

Règlement : Documents électroniques et téléphones portables interdits. Soignez votre rédaction.

Numérotez les exercices, les questions traitées et vos copies en fin d'épreuve. Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif. Ce sujet est constitué de questions de cours et 3 exercices.

Bon courage!

Questions de cours [4 points]

1. Donner la définition d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, $n \geq 2$, $0 < p < 1$.
2. Donner les conditions nécessaires pour approcher convenablement une variable aléatoire suivant loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'un certain paramètre λ ? Donner l'expression λ en fonction des paramètres de la loi binomiale.
3. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Donner $P(X = k)$ pour k entier naturel, $E(X)$ et $V(X)$.
4. Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 3^2)$. Donner $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice n°1 [5 points] Pour se rendre à l'IUT de Tarbes, un étudiant a le choix entre trois itinéraires A , B et C .

La probabilité qu'il emprunte l'itinéraire A est égale à $\frac{2}{3}$ et celle qu'il emprunte l'itinéraire B est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité qu'il arrive en retard en empruntant l'itinéraire A vaut $\frac{1}{45}$, elle qu'il arrive en retard en empruntant l'itinéraire B vaut $\frac{1}{35}$ et, en empruntant l'itinéraire C , il n'est jamais en retard.

1. Déterminer la probabilité qu'il emprunte l'itinéraire C .
2. Déterminer la probabilité de l'événement "l'étudiant arrive en retard".
3. Déterminer la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire B sachant qu'il est en retard.

Exercice n°2 [4 points] En utilisant les tableaux en annexe, calculer les probabilités suivantes :

1. $P(X \leq 2.15)$, $P(-1.45 \leq X < 1.45)$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale).
2. $P(Y \leq 3.2)$, $P(2.02 < Y \leq 6.02)$ pour $Y \sim \mathcal{N}(4, 3^2)$ (loi normale).
3. $P(Z = 0)$, $P(Z \leq 4)$ pour $Z \sim \mathcal{P}(8)$ (loi de Poisson).
4. $P(\overline{B})$ et $P_B(A)$ sachant que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$,

Exercice n°3 [7 points] Un agent immobilier a estimé que la probabilité de vendre un appartement suite à une visite était à 9%. Elle effectue en général 30 visites par semaine. On considère que les visites de l'appartement sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres. On note A la variable aléatoire égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite.

1. justifier que la variable A suit une loi binomiale.
2. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que 20% des visites hebdomadaires se traduisent par une vente.
3. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que l'agent vende au moins un appartement par semaine.
4. Combien l'agent vend-t-il d'appartements en moyenne par semaine ?
5. Calculer l'écart-type de A .
6. Combien de visites l'agent doit-il effectuer au minimum (par semaine) pour que la probabilité de vendre au moins un appartement (par semaine) soit supérieure à 95% ?

Annexe à utiliser selon vos souhaits pour répondre aux exos 1,2 et 3 :

1. Table de la loi de Poisson de paramètre λ : $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$k \setminus \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0076
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0000	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0000	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019	

2. Table de la loi normale centrée réduite de moyenne 0 et de variance 1 : $\mathcal{N}(0, 1)$.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990