*NB : cette fiche présente les techniques nécessaires **minimales** de calcul des probabilités ; elle ne constitue donc pas un objectif mais un pré-requis pour les probabilités !*

1 Généralités

Voici les principaux mots du vocabulaire des probabilités :

— Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue ne dépend que du hasard.
— l'**univers**, noté Ω, associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles.
— un **événement** est une partie de l'univers Ω.
— un **événement élémentaire** est un événement réduit à un seul élément.
— un événement est dit **réalisable ou réalisé** lorsque le résultat obtenu appartient à cet événement.
— Le **cardinal** d'un événement E noté $card(E)$ est le nombre d'élément de E.
— Une p-**liste** (avec $p \geqslant 1$) d'éléments de E est un élément $(x_1; x_2; \ldots; x_p)$ de $E^p = E \times E \times \ldots \times E$ (produit cartésien de p ensembles de E).
— Le **nombre de** p-**liste** d'éléments de E est égal à n^p.
— Un **arrangement à** p **éléments** de E ($1 \leqslant p \leqslant n$) est une p-liste d'éléments de E dont les p éléments sont 2 à 2 distincts.
— Le **nombre d'arrangements à** p **éléments** de E ($1 \leqslant p \leqslant n$), noté A_n^p est égal à

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

— Un **arrangement à** n **éléments de** E ($n = card(E)$) est une **permutation** de E.
— Le **nombre de permutations de** E est égal à $n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$.
— **Une combinaison à** p **éléments de** E ($0 \leqslant p \leqslant n$) est un sous-ensemble de E à p éléments.
— **Le nombre de combinaisons à** p **éléments de** E ou le coefficient binomial ($0 \leqslant p \leqslant n$), noté $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ (dit -p parmi n-), est égal à

$$\frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Plus particulièrement, on a

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^p = C_n^{n-p}.$$

1.1 Exemples

— Lancer de deux dés non truqués est une expérience aléatoire.
— Si on s'intéresse à la somme obtenue lors du lancer de deux dés, alors $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
— Si A désigne l'événement "obtenir une somme multiple de 2", alors $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
— Si B désigne l'événement "obtenir une somme égale à 9", alors $B = \{9\}$.
— Si la somme obtenue lors du lancer est égale à 8, alors l'événement A est réalisé, mais l'événement B ne l'est pas.
— Si $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, alors $card(\Omega) = 6$.

— On tire 3 fois de suite **avec remise** une carte dans un jeu de 32 cartes. Il y a au total $32^3 = 32768$ triplets (ou 3-listes) de cartes possibles.

— On tire 3 fois de suite **sans remise** une carte dans un jeu de 32 cartes. Il y a au total $A_{32}^3 = \frac{32!}{(32-3)!} = 29760$ tirages possibles.

— On tire une à une toutes les cartes d'un jeu de 32 cartes et on note la liste des cartes obtenues après chaque tirage. Une telle liste est une permutation de E des cartes. Il y a au total $32! \approx 2.6 \times 10^{35}$ permutations possibles.

— On tire 3 cartes **simultanément** dans un jeu de 32 cartes. Il y a au total $C_{32}^3 = \begin{pmatrix} 32 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{32!}{3!(32-3)!} = 4960$ tirages possibles.

2 Calcul des cardinaux

Soit A et B deux sous-ensembles de E, alors on a :

— $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.

— $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$.

— $card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = card(E_1) \times card(E_2) \times \ldots \times card(E_n)$.

3 Calcul des probabilités

Soient Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et A et B deux événements de Ω. Alors, on a :

— $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

— $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Si, de plus, A et B sont incompatibles (c'est-à-dire disjoints ou $A \cap B = \emptyset$,) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

— $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

— Probabilités conditionnelles :
  — $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$
  — $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
  — $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$ et $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
  — $P_A(A) = 1$
  — si A et B sont incompatibles, $P_B(A) = 0$
  — si A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

— Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \cdots + P_{A_n}(B) \times P(A_n). \end{aligned}$$

Plus particulièrement :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P_A(B \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}).$$