Contrôle continu $n°1$, Mardi 22 Novembre 2022
Durée : 1h15
——–-
BUT-TC- 2ÈME ANNÉE

A.U. : 2022-2023
Prof. H. El-Otmany

Règlement : *Documents électroniques et téléphones portables interdits. Soignez votre rédaction. Numérotez les exercices, les questions traitées et vos copies en fin d'épreuve. Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif. Ce sujet est constitué de questions de cours et 3 exercices. Bon courage !*

****

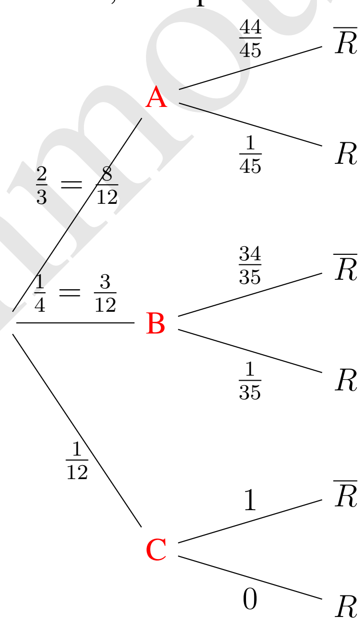
Questions de cours *[4 points]*

1. La loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, $n \geqslant 2$, $0 < p < 1$ est un schéma de Bernoulli de n-répétitions identiques et indépendantes d'une expérience aléatoire ayant deux issues (succès et échèc) dont la probabilité de succès est donnée par $0 < p < 1$.
2. Les conditions nécessaires pour approcher convenablement une variable aléatoire suivant loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'un certain paramètre λ sont : $n \geqslant 30$, $0 \leqslant p \leqslant 0.1$ et $np < 10$. Avec ces conditions, le paramètre de la loi de Poisson est donné par $\lambda = np$.
3. Pour un événement de Poisson de paramètre λ, on a $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $E(X) = V(X) = \lambda$.
4. Pour une variable aléatoire normale $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 3^2)$, on a $E(X) = 1$ et $V(X) = 3^2 = 9$ (l'écart-type est $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 3$).

Exercice n°1 *[5 points]* Soit A (respectivement B et C) l'événement " l'étudiant emprunte l'itinéraire A (respectivement B et C). D'après l'énoncé, on a :

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3}.$$

La réponse à cet exercice est basée sur le fait que $\{A, B, C\}$ est un système complet des événements (Pour mieux comprendre l'exercice, vous pouvez utiliser l'arbre de probabilités et la somme des probabilités



$P(A \cap \overline{R}) = P(A) \times P_A(\overline{R}) = \frac{2}{3} \times \frac{44}{45}$

$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{45}$

$P(B \cap \overline{R}) = P(B) \times P_B(\overline{R}) = \frac{1}{4} \times \frac{34}{35}$

$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{35}$

$P(C \cap \overline{R}) = P(C) \times P_C(\overline{R}) = \frac{1}{12} \times 1$

$P(C \cap R) = P(C) \times P_C(R) = \frac{1}{12} \times 0$

par branche vaut 1).

1. En utilisant la somme des probabilités des événement égale à 1, on a

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \approx 0.0833.$$

2. Soit R l'événement "l'étudiant arrive en retard". D'après l'énoncé, on a

$$P_A(R) = \frac{1}{45}, \quad P_B(R) = \frac{1}{35}, \quad P_C(R) = 0$$

Ici, $P_C(R) = 0$ car si l'étudiant emprunte C, il n'est jamais en retard. Il faut dans la suite l'inclure dans le calcul car $P(C) = \frac{1}{12}$. On a donc

$$\begin{aligned} P(R) &= P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R) = P(A) \times P_A(R) + P(B) \times P_B(R) + P(C) \times P_C(R) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{45}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{35}\right) + \left(\frac{1}{12} \times 0\right) \approx 0.02196 = 2.196\%. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que l'étudiant arrive en retard est 2.196%..

3. En utilisant la formule de Bayes (voir la fiche technique n°0), on a

$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{P(B) \times P_B(R)}{P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(C \cap R)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{35}}{0.02196} \approx 0.3253 = 32.53\%$$

Ainsi, la probabilité que l'étudiant ait emprunté l'itinéraire B sachant qu'il est en retard est environ 32.53%.

Corrigé n°1 *[4 points]* En utilisant les tableaux en annexe, calculer les probabilités suivantes :

1. Ici, la variable aléatoire X suit $\mathcal{N}(0,1)$, donc , on utilise directement les formules de calcul de probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et sa table. On a

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2.15) &= \Phi(2.15) \approx 0.9842; \\ P(-1.45 \leqslant X \leqslant 1.45) &= 2\Phi(1.45) - 1 \approx 2 \times 0.9265 - 1 \approx 0.8530. \end{aligned}$$

2. Ici, la variable aléatoire Y suit une loi normale $\mathcal{N}(4, 3^2)$ de moyenne $\mu \neq 0$ et variance $\sigma^2 \neq 1$, donc on effectue d'abord la transformation $\dfrac{Y-\mu}{\sigma} = \dfrac{Y-4}{3}$ pour avoir une variable centrée réduite. Ensuite, on applique les formules de calcul pour une variable centrée réduite. On note X la variable suivant la loi centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On a donc

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 3.2) &= P\left(\frac{Y-4}{3} \leqslant \frac{3.2-4}{3}\right) = P\left(X \leqslant -0.8\right) = P(X \geqslant 0.8) \\ &= 1 - P(X < 0.8) = 1 - P(X \leqslant 0.8) = 1 - \Phi(0.8) \approx 1 - 0.7881 \approx 0.2119; \\ P(2.02 \leqslant Y \leqslant 6.02) &= P\left(\frac{2.02-4}{3} \leqslant \frac{Y-4}{3} \leqslant \frac{6.02-4}{3}\right) = P\left(-0.66 \leqslant \frac{Y-4}{3} \leqslant 0.67\right) \\ &= P\left(-0.66 \leqslant X \leqslant 0.67\right) = \Phi(0.67) - \Phi(-0.66) = \Phi(0.67) - (1 - \Phi(0.66)) \\ &= \Phi(0.67) + \Phi(0.66) - 1 \approx 0.7486 + 0.7454 - 1 \approx 0.4940. \end{aligned}$$

3. Ici, la variable aléatoire Z suit $\mathcal{P}(8)$, donc , on utilise directement les formules de calcul de probabilité d'une variable aléatoire Poisson et sa table. On a

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= 0.0003; \\ P(Z \leqslant 4) &= P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=3) + P(Z=4) \\ &= 0.0003 + 0.0027 + 0.0107 + 0.0288 + 0.0573 = 0.0998. \end{aligned}$$

4. Pour calculer les $P(\overline{B})$ et $P_B(A)$ sachant que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ et $P(A \cap B) = 0.3$, on utilise les formules de calcul des probabilités (voir le cours), on a

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Corrigé n°2 *[7 points]* Soit A la variable aléatoire égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite.

1. La variable aléatoire A suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 30; p = 0.09)$. En effet, il s'agit ici d'une expérience aléatoire admettant exactement deux issues :
— succès : "vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $p = 0.09$.
— échec : "ne pas vendre un appartement suite à une visite" de probabilité $1-p = 1-0.09 = 0.91$.
Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. On répète cette expérience 30 fois de manière indépendante : il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire A est égale au nombre d'appartements vendus en une semaine après une visite, c'est-à-dire au nombre de succès obtenus à l'issue de 30 épreuves de Bernoulli.
Par conséquent, A suit la loi binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0.09$.
2. Si 25% des visites hebdomadaires se traduisent par une vente, cela signifie que l'agent immobilier a vendu $20\% \times 30 = 6$ appartements sur la semaine. La probabilité s'écrit ainsi
$P(A = 6) = C_{30}^{6} \times 0.09^6 \times (1 - 0.09)^{30-6} \approx 0.0328$, soit une probabilité de 3.28% environ pour que 20% des visites hebdomadaires se traduisent par une vente.
3. $P(A \geqslant 1) = 1 - P(A < 1) = 1 - P(A = 0) = 1 - C_{30}^{0} \times 0.09^0 \times (1 - 0.09)^{30-0} = 1 - 0.91^{30} \approx 0.9409$, soit une probabilité de 94.09% environ pour que l'agent vende au moins un appartement par semaine.
4. $E(A) = n \times p = 30 \times 0.09 = 2.7 \approx 3$, l'agent vend en moyenne 3 appartements environ.
5. $V(A) = n \times p \times (1 - p) = 30 \times 0.09 \times (1 - 0.09) = 2.457$ et $\sigma_A = \sqrt{V(A)} = \sqrt{2.457} \approx 1.567$.
6. Soit AI la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p = 0.09)$ où n est le nombre d'appartements visités en une semaine. On souhaite déterminer la valeur de n tel que $P(AI \geqslant 1) \geqslant 0.95$:

$$\begin{aligned} P(AI \geqslant 1) \geqslant 0.95 &\Leftrightarrow 1 - P(AI < 1) \geqslant 0.95 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(AI = 0) \geqslant 0.95 \\ &\Leftrightarrow 1 - C_n^0 \times 0.09^0 \times (1 - 0.09)^{n-0} \geqslant 0.95 \\ &\Leftrightarrow 1 - 0.91^n \geqslant 0.95 \\ &\Leftrightarrow 1 - 0.95 \geqslant 0.91^n \\ &\Leftrightarrow 0.05 \geqslant 0.91^n. \end{aligned}$$

En utilisant la fonction logarithme népérienne (ln), on obtient

$$\ln(0.05) \geqslant \ln(0.91^n) = n \times \ln(0.91)$$

Comme $\ln(0.91) < 0$ (on change le sens de l'inégalité lors de la division), il vient que

$$n \geqslant \frac{\ln(0.05)}{\ln(0.91)} \approx 31.76 \approx 32$$

Pour que l'agent immobilier atteint son objectif, il doit effectuer au moins 32 visites par semaine.

FIN DE LA CORRECTION.