1. Courbes paramétrées planes

Exercice n°1 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'étude des courbes paramétrées suivantes :

1) $x(t) = \sqrt{t+1}$, $y(t) = \sqrt{t-1}$ 2) $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$.
3) $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$ 4) $x(t) = \sin(4t)$, $y(t) = \cos(2t)$.
5) $x(t) = t + \frac{2t^3}{t^2-1}$, $y(t) = \frac{2t^3}{t-1}$.

Exercice n°2 Pour chacune des courbes suivantes, donner la nature (i.e. point singulier, d'inflexion, de rebroussement, ...) du point $M(t=0)$ et tracer l'allure locale de la courbe ; on précisera, pour chaque courbe, le repère local $(M, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ utilisé et le sens de parcours.

1. $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2 + t^3$.
2. $x(t) = -t^3 + t^4$, $y(t) = t^3$.
3. $x(t) = 3\sin t - 3t$, $y(t) = t^3 + t^5$.
4. $x(t) = 3\cos t - 3t$, $y(t) = t^2 + t^4 + t^5$.

Exercice n°3 Étudier les points singuliers en précisant leur nature et l'équation de la tangente en ces points pour les courbes paramétrées suivantes :

1) $x(t) = -t^3 + t^4$, $y(t) = t^3$. 2) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2 + t^3$. 3) $x(t) = t^3$, $y(t) = t^3 + t^5$.

Exercice n°4 Étudier les branches infinies des courbes paramétrées suivantes :

1. $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t + \frac{1}{2t^2}$, $t \in \mathbb{R}^*$.
2. $x(t) = \frac{2t^3}{t^2-1}$, $y(t) = \frac{2t^3}{t+1}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. $x(t) = \frac{t^3}{t^2-9}$, $y(t) = \frac{t(t-2)}{t-3}$.

Exercice n°5 Le plan est muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques $1cm$). A tout nombre réel t de l'intervalle $[-1; 2]$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées $x(t) = 2t^3 - 3t^2$ et $y(t) = 4t - t^2$.

On note C la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans l'intervalle $[-1; 2]$.

1. Étudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sur $[-1; 2]$.
2. Rassembler les résultats dans un tableau unique
3. Préciser les tangentes aux points $M(-1)$, $M(0)$, $M(1)$ et $M(2)$ obtenus respectivement pour $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.
4. Placer les points précédents et construire les tangentes à la courbe en ces points.
5. Tracer la courbe C obtenue lorsque t varie dans l'intervalle $[-1; 2]$.

Exercice n°6 Étudier et tracer les courbes cartésiennes suivantes :

$$(1) \left\{ \begin{array}{ll} x & = t^3 - 2t, \\ y & = t^3 - 3t + \frac{4}{3t}. \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{1-t^2}, \\ y & = \frac{t^3}{1-t^2}. \end{array} \right. \quad (3) \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{1-t^2}, \\ y & = \frac{t^3}{1-t^2}. \end{array} \right. \quad (4) \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{1-t^2}, \\ y & = \frac{t^3}{1-t^2}. \end{array} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{array}{ll} x & = 3\cos(3t), \\ y & = 2\sin(2t) \end{array} \right.$$

2. Courbes en coordonnées polaires

Exercice n°7 Déterminer le domaine de définition, l'ensemble de définition et les branches infinies des courbes polaires suivantes :

1) $\rho(\theta) = \frac{\theta+1}{\theta-1}$, 2) $\rho(\theta) = \frac{\tan\theta}{\cos\theta}$
3) $\rho(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta}$, 4) $\rho(\theta) = 2 - 2\cos(\theta)$
5) $\rho(\theta) = \cos(3\theta)$

Exercice n°8 Étudier et tracer les courbes polaires suivantes :

1) $\rho(\theta) = \cos(3\theta)$, 2) $\rho(\theta) = \cos(3\theta)$
3) $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, 4) $\rho(\theta) = 1 + \tan(\frac{\theta}{2})$
5) $\rho(\theta) = 1 - \cos\theta)$, $\rho(\theta) = \cos(2\theta/3)$

3. Propriétés métriques de la courbe

Exercice n°9 Pour chacune des courbes suivantes, déterminer le repère de Frenet au point de paramètre t ou θ :

1. $\gamma(t) = (4t + 1, 3t)$. (droite)
2. $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t + 1)$. (cercle)
3. $\gamma(t) = (t, \sin t)$. (graphe de sinus)
4. $\rho(\theta) = e^{-\theta}$. (spirale logarithmique)
5. $\rho(\theta) = \frac{1}{2+\cos\theta}$. (ellipse)
6. $\rho(\theta) = \sin(3\theta)$. (rosace trois boucles)

Exercice n°10 Calculer la longueur des courbes suivantes :

1. le parabole $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, 3t^2)$, entre $t = 0$ et $t = T$.
2. la néphroïde $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(3t))$, entre $t = 0$ et $t = 2\pi$.
3. le solénoïde $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), \alpha t)$, entre $t = 0$ et $t = T$ où $(R, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
4. la cardioïde $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\alpha(1 + \cos(t) - \cos(t), \alpha(1 + \cos(t))\sin(t))$, entre $t = 0$ et $t = 2\pi$ où $\alpha > 0$.
5. la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\tanh(t/2)\cos(t), \tanh(t/2)\sin(t))$, entre $t = 0$ et $t = T$.
6. la cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice n°11 On considère le solénoïde $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), \alpha t)$, entre $t = 0$ et $t = T$ où $(R, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Déterminer la courbure (relative) et la torsion de γ.
2. Trouver une courbe paramétrée par longueur d'arc $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui est équivalente à γ par reparamétrage.
3. Montrer que $\tilde{\gamma}$ vérifie les équations de Serret-Frenet