

# Approximation par la méthode NXFEM des problèmes d'interface et d'interphase en mécanique des fluides

**Hammou El-Otmany**

sous la direction de D. Capatina\* et D. Graebbling<sup>+</sup>

\* LMAP, UMR CNRS n°5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour

<sup>+</sup> IPREM, UMR CNRS n°5254, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Pau, 9 novembre 2015

# Problématique et démarche

## Problématique

Appréhender l'hémodynamique et la rhéologie du sang à travers le comportement mécanique des globules rouges

## Démarche

- Traitement numérique de l'**interface** entre deux milieux
- Prise en compte de la **membrane fine** du globule rouge
- Modélisation de la membrane par un **liquide viscoélastique**

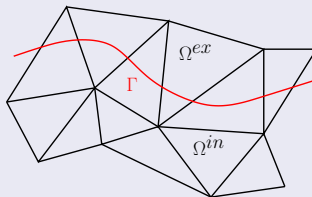


# Fil conducteur : traitement de l'interface

**Méthodes existantes** : maillages adaptés, Level Set, VOF, partition de l'unité, domaines fictifs, frontière immergée (IBM), XFEM, ...

**Méthode NXFEM** (Nitsche's eXtended Finite Element Method)

- introduite par A. Hansbo & P. Hansbo '02 et utilisée pour des approximations conformes
- **but** : prendre en compte une interface ne coïncidant pas avec le maillage
- **principe** :
  - formulation variationnelle avec espaces d'éléments finis standard enrichis (degrés de libertés **doublés** sur les cellules coupées par l'interface)
  - traitement **faible** des conditions de raccord via la **méthode de Nitsche**



# Plan de l'exposé

## ① **Partie I : Problème d'interface**

Extension de NXFEM aux éléments finis non-conformes pour :

- l'équation de Darcy
- le système de Stokes

## ② **Partie II : Problème d'interphase**

Modélisation asymptotique de la couche mince pour :

- l'équation de Darcy
- le système de Stokes
- le modèle de Giesekus

## ③ **Conclusions et perspectives**

# Partie I : Problème d'interface

- ① Méthode NXFEM originale
- ② Extension de NXFEM aux éléments finis non-conformes :
  - modification des fonctions de base sur les triangles coupés
  - rajout des termes de stabilisation
- ③ Équation de Darcy
  - résultats théoriques
  - résultats numériques
- ④ Système de Stokes
  - résultats théoriques
  - résultats numériques

# Méthode NXFEM originale

## Problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) = f & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u}] = g & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

$\mu > 0$  coefficient discontinu :  $\mu = \mu_{in}$  dans  $\Omega^{in}$ ,  $\mu = \mu_{ex}$  dans  $\Omega^{ex}$

## Notations

Saut et moyennes pondérées sur  $\Gamma$  :

$$[\phi] = \phi^{in} - \phi^{ex}, \quad \{\phi\} = k^{ex} \phi^{ex} + k^{in} \phi^{in}, \quad \{\phi\}_* = k^{in} \phi^{ex} + k^{ex} \phi^{in}$$

avec  $0 < k^{in}, k^{ex} < 1$  et  $k^{in} + k^{ex} = 1$

## Problème discret

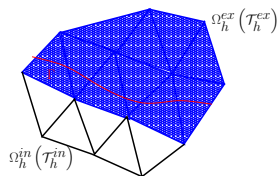
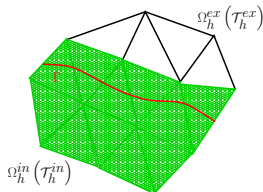
$$u_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex}, \quad a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h^{in} \times W_h^{ex}$$

## Formes bilinéaire et linéaire, espace $P^1$ -conforme

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n u_h\} [v_h] - \int_{\Gamma} \{\mu \nabla_n v_h\} [u_h] \\ + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [u_h] [v_h], \quad (\lambda > 0)$$

$$l_h(v_h) := \int_{\Omega} f v_h + \int_{\Gamma} g \{v_h\}_*$$

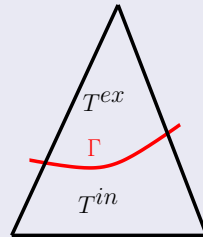
$$W_h^i := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_h^i); \varphi|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad i = in, ex$$



## Choix de paramètres

Methode **robuste** par rapport à la géométrie et aux coefficients de diffusion  
(Becker et al.'12, Annavarapu et al.'12, Hansbo et al.'12)

$$k^{in} = \frac{\mu^{ex}|T^{in}|}{\mu^{ex}|T^{in}| + \mu^{in}|T^{ex}|}, \quad k^{ex} = \frac{\mu^{in}|T^{ex}|}{\mu^{ex}|T^{in}| + \mu^{in}|T^{ex}|}$$
$$\lambda_T = \frac{\mu^{in}\mu^{ex}|T|}{\mu^{in}|T^{ex}| + \mu^{ex}|T^{in}|}$$



## Notre objectif : développer NXFEM pour éléments finis non-conformes

- stencil petit
- inf-sup stables pour les équations de Stokes
- localement conservatifs
- approximation robuste du modèle viscoélastique de Giesekus  
(Thèse de J. Joie, Université de Pau '10)

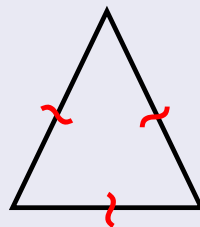


# Extension de NXFEM aux éléments finis non-conformes

## Éléments finis non-conformes de Crouzeix-Raviart

- fonctions de base :  $\varphi_i = 1 - 2\lambda_i$   
avec  $\lambda_i$  coordonnées barycentriques
- opérateur d'interpolation locale :

$$I_T v = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{|e_i|} \int_{e_i} v ds \right) \varphi_i$$



## Notations

- $\mathcal{E}_h^i$  : ensembles des arêtes de  $\mathcal{T}_h^i$  ( $i = in, ex$ )
- $\mathcal{E}_h^{i,cut}$  : ensembles des arêtes coupées et contenues dans  $\Omega^i$  ( $i = in, ex$ )
- $\mathcal{T}_h^\Gamma$  : ensemble des triangles coupés

## Difficulté de l'extension

- **Cas conforme** : opérateur d'interpolation  $(L_h^{in}, L_h^{ex})$  dans  $W_h^{in} \times W_h^{ex}$

$$v|_{\Omega^i} \longrightarrow E^i v|_{\Omega} \longrightarrow (L_h \circ E^i) v|_{\Omega} \longrightarrow (L_h \circ E^i) v|_{\Omega_h^i} =: L_h^i v, \quad i = in, ex.$$

- **Cas non-conforme** :  $W_h^i$  remplacé par

$$V_h^i = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega_h^i); \varphi|_T \in P^1, \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \int_e [\varphi] = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^i \right\}$$

Alors

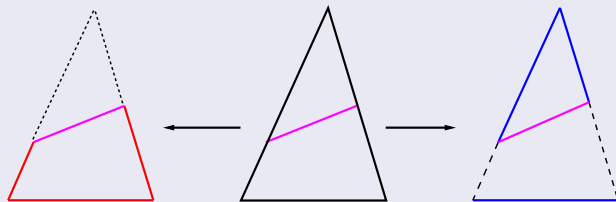
$$\int_e I_h^{*i} v \neq \int_e v, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^{i, cut} \quad i = in, ex$$

$\rightsquigarrow$  problème pour estimer l'erreur de consistance sur les **arêtes coupées**

$$\sum_{i=in, ex} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}} \int_e \mu \nabla_n u [v_h]$$

## Solutions proposées

- Modification des fonctions de base sur les triangles coupés



$$u_h \in \tilde{V}_h^{in} \times \tilde{V}_h^{ex}, \quad a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h^{in} \times \tilde{V}_h^{ex}$$

- Rajout de termes de **stabilisation** sur les **arêtes coupées**

$$u_h^\delta \in V_h^{in} \times V_h^{ex}, \quad (a_h + A_h + \sum_{i=in,ex} \delta^i J_h^i) (u_h^\delta, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^{in} \times V_h^{ex}$$

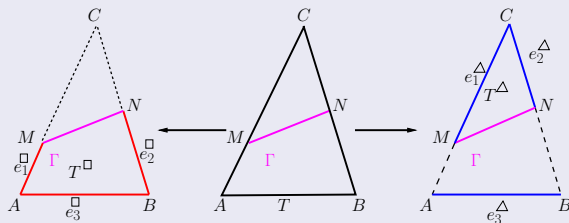
$\implies$  compensation de l'erreur de consistance sur les arêtes coupées !

# Modification des fonctions de base sur les triangles coupés

## Idée

On suppose que  $\Gamma$  est un segment.

Soit  $T = (ABC) \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ . On note  $\frac{|AM|}{|AC|} = \alpha$ ,  $\frac{|BN|}{|BC|} = \beta$  avec  $0 < \alpha, \beta < 1$ .



On construit  $\varphi_j^\Delta, \varphi_j^\square \in P_1(T)$  tels que

$$\frac{1}{|e_k^i|} \int_{e_k^i} \varphi_j^i = \delta_{jk} \quad (i = \square, \Delta; 1 \leq j, k \leq 3)$$

$$\rightsquigarrow \int_e I_h^i v = \int_e v, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^{i, cut}$$

## Expression de nouvelles fonctions de base

$$\varphi_1^\square = \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_1 + \frac{1 - \beta}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_2,$$

$$\varphi_2^\square = \frac{1 - \alpha}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_1 + \frac{1}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_2,$$

$$\varphi_3^\square = \frac{-(1 - \alpha)(2 - \beta)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_1 - \frac{(2 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \varphi_2 + \varphi_3$$

- pour  $(\varphi_j^\Delta)_{1 \leq j \leq 3}$  : on remplace  $(\alpha, \beta)$  par  $(\alpha - 1, \beta - 1)$
- $(T, P^1, \Sigma^\square)$  et  $(T, P^1, \Sigma^\Delta)$  sont des éléments finis

## Proposition (majoration des fonctions de base)

Pour tout  $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$ , il existe  $C > 0$  indépendante de  $T$  et de  $\Gamma$  telle que

$$\sum_{j=1}^3 |\varphi_j^\square|_{1,T^\square} \leq \frac{C}{1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)} \sqrt{\frac{|T^\square|}{|T|}}, \quad \sum_{j=1}^3 |\varphi_j^\Delta|_{1,T^\Delta} \leq \frac{C}{1 - \alpha\beta} \sqrt{\frac{|T^\Delta|}{|T|}}.$$

## Robustesse par rapport à la position de l'interface

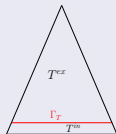
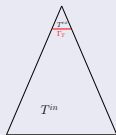
- $\Gamma_T$  segment :  $\frac{|T^\square|}{|T|} = 1 - (1 - \alpha)(1 - \beta)$ ,  $\frac{|T^\Delta|}{|T|} = (1 - \alpha)(1 - \beta)$
- si au moins un paramètre  $\alpha, \beta$  ne tend pas vers 0 ou 1, ou si  $(\alpha, \beta) \rightarrow (0, 1)$  ou  $(\alpha, \beta) \rightarrow (1, 0)$ , alors :

$$\sum_{j=1}^3 |\varphi_j^i|_{1,T^i} \leq C, \quad \sum_{j=1}^3 \|\varphi_j^i\|_{0,T^i} \leq Ch_T, \quad i = \square, \Delta \quad (1)$$

avec  $C$  indépendante de l'interface.

- si  $\alpha = \beta \rightarrow 1$ , alors comportement singulier de  $\varphi^\Delta$  sur  $T^\Delta$ .  
Comme  $|T^\Delta| = (1 - \alpha)^2 |T| \implies$  (??) est encore vérifiée.
- si  $\alpha = \beta \rightarrow 0$ , alors comportement singulier de  $\varphi^\square$  sur  $T^\square$ .  
Comme  $|T^\square| \simeq \alpha |T|$ , on obtient

$$\sum_{j=1}^3 |\varphi_j^\square|_{1,T^\square} \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}}, \quad \sum_{j=1}^3 \|\varphi_j^\square\|_{0,T^\square} \leq \frac{Ch_T}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2)$$



## Nouvel espace d'approximation $\tilde{V}_h$

- sur  $T$  coupé :  $\tilde{V}_h^i$  généré par  $(\varphi_j^\square)$  si  $T^i = T^\square$ , respectivement par  $(\varphi_j^\Delta)$  si  $T^i = T^\Delta$
- norme sur  $\tilde{V}_h = \tilde{V}_h^{in} \times \tilde{V}_h^{ex}$  :

$$|||v|||^2 := \sum_{i=in,ex} \|\mu^{1/2} \nabla v\|_{0,\Omega^i}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T} \|\{\mu \nabla_n v\}\|_{0,\Gamma_T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [v] \|_{0,\Gamma_T}^2$$

## Formulation variationnelle discrète

$$u_h \in \tilde{V}_h, \quad a_h(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in \tilde{V}_h$$

## Propriétés

- $a_h(\cdot, \cdot)$  est (uniformt.) continue et coercive sur  $\tilde{V}_h \times \tilde{V}_h$  pour  $\lambda$  suffisamment grand
- existence et unicité de la solution (Lemme de Lax-Milgram)
- estimation d'erreur a priori (Lemme de Strang) :

$$|||u - u_h||| \leq C \left( \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} |||u - v_h||| + \sup_{w_h \in \tilde{V}_h} \frac{|a_h(u - u_h, w_h)|}{|||w_h|||} \right)$$

# Erreur d'interpolation en norme énergie

Lemme (Erreur  $H^1$  sur les cellules coupées)

Soient  $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$  et  $v \in H^2(T^i)$ ,  $i = in, ex$ . Il existe  $C > 0$  indépendante de  $h_T$  telle que :

$$|v - I_h^i v|_{1,T^i} \leq Ch_T \left( \sum_{j=1}^3 |\varphi_j^k|_{1,T^i} \right) |E^i v|_{2,T}, \quad \|v - I_h^i v\|_{0,T^i} \leq Ch_T \left( \sum_{j=1}^3 \|\varphi_j^k\|_{0,T^i} \right) |E^i v|_{2,T}$$

avec  $k = \square$  si  $T^i = T^\square$  et  $k = \triangle$  si  $T^i = T^\triangle$ .

## Étapes de la preuve

- Passage à l'élément de référence  $\hat{T}$ ,  $\widehat{I_h^i v} = \hat{I}_h^i \hat{v}$ , théorème de Sobolev sur  $\hat{T}$  et

$$|\hat{I}_h^i \hat{v}|_{1,\hat{T}^i} \leq c \left( \sum_{j=1}^3 |\hat{\varphi}_j^k|_{1,\hat{T}^i} \right) \sup_{x \in \hat{T}^i} |\hat{v}(x)| \leq c \left( \sum_{j=1}^3 |\hat{\varphi}_j^k|_{1,\hat{T}^i} \right) \|\hat{E}^i \hat{v}\|_{C^0(\hat{T})} \leq c \left( \sum_{j=1}^3 |\hat{\varphi}_j^k|_{1,\hat{T}^i} \right) \|\hat{E}^i \hat{v}\|_{2,\hat{T}}$$

- estimation via le Lemme de Bramble-Hilbert de :  $|\hat{v} - \hat{I}_h^i \hat{v}|_{1,\hat{T}^i}, \|\hat{v} - \hat{I}_h^i \hat{v}\|_{0,\hat{T}^i}$



En conclusion :

$$|v - I_h^i v|_{1,T^i} \leq Ch_T |E^i v|_{2,T}, \quad \|v - I_h^i v\|_{0,T^i} \leq Ch_T^2 |E^i v|_{2,T},$$

avec

- $\alpha = \beta \longrightarrow 0 : C \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$
- dans les autres cas :  $C \simeq 1$

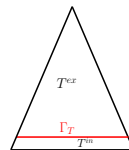


Fig. 1 – Cas critique

### Lemme (Erreur de type $H^{-1/2}$ sur $\Gamma$ )

Soient  $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$  et  $v^i \in H^2(T^i)$ . Il existe  $c > 0$  indépendante de  $h$ ,  $v$  et  $\Gamma$  telle que :

$$\sqrt{\frac{|\Gamma_T|}{\lambda_T h_T}} \|\{\mu \nabla_n(v - I_h v)\}\|_{0,\Gamma_T} \leq ch_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v^i|_{2,T}.$$

## Lemme (Erreur " $H^{1/2}$ " sur $\Gamma$ )

Soient  $T \in \mathcal{T}_h^\Gamma$  et  $v^i \in H^2(T^i)$ . Il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $\mu$  telle que :

$$\lambda_T^{1/2} \|[v - I_h v]\|_{0,\Gamma_T} \leq Ch_T \sum_{i=in,ex} |\mu_i^{1/2} E^i v^i|_{2,T}.$$

## Dépendance de $C$ par rapport à l'interface

- En majorant  $\lambda_T = \frac{|\Gamma_T|}{\frac{|T^{in}|}{\mu_{in}} + \frac{|T^{ex}|}{\mu_{ex}}} \leq \frac{|\Gamma_T| \mu_i}{|T^i|}$ , on obtient :
  - si  $\alpha \rightarrow 1$  et  $\beta \not\rightarrow 1$  ou si  $\alpha = \beta \rightarrow 1$ , alors  $C \simeq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$  (EF conformes :  $C \simeq \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ )
  - si  $\alpha = \beta \rightarrow 0$  alors  $C \simeq \frac{1}{\alpha}$  (EF conformes :  $C \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ )
  - dans les autres cas,  $C$  indépendante de  $\alpha$  et  $\beta$
- En majorant  $\lambda_T \leq \frac{|\Gamma_T|}{|T|} \max\{\mu_{in}, \mu_{ex}\}$ , on améliore la dépendance par rapport à  $\Gamma$   
... mais  $C$  dépend du **rapport** des coefficients  $\mu_i$  !  
Ceci est indépendant du choix des éléments finis (conformes ou non-conformes).

En rassemblant les résultats précédents, on a :

### Théorème (estimation d'erreur d'interpolation)

Il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $\mu$  telle que

$$|||v - I_h v||| \leq Ch |\mu^{1/2} v|_{2, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega^{ex} \cup \Omega^{in}).$$

Grâce aux propriétés de l'opérateur d'interpolation, on majore l'erreur de consistance. On obtient :

### Estimation d'erreur a priori

Soit  $(u^{in}, u^{ex}) \in H^2(\Omega^{in}) \times H^2(\Omega^{ex})$ . Il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  :

$$|||u - u_h||| \leq Ch |\mu^{1/2} u|_{2, \Omega^{ex} \cup \Omega^{in}}.$$

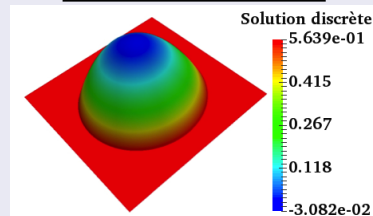
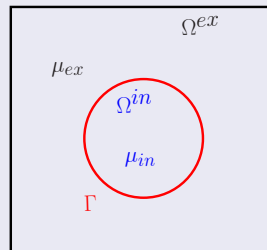
# Résultats numériques

## Cas-test de référence (Hansbo & Hansbo '02)

- $\Omega = ]-1; 1[ \times ]-1; 1[$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $r_0 = 3/4$
- $\mu_{in} = 1$ ,  $\mu_{ex} = 10^3$
- conditions de bord de Dirichlet (traitées avec la méthode de Nitsche)
- solution exacte :

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{r^2}{\mu_{in}} & \text{si } r \leq r_0 \\ \frac{r^2 - r_0^2}{\mu_{ex}} + \frac{r_0^2}{\mu_{in}} & \text{si } r > r_0, \end{cases}$$

- paramètres de stabilisation :  $\lambda = 100$ ,  $\lambda_D = 100$



## Implémentation dans la librairie CONCHA C++

- cas conforme : thèse de N. Barrau (Université de Pau '13)
- cas non-conforme : deux approches

### Éléments finis non-conformes

$N$	$   u - u_h   $	ordre	$  u - u_h  _{0,\Omega}$	ordre
64	$3,43 \cdot 10^{-1}$	—	$3,13 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,53 \cdot 10^{-1}$	1,163	$5,40 \cdot 10^{-3}$	2,533
1 024	$7,61 \cdot 10^{-2}$	1,007	$1,28 \cdot 10^{-3}$	2,077
4 096	$3,79 \cdot 10^{-2}$	1,007	$3,20 \cdot 10^{-4}$	2,003
1 6384	$1,87 \cdot 10^{-2}$	1,021	$7,63 \cdot 10^{-5}$	2,066
65 536	$9,31 \cdot 10^{-3}$	1,007	$1,90 \cdot 10^{-5}$	2,010

### Éléments finis conformes

$N$	$   u - u_h   $	ordre	$  u - u_h  _{0,\Omega}$	ordre
64	$3,45 \cdot 10^{-1}$	—	$1,500 \cdot 10^{-2}$	—
256	$1,68 \cdot 10^{-1}$	1,035	$6,27 \cdot 10^{-3}$	2,176
1 024	$8,03 \cdot 10^{-2}$	1,063	$1,41 \cdot 10^{-3}$	2,153
4 096	$3,95 \cdot 10^{-2}$	1,021	$3,38 \cdot 10^{-4}$	2,060
16 384	$1,97 \cdot 10^{-2}$	1,007	$8,21 \cdot 10^{-5}$	2,039
65 536	$9,82 \cdot 10^{-2}$	1	$2,02 \cdot 10^{-5}$	2,021

Convergence lors du raffinement de maillage

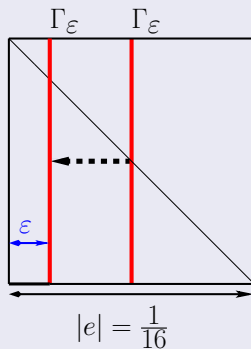
# Robustesse par rapport à la position de $\Gamma$

## Cas-test de référence (*Hansbo & Hansbo '02*)

- $\Omega = ]0; 1[ \times ]0; 1[$
- maillage fixe avec  $N = 512$  éléments
- $\Gamma_\varepsilon := x_\varepsilon \times [0, 1]$  où  $x_\varepsilon = \frac{1}{16} + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )
- $\alpha_\varepsilon = \beta_\varepsilon = 16\varepsilon$
- conditions de bord de Dirichlet
- solution exacte :

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\mu_{in}} & \text{si } x \leq x_\varepsilon \\ \frac{x^2 - x_\varepsilon^2}{\mu_{ex}} + \frac{x_\varepsilon^2}{\mu_{in}} & \text{si } x > x_\varepsilon \end{cases}$$

- paramètres de stabilisation :  $\lambda = \lambda_D = 100$
- on bouge l'interface  $\Gamma_\varepsilon$  de  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-1}$  à  $10^{-4}$



## Normes

$$|u - u_h|_*^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\mu^{1/2} \nabla(u - u_h)\|_{0,T}^2, \quad \|u - u_h\|_*^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|u - u_h\|_{0,T}^2, \quad \|u - u_h\|_\lambda^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \lambda_T \| [u - u_h] \|_{0,T}^2$$

## Erreurs sur les triangles coupés et erreurs globales

$\alpha_\varepsilon$	$ u - u_h _*$	$\ u - u_h\ _*$	$\ u - u_h\ _\lambda$	$   u - u_h   $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$
$5 \cdot 10^{-1}$	$9,498 \cdot 10^{-3}$	$2,920 \cdot 10^{-4}$	$2,521 \cdot 10^{-3}$	$1,134 \cdot 10^{-1}$	$2,357 \cdot 10^{-3}$
$10^{-1}$	$1,247 \cdot 10^{-2}$	$4,244 \cdot 10^{-4}$	$3,508 \cdot 10^{-3}$	$1,137 \cdot 10^{-1}$	$2,372 \cdot 10^{-3}$
$10^{-2}$	$1,376 \cdot 10^{-2}$	$4,722 \cdot 10^{-4}$	$4,035 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-1}$	$2,380 \cdot 10^{-2}$
$10^{-3}$	$1,390 \cdot 10^{-2}$	$4,773 \cdot 10^{-4}$	$4,093 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-1}$	$2,381 \cdot 10^{-2}$
$10^{-4}$	$1,392 \cdot 10^{-2}$	$4,778 \cdot 10^{-4}$	$4,099 \cdot 10^{-3}$	$1,139 \cdot 10^{-1}$	$2,381 \cdot 10^{-2}$

Variation de la position de  $\Gamma_\varepsilon$  :  $\mu_{in} = 1$  ;  $\mu_{ex} = 10$

## Erreurs sur les triangles coupés et erreurs globales

$\alpha_\varepsilon$	$ u - u_h _*$	$\ u - u_h\ _*$	$\ u - u_h\ _\lambda$	$   u - u_h   $	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$
$5 \cdot 10^{-1}$	$1,561 \cdot 10^{-2}$	$6,553 \cdot 10^{-4}$	$6,987 \cdot 10^{-3}$	$3,387 \cdot 10^{-1}$	$2,399 \cdot 10^{-2}$
$10^{-1}$	$3,559 \cdot 10^{-2}$	$2,338 \cdot 10^{-3}$	$1,229 \cdot 10^{-2}$	$3,403 \cdot 10^{-1}$	$2,393 \cdot 10^{-2}$
$10^{-2}$	$4,080 \cdot 10^{-2}$	$2,890 \cdot 10^{-3}$	$1,388 \cdot 10^{-2}$	$3,409 \cdot 10^{-1}$	$2,396 \cdot 10^{-2}$
$10^{-3}$	$4,133 \cdot 10^{-2}$	$2,949 \cdot 10^{-3}$	$1,405 \cdot 10^{-2}$	$3,410 \cdot 10^{-1}$	$2,397 \cdot 10^{-2}$
$10^{-4}$	$4,139 \cdot 10^{-2}$	$2,955 \cdot 10^{-3}$	$1,407 \cdot 10^{-2}$	$3,410 \cdot 10^{-1}$	$2,397 \cdot 10^{-2}$

Variation de la position de  $\Gamma_\varepsilon$  : coefficients **fortement discontinus**  $\mu_{in} = 0,1$  ;  $\mu_{ex} = 10^5$



# Système de Stokes

## Problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(\mu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ [\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}] = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

avec des coefficients discontinus  $\mu = \mu_{in}$  dans  $\Omega^{in}$ ,  $\mu = \mu_{ex}$  dans  $\Omega^{ex}$

## Formulation variationnelle mixte

$$(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$$

## NXFEM pour le système de Stokes : état de l'art

Approximation par éléments finis **conformes stabilisés** :

- *Becker et al. '08* :  $(P^1)^2 \times P^0$ 
  - stabilisation par le saut de pression sur les arêtes intérieures
- *Burman & Hansbo '07 ; Massing et al. '12* :  $(P^1)^2 \times P^1$ 
  - stabilisation de type gradient pour la vitesse et la pression sur les arêtes coupées
- *Hansbo et al. '14* :  $(P^1 \oplus B_3)^2 \times P^1$ 
  - stabilisation de type gradient pour la vitesse et la pression sur les arêtes coupées

## Notre approche : NXFEM avec éléments finis non-conformes

Difficulté **supplémentaire** : condition *inf-sup* pour le problème mixte

Solutions proposées :

- modification des fonctions de Crouzeix-Raviart sur les triangles coupés
- rajout de termes de stabilisation (de type dG) sur les arêtes coupées

# Modification des fonctions de Crouzeix-Raviart

## Problème mixte discret

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_h, p_h) \in \tilde{\mathbf{V}}_h \times Q_h, \\ a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(p_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h \\ b_h(q_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := & \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T \mu \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\Gamma} \{ \mu \nabla_n \mathbf{u}_h \} \cdot [\mathbf{v}_h] \, ds \\ & - \int_{\Gamma} \{ \mu \nabla_n \mathbf{v}_h \} \cdot [\mathbf{u}_h] \, ds + \lambda \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \lambda_T \int_{\Gamma_T} [\mathbf{u}_h] \cdot [\mathbf{v}_h] \, ds, \end{aligned}$$

$$b_h(p_h, \mathbf{v}_h) := - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{in} \cup \mathcal{T}_h^{ex}} \int_T p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, dx + \int_{\Gamma} \{ p_h \} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] \, ds$$

$$Q_h^i := \{ q \in L_0^2(\Omega^i); q|_T \in P^0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h^i \}$$

$$Q_h = Q_h^{in} \times Q_h^{ex} \text{ muni de la norme : } \|q\|_Q^2 = \sum_{i=in,ex} \|\mu_i^{-1/2} q\|_{0,\Omega^i}^2$$

## Propriétés

- $a_h(\cdot, \cdot), b_h(\cdot, \cdot)$  uniformément continues sur  $\tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$  et  $Q_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$  respectivement
- $a_h(\cdot, \cdot)$  est uniformt. coercive sur  $\tilde{\mathbf{V}}_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$  pour  $\lambda$  suffisamment grand (cf. cas Darcy)
- **Point clé** : condition *inf-sup* de  $b_h(\cdot, \cdot)$  sur  $Q_h \times \tilde{\mathbf{V}}_h$

$$\exists C > 0 : \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{b_h(p_h, \mathbf{v}_h)}{\|p_h\|_Q \|\mathbf{v}_h\|} \geq C, \quad \forall p_h \in Q_h.$$

## Résultats obtenus

- problème discret bien posé (Théorème de Babuska-Brezzi )
- estimation d'erreur a priori optimale :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|p - p_h\|_Q \leq Ch \sum_{i=in,ex} \left( |\mu_i^{1/2} \mathbf{u}|_{2,\Omega^i} + |\mu_i^{-1/2} p|_{1,\Omega^i} \right).$$

# Résultats numériques

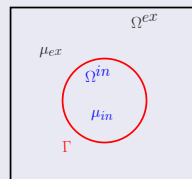
## Cas-test académique *Becker et al. '08*

- $\Omega = ]0; 1[ \times ]0; 1[$ ,  $\Gamma$  cercle de centre  $(0,5; 0,5)$  et rayon  $0,25$
- solution exacte en coordonnées polaires :

$$u_r = \begin{cases} c_{in} r & \text{dans } \Omega^{in} \\ (r - \frac{b^2}{r})c_{ex} + \frac{b^2}{r} & \text{dans } \Omega^{ex} \end{cases}, \quad u_\theta = 0, \quad p = \begin{cases} -2c_{in}\lambda_{in} & \text{dans } \Omega^{in} \\ -2c_{ex}\lambda_{ex} & \text{dans } \Omega^{ex} \end{cases}$$

où les constantes  $c_i$  dépendent des coefficients de Lamé

- conditions de bord de Dirichlet
- paramètres de stabilisation :  $\lambda = \lambda_D = 100$



## Convergence lors du raffinement de maillage

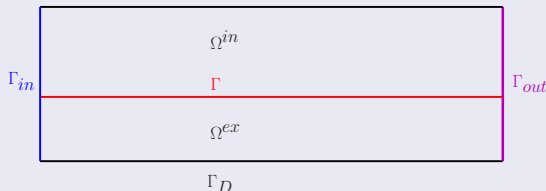
$N$	$\ p - p_h\ _{0,\Omega}$	ordre	$   u - u_h   $	ordre	$\ u - u_h\ _{0,\Omega}$	ordre
64	0,900	—	5,270	—	$3,11 \cdot 10^{-1}$	—
256	0,440	1,028	3,090	0,773	$1,05 \cdot 10^{-1}$	1,565
1 024	0,830	1,298	1,490	1,049	$2,50 \cdot 10^{-2}$	2,070
4 096	0,373	1,150	0,735	1,021	$5,97 \cdot 10^{-3}$	2,063
16 384	0,177	1,077	0,364	1,014	$1,45 \cdot 10^{-3}$	2,046

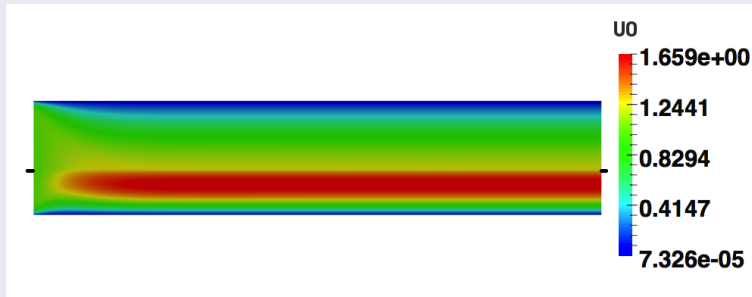
## Autre cas-test : écoulement de Poiseuille bi-phasique

- $\Omega = [0; 0,1] \times [-0,01; 0,01]$
- interface  $\Gamma$  d'équation  $y = -0,002\text{m}$
- $\mu_{in} = 100 \text{ Pa.s}$ ,  $\mu_{ex} = 10 \text{ Pa.s}$
- à l'entrée  $\Gamma_{in}$  :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 1 - e^{-k(y+0,01)} & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{k(y-0,01)} & \text{si } y > 0 \end{cases}, \quad k = 2000$$

- à la sortie  $\Gamma_{out}$  : condition de Neumann homogène
- condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_D$ ,  $\lambda = \lambda_D = 100$
- sur l'interface  $\Gamma$ , conditions de raccord :  $[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ ,  $[\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n}] = 0$





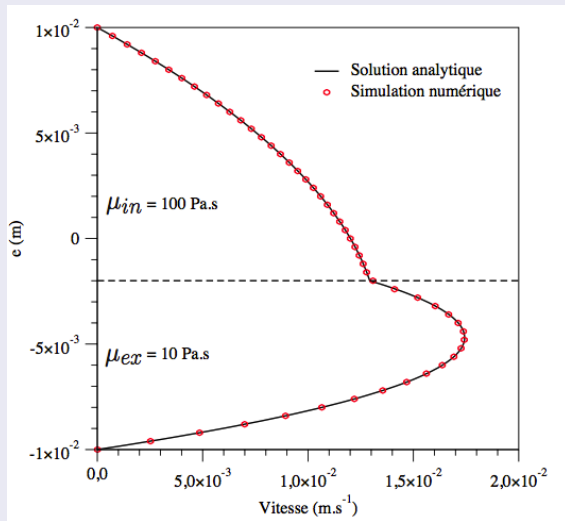
Première composante de la vitesse



Pression

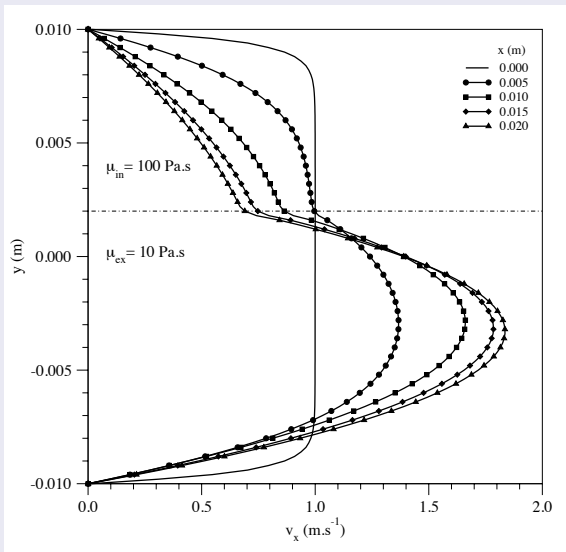


## Comparaison avec solution analytique en écoulement développé

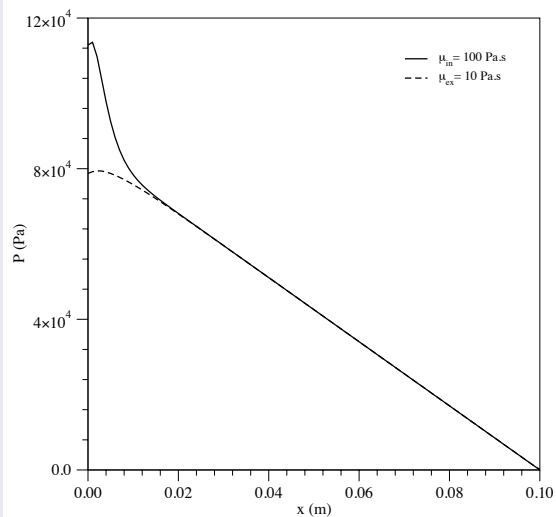


Profils de vitesse suivant la droite  $x = 0,05 \text{ m}$

## Profils de vitesse et de pression



Vitesse dans la zone de transition



Pression

# Partie II : Problème d'interphase

- ① Modélisation asymptotique de la couche mince
  - interface droite
  - interface courbe
- ② Équation de Darcy
  - dérivation du problème limite
  - NXFEM pour le problème limite
  - résultats numériques
- ③ Système de Stokes
  - dérivation du problème limite
- ④ Modèle de Giesekus dans la membrane
  - dérivation formelle du problème limite

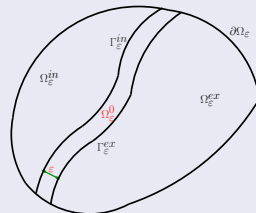
# Equations de Darcy

## Problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot (K \nabla \tilde{u}_\varepsilon) &= \tilde{f} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^0 \cup \Omega_\varepsilon^{ex} \\ \tilde{u}_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ [\tilde{u}_\varepsilon] &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \\ [K \nabla \tilde{u}_\varepsilon \cdot n] &= \tilde{g} \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \end{array} \right.$$

où  $K$  est un **tenseur** symétrique, défini positif et où

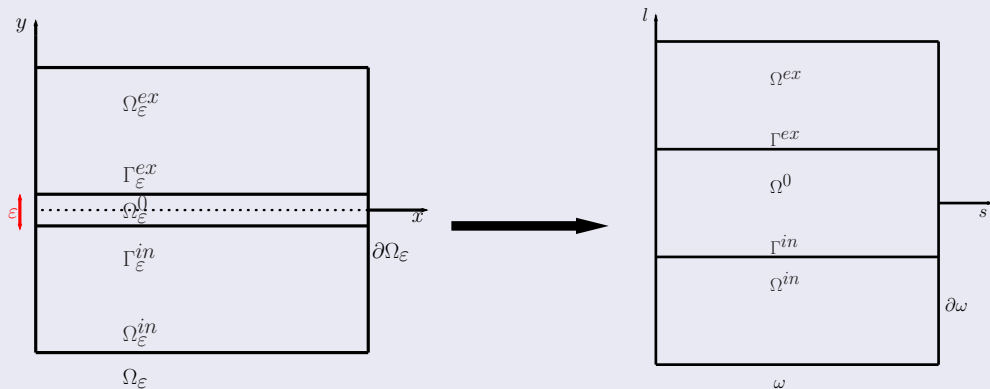
$$K = \begin{cases} K^{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \\ K_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^0 \\ K^{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex} \end{cases}, \quad K_\varepsilon^0 = \frac{1}{\varepsilon} K^0$$



# Modélisation asymptotique

Hypothèses :  $\Gamma = [0, 1]$  est une courbe moyenne **rectiligne**

## Changement de variables



Domaines  $(x, y)$

Nouveaux domaines  $(s, l)$

Dans  $\Omega^0$  :  $\partial_x \tilde{v} = \partial_s v$ ,  $\partial_y \tilde{v} = \frac{1}{\epsilon} \partial_l v$ ,  $dx dy = \epsilon ds dl$

## Formulation variationnelle

$$u_\varepsilon \in V, \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V \quad \text{où } V = H_0^1(\omega)$$

$$a_\varepsilon(u, v) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} K^i \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega^0} \left( K_{11}^0 \partial_s u \partial_s v + \frac{1}{\varepsilon} K_{12}^0 (\partial_s u \partial_l v + \partial_l u \partial_s v) + \frac{1}{\varepsilon^2} K_{22}^0 \partial_l u \partial_l v \right)$$

$$l_\varepsilon(v) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} f^i v + \sum_{i=in,ex} \int_{\Gamma^i} g^i v + \int_{\Omega^0} \varepsilon f^0 v = l_0(v) + \varepsilon l_1(v)$$

## Convergence faible de $u_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

- point clé : coercivité **uniforme** :  $a_\varepsilon(v, v) \geq c \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V$

- $\|\nabla u_\varepsilon\|_{0, \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}} + \|\partial_s u_\varepsilon\|_{0, \Omega^0} + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_l u_\varepsilon\|_{0, \Omega^0} \leq C$

$$\implies u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } V \text{ et } \frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon \rightharpoonup w_0 \text{ dans } L^2(\Omega^0)$$

$$\partial_l u_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega^0) \text{ et } \partial_l u_0 = 0 \text{ p.p.t. dans } \Omega^0$$

- $\int_{\Omega^0} \left( K_{12}^0 \partial_s u_0 + K_{22}^0 w_0 \right) \partial_l v = 0, \quad \forall v \in V \implies w_0(s, l) = -\frac{K_{12}^0(s, l)}{K_{22}^0(s, l)} \partial_s u_0(s, 0) \text{ p.p.t.}$

### Proposition (convergence forte)

On a  $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u_0$  dans  $L^2(\omega)$  et  $\frac{1}{\varepsilon} \partial_l u_\varepsilon \rightarrow w_0$  dans  $L^2(\Omega^0)$ .

### Formulation variationnelle du problème limite

$$u_0 \in V_0, \quad a_0(u_0, v) = l_0(v), \quad \forall v \in V_0$$

$$V_0 = \left\{ v \in V; \partial_l v = 0 \text{ in } \Omega^0 \right\}$$

$$a_0(u, v) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} K^i \nabla u \cdot \nabla v \, ds \, dl + \int_{\Gamma} \alpha_0(s) \partial_s u \partial_s v \, ds$$

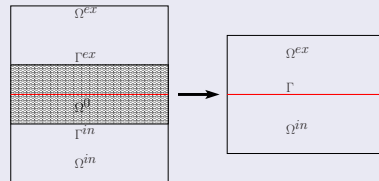
$$\alpha_0(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \kappa^0 \, dl, \quad \kappa^0(s, l) = \frac{\det K^0(s, l)}{K_{22}^0(s, l)}$$

Problème bien posé par rapport à :  $\|v\|_*^2 = \sum_{i=in,ex} \|(K^i)^{1/2} \nabla v\|_{0,\Omega^i}^2 + \|\alpha_0^{1/2} \partial_s v\|_{0,\Gamma}^2$

On translate  $\Gamma^{in}$  et  $\Gamma^{ex}$  :  $\Gamma^{in}, \Gamma^{ex} \rightsquigarrow \Gamma$ ,  $\Omega^{in} \rightsquigarrow \Gamma \times ]-1, 0[$ ,  $\Omega^{ex} \rightsquigarrow \Gamma \times ]0, 1[$

## Modèle asymptotique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\nabla \cdot (K \nabla u_0) & = & f \quad \text{in } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex} \\ u_0 & = & 0 \quad \text{on } \partial\Omega \\ [u_0] & = & 0 \quad \text{on } \Gamma \\ [K \nabla u_0 \cdot n] - \partial_s(\alpha_0 \partial_s u_0) & = & g \quad \text{on } \Gamma \end{array} \right.$$



## Remarques

- si  $K^0$  est **diagonal** : même modèle que dans *Huy & Sánchez-Palencia '74*
- **mêmes** conditions pour une interface **courbe** :  $[K \nabla u_0 \cdot \mathbf{n}] - \partial_\tau(\alpha_0 \partial_\tau u_0) = g$
- si  $[\tilde{u}_\varepsilon] = \tilde{\chi}$  sur  $\Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex}$ , les conditions sur  $\Gamma$  deviennent :

$$[u_0 - \chi] = 0, \quad [K \nabla u_0 \cdot n] - \partial_\tau(\alpha_0 \partial_\tau(u_0 - \chi)) = g$$



# NXFEM pour le modèle asymptotique

## Objectif

Développement d'une méthode numérique de type NXFEM **stable** et **consistante**

On considère des éléments finis **conformes** ( extension naturelle aux EF non-conformes).

## Consistance

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) - l(v_h) &= \int_{\Gamma} \partial_{\tau}(\alpha \partial_{\tau}(u - \chi)) \{v_h\}_* \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_{\Gamma_T} \alpha \partial_{\tau}(u - \chi) \partial_{\tau} \{v_h\}_* + \sum_{N \in \mathcal{N}_h^{\Gamma}} (\alpha \partial_{\tau}(u - \chi))(N) [\{v_h\}_*]_N \end{aligned}$$

- $\{v_h\}_*$  est **discontinu le long de  $\Gamma$**  à cause des poids  $k^{in}, k^{ex}$
- $[u - \chi] = 0$  implique  $\partial_{\tau}(u - \chi) = \{\partial_{\tau}(u - \chi)\} = \{\partial_{\tau}(u - \chi)\}_*$  sur  $\Gamma$
- $\mathcal{N}_h^{\Gamma}$  = ensemble des noeuds d'intersection entre  $\Gamma$  et arêtes
- $K^i$  supposé diagonal,  $\alpha$  supposé constant par morceaux

## Formes bilinéaire et linéaire

$$A_h(u_h, v_h) = a_h(u_h, v_h) + a_h^\Gamma(u_h, v_h), \quad L_h(v_h) = l(v_h) + a_h^\Gamma(\chi, v_h)$$

$$a_h^\Gamma(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \alpha \partial_\tau \{u_h\}_* \partial_\tau \{v_h\}_* + \delta \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N [\{u_h\}_*]_N [\{v_h\}_*]_N \\ - \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \left( \{\alpha \partial_\tau \{u_h\}_*\}_N [\{v_h\}_*]_N + \{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}_N [\{u_h\}_*]_N \right)$$

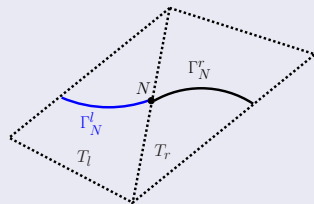
## Moyenne et saut aux noeuds $N \in \mathcal{N}_h^\Gamma$

$$[\varphi]_N = \varphi^l - \varphi^r, \quad \{\varphi\}_N = \nu_N^l \varphi^l + \nu_N^r \varphi^r$$

$$\nu_N^l = \frac{\alpha_N^r |\Gamma_N^l|}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}, \quad \nu_N^r = \frac{\alpha_N^l |\Gamma_N^r|}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}$$

$$\delta_N = \frac{\alpha_N^l \alpha_N^r}{\alpha_N^r |\Gamma_N^l| + \alpha_N^l |\Gamma_N^r|}, \quad \delta > 0$$

$\alpha_N^j$  est la valeur de  $\alpha$  sur  $\Gamma_N^j$  pour  $j = l, r$ .



## Problème discret

$$u_h \in W_h, \quad A_h(u_h, v_h) = L_h(v_h), \quad \forall v_h \in W_h$$

## Résultats obtenus

- norme :  $\|\varphi\|_h^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{\varphi\}_* \|_{0,\Gamma^T}^2 + \sum_{N \in \mathcal{N}_h^\Gamma} \delta_N [\{\varphi\}_*]_N^2$
- continuité de  $u - \chi$  à travers  $\Gamma$  et de  $u - \chi, \alpha \partial_\tau(u - \chi)$  le long de  $\Gamma \implies$

$$A_h(u, v_h) - L_h(v_h) = 0, \quad \forall v_h \in W_h \quad (\text{consistance})$$

- choix de  $v_N^l, v_N^r$  dans  $\{\cdot\}_N \implies$

$$\delta_N^{-1} |\{\alpha \partial_\tau \{v_h\}_*\}_N|^2 \leq \|\alpha^{1/2} \partial_\tau \{v_h\}_* \|_{0,\Gamma_N^l \cup \Gamma_N^r}^2$$

Pour  $\lambda$  et  $\delta$  suffisamment grands :  $A_h(v_h, v_h) \geq c \|v_h\|_h^2, \quad \forall v_h \in W_h \quad (\text{stabilité})$

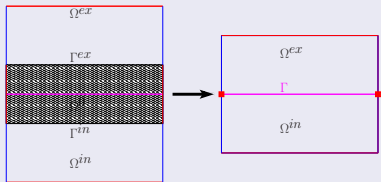
- le problème discret est bien posé et on a :

$$\|u - u_h\|_h \leq c \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_h$$

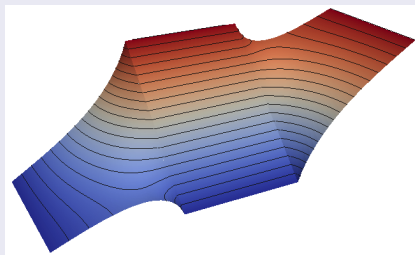
# Résultats numériques

## Cas-test de référence *Frih et al.* '12

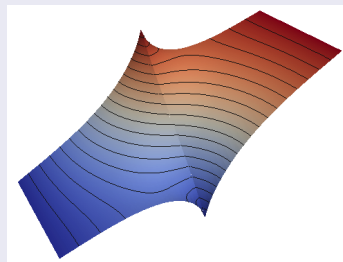
- $f = g = \chi = 0, K \frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma_N$ ,  $u = u_D$  sur  $\Gamma_D$
- $K^{in} = K^{ex} = I, \kappa^0 = 2, \varepsilon = 0.001$  ( $K_\varepsilon^0 = \frac{2}{\varepsilon} I$ )



avant et après mise en échelle



$u_\varepsilon$



$u_0$

## Validation numérique

- convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u_0$  ( tenseur de perméabilité diagonal ou non dans la couche mince )
- ordre de convergence optimal
- interface courbe
- solution discontinue à travers l'interface  $\Gamma$

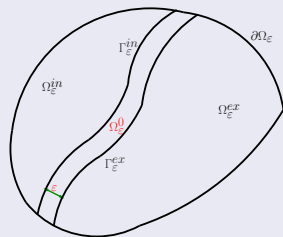
# Équations de Stokes dans la couche mince

## Problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \nabla \tilde{p}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^0 \cup \Omega_\varepsilon^{ex} \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in} \cup \Omega_\varepsilon^0 \cup \Omega_\varepsilon^{ex} \\ \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \\ [\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \\ [\mu \nabla_n \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{p}_\varepsilon \mathbf{n}] = \tilde{\mathbf{g}} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{in} \cup \Gamma_\varepsilon^{ex} \end{array} \right.$$

où

$$\mu = \begin{cases} \mu^{in} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{in}, \\ \mu^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^0, \\ \mu^{ex} & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{ex}. \end{cases}$$



# Interface rectiligne

## Formulation variationnelle mixte

En utilisant le changement de la pression dans  $\Omega^0$  :  $\varepsilon p_\varepsilon^0 \rightsquigarrow p_\varepsilon^0$ , on obtient

$$(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, p_\varepsilon) \in \mathbf{H}_0^1(\omega) \times L_0^2(\omega)$$

$$\begin{cases} a_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) - b_\varepsilon(p_\varepsilon, \tilde{\mathbf{v}}) = l_\varepsilon(\tilde{\mathbf{v}}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega) \\ b_\varepsilon(q, \mathbf{u}_\varepsilon) = 0, & \forall q \in L_0^2(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mu^i \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega^0} \mu^0 \partial_s \mathbf{u} \cdot \partial_s \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^0} \mu^0 \partial_l \mathbf{u} \cdot \partial_l \mathbf{v} \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$b_\varepsilon(p, \mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} p \operatorname{div} \mathbf{v} + \int_{\Omega^0} p \partial_s v_1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega^0} p \partial_l v_2 = b(p, \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} b_0(p, \mathbf{v})$$

$$l_\varepsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i=in,ex} \int_{\Omega^i} \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{v} + \sum_{i=in,ex} \int_{\Gamma^i} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{v} + \varepsilon \int_{\Omega^0} \mathbf{f}^0 \cdot \mathbf{v} = l(\mathbf{v}) + \varepsilon l_0(\mathbf{v})$$

## Convergence de $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ vers $(\mathbf{u}_0, p_0)$

- $\|\mathbf{v}\|_V^2 = \sum_{i=in,0,ex} \|\mu_i^{1/2} \nabla \mathbf{v}^i\|_{0,\Omega^i}^2, \quad \|q\|_M^2 = \sum_{i=in,0,ex} \|\mu_i^{-1/2} q^i\|_{0,\Omega^i}^2$

- coercivité **uniforme** de  $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  dans  $\mathbf{H}_0^1(\omega)$

$$\implies \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u}_0 \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\omega) \text{ (au moins une sous-suite), } \partial_l \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega^0)$$

$$\mathbf{u}_0 \in \text{Ker } a_0 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega); \partial_l \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega^0 \right\} =: \mathbf{V}_0$$

- **point clé** : condition *inf-sup* de  $b(\cdot, \cdot)$  sur  $M_0 \times \mathbf{V}_0$  où

$$M_0 := \left\{ q \in L_0^2(\omega); q = q(s) \text{ dans } \Omega^0 \right\}$$

Soit  $\hat{p}_\varepsilon^0(s) = \int_{-1/2}^{1/2} p_\varepsilon^0(s, l) dl$  pour  $s \in \Gamma$ . Alors  $\hat{p}_\varepsilon := (p_\varepsilon^{in}, \hat{p}_\varepsilon^0, p_\varepsilon^{ex}) \in M_0$  et

$$\|\hat{p}_\varepsilon\|_M \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{b(\hat{p}_\varepsilon, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} = \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) - l_\varepsilon(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_V} \leq C$$

$$\implies \hat{p}_\varepsilon \rightharpoonup p_0 \text{ in } L^2(\omega) \text{ (au moins une sous-suite), } p_0 \in M_0$$



# Problème limite

## Problème limite variationnel

$$\begin{aligned} & (\mathbf{u}_0, p_0) \in \mathbf{V}_0 \times M_0 \\ & \begin{cases} a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - b(p_0, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \\ b(q, \mathbf{u}_0) = 0, & \forall q \in M_0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Problème mixte est bien posé (Théorème de Babuska-Brezzi )

$$\implies (\mathbf{u}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon) \rightarrow (\mathbf{u}_0, p_0)$$

- $\Gamma^{in}, \Gamma^{ex} \rightsquigarrow \Gamma, \quad \Omega^{in} \rightsquigarrow \Gamma \times ]-1, 0[, \quad \Omega^{ex} \rightsquigarrow \Gamma \times ]0, 1[, \quad \Omega \rightsquigarrow ]0, 1[ \times ]-1, 1[$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 & \rightsquigarrow \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); \mathbf{v}|_\Gamma \in H_0^1(\Gamma) \right\} \\ M_0 & \rightsquigarrow \left\{ (q, q^\Gamma) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma); \int_\Omega q + \int_\Gamma q^\Gamma = 0 \right\} \end{aligned}$$

- Pour  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ , on note  $\mathbf{v}^\Gamma := \mathbf{v}|_\Gamma$

## Problème modèle asymptotique

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex} \\ \mathbf{u}_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

auquel on rajoute les conditions sur  $\Gamma$

- $\Gamma$  rectiligne :

$$[\mathbf{u}_0] = 0, \quad \mathbf{u}_{0,1}^\Gamma = 0, \quad [\mu \nabla_n \mathbf{u}_0 - p_0 \mathbf{n}] - \begin{pmatrix} -\partial_s p_0^\Gamma \\ \partial_s (\mu^0 \partial_s u_{0,2}^\Gamma) \end{pmatrix} = \mathbf{g}$$

- $\Gamma$  courbe de courbure  $r$  :

- suivant  $\tau$  :  $[\mu \partial_l u_{0,\tau}] + \mu_m r (\partial_\tau u_{0,n}^\Gamma + r u_{0,\tau}^\Gamma) + \partial_\tau p_0^\Gamma = g_\tau; \quad u_\tau^{in} = u_\tau^{ex} = u_{0,\tau}^\Gamma$
- suivant  $n$  :  $[\mu \partial_l u_{0,n} - p_0] - \mu_m \partial_{\tau\tau} u_{0,n} - \mu_m \partial_\tau (r u_{0,\tau}^\Gamma) + r p_0^\Gamma = g_n; \quad u_n^{in} = u_n^{ex} = u_{0,n}^\Gamma$
- $\partial_\tau u_{0,\tau}^\Gamma - r u_{0,n}^\Gamma = 0$

# Modélisation viscoélastique de la membrane par Giesekus

## Modèles rhéologiques

- modèle non-newtonien d'Oldroyd-B (**quasi-linéaire**) :

$$\underline{\tau} + \lambda_t \overset{\nabla}{\underline{\tau}} = 2\eta(\underline{D} + \lambda_r \overset{\nabla}{\underline{D}}), \quad \overset{\nabla}{\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + u \cdot \nabla \underline{A} - \underline{A} \nabla u^T - \nabla u \underline{A}$$

viscosité limite  $\eta$ , temps caractéristiques  $(\lambda_t, \lambda_r)$  et  $\overset{\nabla}{\underline{A}}$  dérivée convectée contravariante

- modèle non-newtonien de Giesekus (**non-linéaire**) :

$$\underline{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\underline{\tau}} + \frac{\eta}{2\lambda} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} = 2\eta \underline{D}$$

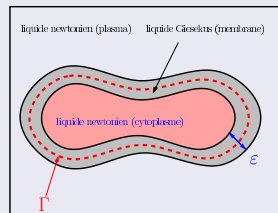
↔ Meilleur choix : modèle du Giesekus

(Thèse de J. Joie'10, R. Becker et al.'12, D. Graebeling & J. Joie'13)

# Dérivation formelle du modèle asymptotique

## Problème modèle

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon + \nabla \tilde{p}^\varepsilon = \tilde{\mathbf{f}} & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon + \lambda_m^\varepsilon \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon + \frac{\mu_m^\varepsilon}{2\lambda_m^\varepsilon} \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon \cdot \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon = 2\mu_m^\varepsilon \underline{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^0, \\ \underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon = 2\mu^\varepsilon \underline{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^{\text{in}} \cup \Omega_\varepsilon^{\text{ex}}, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ [\tilde{\mathbf{u}}^\varepsilon] = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{\text{in}} \cup \Gamma_\varepsilon^{\text{ex}}, \\ [(\underline{\tilde{\tau}}^\varepsilon - \tilde{p}^\varepsilon \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] = \tilde{\mathbf{g}} & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^{\text{in}} \cup \Gamma_\varepsilon^{\text{ex}}. \end{array} \right.$$



## Étapes pour la dérivation formelle du modèle

- On introduit  $p^{*,\varepsilon}(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon p^\varepsilon(s, l) dl$ ,  $\tau_{ij}^{*,\varepsilon}(s) = \int_{-1/2}^{1/2} \varepsilon \tau_{ij}^\varepsilon(s, l) dl$
- On admet que  $\mathbf{u}^\varepsilon$ ,  $p^{*,\varepsilon}$  et  $\underline{\tau}^{*,\varepsilon}$  convergent vers  $\mathbf{u}^0$ ,  $p^0$  et  $\underline{\tau}^0$  :  
 $\implies \mathbf{u}^0$ ,  $p^0$  et  $\underline{\tau}^0$  sont **indépendants de  $l$**  dans  $\Omega^0$

## Modèle asymptotique

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega^{in} \cup \Omega^{ex}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

auquel on rajoute les conditions non-standards sur l'interface  $\Gamma$

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0},$$

$$u_1 = 0,$$

$$[(2\mu \nabla \mathbf{u} - p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] - \partial_s \begin{pmatrix} -p^\Gamma + \tau_{11} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{g},$$

$$\underline{\tau} + \frac{\lambda_m}{2\mu_m} \underline{\tau} \cdot \underline{\tau} - \lambda_m u_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & \tau_{11} \\ \tau_{11} & 2\tau_{12} \end{pmatrix} = 2\mu_m \begin{pmatrix} 0 & u_{2,1} \\ u_{2,1} & 0 \end{pmatrix}.$$

## Conclusions

- **Problème d'interface :**  
méthode NXFEM pour les modèles de Darcy et de Stokes (existence, unicité, majoration d'erreur, validation numérique ... )
- **Problème d'interphase :**
  - approche asymptotique pour les modèles de Darcy et de Stokes
  - méthode NXFEM pour le modèle asymptotique de Darcy (consistance, stabilité, validation numérique)
- **Modélisation de la membrane par le modèle de Giesekus :**  
dérivation formelle du problème limite

# Perspectives

## Court terme

- amélioration de la robustesse d'un point du vue théorique
- méthode NXFEM pour le modèle asymptotique de Stokes

## Moyen terme

- développement d'une méthode NXFEM pour le modèle asymptotique de Giesekus
- extension de la méthode NXFEM non-conforme aux quadrilatères (EF non-conformes de Rannacher-Turek)
- interfaces mobiles

**MERCI POUR VOTRE ATTENTION**