Exercice n°1 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)), \quad t \in [0; 1], \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

où $f(t, y) = 3t + y$.

1. — Montrer que la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et donner une constante de Lipschitz.
   On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2|$, f est lipschitzienne par rapport à la variable y telle que $k = 1$. On dit aussi que f est $1-$lipschitzienne par rapport à la variable y.
   Remarque : Pour montrer que f est lipschitzienne en y, vous pouvez vérifier que f est une fonction de classe C^1 et essayer de majorer la dérivée partielle par rapport à y au voisinage de y_0. Autrement dit, il suffit de calculer $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = 1$, donc $\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = 1$. Par conséquent, f est une fonction $1-$lipschitzienne.
   — Que peut-on dire sur l'existence et l'unicité du problème $(\mathcal{P})$?
   Définition : on dit que f est $k-$lipschitzienne en y si et seulement si $||f(t, y) - f(t, z)|| \leqslant k||y - z||$ pour tout $(t, y), (t, z) \in U$. On dit que f est localement lipschitzienne en y, si tout point de U admet un voisinage sur lequel f est lipschitzienne en y. Il existe des problèmes différentiels de Cauchy où f ne soit nécessairement localement lipschitzienne en y pour que ce problème admet une unique solution. **Exemple :** $f(t, y) = g(t)h(y)$ avec g et h continues.

   f est continue sur I et 1-lipschitzienne. Ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que le problème différentiel $(\mathcal{P})$ admet une unique solution $y : I \longmapsto \mathbb{R}$.
2. Montrer que $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ est l'unique solution de $(\mathcal{P})$.
   Pour que $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ soit l'unique solution du problème différentiel, il faut vérifier les conditions suivantes :
   — $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur l'intervalle ou le domaine de validité du problème $(\mathcal{P})$.
   — $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ vérifie l'équation $y'(t) = f(t, y(t)) = 3t + y(t)$. Il suffit de de calculer la dérivée de $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ et de l'injecter dans l'équation différentielle. On a $y'(t) = 4e^t - 3$ et $3t + y(t) = 3t + 4e^t - 3t - 3 = 4e^t - 3 = y'(t)$. Par conséquent, $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ vérifie l'équation donnée.
   — $y(t) = 4e^t - 3t - 3$ vérifie la condition initiale du problème $(\mathcal{P})$. On a $y(0) = 4e^0 - 3 \times 0 - 3 = 4 - 3 = 1$.
   Ensuite, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est donc la seule solution de l'équation qui peut vérifie l'équation et la condition initiale $y(0) = 1$.
   Remarque : toute solution sur un intervalle I qui ne vérifie pas la condition initiale $y(0)$ n'est pas une solution du problème différentiel $(\mathcal{P})$.
3. Écrire le schéma d'Euler explicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.
   Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$.
   On a
   — $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
   — $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(3t_0 + y_0) = 1.1$.

— $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + h(3t_1 + y_1) = 1.24$.

4. Écrire le schéma d'Euler implicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.
   Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. En utilisant $f(t, y) = 3t + y$, il vient que $y_{n+1} = y_n + 3t_{n+1}h + y_{n+1}h$, donc $(1-h)y_{n+1} = y_n + 3t_{n+1}h = y_n + 3(n+1)h^2$. Par conséquent, $y_{n+1} = \frac{y_n+3(n+1)h^2}{1-h}$ si $h \neq 1$. On a
   — $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
   — $y_1 = y(0.1) = \frac{y_0+3(0+1)h^2}{1-h} = 1.1444$
   — $y_2 = y(0.2) = \frac{y_1+3(1+1)h^2}{1-h} = 1.338$.
5. Écrire la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et donner l'approximation de $y(0.2)$ à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0.1$.
   Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Posons $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$ où $\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$.
   — $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
   — On a $\hat{y}_0 = y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0) = 1 + \frac{0.1}{2}(3\times 0+1) = 1.05$, donc $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, \hat{y}_0) = 1 + 0.1(3(\times 0 + \frac{0.1}{2}) + 1.05) = 1.12$.
   — On a $\hat{y}_1 = y_1 + \frac{h}{2}f(t_1, y_1) = 1.12 + \frac{0.1}{2}(3 \times 0.1 + 1.12) = 1.191$, donc $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1 + \frac{h}{2}, \hat{y}_1) = 1.191 + 0.1(3(\times 1 + \frac{0.1}{2}) + 1.191) = 1.2841$.
6. Comparer les solutions numériques obtenues par chaque méthode à la valeur exacte.
   D'après la solution du problème $\mathcal{P}$, on a $y(0.2) \approx 1.2856$. On conclut que les erreurs relatives sont de 0.03 pour Euler explicite, 0.04 pour Euler implicite, et 0.001 pour RK2.

Exercice n°2 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y'(t) &= e^{-t} - 2y(t), \quad t \in [0; 1], \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et donner une constante de Lipschitz.
   Posons $f(t, y) = e^{-t} - 2y$. On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant |-2y_1 + 2y_2|$, f est lipschitzienne par rapport à la 2ème variable y telle que $k = 2$. On dit aussi que f est $2-$lipschitzienne par rapport à la variable y.
2. Montrer que ce problème admet une solution unique. On a $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant |-2y_1 + 2y_2|$, f est lipschitzienne par rapport à la 2ème variable y telle que $k = 2$. On dit aussi que f est $2-$lipschitzienne par rapport à la variable y.
3. Montrer que $y(t) = e^{-t}$ est l'unique solution de ce problème.
4. Écrire le schéma d'Euler explicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.3$.
   Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. On a
   — $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
   — $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(e^{-t_0} - 2y_0) = 0.9$.
   — $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1, y_1) = y_1 + h(e^{-t_1} - 2y_1) = 0.810483741803596$.
   — $y_3 = y(0.3) = y_2 + hf(t_2, y_2) = y_2 + h(e^{-t_2} - 2y_2) = 0.730260068750675$.
5. Écrire le schéma d'Euler implicite à ce problème, avec $h = 0.1$, puis évaluer la solution en $t = 0.2$.
   Soit $y(t_n) \approx y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. En utilisant $f(t, y) = e^{-t} - 2y$, il vient que $y_{n+1} = y_n + e^{-t_n}h - 2y_{n+1}h$, donc $(1+2h)y_{n+1} = y_n + 3t_{n+1}h = y_n + 3(n+1)h^2$. Par conséquent, $y_{n+1} = \dfrac{y_n + e^{-(n+1)h}h}{1+2h}$. On a

— $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
— $y_1 = y(0.1) = \dfrac{y_0 + e^{-(0+1)h}h}{1+2h} = 0.9087364515029966$.
— $y_2 = y(0.2) = \dfrac{y_1 + e^{-(1+1)h}h}{1+2h} = 0.8255079390089958$.
— $y_3 = y(0.3) = \dfrac{y_2 + e^{-(2+1)h}h}{1+2h} = 0.749658134230973$.

6. Écrire la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et donner l'approximation de $y(0.3)$ à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0.1$.
Soit $y(t_n) \approx y_{t_n}$ tel que $t_n = nh$. Posons $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, \hat{y}_n)$ où $\hat{y}_n = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$.
— $y_0 = y(0.0) = 1$ (condition initiale).
— On a $\hat{y}_0 = y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0) = 1 + \frac{0.1}{2}(e^{-t_0} - 2y_0) = 0.95$, donc $y_1 = y(0.1) = y_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, \hat{y}_0) = 0.9051229424500714$.
— On a $\hat{y}_1 = y_1 + \frac{h}{2}f(t_1, y_1) = 0.8598525191068622$, donc $y_2 = y(0.2) = y_1 + hf(t_1 + \frac{h}{2}, \hat{y}_1) = 0.8192232362712047$.
— On a $\hat{y}_2 = y_2 + \frac{h}{2}f(t_2, y_2) = 0.7782374502979834$, donc $y_3 = y(0.2) = y_2 + hf(t_2 + \frac{h}{2}, \hat{y}_2) = 0.7414558245187486$.

7. Comparer les solutions numériques obtenues par chaque méthode à la valeur exacte.
La solution du problème $\mathcal{P}$, nous donne $y(0.2) \approx e^{-0.2} = 0.81873075308$. Par conséquent, les erreurs relatives sont d'ordre 10^{-2} pour les schémas d'Euler et d'ordre 8×10^{-4} pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.

Exercice n°3 Soit l'équation différentielle du second ordre $y'' + ty' + (1-t)y = 2$, considérée sur l'intervalle $I = [0; 1]$ assortie des conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. Reformuler cette équation différentielle sous la forme d'un problème de Cauchy. Posons $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ et $F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y' \\ 2 - ty' - (1-t)y \end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $Y'(t) = F(t, Y(t))$ où $F\left(t, Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2 - ty_2 - (1-t)y_1 \end{bmatrix}$.

2. Montrer que ce problème a une et une seule solution. On vérifie les hypothèse de Cauchy-Lipschitz :
— F est une fonction continue sur $I = [0; 1]$ car ses composantes sont continues.
— On étudie si F est Lipschitzienne en utilisant la nome 1 : $||F(t, Y) - F(t, Z)||$. On a, avec $t \in [0; 1]$,
$$\begin{aligned} ||F(t,Y) - F(t,Z)|| &= \left|\left| \begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ -t(y_2 - z_2) - (1-t)(y_1 - z_1) \end{bmatrix} \right|\right| \\ &\leqslant (1+t)|y_2 - z_2| + |1-t||y_1 - z_1| \leqslant 2||Y - Z||. \end{aligned}$$
Donc F est $2-$Lipschitzienne. en Y.

3. Exposer la formulation de la méthode d'Euler explicite pour ce problème. Calculer, pour $h = 0.1$ la valeur approchée obtenue comme approximation de $y(0.3)$.
Soit $Y(t_n) \approx Y_n$ tel que $t_n = nh$. Le schéma d'Euler explicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$.
On a
— $Y_0 = \begin{bmatrix} y(0.0) \\ y'(0.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (condition initiale).

— $Y_1 = \begin{bmatrix} y(0.1) \\ y'(0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

— $Y_2 = \begin{bmatrix} y(0.2) \\ y'(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.398 \end{bmatrix}$

— $Y_3 = \begin{bmatrix} y(0.3) \\ y'(0.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0598 \\ 0.58844 \end{bmatrix}$

On trouve $y(0.3) \approx 0.0598$.

Remarque : le calcul de la deuxième composante $y'(t_3)$ de Y_3 n'est pas nécessaire. Vous pouvez appliquer le développement de Taylor à $y(t)$ à l'ordre 3 au point $t = 0$.

4. Exposer la formulation de la méthode d'Euler implicite pour ce problème.

Posons $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_{n+1}, Y_{n+1})$. On a donc

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hz_{n+1} \\ z_{n+1} &= z_n + h(2 - t_{n+1}z_{n+1} - (1 - t_{n+1})y_{n+1}) \end{cases}$$

On obtient les composantes de Y_{n+1} de la résolution du système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} y_{n+1} - hz_{n+1} &= y_n \\ (1 - t_{n+1})hy_{n+1} + (1 + t_{n+1})hz_{n+1} &= 2h + z_n \end{cases}$$

Remarque : On peut résoudre explicitement le système avec les méthodes algébriques (Cramer, Pivot de Gauss, ...) ou utiliser un algorithme (TDMA, ...) pour le résoudre à chaque itération.

En utilisant la méthode de substitution, on arrive à

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= hz_{n+1} + y_n \\ (1 - t_{n+1})h(hz_{n+1} + y_n) + (1 + t_{n+1})hz_{n+1} &= 2h + z_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= hz_{n+1} + y_n \\ (1 - t_{n+1})h^2 z_{n+1} + (1 - t_{n+1})hy_n + (1 + t_{n+1})hz_{n+1} &= 2h + z_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= hz_{n+1} + y_n \\ \left[(1 - t_{n+1})h^2 + (1 + t_{n+1})h\right] z_{n+1} &= 2h + z_n - (1 - t_{n+1})hy_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y_{n+1} &= \dfrac{2h + z_n - (1 - t_{n+1})hy_n}{(1 - t_{n+1})h + (1 + t_{n+1})} + y_n \\ z_{n+1} &= \dfrac{2h + z_n - (1 - t_{n+1})hy_n}{(1 - t_{n+1})h^2 + (1 + t_{n+1})h} \end{cases} \end{aligned}$$

avec $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0) = y'(0)$.

Exercice n°4 Soit le système différentiel à deux inconnues $y(t)$ et $z(t)$ considéré sur un intervalle $[0; T]$ suivant :

$$\begin{cases} y'' - ty' + 2z &= t \\ y' + e^t y + 3z' + 2z &= 4t^2 + 1 \end{cases}$$

1. Quelles conditions initiales poser pour constituer avec ce système un problème de Cauchy ? L'exprimer sous la forme $Y' = F(t, Y)$.

On est amené à poser $Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ et $F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} y' \\ t + ty' - 2z \\ \frac{1}{3}\left(4t^2 + 1 - y' - e^t y - 2z\right) \end{bmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit ainsi : $Y'(t) = F(t, Y(t))$ où

$$F\left(t, Y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_2 \\ t + ty_2 - 2y_3 \\ \frac{1}{3}\left(4t^2 + 1 - y_2 - e^t y_1 - 2y_3\right) \end{bmatrix}.$$

où $Y(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \end{bmatrix}$ est la condition initiale à imposer pour que ce système d'équations soit un problème de Cauchy.

2. Justifier que ce problème admet une et une seule solution.
   Il suffit de vérifier les hypothèse de Cauchy-Lipschitz :
   — F est une fonction de classe C^1 sur $I = [0; T]$ au voisinage de Y_0 car ses composantes sont dérivables et continues.
   — On étudie si F est Lipschitzienne en utilisant la nome 1 : $||F(t, Y) - F(t, Z)||$. On a, avec $t \in [0; T]$,

$$\begin{aligned} ||F(t,Y) - F(t,Z)|| &= \left|\left| \begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ t(y_2 - z_2) - 2(y_3 - z_3) \\ \frac{1}{3}\left(-(y_2 - z_2) - e^t(y_1 - z_1) - 2(y_3 - z_3)\right) \end{bmatrix}.\right|\right| \\ &\leqslant |y_2 - z_2| + t|y_2 - z_2| + 2|y_3 - z_3| + \frac{1}{3}\left(|y_2 - z_2| + e^t|y_1 - z_1| + 2|y_3 - z_3|\right) \\ &\leqslant \frac{e^T}{3}|y_1 - z_1| + (\frac{4}{3} + T)|y_2 - z_2| + \left(2 + \frac{2}{3}\right)|y_3 - z_3| \end{aligned}$$

   Prenons $k = \max\left(\frac{e^T}{3}, \frac{4}{3} + T, \frac{8}{3}\right)$, on en déduit que

$$||F(t,Y) - F(t,Z)|| \leqslant k\left(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| + |y_3 - z_3|\right) = k||Y - Z||.$$

   Par conséquent F est $k-$Lipschitzienne en Y.

3. Exposer le principe des méthodes d'Euler explicite et implicite pour ce système.

   — Méthode d'Euler explicite (résolution d'un système linéaire que l'on pourrait expliciter avec les méthodes algébriques) :
   Posons $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \\ v_n \end{bmatrix}$, le schéma s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_n, Y_n)$. On a donc

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hz_n \\ z_{n+1} &= z_n + h(t_n + t_n z_n - 2v_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{3}\left(4t_n^2 + 1 - z_n - e^{t_n} y_n - 2v_n\right) \end{cases}$$

   d'où

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hz_n \\ z_{n+1} &= (1 + ht_n)z_n + ht_n - 2hv_n \\ v_{n+1} &= (1 + \frac{h}{3})v_n + \frac{h}{3}\left(4t_n^2 + 1 - z_n - e^{t_n} y_n\right) \end{cases}$$

   En utilisant $t_n = nh$ et les conditions initiales, on peut déterminer les valeurs du triplet $(y_{n+1}, z_{n+1}, v_{n+1})$ pour différentes valeurs de n et de h.

— Méthode d'Euler explicite (Plusieurs opérations algébriques pour expliciter Y_{n+1}) : Posons $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, le schéma d'Euler implicite s'écrit ainsi $Y_{n+1} = Y_n + hF(t_{n+1}, Y_{n+1})$. On a donc

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} y_{n+1} & = y_n + hz_{n+1} \\ z_{n+1} & = z_n + h(t_{n+1} + t_{n+1}z_{n+1} - 2v_{n+1}) \\ v_{n+1} & = v_n + \frac{h}{3}\left(4t_{n+1}^2 + 1 - z_{n+1} - e^{t_{n+1}}y_{n+1} - 2v_{n+1}\right) \end{array}\right.$$

En réarrangeant le triplet $(y_{n+1}, z_{n+1}, v_{n+1})$, les composantes de$Y_{n+1}$ s'écrivent ainsi :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y_{n+1} - hz_{n+1} & = y_n \\ (1 - ht_{n+1})z_{n+1} + 2hv_{n+1} & = z_n + ht_{n+1} \\ \frac{he^{t_{n+1}}}{3}y_{n+1} + \frac{h}{3}z_{n+1} + \left(1 + \frac{2}{3}h\right)v_{n+1} & = v_n + \frac{h}{3}\left(4t_{n+1}^2 + 1\right) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ 0 & (1 - ht_{n+1}) & 2h \\ \frac{he^{t_{n+1}}}{3} & \frac{h}{3} & \left(1 + \frac{2}{3}h\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n + ht_{n+1} \\ v_n + \frac{h}{3}\left(4t_{n+1}^2 + 1\right) \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode du Pivot de Gauss ou système de Cramer (déterminant non nul), on trouve facilement les valeurs de $(y_{n+1}, z_{n+1}, v_{n+1})$ en fonction (y_n, z_n, v_n).