma) \right\}, \\ M_0 &= \left\{ p = (p^{in}, p^\Gamma, p^{ex}) \in L_0^2(\Omega^{in}) \times L_0^2(\Gamma) \times L_0^2(\Omega^{ex}) : p^\Gamma = p^\Gamma(s) \text{ sur } \Gamma \right\}, \end{aligned}$$

que l'on munit respectivement des normes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_0}^2 &= \|\mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{1/2} \partial_s \mathbf{v}\|_{0, \Gamma}^2, \\ \|p\|_{M_0}^2 &= \|\mu^{-1/2} p\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}}^2 + \|\mu_m^{-1/2} p^*\|_{0, \Gamma}^2. \end{aligned}$$

Le problème variationnel limite consiste à chercher $(\mathbf{u}^0, p^0) \in \mathbf{V}_0 \times M_0$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^0, v) - b(p^0, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(q, \mathbf{u}^0) = 0, & \forall q \in M_0 \end{cases} \quad (8.22)$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Gamma} \mu_m \partial_s \mathbf{u} \cdot \partial_s \mathbf{v} \, ds, \\ b(p, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{in}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Omega^{ex}} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Gamma} p^* \partial_s \mathbf{v}_1 \, dx, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Gamma} (\mathbf{g}^{in} + \mathbf{g}^{ex}) \cdot \mathbf{v} \, ds. \end{aligned}$$

On peut réinterpréter ce problème variationnel en termes d'équations aux dérivées partielles que l'on appellera modèle asymptotique, en intégrant par parties dans Ω^{in} et Ω^{ex} et sur Γ . On obtient de nouvelles conditions d'échange entre Γ et les sous-domaines Ω^i , $i = in, ex$. Le problème modèle asymptotique (8.23) qu'on obtient s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}_0] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ u_{0,1}^\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} - p_0 \mathbf{n}] - \partial_s \left(\begin{array}{c} -p_0^\Gamma \\ \mu_m \partial_s u_{0,2}^\Gamma \end{array} \right) = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (8.23)$$

avec $\mathbf{u}_0^\Gamma = (u_{0,1}^\Gamma, u_{0,2}^\Gamma) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ qui représente la trace de $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ sur Γ . Les deux conditions de transmission $[\mathbf{u}_0] = 0$ et $u_{0,1}^\Gamma = 0$ sur l'interface Γ s'écrivent aussi sous la forme

$$u_{0,1}^\Gamma = u_{0,1}^{ex} = u_{0,1}^{in} = 0; \quad u_{0,2}^\Gamma = u_{0,2}^{ex} = u_{0,2}^{in}. \quad (8.24)$$

8.2.4 Extension à une interface courbe

Dans cette sous-section, on utilise les notations décrites dans la section 6.3.2 du chapitre 6.

Pour simplifier l'étude, on suppose ici que l'épaisseur de l'interface Γ est constante dans le sens de la normale. On considère $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne noté s , croissante dans le sens direct par rapport à Ω^{in} . En utilisant un changement de variables pour décrire le domaine d'épaisseur faible Ω_ε^m sous cette forme :

$$\Omega_\varepsilon^m = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{x} = \varphi(s) + l \mathbf{n}(s), l \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \right\}.$$

On désigne par $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à Γ orienté dans le sens des s croissants.

On rappelle ici les formules de Frenet suivantes :

$$\varphi'(s) = \boldsymbol{\tau}(s), \quad \boldsymbol{\tau}'(s) = r(s) \mathbf{n}(s) \quad \text{et} \quad \mathbf{n}'(s) = -r(s) \boldsymbol{\tau}(s),$$

où $r(s)$ est la courbure de Γ au point $\varphi(s)$.

On décompose la vitesse \mathbf{u} dans le repère de Frenet sous cette forme

$$\mathbf{u}(s, l) = u_\tau \boldsymbol{\tau}(s) + u_n \mathbf{n}(s).$$

On obtient

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= du_\tau \boldsymbol{\tau} + u_\tau d\boldsymbol{\tau}(s) + du_n \mathbf{n}(s) + u_n d\mathbf{n}(s) \\ &= \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s} ds + \frac{\partial u_\tau}{\partial l} dl \right) \boldsymbol{\tau}(s) + ru_\tau ds \mathbf{n}(s) + \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} ds + \frac{\partial u_n}{\partial l} dl \right) \mathbf{n}(s) - ru_n ds \boldsymbol{\tau}(s) \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial s} - ru_n \right) ds + \frac{\partial u_\tau}{\partial l} dl \\ \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + ru_\tau \right) ds + \frac{\partial u_n}{\partial l} dl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour tout point de coordonnées \times de Ω_ε^m , nous avons

$$d\times = \varphi'(s) ds + l \mathbf{n}'(s) ds + \mathbf{n}(s) dl = (1 - r(s)l) ds \boldsymbol{\tau}(s) + dl \mathbf{n}(s). \quad (8.25)$$

Dans la suite, pour alléger les notations, on posera $r(s) = r$ et on suppose que la courbure r est bornée et indépendant de ε . On introduit les notations suivantes :

$$\frac{\partial u_n}{\partial s} = u_{n,s}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial l} = u_{n,l}, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial s} = u_{\tau,s}, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial l} = u_{\tau,l}.$$

En utilisant la relation suivante $d\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot d\times$, on obtient l'opérateur de dérivation dans le repère local $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-rl} (u_{\tau,s} - ru_n) & u_{\tau,l} \\ \frac{1}{1-rl} (u_{n,s} + ru_\tau) & u_{n,l} \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

et l'opérateur de la divergence s'écrit sous cette forme :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{1-rl} (u_{\tau,s} - ru_n) + u_{n,l}. \quad (8.27)$$

Nous rappelons ici les formes bilinéaires associées au problème de Stokes :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega_\varepsilon^i} \mu_i \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx dy + \int_{\Omega_\varepsilon^m} \mu_m^\varepsilon \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx dy, \\ b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega_\varepsilon^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy + \int_{\Omega_\varepsilon^m} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy. \end{aligned}$$

Les intégrales définies respectivement sur les domaines Ω_ε^{in} et Ω_ε^{ex} sont invariables par rapport aux composantes de la base de Frenet $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n})$. Nous nous intéressons aux intégrales définies sur le domaine mince Ω_ε^m .

D'une part, en utilisant (8.26) on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^m} \mu_m^\varepsilon \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx dy &= \int_{\Omega_\varepsilon^m} \frac{\mu_m^\varepsilon}{1-rl} ((u_{\tau,s} - ru_n)(v_{\tau,s} - rv_n) + (u_{n,s} + ru_\tau)(v_{n,s} + rv_\tau)) ds dl \\ &\quad + \int_{\Omega_\varepsilon^m} \mu_m^\varepsilon (1-rl) (u_{\tau,l} v_{\tau,l} + u_{n,l} v_{n,l}) ds dl \end{aligned}$$

On utilise maintenant le changement de variable $l = \varepsilon \hat{l}$ dans Ω^m , on obtient

$$u_{n,l} = \frac{1}{\varepsilon} u_{n,\hat{l}}, \quad u_{\tau,l} = \frac{1}{\varepsilon} u_{\tau,\hat{l}}$$

et à l'aide de $\mu_\varepsilon^m = \frac{\mu_m}{\varepsilon}$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^m} \mu_\varepsilon^m \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx dy &= \int_{\Omega^m} \frac{\mu_m}{1 - r\varepsilon \hat{l}} ((u_{\tau,s} - ru_n)(v_{\tau,s} - rv_n) + (u_{n,s} + ru_\tau)(v_{n,s} + rv_\tau)) \, ds d\hat{l} \\ &\quad + \int_{\Omega^m} \frac{\mu_m(1 - r\varepsilon \hat{l})}{\varepsilon^2} (u_{\tau,\hat{l}} v_{\tau,\hat{l}} + u_{n,\hat{l}} v_{n,\hat{l}}) \, ds d\hat{l} \end{aligned}$$

où le domaine mince Ω^m est indépendant de ε , $\Omega^m = [0; 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

D'autre part, à l'aide (8.27) il vient que

$$\int_{\Omega_\varepsilon^m} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy = \int_{\Omega^m} p \left(\frac{1}{1 - rl} (v_{\tau,s} - rv_n) + v_{n,l} \right) |1 - rl| \, ds dl.$$

En utilisant le changement de variable $l = \varepsilon \hat{l}$ dans Ω^m , on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon^m} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy = \int_{\Omega^m} \varepsilon p \left(\frac{1}{1 - r\varepsilon \hat{l}} (v_{\tau,s} - rv_n) + \frac{1}{\varepsilon} v_{n,\hat{l}} \right) |1 - r\varepsilon \hat{l}| \, ds d\hat{l}.$$

Afin d'alléger les notations, on pose $l = \hat{l}$. On définit maintenant une nouvelle pression sur Ω^m par :

$$p^* = \varepsilon p^m.$$

Par conséquent, les formes bilinéaires $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et $b_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mu_i \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, ds dl + \int_{\Omega^m} \frac{\mu_m}{1 - r\varepsilon l} (u_{\tau,s} - ru_n)(v_{\tau,s} - rv_n) \, ds dl \\ &\quad + \int_{\Omega^m} \frac{\mu_m}{1 - r\varepsilon l} (u_{n,s} + ru_\tau)(v_{n,s} + rv_\tau) \, ds dl + \int_{\Omega^m} \frac{\mu_m(1 - r\varepsilon l)}{\varepsilon^2} (u_{\tau,l} v_{\tau,l} + u_{n,l} v_{n,l}) \, ds dl, \\ b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, ds dl + \int_{\Omega^m} p^* \left(\frac{1}{1 - r\varepsilon l} (v_{\tau,s} - rv_n) + \frac{1}{\varepsilon} v_{n,l} \right) |1 - r\varepsilon l| \, ds dl. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle associée au problème (8.8) s'écrit : trouver $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon) \in \mathbf{V} \times M$ tels que

$$\begin{cases} a_\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) - b_\varepsilon(p^\varepsilon, \mathbf{v}) = l_\varepsilon(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b_\varepsilon(q, \mathbf{u}^\varepsilon) = 0, & \forall q \in M. \end{cases} \quad (8.28)$$

avec $\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)$, $M = L_0^2(\Omega)$.

Nous utilisons les résultats de convergence et le même raisonnement que dans la section 8.2.1. Lorsque ε tend vers 0, les intégrales définies sur Ω^{in} et Ω^{ex} ne posent pas de problème.

On s'intéresse à la première équation de (8.28) :

— On choisit $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\varepsilon$ et $q = p^\varepsilon$,
 — On utilise l'hypothèse r est borné et indépendant de ε et on écrit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |1 - r\varepsilon l| = 1$,
 — On multiplie (8.28) par ε^2 , puis on utilise la coercivité de la forme $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$.
 Ceci nous permet de conclure, à l'aide des résultats de convergence de la section 8.2.1, que la suite (u^ε) converge vers u^0 . Nous avons

$$u_{\tau,l}^0 = 0, \quad u_{n,l}^0 = 0.$$

On s'intéresse maintenant à la deuxième équation de la formulation variationnelle (8.28). On obtient sur le domaine Ω^m :

$$u_{\tau,s}^0 - ru_n^0 = 0. \quad (8.29)$$

On identifie $\Gamma = \Gamma^{in} = \Gamma^{ex}$, puis on utilise $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}_0$ (i.e. \mathbf{u}^0 est indépendant de l), $d\Gamma = \|\varphi(s)\| ds$ et (8.29). On obtient pour l'équation du mouvement dans $\Omega^m = I \times [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$:

$$\int_{\Omega^m} \mu_m (u_{n,s} + ru_\tau) (v_{n,s} + rv_\tau) ds dl = \int_{\Gamma} \mu_m (\partial_\tau u_n + ru_\tau) (\partial_\tau v_n + rv_\tau) d\Gamma$$

où ∂_τ représente la dérivée tangentielle.

On introduit les espaces suivants :

$$\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}; \partial_l \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega^m\},$$

$$M_0 = \left\{ p = (p^{in}, p^\Gamma, p^{ex}) \in L^2(\Omega^{in}) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega^{ex}); \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p ds dl + \int_{\Gamma} p^\Gamma ds = 0 \right\}.$$

Le problème limite s'écrit sous la forme suivante : trouver $(\mathbf{u}^0, p^0) \in \mathbf{V}_0 \times M_0$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) - b(p^0, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(q, \mathbf{u}^0) = 0, & \forall q \in M_0. \end{cases} \quad (8.30)$$

avec les notations suivantes :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mu_i \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} ds dl + \int_{\Gamma} \mu_m (\partial_\tau u_n + ru_\tau) (\partial_\tau v_n + rv_\tau) d\Gamma,$$

$$b(p, \mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} ds dl + \int_{\Gamma} p^\Gamma (\partial_\tau v_\tau - rv_n) d\Gamma,$$

$$l(v) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} ds dl + \int_{\Gamma} (\mathbf{g}^{in} + \mathbf{g}^{ex}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

Interprétation comme problème aux limites

On peut réinterpréter le problème variationnel (8.30) en termes d'équations aux dérivées partielles, en intégrant par parties dans les sous-domaines Ω^{in} et Ω^{ex} et sur l'interface Γ .

Nous avons montré que les fonctions u_τ et u_n dépendent uniquement de s sur Γ . En utilisant la deuxième équation de (8.30), on obtient :

$$\partial_\tau u_\tau^0 - ru_n^0 = 0. \quad (8.31)$$

On obtient aussi la condition $[\mathbf{u}] = 0$ sur Γ qui s'écrit sous la forme :

$$\text{suivant } \boldsymbol{\tau} : u_{\boldsymbol{\tau}}^{in} = u_{\boldsymbol{\tau}}^{ex} = u_{\boldsymbol{\tau}}^0, \quad (8.32)$$

$$\text{suivant } \boldsymbol{n} : u_{\boldsymbol{n}}^{in} = u_{\boldsymbol{n}}^{ex} = u_{\boldsymbol{n}}^0. \quad (8.33)$$

On prend une fonction test suivant $\boldsymbol{\tau}$ (i.e. $v_{\boldsymbol{n}} = 0$), puis suivant \boldsymbol{n} (i.e. on prend $v_{\boldsymbol{\tau}} = 0$). Ensuite, on intègre par parties dans la première équation de (8.30), on obtient les termes suivants sur Γ , à rajouter au terme standard $[\mu \partial_{\boldsymbol{n}} \mathbf{u} - p \boldsymbol{n}]$:

$$\text{suivant } \boldsymbol{\tau} : \mu_m r (\partial_{\boldsymbol{\tau}} u_{\boldsymbol{n}}^0 + r u_{\boldsymbol{\tau}}^0) + \partial_{\boldsymbol{\tau}} p^{\Gamma} \quad (8.34)$$

$$\text{suivant } \boldsymbol{n} : -\mu_m \partial_{\boldsymbol{\tau}} \partial_{\boldsymbol{\tau}} u_{\boldsymbol{n}}^0 - \mu_m \partial_{\boldsymbol{\tau}} (r u_{\boldsymbol{\tau}}^0) + r p^{\Gamma}. \quad (8.35)$$

On rappelle que l'on a, le long de Γ ,

$$\partial_{\boldsymbol{n}} \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \partial_l u_{\boldsymbol{\tau}} \\ \partial_l u_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix}.$$

On utilise (8.34), (8.32) et (8.31), on obtient alors de nouvelles conditions de transmission non-standard sur Γ , avec $\mathbf{g} = \mathbf{g}^{in} + \mathbf{g}^{ex}$:

— suivant $\boldsymbol{\tau}$:

$$[\mu \partial_l u_{\boldsymbol{\tau}}] + \mu_m r (\partial_{\boldsymbol{\tau}} u_{\boldsymbol{n}}^0 + r u_{\boldsymbol{\tau}}^0) + \partial_{\boldsymbol{\tau}} p^{\Gamma} = g_{\boldsymbol{\tau}}, \quad (8.36)$$

$$u_{\boldsymbol{\tau}}^{in} = u_{\boldsymbol{\tau}}^{ex} = u_{\boldsymbol{\tau}}^0. \quad (8.37)$$

— suivant \boldsymbol{n} :

$$[\mu \partial_l u_{\boldsymbol{n}} - p] - \mu_m \partial_{\boldsymbol{\tau}} \partial_{\boldsymbol{\tau}} u_{\boldsymbol{n}}^0 - \mu_m \partial_{\boldsymbol{\tau}} (r u_{\boldsymbol{\tau}}^0) + r p^{\Gamma} = g_{\boldsymbol{n}}, \quad (8.38)$$

$$u_{\boldsymbol{n}}^{in} = u_{\boldsymbol{n}}^{ex} = u_{\boldsymbol{n}}^0. \quad (8.39)$$

— et

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} u_{\boldsymbol{\tau}}^0 - r u_{\boldsymbol{n}}^0 = 0. \quad (8.40)$$

Le modèle asymptotique obtenu s'écrit :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (8.41)$$

auquel on rajoute les conditions de transmission non-standard sur Γ , définies par les équations (8.36), (8.38) et (8.40).

Nous remarquons que si la courbure $r = r(s) = 0$, nous obtenons les mêmes équations dans le cas où l'interface est une droite.

Nous prévoyons dans la suite de nos travaux d'appliquer la méthode NXFEM au problème (8.41) pour les conditions de transmission non-standard. Nous présentons la stratégie qu'il faut apporter pour développer la méthode NXFEM au problème (8.41). Nous proposerons deux variantes basées sur la méthode NXFEM développée dans le chapitre 4 pour le problème d'interface de Stokes.

La première variante consiste à garder \mathbf{u}^Γ comme inconnue et à dualiser $\mathbf{u}^\Gamma - \{\mathbf{u}\} = \mathbf{0}$ et $\partial_s \mathbf{u}^\Gamma = \mathbf{0}$. La formulation variationnelle s'écrit sous la forme suivante : trouver $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\theta}) \in V_h \times Q_h \times \Theta_h$ tels que

$$\begin{cases} A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) + C_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) &= l_h(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ B_h(q_h, \mathbf{u}_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \\ C_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) &= 0, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta_h \end{cases} \quad (8.42)$$

où les espaces d'approximations $Q_h := Q_h^{in} \times Q_h^{ex}$ et Θ_h sont définis par :

$$\begin{aligned} Q_h^i &= \{q \in L_0^2(\Omega^i) : q|_T \in P^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i\}, \quad i = in, ex, \\ \Theta_h &= \{\boldsymbol{\theta} \in L^2(\Gamma) : \boldsymbol{\theta} \in (P^r(\Gamma_T))^2\}, \quad r = 0, 1 \end{aligned}$$

et l'espace d'approximation de la vitesse \mathbf{V}_h est choisi selon la méthode utilisée, voir le chapitre 4. Les formes bilinéaires s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} A_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx - \int_\Gamma \{\mu \nabla_n \mathbf{u}\} \cdot [\mathbf{v}] \, ds \\ &\quad - \int_\Gamma \{\mu \nabla_n \mathbf{v}\} \cdot [\mathbf{u}_h] \, ds + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [\mathbf{u}] \cdot [\mathbf{v}] \, ds + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_{\Gamma_T} \mu_m \partial_s \{u_2\}_* \partial_s \{v_2\}_* \, ds \\ B_h(p, \mathbf{v}) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_\Gamma \{p\} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \, ds - \int_\Gamma p^\Gamma \partial_s v_1 \, ds, \\ C_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) &= \int_\Gamma \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{v} - \{v_2\}_*) \, ds. \end{aligned}$$

Le deuxième variante consiste à éliminer l'inconnue \mathbf{u}^Γ et à rajouter des termes de stabilisation sur la pression aux nœuds d'intersection de l'interface avec les arêtes du maillage. Nous proposerons donc de rajouter les termes de saut de pression ou du gradient de pression selon les éléments finis utilisés pour approcher p^Γ :

$$\begin{aligned} \text{— si } p^\Gamma \in P^0, \\ C(p^\Gamma, q^\Gamma) &= \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \alpha_N [p^\Gamma][q^\Gamma](N) \\ \text{— si } p^\Gamma \in P^1, \\ C(p^\Gamma, q^\Gamma) &= \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \alpha_N [\partial_s p^\Gamma][\partial_s q^\Gamma](N) \end{aligned}$$

où α_N est le paramètre de stabilisation à déterminer pour que le problème soit bien posé.

Nous nous intéresserons à prouver que les formulations variationnelles mixte associées aux deux variantes soient consistantes et bien posées. Pour la stabilité, nous envisagerons d'utiliser le théorème de Babuška-Brezzi.

PARTIE III

MODÉLISATION D'UNE MEMBRANE PAR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN

Cette partie est découpée en deux chapitres. Le premier chapitre concerne les relations entre le comportement mécanique des globules rouges et l'écoulement sanguin, cela revient à appréhender l'hémodynamique et la rhéologie du sang à travers le comportement mécanique des globules rouges. On justifie ici le choix du modèle rhéologique viscoélastique non-newtonien et non-linéaire de Giesekus pour modéliser le comportement de la membrane cellulaire. Le deuxième chapitre est dédié à la modélisation asymptotique d'une membrane liquide de type Giesekus. On présente d'abord le problème modèle à résoudre puis, on écrit de manière formelle la formulation faible associée au problème d'interphase dans le domaine constitué de trois fluides. Ensuite, on donne le problème faible obtenu après un passage formel à la limite sur l'épaisseur de la membrane. Enfin, on interprète le modèle asymptotique comme problème aux limites.

Globules rouges et modèles rhéologiques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux relations entre le comportement mécanique des globules rouges et l'écoulement sanguin. Cela revient à appréhender l'hémodynamique et la rhéologie du sang à travers le comportement mécanique des globules rouges. Pour cela, nous avons choisi le modèle rhéologique viscoélastique non-newtonien et non-linéaire de Giesekus pour modéliser le comportement de la membrane cellulaire.

Sommaire

9.1	Sang et globules rouges	191
9.2	Rhéologie des liquides	194
9.2.1	Invariance des lois de comportement et dérivées objectives	194
9.2.2	Modèles quasi-linéaires	195
9.2.3	Modèles non-linéaires	197

9.1 Sang et globules rouges

Le sang est un liquide biologique ayant accès à la totalité des cellules d'un organisme via le système circulatoire. Le corps humain adulte en contient environ 5 litres.

Son rôle est multiple. Il transporte les éléments nutritifs et les produits terminaux du métabolisme considérés comme « déchets ». Il rend possible la communication entre cellules en acheminant les messagers chimiques, hormonaux et autres, synthétisés par différents tissus. Il permet la thermorégulation de l'ensemble de l'organisme.

Le sang peut être considéré comme un ensemble de particules facilement déformables, les globules rouges, en suspension dans une matrice liquide, le plasma. Ce dernier constitué à 91% d'eau, contient des ions (Na^+ , Cl^- , Ca^{2+} , K^+ ...), des solutés organiques (urée, glucose, hormones...) et des protéines plasmatiques (albumine, Lipoprotéines HDL et LDL). Ces protéines jouent un rôle important dans le comportement rhéologique du sang.

Les globules rouges¹, principales cellules sanguines puisqu'ils en représentent 45% du volume², transportent l'oxygène et le gaz carbonique entre les poumons et les cellules. L'hémoglobine contenu dans le cytoplasme permet le transport de l'oxygène alors

1. érythrocytes ou hématies.

2. Soit 5×10^6 globules rouges par μL de sang et donc, 25×10^{12} globules rouges pour un humain adulte.

que celui du gaz carbonique est dû à une enzyme présente à la surface des hématies, l'anhydrase carbonique.

Comme la totalité des cellules sanguines, les globules rouges sont fabriqués dans la moelle osseuse à partir de cellules souches, l'érythropoïèse. Durant sa maturation, le futur globule rouge expulse son noyau puis en moins de deux jours, ses ribosomes. Il migre ensuite dans le système circulatoire. Sa durée de vie est de 120 jours. Cette absence de noyau rend le globule rouge facilement déformable.

Il est à noter qu'il joue un rôle essentiel dans la *reconnaissance de soi* : les groupes sanguins érythrocytaires ABO et le facteur rhésus.

D'un point de vue morphologique, le globule rouge d'un patient sain a une forme biconcave d'environ $7,8 \mu\text{m}$ de diamètre [35, 112, 113]. Son volume est de $94 \mu\text{m}^3$ pour une aire de $135 \mu\text{m}^2$. Comparé à une sphère de même volume, le globule a un excès de surface de l'ordre de 40%.

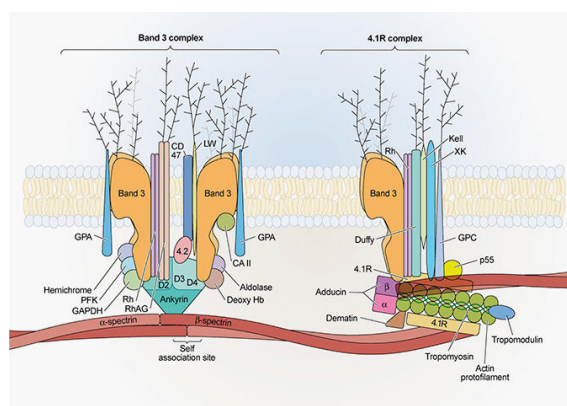


Fig. 9.1 – Représentation schématique de la membrane érythrocytaire et du squelette membranaire.

La paroi d'un globule rouge est formée de deux parties : la membrane cytoplasmique et le cytosquelette membranaire (Fig. 9.1). La membrane cytoplasmique est constituée d'une bicouche lipidique où s'intercalent des protéines. Ces protéines sont des transporteurs d'ions, des récepteurs membranaires ou des points d'ancrage du cytosquelette érythrocytaire. Celui-ci est responsable de l'intégrité du globule rouge. Il est formé d'un réseau de protéines qui tapissent la face interne de la membrane cytoplasmique. Le principal constituant protéique de ce réseau est la spectrine. Son épaisseur est de l'ordre de 7,5 nm.

1616 est la date généralement admise comme point de départ de la compréhension de l'écoulement du sang dans le système circulatoire ou l'hémodynamique lorsque William Harvey en démontre expérimentalement le fonctionnement.

En 1828, Jean Léonard Marie Poiseuille présente dans sa thèse de médecine intitulée « Recherches sur la force du cœur aortique » [108], des expériences sur les variations de la pression sanguine *in vivo* sur des chiens et des chevaux. Il s'intéresse plus particulièrement à l'influence de la respiration sur ces variations. Il établit que : « la force totale statique, qui meut le sang dans une artère, est exactement en raison directe de l'aire que présente le cercle de cette artère, ou en raison directe du carré de son diamètre, quel que soit le lieu qu'elle occupe. » Il met également en évidence la déformation des artères sur l'action de la pression sanguine. Durant la période 1840-1841, il publie trois articles, « Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres », dans lesquels il propose une loi d'écoulement pour les capillaires nommée

depuis loi de Poiseuille [109–111]. Il est à noter que le prussien Gotthilf Hagen aboutit en 1839, indépendamment de Poiseuille, à la même loi d'écoulement [72].

En 1931, Fåhræus et Lindqvist montrent que les mesures de la viscosité du sang dépendent du diamètre du tube dans lequel il s'écoule (effet Fåhræus-Lindqvist) [60]. Cet effet s'explique par un déplacement des globules rouges vers le centre de l'écoulement (effet Segré-Silberberg [122–124]), faisant apparaître une couche limite plasmatique de quelques μm . Cette migration des globules rouges vers le centre de l'écoulement est associée à l'inertie du fluide, i.e. au nombre de Reynolds, et à leur déformabilité (voir par exemple : [38, 99, 128]).

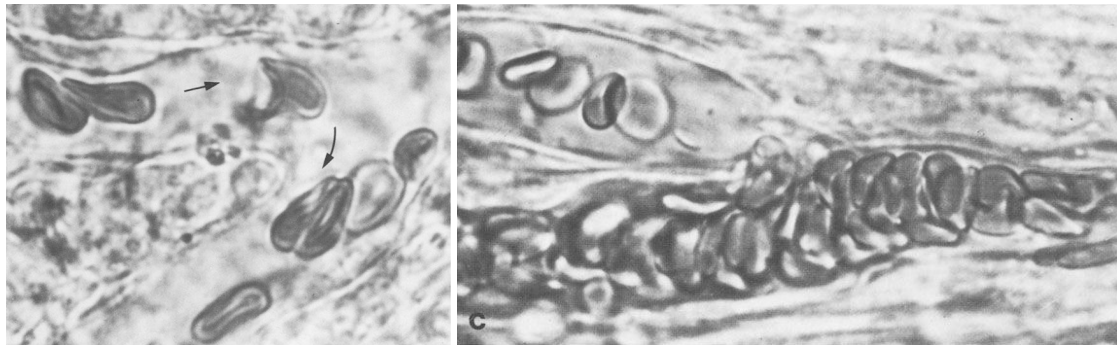


Fig. 9.2 – Déformation et aggrégation de globules rouges dans un écoulement capillaire [28].

Le sang est assimilable à une suspension concentrée de particules non sphériques déformables, les globules rouges, ces derniers pouvant selon les conditions hydrodynamiques former des aggrégats (Fig. 9.2). Du point de vue rhéologique, le sang est un liquide non-newtonien viscoélastique thixotrope.

Un liquide non-newtonien est un liquide dont la viscosité est une fonction de la vitesse de déformation $\dot{\gamma}$. La thixotropie correspond à la diminution de la viscosité au cours du temps lors d'un cisaillement simple à vitesse de déformation constante. À la cessation de la déformation, la viscosité reprend sa valeur initiale. Cette propriété est associée à la destruction d'aggrégats lors d'un écoulement. Un liquide viscoélastique est un corps dont le comportement est intermédiaire entre un liquide newtonien et un solide élastique.

Le tableau Tab. 9.1 donne les caractéristiques des écoulements dans le système circulatoire humain.

Vaisseau	\varnothing (mm)	v (cm.s ⁻¹)	$\dot{\gamma}$ (s ⁻¹)	\Re
Aorte	20-30	60	130	4500
Artères	1-3	20-50	700	400
Artérioles	0,1-0,5	0,5	1 000	2,3
Capillaire	0,01-0,05	0,05	800	0,05
Veinules	0,01-1	0,04-0,1	0,01-0,02	0,01
Veines	3-6	5	100-200	400
Veine cave	13-15	10-15	50	400

Tab. 9.1 – Hémodynamique de l'arbre vasculaire [27].

9.2 Rhéologie des liquides

Le comportement rhéologique de la membrane cellulaire contrôle le comportement mécanique des hématies. La très grande majorité des travaux réalisés dans ce domaine depuis le milieu du XX^e siècle considère la membrane comme un solide élastique [49, 50, 55–58, 65, 78, 116, 117], voire hyper-élastique [59]. Dans ce travail, nous envisageons la membrane comme un liquide. Les considérations suivantes nous permettent de justifier ce choix :

- la très grande variété de modèles rhéologiques pour les liquides : newtoniens, newtoniens généralisés, non-newtoniens quasi-linéaires et non-newtoniens non-linéaires ;
- la transformation « champs de vitesse-déplacement » dans une membrane solide lors des calculs (ainsi que le développement d'un code pour l'interaction fluide/structure) est évitée ;
- la membrane a un comportement viscoélastique.

Nous présenterons ici que les modèles non-newtoniens.

9.2.1 Invariance des lois de comportement et dérivées objectives

Les modèles non-newtoniens sont généralement construits à partir des modèles de la viscoélasticité linéaire (Maxwell, Jeffreys...) [21, 85, 121]. Si nous prenons l'exemple du modèle de Maxwell à un temps de relaxation λ , $(1 + \lambda \mathcal{D}/\mathcal{D}t) \underline{\tau} = 2\eta \underline{D}$, nous constatons que la dérivée particulière du tenseur déviateur des contraintes n'est pas invariante au changement de référentiel. Il en découle que le modèle de Maxwell n'est pas objectif. La dérivée de Gordon-Schowalter a été proposée afin de palier ce problème [70]. Elle est définie par la relation suivante :

$$\square \underline{A}_a = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{A} + \underline{A} \cdot \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \cdot \underline{A} - a (\underline{A} \cdot \underline{D} + \underline{D} \cdot \underline{A})$$

avec $-1 \leq a \leq 1$, \underline{D} le tenseur des vitesses de déformation et $\underline{\Omega}$ le tenseur de vorticité.

Pour les valeurs entières de a , nous obtenons les dérivées suivantes :

$$\text{Covariante, } a = -1 : \quad \overset{\Delta}{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Omega}} - \underline{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{A}}.$$

$$\text{Corotationnelle, } a = 0 : \quad \overset{\circ}{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Omega}} - \underline{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\mathbf{A}}.$$

$$\text{Contravariante, } a = 1 : \quad \overset{\nabla}{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\boldsymbol{\Omega}} - \underline{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}} - \underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{A}}.$$

9.2.2 Modèles quasi-linéaires

Un nombre important de lois de comportement peut être construit en associant les modèles de la viscoélasticité linéaire aux dérivées objectives. Nous nous intéresserons ici uniquement aux lois obtenues à l'aide du modèle de Jeffreys liquide,

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} + \lambda_t \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta \left(\underline{\mathbf{D}} + \lambda_r \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \underline{\mathbf{D}} \right)$$

avec λ_t , le temps de relaxation et λ_r , le temps de retard. Selon les valeurs du paramètre a de la dérivée de Gordon-Schowalter, nous obtenons les trois modèles quasi-linéaires suivants :

— Oldroyd-A, covariant :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} + \lambda_t \overset{\Delta}{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\eta \left(\underline{\mathbf{D}} + \lambda_r \overset{\Delta}{\underline{\mathbf{D}}} \right).$$

— Jeffreys corotationnel :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} + \lambda_t \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\eta \left(\underline{\mathbf{D}} + \lambda_r \overset{\circ}{\underline{\mathbf{D}}} \right).$$

— Oldroyd-B, contravariant :

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} + \lambda_t \overset{\nabla}{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\eta \left(\underline{\mathbf{D}} + \lambda_r \overset{\nabla}{\underline{\mathbf{D}}} \right).$$

Afin d'apprécier le réalisme de ces lois de comportement, nous allons déterminer les fonctions rhéologiques de ces liquides pour un écoulement de cisaillement simple et un écoulement élongationnel uniaxial. Ces fonctions sont :

— pour un écoulement de cisaillement :

la viscosité de cisaillement, η ; la première et la seconde différence des contraintes normales, Ψ_1 ³ et Ψ_2 .

— Pour un écoulement élongationnel uniaxial :

le coefficient d'accroissement de contrainte, η_e^+ et la viscosité élongationnelle, $\eta_e = \lim_{\rightarrow \infty} \eta_e^+$.

Le tableau Tab. 9.2 résume les comportements rhéologiques obtenus pour les modèles de Jeffreys corotationnel et d'Oldroyd-B. Le modèle de Jeffreys corotationnel conduit à des résultats compatibles avec le comportement des polymères à l'état fondu. C'est à dire qu'il prédit un comportement pseudoplastique ainsi que l'existence des deux différences

3. Ψ_1 quantifie l'effet Weissenberg.

des contraintes normales. Par contre, l'indice de pseudoplasticité donné par ce modèle, $n = -1$, est loin de la valeur expérimentale, $n \approx 0,5$.

Au niveau des contraintes normales, leur rapport $\Psi_1/\Psi_2 = -1/2$ ne correspond pas au comportement attendu, $\Psi_1/\Psi_2 = -1/7$. Il est à noter que ce modèle prédit une viscosité infinie, $\eta_\infty = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta(\dot{\gamma})$, viscosité qui n'existe pas dans le cas des polymères à l'état fondu.

Dans le cas d'un écoulement élongationnel, ce modèle prédit un comportement troutonien⁴ bien loin de la réalité.

Cis.	$\eta(\dot{\gamma})$	$\Psi_1(\dot{\gamma})$	$\Psi_2(\dot{\gamma})$
Jeffreys cor.	$\eta \frac{1+\lambda_t\lambda_r\dot{\gamma}^2}{1+\lambda_t^2\dot{\gamma}^2}$	$2\eta \frac{\lambda_t-\lambda_r}{1+\lambda_t^2\dot{\gamma}^2}$	$-\frac{1}{2} \Psi_1(\dot{\gamma})$
Oldroyd-B	η	$2\eta(\lambda_t - \lambda_r)$	0
Élong.	$\eta_e^+(\dot{\epsilon}, t)$		$\eta_e(\dot{\epsilon})$
Jeffreys cor.	$3\eta \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_t}\right)\right)$		3η
Oldroyd-B	$\eta \frac{1-2\dot{\epsilon}\lambda_r}{1-2\dot{\epsilon}\lambda_t} \left(1 - \exp\left(-\left(1-2\dot{\epsilon}\lambda_t\right)\frac{t}{\lambda_t}\right)\right) + \eta \frac{1+\dot{\epsilon}\lambda_r}{1+\dot{\epsilon}\lambda_t} \left(1 - \exp\left(-\left(1+\dot{\epsilon}\lambda_t\right)\frac{t}{\lambda_t}\right)\right)$		$3\eta \frac{1-\dot{\epsilon}\lambda_r-2\dot{\epsilon}^2\lambda_t\lambda_r}{(1-2\dot{\epsilon}\lambda_t)(1+\dot{\epsilon}\lambda_r)}$

Tab. 9.2 – Comportements rhéologiques des modèles de Jeffreys convectés.

Analysons maintenant le comportement du modèle d'Oldroyd-B. Pour l'écoulement de cisaillement, ce modèle conduit à un liquide newtonien présentant une première différence des contraintes. Un tel comportement est totalement irréaliste.

Pour l'écoulement élongationnel uniaxial, nous constatons que le coefficient d'accroissement de contrainte diverge pour une vitesse de déformation $\dot{\epsilon} > \frac{1}{2\lambda}$. Pour de faibles vitesses de déformation, la viscosité élongationnelle obtenue correspond au régime troutonien, $\eta_e = 3\eta_0$. Ce comportement est compatible avec celui des liquides polymères.

Le réalisme des modèles quasi-linéaires est fortement dépendant du couple dérivée convectée/ écoulement. Ainsi, un écoulement de cisaillement simple impose la dérivée corotationnelle alors qu'un écoulement élongationnel impose une dérivée co ou contra-variante. Il en découle que ces modèles sont incapables de modéliser convenablement un écoulement mixte, par exemple, un convergent.

Il est partiellement possible de remédier à ce problème en prenant une valeur du paramètre a de la dérivée de Gordon-Schowalter comprise entre les valeurs 0 et 1. C'est ce que propose le modèle de Johnson-Segalman [81]. La valeur de a est alors déterminée expérimentalement. Malheureusement, les données expérimentales montrent que ce paramètre n'est pas constant mais dépend de la vitesse de déformation.

4. C'est à dire un comportement newtonien en écoulement élongationnel.

9.2.3 Modèles non-linéaires

Les modèles rhéologiques non-linéaires permettent de décrire de manière réaliste le comportement de liquides polymères aussi bien pour les écoulements de cisaillement qu'élongationnels. La forme générale de ces modèles est donnée par la relation suivante :

$$f(\underline{\tau}) + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}.$$

Nous pouvons citer par exemple, les modèles de :

— Phan-Thien & Tanner affine [107] :

$$\underline{\tau} + \frac{\epsilon\lambda}{\eta} \text{tr}(\underline{\tau}) \underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D}.$$

— Giesekus [66,67] :

$$\underline{\tau} + \frac{\alpha}{G} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D} \quad \text{avec : } 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \text{réaliste pour : } \alpha = \frac{1}{2}. \quad (9.1)$$

Nous nous intéressons plus particulièrement au modèle de Giesekus en raison à la fois de son réalisme et de sa simplicité de formulation. De plus, les deux paramètres de cette équation constitutive, c'est à dire la viscosité limite η et le temps de relaxation λ ⁵, sont aisément déterminés expérimentalement.

L'idée principale de ce modèle est d'introduire la non-linéarité à partir d'un tenseur d'anisotropie de mobilité des chaînes relié au tenseur de déformation de Cauchy, \underline{C} . Le tenseur d'anisotropie de mobilité des chaînes $\underline{\beta}$ exprime la relation entre la relaxation d'une chaîne et sa forme induite par l'écoulement. Un élément de chaîne fortement déformé donc très orienté sera peu mobile et emmagasiner une part importante de la contrainte. Sa forme générale, déterminée par Giesekus est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{2} (\underline{\beta} \cdot \underline{\tau} + \underline{\tau} \cdot \underline{\beta}) + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}.$$

Cette relation est obtenue à partir du modèle de Maxwell convecté contravariant :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta \underline{D} \rightarrow \underline{\tau} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}.$$

L'uniformité du réseau implique que ce tenseur soit symétrique :

$$\underline{\beta} \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau} \cdot \underline{\beta} \rightarrow \underline{\beta} \cdot \underline{\tau} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} = \underline{0}. \quad (9.2)$$

Giesekus choisit une fonction linéaire en tenseur de Cauchy pour exprimer le tenseur d'anisotropie de mobilité, $\underline{\beta} = \underline{\delta} + \alpha (\underline{C} - \underline{\delta})$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Comme, en absence de contrainte ou d'écoulement, nous avons $\lim_{\underline{\tau} \rightarrow \underline{0}} \underline{\beta} = \underline{\delta}$, il en découle que : $\underline{\beta} = (1 - \alpha) \underline{\delta} + \alpha \underline{C}$.

De ces relations, nous aboutissons aux formes équivalentes suivantes de l'équation constitutive de Giesekus :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \underline{\tau} + \alpha \underline{C} \cdot \underline{\tau} + \eta \overset{\nabla}{\underline{C}} &= \underline{0}, \\ \alpha \underline{C} \cdot \underline{C} + (1 - 2\alpha) \underline{C} - (1 - \alpha) \underline{\delta} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{C}} &= \underline{0}, \\ \underline{\tau} + \frac{\alpha}{G} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} &= 2\eta \underline{D}. \end{aligned}$$

5. Par définition, $\lambda = \eta/G$ où G est le module de cisaillement du matériau.

Dans son travail de thèse [82], Julie Joie a modélisé et simulé le comportement de liquides polymères avec le modèle de Giesekus. Elle a employé des éléments finis non-conformes pour la vitesse et la pression tandis que la contrainte a été approchée par des éléments finis discontinus P_0 . Afin de mettre en évidence les qualités de ce modèle, nous présenterons ici quelques résultats de ce travail.

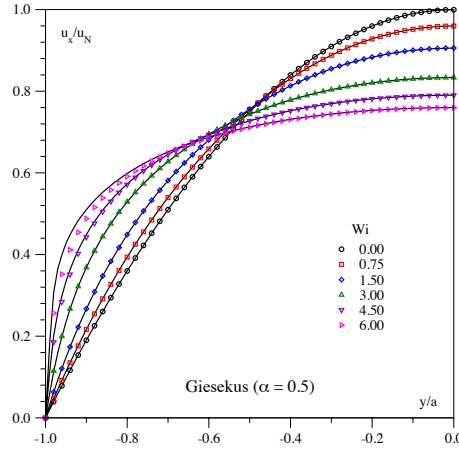


Fig. 9.3 – Profils de vitesse adimensionnée $u_x/u_N(y/a)$ avec u_N , la vitesse pour le liquide newtonien. Écoulement plan 2D planar dans un canal pour un liquide Giesekus, $\alpha = 0,5$. Comparaison entre les solutions numériques (symboles) et analytiques (ligne).

Comparons le profil de vitesse simulé avec une solution analytique dans le cas d'un écoulement totalement développé de type Poiseuille plan pour différentes valeurs du nombre de Weissenberg \mathfrak{Wi} défini par : $\mathfrak{Wi} = \lambda \dot{\gamma} = \lambda \frac{3\bar{u}}{a}$, où \bar{u} est la vitesse moyenne du fluide à l'entrée du canal. La vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ est calculée au niveau de la paroi pour un liquide newtonien équivalent. La solution analytique est donnée par la relation suivante [89] :

$$u_x(y) = \frac{1}{2\beta\lambda} \ln \frac{1 - a^2\beta^2}{1 - y^2\beta^2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

La vitesse moyenne et le nombre de Weissenberg ont pour expression :

$$\bar{u} = \frac{1}{\beta\lambda} \left(1 - \frac{\operatorname{atanh}(a\beta)}{a\beta} \right), \quad \mathfrak{Wi} = \frac{3}{2a\beta} \left(1 - \frac{\operatorname{atanh}(a\beta)}{a\beta} \right).$$

Les caractéristiques du liquide sont : 10^3 Pa.s pour la viscosité et 10^3 kg.m⁻³ pour la masse volumique. La vitesse à l'entrée est de 0,1 m.s⁻¹. Ces conditions conduisent à un nombre de Reynolds de 10^{-4} et un nombre de Weissenberg de 300λ .

La figure Fig. 9.3 présente la comparaison entre l'approche numérique et les solutions analytiques. Nous constatons tout d'abord un bon accord entre les deux types de solutions. Nous constatons que le caractère pseudo-plastique du liquide est très nettement mis en évidence et est fortement corrélé au nombre de Weissenberg.

Une autre manière de valider le modèle de Giesekus est de comparer des résultats de simulations à des résultats expérimentaux [83]. En 1994, Quinzani et al. [114] mesurent en détail le champ de vitesses et de contraintes d'une solution de polymère parfaitement caractérisée dans une contraction de type 4 : 1 par vélocimétrie laser et biréfringence. Nous

présentons ici quelques comparaisons entre ces résultats expérimentaux et des simulations numériques (Fig. 9.4, Fig. 9.5 et Fig. 9.6).

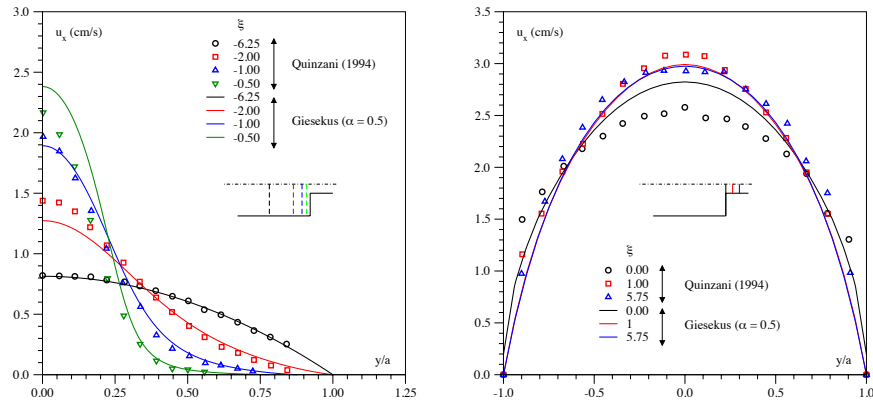


Fig. 9.4 – Profils de vitesse $u_x(y/a)$. Écoulement dans une contraction 4 :1 2D pour un liquide de Giesekus, $\alpha = 0.5$. Comparaison entre les résultats expérimentaux de Quinzani [114] et des simulations numériques.

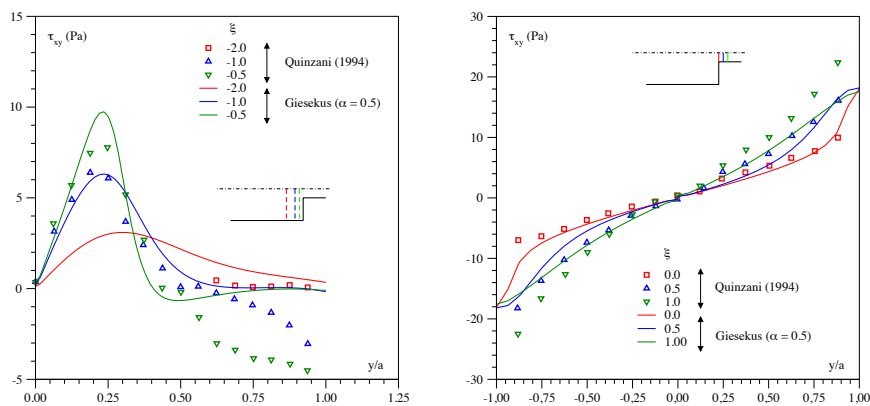


Fig. 9.5 – Profils de la contrainte de cisaillement $\tau_{xy}(y/a)$. Écoulement dans une contraction 4 :1 2D pour un liquide de Giesekus, $\alpha = 0.5$. Comparaison entre les résultats expérimentaux de Quinzani [114] et des simulations numériques.

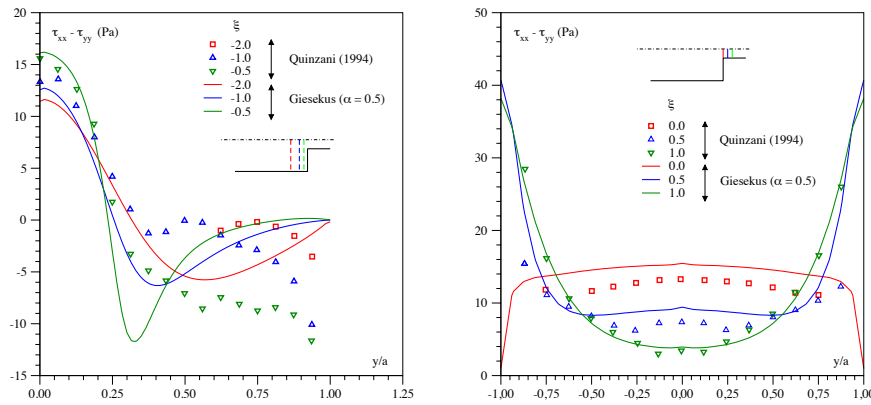


Fig. 9.6 – Profils de la différence des contraintes normales $\tau_{xx} - \tau_{yy}(y/a)$. Écoulement dans une contraction 4 :1 2D pour un liquide de Giesekus, $\alpha = 0.5$. Comparaison entre les résultats expérimentaux de Quinzani [114] et des simulations numériques.

Sans entrer dans les détails, nous constatons que le modèle rhéologique de Giesekus associé à notre approche numérique rend parfaitement compte des résultats expérimentaux aussi bien au niveau du champ de vitesse que celui des contraintes.

La géométrie simulée est le siège en amont de la contraction d'un écoulement mixte, cisaillement simple et élongationnel uniaxial. Ces résultats montrent que le modèle de Giesekus décrit convenablement ce type d'écoulement contrairement au modèle quasi-linéaire tel que celui d'Oldroyd-B.

Modèle asymptotique d'une membrane liquide de type Giesekus

Après avoir justifié le choix du modèle de Giesekus (cf . chapitre 9) pour modéliser la membrane liquide, on présente d'abord le problème modèle à résoudre puis, on écrit de manière formelle la formulation faible associée au problème d'interphase dans le domaine constitué de trois fluides. Ensuite, on donne le problème faible obtenu après un passage formel à la limite sur l'épaisseur de la membrane. Enfin, on interprète le modèle asymptotique comme problème aux limites.

Sommaire

10.1 Position du problème d'interphase	201
10.2 Formulation faible du problème d'interphase	203
10.3 Passage formel à la limite	207
10.4 Interprétation du modèle asymptotique comme problème aux limites	209

10.1 Position du problème d'interphase

On donne une brève description du problème physique illustré dans la configuration initiale Fig. 10.1. Comme exemple de problème multiphasique composé de trois fluides occupant un domaine borné régulier $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$, on étudie ici le modèle décrit par un fluide newtonien (Stokes) occupant les domaine Ω_ε^{in} et Ω_ε^{ex} séparé par une couche mince Ω_ε^m de frontière $\Gamma_\varepsilon^{in}, \Gamma_\varepsilon^{ex}$. Ce domaine Ω_ε^m représente la membrane du globule, décrite par un fluide non-newtonien de type Giesekus d'équation (9.1). Le petit paramètre $\varepsilon > 0$ caractérise l'épaisseur de la membrane.

Dans la suite, on suppose que le domaine Ω_ε^m est décrit par (6.1) et on utilise les notations définies dans le chapitre 6.

Notons que les lettres soulignées comme $\underline{\tau}$ désignent les tenseurs du second ordre, tandis que les lettres capitales soulignées (par exemple \underline{X}) sont des espaces fonctionnels sur les tenseurs.

La conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement dans les milieux

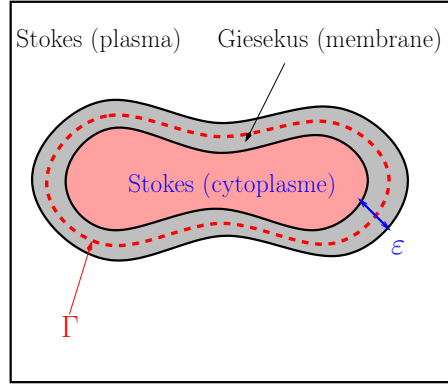


Fig. 10.1 – Problème physique dans $\Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^{ex}$ avec une membrane fine Ω_ε^m .

Ω_ε^{in} et Ω_ε^{ex} régis par des fluides newtoniens, donnent les équations du Stokes :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon + \nabla \tilde{p}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

où μ est la viscosité constante par sous domaine Ω_ε^{in} et Ω_ε^{ex} telle que

$$\mu = \begin{cases} \mu_{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \mu_{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}. \end{cases}$$

Auxquelles on ajoute les équations (10.2)-(10.4) du fluide non-newtonien de type Giesekus dans le milieu de faible épaisseur Ω_ε^m :

$$-\operatorname{div} \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon + \nabla \tilde{p}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}}^m, \quad (10.2)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = 0, \quad (10.3)$$

$$\lambda_m^\varepsilon \left(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon \cdot \nabla \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon - \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon \cdot (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)^T - \nabla \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon \cdot \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon \right) + \frac{\lambda_m^\varepsilon}{2\mu_m^\varepsilon} \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon \cdot \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon + \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon = 2\mu_m^\varepsilon \underline{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) \quad (10.4)$$

où les coefficients μ_m^ε et λ^ε vérifient :

$$\mu_m^\varepsilon = \frac{\mu_m}{\varepsilon}, \quad \lambda_m^\varepsilon = \lambda_m. \quad (10.5)$$

La dépendance de ces paramètres en fonction de ε nous a semblé essentiel pour obtenir un problème aux limites bien posé.

On complète le problème par des conditions de transmission standard sur les interfaces Γ_ε^{in} et Γ_ε^{ex} :

$$[\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon] = 0, \quad [\underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}] = \tilde{\mathbf{g}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{g}}^{in} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \\ \tilde{\mathbf{g}}^{ex} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{ex} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}^\varepsilon = \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}^\varepsilon - \tilde{p}^\varepsilon \mathbf{I}$$

et on ajoute des conditions de bord de Dirichlet homogènes sur la vitesse :

$$\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_\varepsilon.$$

Le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon$ (symétrique) est $2\mu\underline{D}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)$ dans Ω_ε^i ($i = in, ex$) et vérifie (10.4) dans Ω_ε^m , avec

$$\underline{D}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) := \frac{1}{2} \left(\nabla \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon)^T \right).$$

Le problème d'interphase complet s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon + \nabla \tilde{p}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \lambda_m^\varepsilon \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon + \frac{\lambda_m^\varepsilon}{2\mu_m^\varepsilon} \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon \cdot \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon + \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon = 2\mu_m^\varepsilon \underline{D}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^m, \\ \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon = 2\mu^\varepsilon \underline{D}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^{ex}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}, \\ [\underline{\tilde{\sigma}}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}] = \tilde{\mathbf{g}} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}. \end{array} \right. \quad (10.6)$$

où $\underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon$ est dérivée convectée contravariante dans le cas stationnaire :

$$\underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon - \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon \nabla \tilde{\mathbf{u}}^T - \nabla \tilde{\mathbf{u}} \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon.$$

10.2 Formulation faible du problème d'interphase

Dans cette section, nous définissons le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, nous présentons le problème variationnel formel du problème (10.6).

On définit l'espace des tenseurs symétriques $\underline{L}_{sym}^2(\Omega_\varepsilon^m)$ par :

$$\underline{L}_{sym}^2(\Omega_\varepsilon^m) = \left\{ \underline{\tau} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} : \underline{\tau} = \underline{\tau}^T, \tau_{ij}^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon^m) \right\}.$$

On introduit maintenant le cadre fonctionnel comme ce qui suit, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{V}^\varepsilon = H_0^1(\Omega_\varepsilon),$$

$$\mathbf{Q}^\varepsilon = L_0^2(\Omega_\varepsilon) = \left\{ p \in L^2(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} p dx dy = 0 \right\},$$

$$\underline{X}^\varepsilon = \underline{L}_{sym}^2(\Omega_\varepsilon^m) \cap \underline{H}^1(\Omega_\varepsilon^m).$$

Dans la suite, on considère que les fonctions $\tilde{\mathbf{f}}$ et $\tilde{\mathbf{g}}$ sont régulières.

Remarque 10.2.1. Dans cette thèse nous ne nous sommes pas intéressés à l'existence d'une solution du problème variationnel formel (10.7). De plus ce problème obtenu est fortement non-linéaire, ce qui rend leur résolution complexe. Cependant, en considérant $\mathbf{V}^\varepsilon \times \mathbf{Q}^\varepsilon \times \underline{X}^\varepsilon = H_0^1(\Omega_\varepsilon) \times L_0^2(\Omega_\varepsilon) \times (\underline{L}_{sym}^2(\Omega_\varepsilon^m) \cap \underline{H}^1(\Omega_\varepsilon^m))$, pour tout $\varepsilon > 0$, toutes les intégrales sont bien définies.

Formellement, la formulation faible du problème d'interphase (10.6) consiste à chercher le triplet $(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \tilde{p}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon) \in \mathbf{V}^\varepsilon \times Q^\varepsilon \times \underline{X}^\varepsilon$ tel que :

$$\begin{cases} a_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) + b_\varepsilon(\tilde{p}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) + c_\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) = l_\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), & \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}^\varepsilon, \\ b_\varepsilon(\tilde{q}, \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) = 0, & \forall \tilde{q} \in Q^\varepsilon, \\ 2\mu_m^\varepsilon c_\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) - d_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon; \tilde{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon) = 0, & \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon \in \underline{X}^\varepsilon \end{cases} \quad (10.7)$$

où la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est composée des intégrales, similaires à celles du problème de Stokes sur Ω^i , $i = in, ex$. Cependant, la forme bilinéaire $b_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ correspond à celle du problème de Stokes. On écrit :

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_\varepsilon^m \cup \Omega_\varepsilon^{ex}} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\omega,$$

$$b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) = - \sum_{i=in, m, ex} \int_{\Omega_\varepsilon^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\omega.$$

On définit la forme linéaire $l_\varepsilon(\cdot)$ comme suit :

$$l_\varepsilon(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\omega + \int_{\Gamma_\varepsilon^{in}} \mathbf{g}^{in} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon^{ex}} \mathbf{g}^{ex} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma.$$

La forme linéaire $c_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ et les formes non-linéaires spécifiques au modèle de Giesekus sur Ω_ε^m sont définies par :

$$c_\varepsilon(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_\varepsilon^m} \boldsymbol{\tau} : \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{v}) \, d\omega,$$

$$d_\varepsilon^0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\sigma}) = \lambda_m^\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^m} \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} \, d\omega - \lambda_m^\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^m} (\boldsymbol{\tau}^\varepsilon \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\tau}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\omega,$$

$$d_\varepsilon^1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega_\varepsilon^m} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma} \, d\omega,$$

$$d_\varepsilon^2(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\lambda_m^\varepsilon}{2\mu_m^\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon^m} (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\omega$$

avec

$$d_\varepsilon(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}) = d_\varepsilon^0(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\sigma}) + d_\varepsilon^1(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}) + d_\varepsilon^2(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\sigma}).$$

Les formes a_ε , b_ε et c_ε sont bilinéaires. La forme d_ε contient une forme bilinéaire d_ε^1 et deux formes non-linéaires d_ε^0 et d_ε^2 par rapport à \mathbf{u} et par rapport à $\boldsymbol{\tau}$.

Afin de simplifier la présentation, pour tout vecteur $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{u}_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \mathbf{u}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad \partial_1 \boldsymbol{\tau} = \partial_x \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij,1})_{1 \leq i, j \leq 2}, \quad \partial_2 \boldsymbol{\tau} = \partial_y \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij,2})_{1 \leq i, j \leq 2}.$$

Dans la suite, nous utilisons la définition du gradient d'un vecteur \mathbf{u} :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 10.2.2. *Il existe une autre définition du gradient, généralement employée par les physiciens :*

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas là, les transposées dans les formules n'auront pas la même position.

Nous nous intéressons maintenant à l'approche asymptotique du problème (10.6), en suivant la même stratégie que celle développée pour le problème de Stokes. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au chapitre 8.

On traite dans la suite le cas d'interface droite $\Gamma = [0; 1]$ et d'épaisseur constante. On pose :

$$\Omega_\varepsilon^{in} =]0; 1[\times] -1 - \frac{\varepsilon}{2}; -\frac{\varepsilon}{2}[,$$

$$\Omega_\varepsilon^m =]0; 1[\times] -\frac{\varepsilon}{2}; \frac{\varepsilon}{2}[,$$

$$\Omega_\varepsilon^{ex} =]0; 1[\times] \frac{\varepsilon}{2}; 1 + \frac{\varepsilon}{2}].$$

On rappelle ici les changements de variables vus dans le chapitre 6 sur chaque sous domaine :

$$\Omega_\varepsilon^{in} : s = x, \quad l = y + \frac{\varepsilon - 1}{2},$$

$$\Omega_\varepsilon^m : s = x, \quad l = \frac{y}{\varepsilon},$$

$$\Omega_\varepsilon^{ex} : s = x, \quad l = y - \frac{\varepsilon - 1}{2}.$$

Avec ce changement de variables, les opérateurs restent invariants dans Ω_ε^{in} et Ω_ε^{ex} . Cependant, nous avons les nouvelles définitions de ces quantités dans le domaine Ω_ε^m :

$$\partial_s v = \partial_x \tilde{v}, \quad \partial_l v = \varepsilon \partial_y \tilde{v}, \quad dx dy = \varepsilon ds dl.$$

De plus, le domaine Ω_ε est transformé en $\Omega =]0; 1[\times] -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}[,$ domaine qui ne dépend plus du paramètre ε tel que

$$\Omega^{in} =]0; 1[\times] -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}[, \quad \Omega^m =]0; 1[\times] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[, \quad \Omega^{ex} =]0; 1[\times] \frac{1}{2}; \frac{3}{2}[,$$

et Γ_ε^i , $i = in, ex$ deviennent Γ^i , $i = in, ex$, voir Fig. 6.2 du chapitre 6.

On introduit une nouvelle pression sur Ω^m

$$\hat{p} = \varepsilon p.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mu_i \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dsdl, \\
b_\varepsilon(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}) &= b(p, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} b_0(p, \mathbf{v}), \\
b(p, \mathbf{v}) &= - \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dsdl - \int_{\Omega^m} \hat{p} \partial_s v_1 \, dsdl, \\
b_0(p, \mathbf{v}) &= - \int_{\Omega^m} \hat{p} \partial_l v_2 \, dsdl, \\
l_\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}) &= l(\mathbf{v}) + \varepsilon l_0(\mathbf{v}) \\
&= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dsdl + \int_{\Gamma_\varepsilon^{in}} \mathbf{g}^{in} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon^{ex}} \mathbf{g}^{ex} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma + \varepsilon \int_{\Omega^m} \mathbf{f}^m \cdot \mathbf{v} \, dsdl.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $b_0(\cdot, \cdot)$ correspondent au problème de Stokes.

Il est utile de noter que

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u}^\varepsilon &= \begin{pmatrix} u_{1,s}^\varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon \\ u_{2,s}^\varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} u_{2,l}^\varepsilon \end{pmatrix}, \\
\underline{D}(\mathbf{u}^\varepsilon) &= \begin{pmatrix} u_{1,s}^\varepsilon & \frac{1}{2}(u_{2,s}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon) \\ \frac{1}{2}(u_{2,s}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon) & \frac{1}{\varepsilon} u_{2,l}^\varepsilon \end{pmatrix}, \\
\mathbf{u}^\varepsilon \nabla \underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon &= \begin{pmatrix} u_1^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11,s}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_2^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11,l}^\varepsilon & u_1^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12,l}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_2^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12,l}^\varepsilon \\ u_1^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11,s}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_2^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12,l}^\varepsilon & u_1^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{22,l}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_2^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{22,l}^\varepsilon \end{pmatrix}, \\
\nabla \mathbf{u}^\varepsilon \underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon &= \begin{pmatrix} u_{1,1}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{21}^\varepsilon & u_{1,s}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{22}^\varepsilon \\ u_{2,s}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{2,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12}^\varepsilon & u_{2,1}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{2,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{22}^\varepsilon \end{pmatrix}, \\
\underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon (\nabla \mathbf{u}^\varepsilon)^T &= \begin{pmatrix} u_{1,s}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{21}^\varepsilon & u_{2,s}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{11}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{2,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12}^\varepsilon \\ u_{1,s}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{1,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{22}^\varepsilon & u_{2,s}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{12}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_{2,l}^\varepsilon \boldsymbol{\tau}_{22}^\varepsilon \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Avec les notations précédentes et avec le changement de tenseur des contraintes sur

le domaine Ω^m

$$\underline{\hat{\mathbf{t}}} = \varepsilon \underline{\boldsymbol{\tau}},$$

on obtient par un calcul simple, les formes associées au modèle de Giesekus :

$$\begin{aligned} c_\varepsilon(\underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\mathbf{v}}) &= c(\underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\varepsilon} c_0(\underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\mathbf{v}}), \\ d_\varepsilon(\underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\hat{\mathbf{t}}}; \underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= d(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\hat{\mathbf{t}}}; \underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{\varepsilon} d_0(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\hat{\mathbf{t}}}; \underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} c(\underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\mathbf{v}}) &= \int_{\Omega^m} (\underline{\hat{\mathbf{t}}}_{11} v_{1,s} + \underline{\hat{\mathbf{t}}}_{12} v_{2,s}) ds dl, \\ c_0(\underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\mathbf{v}}) &= \int_{\Omega^m} (\underline{\hat{\mathbf{t}}}_{12} v_{1,l} + \underline{\hat{\mathbf{t}}}_{22} v_{2,l}) ds dl, \\ d(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\hat{\mathbf{t}}}; \underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Omega^m} \underline{\hat{\mathbf{t}}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} dx dy + \frac{\lambda_m}{2\mu_m} \int_{\Omega^m} (\underline{\hat{\mathbf{t}}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{t}}}) : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds dl + \lambda_m \int_{\Omega^m} u_1 \partial_1 \underline{\hat{\mathbf{t}}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds dl \\ &\quad - \lambda_m \int_{\Omega^m} \left(\underline{\hat{\mathbf{t}}} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1,s} & 0 \\ u_{2,s} & 0 \end{pmatrix} \underline{\hat{\mathbf{t}}} \right) : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds dl, \\ d_0(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\hat{\mathbf{t}}}; \underline{\hat{\mathbf{t}}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= \lambda_m \int_{\Omega^m} u_2 \partial_l \underline{\hat{\mathbf{t}}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds dl - \lambda_m \int_{\Omega^m} \left(\underline{\hat{\mathbf{t}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{1,l} & \mathbf{u}_{2,l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{u}_{1,l} \\ 0 & u_{2,l} \end{pmatrix} \underline{\hat{\mathbf{t}}} \right) : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds dl. \end{aligned}$$

On définit les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^{in}, \mathbf{v}^m, \mathbf{v}^{ex}) \in H^1(\Omega^{in}) \times H^1(\Omega^m) \times H^1(\Omega^{ex}); \right. \\ &\quad \left. \mathbf{v}^{in} = \mathbf{v}^m \text{ sur } \Gamma^{in}, v^{ex} = v^m \text{ sur } \Gamma^{ex} \text{ et } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} = H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

$$Q = L_0^2(\Omega),$$

$$\underline{X} = \underline{L}_{sym}^2(\Omega^m) \cap \underline{H}^1(\Omega^m).$$

Par conséquent, le problème (10.7) se met sous la forme suivante :

$$\forall (\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon, \underline{\hat{\mathbf{t}}}^\varepsilon) \in \mathbf{V} \times Q \times \underline{X},$$

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}) + b(p^\varepsilon, \mathbf{v}) + c(\underline{\hat{\mathbf{t}}}^\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} (b_0(p^\varepsilon, \mathbf{v}) + c_0(\underline{\hat{\mathbf{t}}}^\varepsilon, \mathbf{v})) &= l_\varepsilon(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(q, \mathbf{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} b_0(q, \mathbf{u}^\varepsilon) &= 0, \quad \forall q \in Q, \\ 2\mu_m c(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}^\varepsilon) - d(\mathbf{u}^\varepsilon, \underline{\hat{\mathbf{t}}}^\varepsilon; \underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{\varepsilon} (2\mu_m c_0(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}^\varepsilon) - d_0(\mathbf{u}^\varepsilon, \underline{\hat{\mathbf{t}}}^\varepsilon; \underline{\hat{\mathbf{t}}}^\varepsilon, \underline{\boldsymbol{\sigma}})) &= 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \underline{X}. \end{cases} \quad (10.8)$$

Nous nous limiterons dans ce chapitre à exposer formellement les passages à la limite lorsque ε tend vers 0. Pour ce faire, nous utiliserons quelques résultats du chapitre 8.

10.3 Passage formel à la limite

Il s'agit ici d'écrire la formulation faible lorsque le paramètre ε (l'épaisseur de la membrane) tend vers 0.

On introduit les espaces suivants pour définir les limites du triplet $(\mathbf{u}^\varepsilon, p^\varepsilon, \underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon)$:

$$\mathbf{V}_0 = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{V} : \partial_l \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega^m \right\},$$

$$Q_0 = \left\{ p \in Q : p = p(s) \text{ dans } \Omega^m \right\},$$

$$\underline{X}_0 = \left\{ \underline{\boldsymbol{\tau}} \in \underline{X} : \partial_l \underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\mathbf{0}} \text{ dans } \Omega^m \right\}.$$

Le triplet $(\mathbf{u}^0, p^0, \underline{\boldsymbol{\tau}}^0)$ est indépendant de l dans le domaine Ω^m . On introduit maintenant les nouvelles inconnues de la pression et du tenseur des contraintes visqueuses sur Ω^m :

$$p^{*,\varepsilon}(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{p}^\varepsilon(s, l) dl, \quad \tau_{ij}^{*,\varepsilon}(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{\tau}_{ij}^\varepsilon(s, l) dl.$$

Afin de trouver le problème au limite, on admet que :

- \mathbf{u}^ε converge (fortement) dans \mathbf{V} vers $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}_0$.
- $p^{*,\varepsilon}$ converge dans Q vers $p^0 \in Q_0$.
- $\underline{\boldsymbol{\tau}}^{*,\varepsilon}$ converge dans \underline{X} vers $\underline{\boldsymbol{\tau}}^0 \in \underline{X}_0$.

Pour des fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} suffisamment régulières, le passage à la limite dans la forme linéaire $l_\varepsilon(\cdot)$ ne pose aucun problème. On obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_\varepsilon(\mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) = \sum_{i=in, ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} ds dl + \int_{\Gamma^{in}} \mathbf{g}^{in} \cdot \mathbf{v} d\gamma + \int_{\Gamma^{ex}} \mathbf{g}^{ex} \cdot \mathbf{v} d\gamma.$$

De même, les formes bilinéaires définies sur les domaines Ω^{in} et Ω^{ex} ne posent aucun problème.

À l'aide des égalités (10.5), le passage formel à la limite lorsque ε tend vers 0 conduit à :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(b(p^\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} b_0(p^\varepsilon, \mathbf{v}) \right) &= b(p^0, \mathbf{v}) = - \sum_{i=in, ex} \int_{\Omega^i} p^0 \operatorname{div} \mathbf{v} - \int_{\Gamma} p^0 \partial_s v_1 ds, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(c(\underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} c_0(\hat{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \mathbf{v}) \right) &= c(\underline{\boldsymbol{\tau}}^0, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} (\underline{\boldsymbol{\tau}}_{11}^0 v_{1,1} + \underline{\boldsymbol{\tau}}_{12}^0 v_{2,1}) ds, \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(d(\mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon; \underline{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) + \frac{1}{\varepsilon} d_0(\mathbf{u}^\varepsilon, \hat{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon; \hat{\boldsymbol{\tau}}^\varepsilon, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \right) = d(\mathbf{u}^0, \underline{\boldsymbol{\tau}}^0; \underline{\boldsymbol{\tau}}^0, \underline{\boldsymbol{\sigma}})$$

avec

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}^0, \underline{\boldsymbol{\tau}}^0; \underline{\boldsymbol{\tau}}^0, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_{\Gamma} \underline{\boldsymbol{\tau}}^0 : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds + \frac{\lambda_m}{2\mu_m} \int_{\Gamma} (\underline{\boldsymbol{\tau}}^0 \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}^0) : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds + \lambda_m \int_{\Gamma} u_1^0 \partial_1 \underline{\boldsymbol{\tau}}^0 : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds \\ &\quad - \lambda_m \int_{\Gamma} \left(\underline{\boldsymbol{\tau}}^0 \begin{pmatrix} u_{1,1}^0 & u_{2,1}^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1,1}^0 & 0 \\ u_{2,1}^0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\tau}}^0 \right) : \underline{\boldsymbol{\sigma}} ds. \end{aligned}$$

Le problème limite s'écrit sous la forme faible suivante : trouver $(\mathbf{u}^0, p^0, \underline{\boldsymbol{\tau}}^0) \in \mathbf{V}_0 \times Q_0 \times \underline{X}_0$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^0, \mathbf{v}) + b(p^0, \mathbf{v}) + c(\underline{\boldsymbol{\tau}}^0, \mathbf{v}) &= l(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(q, \mathbf{u}^0) &= 0, & \forall q \in Q_0, \\ 2\mu_m c_1(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}^0) - d(\mathbf{u}^0, \underline{\boldsymbol{\tau}}^0; \underline{\boldsymbol{\tau}}^0, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) &= 0, & \forall \underline{\boldsymbol{\sigma}} \in \underline{X}_0. \end{cases} \quad (10.9)$$

10.4 Interprétation du modèle asymptotique comme problème aux limites

On peut réinterpréter le problème variationnel (10.9) en termes d'équations aux dérivées partielles en intégrant par parties dans les domaines Ω^{in} et Ω^{ex} et sur Γ .

On identifie l'interface Γ à la courbe moyenne $\Gamma^{ex} = \Gamma^{in} = \Gamma$ pour séparer les sous-domaines Ω^{in} et Ω^{ex} . La vitesse \mathbf{u}^0 et la pression p^0 appartiennent respectivement aux espaces :

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \mathbf{v}|_{\Gamma} \in \mathbf{H}_0^1(\Gamma) \right\},$$

$$K = \left\{ p = (p^{in}, p^{\Gamma}, p^{ex}) \in L^2(\Omega^{in}) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega^{ex}); : \int_{\Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} p ds dl + \int_{\Gamma} p^{\Gamma} ds = 0 \right\}.$$

On utilise la deuxième équation de (10.9) avec $q = p^{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$, on obtient :

$$u_1^0 = 0. \quad (10.10)$$

À l'aide de l'intégration par parties dans la première équation de (10.9), il vient que

$$[(2\mu \nabla \mathbf{u}^0 - p^0 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] - \partial_s \begin{pmatrix} -p^{\Gamma} + \underline{\tau}_{11}^0 \\ \underline{\tau}_{12}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{g}^{in} + \mathbf{g}^{ex} = \mathbf{g},$$

$$[\mathbf{u}^0] = \mathbf{0}.$$

Une intégration par parties dans la troisième équation de (10.9) donne :

$$\underline{\tau}^0 + \frac{\lambda_m}{2\mu_m} \underline{\tau}^0 \cdot \underline{\tau}^0 - \lambda_m u_{2,1}^0 \begin{pmatrix} 0 & \underline{\tau}_{11}^0 \\ \underline{\tau}_{11}^0 & 2\underline{\tau}_{12}^0 \end{pmatrix} = 2\mu_m \begin{pmatrix} 0 & u_{2,1}^0 \\ u_{2,1}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le problème modèle asymptotique s'écrit :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}^0 + \nabla p^0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.11)$$

auquel on rajoute les conditions de transmission non standard sur l'interface Γ :

$$[\mathbf{u}^0] = \mathbf{0}, \quad (10.12)$$

$$u_1^0 = 0, \quad (10.13)$$

$$[(2\mu \nabla \mathbf{u}^0 - p^0 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] - \partial_s \begin{pmatrix} -p^{\Gamma} + \underline{\tau}_{11}^0 \\ \underline{\tau}_{12}^0 \end{pmatrix} = \mathbf{g}, \quad (10.14)$$

$$\underline{\tau}^0 + \frac{\lambda_m}{2\mu_m} \underline{\tau}^0 \cdot \underline{\tau}^0 - \lambda_m u_{2,1}^0 \begin{pmatrix} 0 & \underline{\tau}_{11}^0 \\ \underline{\tau}_{11}^0 & 2\underline{\tau}_{12}^0 \end{pmatrix} = 2\mu_m \begin{pmatrix} 0 & u_{2,1}^0 \\ u_{2,1}^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

Dans les futurs travaux, nous nous intéresserons à développer une méthode numérique de type NXFEM, stable et consistante pour le problème asymptotique (10.11). Nous écrirons la formulation variationnelle pour notre problème en considérant les éléments finis P^1 pour la vitesse \mathbf{u} et P^0 pour la pression p et le tenseur des contraintes $\underline{\tau}$.

Conclusions et perspectives

Les méthodes d'éléments finis (conformes ou non-conformes) développées dans cette thèse sont basées sur la méthode NXFEM, qui impose avec précision des conditions de transmission à travers une interface. L'apport de ce travail consiste principalement en trois points :

- le développement de la méthode NXFEM pour des éléments finis non-conformes sur des maillages triangulaires pour les problèmes de Darcy et de Stokes avec interface.
- La modélisation asymptotique des problèmes d'interphase.
- La méthode NXFEM pour des problèmes d'interface avec des conditions de transmission non-standard.

La méthode NXFEM permet de doubler les degrés de liberté sur toutes les cellules qui sont traversées par l'interface et de recoller les morceaux via une formulation variationnelle inspirée de la méthode de Nitsche. Son principal avantage réside dans le fait que le maillage n'est pas aligné avec l'interface, et que l'implémentation est facile par rapport aux autres méthodes.

Dans la première partie, nous avons d'abord développé la méthode NXFEM pour des éléments finis non-conformes, et ce aussi bien pour un problème d'interface elliptique que pour un problème de Stokes. Pour cela, nous avons proposé deux variantes : la première consiste à modifier les fonctions de base sur les triangles coupés par l'interface et à conserver les fonctions classiques de Crouzeix-Raviart sur les cellules non-coupées. La deuxième est consacrée au rajout de termes de stabilisation (similaires à ceux de la méthode de Galerkin discontinue) sur les arêtes coupées par l'interface, et au maintien de l'espace classique de Crouzeix-Raviart. Nous avons prouvé que les deux formulations variationnelles sont stables et consistantes et étudié les estimations d'erreur *a priori*. Ensuite, nous avons étendu ces deux approches au problème d'interface dans un milieu gouverné par les équations de Stokes. La première variante ne nécessite pas de termes de stabilisation pour que la formulation variationnelle vérifie le condition *inf-sup* de Babuška-Brezzi. Cependant, la deuxième variante nécessite de nouveaux termes de stabilisation sur les arêtes coupées, avec des moyennes pondérées pour la pression et la vitesse. Pour les deux variantes, nous avons prouvé que les estimations d'erreur *a priori* sont d'ordre optimal. Enfin, nous avons fait plusieurs tests numériques des deux variantes sur différents problèmes dans le cas où l'interface est droite ou courbe. Nos approches ont été testées et validées par comparaison avec les résultats de la littérature sur des problèmes tests. Nous avons implémenté les deux variantes pour le problème de Darcy dans la librairie C++ CONCHA. Nous avons aussi implémenté la première variante pour les équations de Stokes.

Dans la deuxième partie, nous avons traité la modélisation asymptotique des problèmes d'interphase pour le problème de type Darcy et pour les équations de Stokes. Nous avons justifié le passage à la limite dans la formulation variationnelle pour obtenir le problème limite avec des conditions de transmission non-standard. Pour le cas elliptique, le passage à la limite se fait de manière standard. Néanmoins, le cas du problème de Stokes nécessite une condition *inf-sup* sur des espaces noyaux, qui est un point technique. Ensuite, nous avons adapté la méthode NXFEM à ce modèle asymptotique, dans le cas elliptique. Enfin, des tests numériques sont présentés pour valider la méthode NXFEM pour le modèle limite de Darcy.

Dans la troisième partie, nous avons proposé de modéliser la membrane du globule rouge par un fluide non-newtonien (Giesekus) et l'intérieur du globule par un fluide newtonien (Stokes). Après avoir justifié le choix du modèle de Giesekus (cf. chapitre 9), nous avons écrit le problème faible et nous avons passé formellement à la limite pour décrire le problème asymptotique.

Perspectives

Ce rapport ne prétend pas être complet pour résoudre tous les problèmes d'interface tels que l'interaction fluide-fluide ou l'interaction fluide-structure. Les pistes suivantes pourraient également être explorées à l'avenir pour compléter et améliorer ce travail, ainsi que d'augmenter le potentiel d'utilisation de la méthode NXFEM dans le cadre de cette étude.

À court terme, je pense naturellement compléter les simulations numériques pour le problème de Stokes (notamment, de finir l'implémentation de la deuxième méthode) et améliorer le développement théorique dans le cas où $\alpha \rightarrow 0$ (voir la robustesse des méthodes non-conformes cf. chapitre 2). J'envisage aussi de considérer des éléments finis non-conformes de Rannacher-Turek sur des rectangles, afin d'adapter la méthode développée dans la première partie au cas des maillages en quadrilatères.

Je souhaiterais également améliorer le développement théorique de l'estimation d'interpolation du modèle asymptotique pour le cas elliptique, en particulier en ce qui concerne l'interpolation le long de l'interface.

Un autre point qui viendrait compléter ce travail est le développement d'une méthode numérique basée sur NXFEM pour le problème modélisant la membrane fine par les équations de Stokes (cf. chapitre 9). J'aimerais aussi me pencher sur l'analyse asymptotique du modèle de Giesekus et en particulier sur l'étude numérique (cf. chapitre 10).

Une autre perspective concerne l'adaptation de maillage par l'intermédiaire des *estimations a posteriori*. Ceci, en effet, permettra de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques.

À moyen terme, il serait utile d'un point de vue pratique d'étudier l'approche asymptotique des modèles de Darcy et Stokes avec une couche mince en trois dimensions. J'aimerais également modéliser la couche mince par les équations de Darcy et coupler avec un milieu fluide ; des applications en ingénierie pétrolière seraient alors envisageables telles que la modélisation et le couplage puits et réservoir.

Enfin, à plus long terme, je souhaiterais traiter des interfaces mobiles. On les retrouve dans les problèmes de surface libre (air-eau), en hémodynamique, en propagation d'ondes, dans les progressions de failles au sein d'un milieu (fissuration du béton), dans les déformations ou les déplacements d'objets.

Rappels utiles d'analyse fonctionnelle

A.1 Opérateurs différentiels

Cette section a pour but de rappeler les définitions des opérateurs différentiels utilisés dans ce manuscrit.

Pour une dimension N , on considère un vecteur $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ de \mathbb{R}^N et une normale unitaire $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right), & \nabla_n &= \mathbf{n} \cdot \nabla = \partial_n. \\ \Delta \mathbf{u} &= \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Au chapitre 9, nous avons utilisé des notations tensorielles. Pour tout vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, on définit le tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{\nabla} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Le produit de deux tenseurs d'ordre 2, $\underline{\tau} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ et $\underline{\sigma} = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$, est noté par :

$$\underline{\tau} : \underline{\sigma} = \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} \sigma_{ij}.$$

Nous avons introduit aussi l'opérateur suivant :

$$\nabla \cdot \underline{\tau} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

A.2 Espaces de Sobolev et normes induites

Nous rappelons ici les espaces et les normes induites que nous avons utilisés dans ce rapport. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter Adams [1] ou Lions et Magenes [90].

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 de frontière régulière $\partial\Omega$. On note $L^2(\Omega)$, l'espace des fonctions à carré sommable et par $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ sa norme induite par le produit scalaire usuel :

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uv \, d\Omega.$$

Soit $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω . Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $H^m(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre m :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i \leq m \right\}$$

où D^α est la dérivée partielle (au sens des distributions) d'ordre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ de v :

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \text{ avec } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

On définit aussi la semi-norme de Sobolev d'ordre m :

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

On introduit l'espace des fonctions de carré intégrable, à moyenne nulle sur Ω

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f \, dx = 0 \right\}$$

et l'espace usuel

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On introduit aussi l'espace de traces suivant :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ v \in L^2(\partial\Omega) : \exists v \in H^1(\Omega), v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

muni de la norme :

$$\|g\|_{1/2,\partial\Omega} := \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v=g \text{ sur } \partial\Omega}} \|v\|_{1,\Omega}.$$

A.3 Théorèmes de trace

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Définition A.3.1. Pour une fonction $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, la trace de v sur Γ est définie par :

$$\begin{aligned}\gamma(v) : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto v(x).\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$. On introduit alors l'application trace :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma(v)\end{aligned}$$

qui est une application linéaire. A une fonction définie sur un ouvert Ω , elle associe sa restriction au bord de l'ouvert.

Une fonction qui est dans $H^1(\Omega)$ n'est pas forcément continue. On peut cependant définir la trace sur Γ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. On a le résultat suivant :

Théorème A.3.1. Il existe une application linéaire et continue :

$$\begin{aligned}\gamma : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ v &\longmapsto \gamma(v)\end{aligned}$$

vérifiant $\forall v \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\gamma(v) = v|_{\Gamma}$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|\gamma(v)\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}.$$

De plus, nous avons la caractérisation suivante

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \quad \gamma(v) = 0\}.$$

L'application trace est surjective continue sur $H^{1/2}(\Gamma) = \text{Im} \gamma$ et nous avons donc

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma(v)\|_{1/2,\Gamma} \leq \|v\|_{1,\Omega}.$$

Comme $H^{1/2}(\partial\Omega) \subseteq L^2(\partial\Omega)$, on peut définir facilement la trace partielle de $v \in H^1(\Omega)$ sur une partie $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$, en prenant la restriction à Γ de $\gamma(v)$. On introduit l'espace

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{\varphi \in L^2(\Gamma) : \exists v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma} = \varphi, \quad v|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma)} = 0\},$$

que l'on muni de la norme hilbertienne :

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v|_{\Gamma} = \varphi, v|_{(\partial\Omega \setminus \Gamma)} = 0}} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Bibliographie

- [1] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] C. Alboin, Jaffré J., JE. Roberts, and C. Serres. Modeling fractures as interfaces for flow and transport in porous media. In *Fluid Flow and Transport in Porous Media : Mathematical and Numerical Treatment. Contemporary Mathematics*, 295 :13–24, 2002.
- [3] Alboin, C. and Jaffré, J, and Roberts, JE. and Serres, C. Domain decomposition for flow in fractured porous media. In *Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering, Bergen*, pages 365–373, 1999.
- [4] L. Amir, M. Kern, V. Martin, and JE. Roberts. Décomposition de domaine et pré-conditionnement pour un modèle 3D en milieu poreux fracturé. In *Proceedings of JANO 8, 8th Conference on Numerical Analysis and Optimization I*, December 2005.
- [5] P. Angot, F. Boyer, and F. Hubert. Asymptotic and numerical modelling of flows in fractured porous media. *M2AN*, 2(43) :239–275, 2009.
- [6] C. Annavarapu, M. Hautefeuille, and J. E. Dolbow. A robust Nitsche’s formulation for interface problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 44 :225–228, 2012.
- [7] D.-N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(4) :742–760, 1982.
- [8] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [9] I. Babuška. The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Computing (Arch. Elektron. Rechnen)*, 5 :207–213, 1970.
- [10] I. Babuška and J.M. Melenk. The partition of unity method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 40(4) :727–758, 1973.
- [11] N. Barrau. *Généralisation de la méthode Nitsche XFEM pour la discrétisation de problème d’interface elliptiques*. PhD thesis, Pau (France) : University of Pau, 2014.
- [12] N. Barrau, R. Becker, E. Dubach, and R. Luce. A robust variant of NXFEM for the interface problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(15-16) :789–792, 2012.
- [13] T. Barth, P. Bochev, and J. Shadid. An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem. *Math. Comp*, 186(52) :495–508, 1989.
- [14] T. Barth, P. Bochev, and J. Shadid. A taxonomy of consistently stabilized finite element methods for the Stokes problem. *SIAM J. Num. Anal.*, 5(25) :1585, 2004.

- [15] E. Bechet, N. Moës, and B. Wohlmuth. A stable Lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 78 :931–954, 2009.
- [16] R. Becker, E. Burman, and P. Hansbo. A Nitsche extended finite element method for incompressible elasticity with discontinuous modulus of elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 41–44(198) :3352–3360, 2009.
- [17] R. Becker, E. Burman, and P. Hansbo. A hierarchical NXFEM for fictitious domain simulations. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 86(4–5) :549–559, 2011.
- [18] R. Becker, D. Capatina, and J. Joie. A dG method for the Stokes equations related to nonconforming approximations. *Research Report*, page 34, 2009.
- [19] R. Becker, D. Capatina, and J. Joie. Connections between discontinuous Galerkin and nonconforming finite element methods for the Stokes equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 10.1002/num 20671, 2011.
- [20] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 50 :993–1013, 2001.
- [21] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids. Vol.1 Fluid mechanics. Vol. 2 Kinetic theory*. John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [22] D. Boffi, N. Cavallini, and L. Gastaldi. Finite element approach to immersed boundary method with different fluid and solid densities. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(21) :2523–2550, 2011.
- [23] D. Boffi and L. Gastaldi. A finite element approach for the immersed boundary method. *Computers & Structures*, 81 :491–501, 2003.
- [24] D. Boffi and L. Gastaldi. Discrete models for fluid-structure interactions : the finite element immersed boundary method. *arxiv :1407.5261v1*, 2014.
- [25] D. Boffi, L. Gastaldi, and L. Heltai. Numerical stability of the finite element immersed boundary method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(1479), 2007.
- [26] D. Boffi, L. Gastaldi, L. and Heltai, and C.S. Peskin. On the hyper-elastic formulation of the immersed boundary method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 25–28(197) :2210–2231, 2008.
- [27] M.-R. Boisseau. Hémorhéologie clinique. Concept, physiopathologie et applications aux maladies vasculaires. *EMC-Cardiologie Angéiologie*, 1 :364–381, 2004.
- [28] P.-I. Brånemark and U. Bagge. *Intravascular rheology of erythrocytes in man in : Red Cell Rheology*. ed. Bessis, M. ; Shohet, S. B. & Mohandas, N. Springer-Verlag, 1978.
- [29] K. Brenner and R. Masson. Convergence of a Vertex centred Discretization of Two-Phase Darcy flows on General Meshes. *International Journal on Finite Volumes*, 5(10) :1–37, 2013.
- [30] S. C. Brenner. Poincaré-Friedrichs inequalities for piecewise H^1 functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(1) :306–324, 2003.
- [31] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.
- [32] S.C. Brenner and L.Y. Sung. Linear finite element methods for planar linear elasticity. *Math. Comp*, 211(59) :321–338, 1992.
- [33] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [34] E. Burman and P. Hansbo. A unified stabilized method for Stokes' and Darcy's equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 198(1) :35–51, 2007.
- [35] P. B. Canham and A. C. Burton. Distribution of size and shape in populations of normal human red cells. *Circulation Research*, 22 :405–422, 1968.
- [36] D. Capatina, R. Luce, H. El-Otmany, and N. Barrau. Nitsche's extended finite element method for a fracture model in porous media. *Applicable Analysis*, pages 1–19, 2015.
- [37] D. Capatina-Papaghiuc. *Contribution à la prévention de phénomènes de verouillage numérique*. PhD thesis, Pau (France) : University of Pau, 1997.
- [38] P. C.-H. Chan and L. G. Leal. The motion of a deformable drop in a second-order fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 92(1) :131–170, 1979.
- [39] L. Chang-Ock, L. Jongwoo, and S. Dongwoo. A locking-free nonconforming finite element method for planar linear elasticity. *Adv. Comput. Math.*, 1-3(19) :277–291, 2003.
- [40] Z. Chen and J. Zou. Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems. *Numer. Math.*, 2(79) :175–202, 1998.
- [41] D. Chenaïs and J.-C. Paumier. On the locking phenomenon for a class of elliptic problems. *Numer. Math.*, 131–140 :67, 1994.
- [42] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [43] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, Amsterdam, 1988.
- [44] J. Clemens and M. Lasance. Ten years of boundary-condition-independent compact thermal modeling of electronic parts : A review. *Heat Transfer Engineering*, 29(29) :149–168, 2008.
- [45] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique*, 7(3) :33–75, 1973.
- [46] C. D'Angelo and P. Zunino. Robust numerical approximation of coupled Stokes' and Darcy's flows applied to vascular hemodynamics and biochemical transport. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 45(3) :447–476, 2011.
- [47] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Functional and Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 2, 1988.
- [48] P. A. Destuynder. Une étude asymptotique de plaques minces en élasticité linéaire. *Collection RMA, Masson édition*, 1986.
- [49] H. J. Deuling and W. Helfrich. Red blood cell shapes as explained on the basis of curvature elasticity. *Biophysical Journal*, 16 :861, 1976.
- [50] H. J. Deuling and W. Helfrich. The curvature elasticity of fluid membranes : A catalogue of vesicle shapes. *Journal de Physique*, 37 :1335, 1976.
- [51] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*. Mathématiques et applications. Springer, Heidelberg, New York, London, 2012.
- [52] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(51-52) :6825–6846, 2001.

- [53] A. Ern, A.F. Stephansen, and P. Zunino. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity. *IMA J. Numer. Anal.*, 2(29) :235–256, 2009.
- [54] Stephansen A.F. Ern A. and Zunino P. A. discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity. *IMA J. Numer. Anal.*, 2(29) :235–256, 2009.
- [55] E. A. Evans and R. M. Hochmuth. Membrane viscoelasticity. *Biophysical Journal*, 16 :1, 1976.
- [56] E. A. Evans and R. M. Hochmuth. Membrane viscoplastic flow. *Biophysical Journal*, 16 :13, 1976.
- [57] E. A. Evans, R. Waugh, and L. Melnik. Elastic area compressibility modulus of red cell membrane. *Biophysical Journal*, 16 :585, 1976.
- [58] Evan A. Evans. Constitutive relation for red cell membrane. Correction. *Biophysical Journal*, 16 :597, 1976.
- [59] Evan A. Evans and Robert M. Hochmuth. A solid-liquid composite model of the red cell membrane. *Journal of Membrane Biology*, 30 :351, 1977.
- [60] R. Fåhræus and T. Lindqvist. The viscosity of the blood in narrow capillary tubes. *American Journal of Physiology*, 96 :562–568, 1931.
- [61] I. Faille, E. Flauraud, F. Nataf, S. Pégaz-Fiornet, F. Schneider, and F. Willien. A new Fault Model in Geological Basin Modelling. Application of a Finite Volume Scheme and Domain Decomposition Methods. In *Finite Volumes for Complex Applications III*, *Hermes Penton Sci.*, 543–550, 2002.
- [62] R.S. Falk. Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity. *Math. Comp*, 196(57) :529–550, 1991.
- [63] N. Frih, V. Martin, J.E. Roberts, and A. Saada. Modeling fractures as interfaces with nonmatching grids. *Comput. Geosci.*, pages 16 :1043–1060, 2012.
- [64] N. Frih, J.E. Roberts, and A. Saada. Modeling fractures as interfaces : a model for forchheimer fractures. *Comput. Geosci.*, 12 :91–104, 2008.
- [65] Y. C. B. Fung and P. Tong. Theory of the sphering of red blood cells. *Biophysical Journal*, 8 :175, 1968.
- [66] H. Giesekus. Consitutive equations for polymer fluids based on the concept of configuration-dependent molecular mobility : a generalized mean-configuration model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 11 :69–109, 1982.
- [67] H. Giesekus. Consitutive equations for polymer fluids based on the concept of configuration-dependent molecular mobility : a generalized mean-configuration model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 17 :349–372, 1985.
- [68] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5. Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Theory and algorithms, 1986.
- [69] Girault, V. and Rivière, B., and Wheeler, M. F. A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems. *Math. Comp.*, 249(74) :53–84, 2005.
- [70] Gordon, R. J. and Schowalter, W. R. Transactions of the society of rheology. *Journal of Rheology*, 16 :79–97, 1972.

- [71] A. Gravouil, N. Moës, and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth with the extended finite element and level sets-part 1 : Mechanical model. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 11(53) :2549–2568, 2002.
- [72] G. Hagen. *Handbuch der Wasserbaukunst*. Gebdrüern Bornträger, Königsberg, Prusse, 1841.
- [73] H. D. Han. Nonconforming elements in the mixed finite element method. *J. Comput. Math.*, 2(3) :223–233, 1984.
- [74] H. D. Han. An analysis of penalty-nonconforming finite element method for Stokes equations. *J. Comput. Math.*, 4 :2 :164–172, 1986.
- [75] A. Hansbo and P. Hansbo. An unfitted finite element method, based on Nitsche’s method, for elliptic interface problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191(47–48) :5537–5552, 2002.
- [76] A. Hansbo, P. Hansbo, and M. G. Larson. A finite element method on composite grids based on Nitsche’s method. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(3) :495–514, 2003.
- [77] P. Hansbo, M. G. Larson, and S. Zahedi. A cut finite element method for a Stokes interface problem. *Applied Numerical Mathematics*, 85 :90–114, 2014.
- [78] W. Helfrich. Elastic properties of lipid bilayers : Theory and possible experiments. *Verlag der Zeitschrift für Naturforschung*, 28c :693, 1973.
- [79] L. Heltai. On the stability of the finite element immersed boundary method. *Computers & Structures*, 86(7–8) :598–617, 2008.
- [80] C.W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39 :201–225–36, 1981.
- [81] M. W. Johnson Jr and D. Segalman. A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2 :255–270, 1977.
- [82] J. Joie. *Simulation numérique des écoulements de liquides polymères*. PhD thesis, Pau (France) : University of Pau, 2010.
- [83] Julie Joie and D. Graebling. Numerical simulation of polymer flows using non-conforming finite elements. *Computers & Fluids*, 79 :178–179, 2013.
- [84] P. Klouček, B. Li, and M. Luskin. Analysis of a class of nonconforming finite elements for crystalline microstructures. *Math. Comp.*, 215(65) :1111–1135, 1996.
- [85] R. G. Larson. *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*. Butterworths, Boston, 1988.
- [86] K. Lemrabet. Régularité d’un problème de tansmission. *J. Maths Pures et Appl.*, 56 :1–38, 1977.
- [87] R.J. Leveque and Z. Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31 :1019–1044, 1994.
- [88] Z. Li, T. Lin, and X. Wu. New Cartesian grid methods for interface problems using the finite element formulation. *Numer. Math.*, 1(96) :61–98, 2003.
- [89] F. J. Lim and W. R. Schowalter. Pseudo-spectral analysis of the stability of pressure-driven flow of a Giesekus fluid between parallel planes. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 26 :135–142, 1987.

- [90] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume I. Dunod, Paris, 1968.
- [91] V. Martin, J. Jaffré, and J.E. Roberts. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. *SIAM J. Sci. Comput.*, 5(26) :1667–1691, 2005.
- [92] A. Massing, M. G. Larson, A. Logg, and Rognes M. E. A stabilized Nitsche fictitious domain method for the Stokes problem. *ArXiv e-prints 1206.1933*, 2012.
- [93] A. Massing, M. G. Larson, A. Logg, and M. E. Rognes. A stabilized Nitsche overlapping mesh method for the Stokes problem. *ArXiv e-prints 1205.6317*, 2012.
- [94] R. Massjung. An Unfitted Discontinuous Galerkin Method Applied to Elliptic Interface Problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(6) :3134–3162, 2012.
- [95] G. Matthies and F. Schieweck. Nonconforming finite elements of higher order satisfying a new compatibility condition. *J. Numer. Math.*, 16(1) :23–50, 2008.
- [96] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 51(46) :131–150, 1999.
- [97] F. Morales and R. Showalter. The narrow fracture approximation by channeled flow. *J. Math. Anal. Appl.*, 365 :320–331, 2010.
- [98] F. Morales and R. Showalter. Interface approximation of darcy flow in a narrow channel. *Math. Method Appl. Sci.*, 35 :182–195, 2012.
- [99] S. Mortazavi and G. A. Tryggvason. A numerical study of the motion of drops in Poiseuille flow. Part 1. Lateral migration of one drop. *Journal of Fluid Mechanics*, 411 :325–350, 2000.
- [100] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36(9-15), 1971. Collection of articles dedicated to Lothar Collatz on his sixtieth birthday.
- [101] M.A. Olshanskii and A. Reusken. Analysis of a Stokes interface problem. *Numer. Math.*, 103 :29–149, 2006.
- [102] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 1(79) :12–49, 1988.
- [103] C. Park and S. Dongwoo. P1-nonconforming quadrilateral finite element methods for second-order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2(41) :624–640, 2003.
- [104] C.S. Peskin. *Flow patterns around heart valves : A digital computer method for solving the equations of motion*. PhD thesis, Albert Einstein College of Medicine, 1972.
- [105] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numer.*, pages 1–39, 2002.
- [106] H. Pham Huy and E. Sánchez Palencia. Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. Math. Anal. Appl.*, 47 :284–309, 1974.
- [107] N. Phan-Thien and R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2 :353–365, 1977.
- [108] J. L. M. Poiseuille. *Recherches sur la force du coeur aortique*. Thèse de doctorat en médecine, Faculté de Médecine de Paris, 1828.
- [109] J. L. M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 11 :961–967, 1840.

- [110] J. L. M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. ii. influence de la longueur sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. iii. influence du diamètre sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 11 :1041–1048, 1840.
- [111] J. L. M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. iv. influence de la température sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 12 :112–115, 1841.
- [112] E. Ponder. The measurement of the diameters of erythrocytes. V. The relation of the diameter to the thickness. *Quarterly Journal of Experimental Physiology*, 20(1) :29–39, 1930.
- [113] E. Ponder and W. G. Millar. The measurement of the diameters of erythrocytes I. The mean diameter of the red cells in man. *Quarterly Journal of Experimental Physiology*, 14(1) :67–82, 1924.
- [114] L. M. Quinzani, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Birefringence and laser-Doppler velocimetry (LDV) studies of viscoelastic flow through a planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 52 :1–36, 1994.
- [115] Rannacher R. and Turek S. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 8(2) :97–111, 1992.
- [116] R. P. Rand. Mechanical properties of the red cell membrane. II. Viscoelastic breakdown of the membrane. *Biophysical Journal*, 4 :303–316, 1964.
- [117] R. P. Rand and A. C. Burton. Mechanical properties of the red cell membrane. I. Membrane stiffness and intracellular pressure. *Biophysical Journal*, 4 :115, 1964.
- [118] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, volume 169. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Paris Masson edition, 1983.
- [119] N. Raynaud. *Approximation par éléments finis de problèmes de transmissions raides [doctoral dissertation]*. PhD thesis, Pau (France) : University of Pau, 1994.
- [120] V.K. Saul'ev. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. Journal*, 4(4) :912–925, 1963.
- [121] W. R. Schowalter. *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*. Pergamon Press, 1978.
- [122] G. Segré and A. Silberberg. Radial particle displacements in Poiseuille flow of suspensions. *Nature*, 189 :209–210, 1961.
- [123] G. Segré and A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1. Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(1) :136–157, 1962.
- [124] G. Segré and A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow Part 2. Experimental results and interpretation. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(1) :136–157, 1962.
- [125] N. Sukumar, N. Chopp, D. L. and Moës, and T. Belytschko. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(3) :6183–6200, 2001.

- [126] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 25 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [127] S. Xu and Z. J. Wang. An immersed interface method for simulating the interaction of a fluid with moving boundaries. *J. Comput. Phys.*, 2(216) :454–493, 2006.
- [128] Z. Yu, N. Phan-Thien, and R. I. Tanner. Dynamic simulation of sphere motion in a vertical tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 518 :61–93, 2004.

Approximation par la méthode NXFEM des problèmes d'interface et d'interphase en mécanique des fluides

La modélisation et la simulation numérique des interfaces sont au cœur de nombreuses applications en mécanique des fluides et des solides, telles que la biologie cellulaire (déformation des globules rouges dans le sang), l'ingénierie pétrolière et la sismique (modélisation de réservoirs, présence de failles, propagation des ondes), l'aérospatiale (problème de rupture, de chocs) ou encore le génie civil. Cette thèse porte sur l'approximation des problèmes d'interface et d'interphase en mécanique des fluides par la méthode NXFEM, qui permet de prendre en compte de façon précise une discontinuité non alignée avec le maillage.

Nous nous sommes d'abord intéressés au développement de la méthode NXFEM pour des éléments finis non-conformes pour prendre en compte une interface séparant deux milieux. Nous avons proposé deux approches pour les équations de Darcy et de Stokes. La première consiste à modifier les fonctions de base de Crouzeix-Raviart sur les cellules coupées et la deuxième consiste à rajouter des termes de stabilisation sur les arêtes coupées. Les résultats théoriques obtenus ont été ensuite validés numériquement.

Par la suite, nous avons étudié la modélisation asymptotique et l'approximation numérique des problèmes d'interphase, faisant apparaître une couche mince. Nous avons considéré d'abord les équations de Darcy en présence d'une faille et, en passant à la limite dans la formulation faible, nous avons obtenu un modèle asymptotique où la faille est décrite par une interface, avec des conditions de transmission adéquates. Pour ce problème limite, nous avons développé une méthode numérique basée sur NXFEM avec éléments finis conformes, consistante et stable. Des tests numériques, incluant une comparaison avec la littérature, ont été réalisés. La modélisation asymptotique a été étendue aux équations de Stokes, pour lesquelles nous avons justifié le modèle limite obtenu.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la membrane d'un globule rouge par un fluide non-newtonien viscoélastique de Giesekus, afin d'appréhender la rhéologie du sang. Pour un problème d'interphase composé de deux fluides newtoniens (l'extérieur et l'intérieur du globule) et d'un liquide de Giesekus (la membrane du globule), nous avons dérivé formellement le problème limite, dans lequel les équations dans la membrane sont remplacées par des conditions de transmission sur une interface.

Mots-clés : interface ; NXFEM ; équations de Darcy / Stokes ; éléments finis non-conformes ; analyse d'erreur a priori ; modélisation de couche mince ; conditions de transmission non-standard ; globule rouge.

Approximation by NXFEM method of interphase and interface problems in fluid mechanics

Numerical modelling and simulation of interfaces in fluid and solid mechanics are at the heart of many applications, such as cell biology (deformation of red blood cells), petroleum engineering and seismic (reservoir modelling, presence of faults, wave propagation), aerospace and civil engineering etc. This thesis focuses on the approximation of interface and interphase problems in fluid mechanics by means of the NXFEM method, which takes into account discontinuities on non-aligned meshes.

We have first focused on the development of NXFEM for nonconforming finite elements in order to take into account the interface between two media. Two approaches have been proposed, for Darcy and Stokes equations. The first approach consists in modifying the basis functions of Crouzeix-Raviart on the cut cells and the second approach consists in adding some stabilization terms on each part of a cut edge. We have studied them from a theoretical and a numerical point of view.

Then we have studied the asymptotic modelling and numerical approximation of interphase problems, involving a thin layer between two media. We have first considered the Darcy equations in the presence of a highly permeable fracture. By passing to the limit in the weak formulation, we have obtained an asymptotic model where the 2D fracture is described by an interface with adequate transmission conditions. A numerical method based on NXFEM with conforming finite elements has been developed for this limit problem, and its consistency and uniform stability have been proved. Numerical tests including a comparison with the literature have been presented. The asymptotic modelling has been finally extended to Stokes equations, for which we have justified the limit problem.

Finally, we have considered the mechanical behaviour of red blood cells in order to better understand blood rheology. The last part of the thesis is devoted to the modelling of the membrane of a red blood cell by a non-Newtonian viscoelastic liquid, described by the Giesekus model. For an interphase problem composed of two Newtonian fluids (the exterior and the interior of the red blood cell) and a Giesekus liquid (the membrane), we formally derived the limit problem where the equations in the membrane are replaced by transmission conditions on an interface.

Keywords : interface ; NXFEM ; Darcy / Stokes equations ; nonconforming finite elements ; a priori error analysis ; thin layer modelling ; non-standard transmission conditions ; red blood cells.