NB : *cette fiche présente les plans d'étude et les techniques nécessaires minimales pour les courbes cartésiennes et polaires ; elle ne constitue pas un objectif, mais un pré-requis. ! ! ! Elle est autorisée pendant le DS et l'examen final de Ma212 ! ! !*

PLAN D'ÉTUDE D'UNE COURBE CARTÉSIENNE

Soit $\gamma(t)$ la courbe (arc) du plan paramétrée en coordonnées cartésiennes

$$\gamma(t) := \begin{cases} x & = x(t) \\ y & = y(t) \end{cases}$$

1. **Détermination du domaine de définition de la courbe D_γ :** c'est l'ensemble des points en lesquels $x(t)$ et $y(t)$ sont définies : $D_\gamma = D_x \cap D_y$.
2. **Étude des symétries éventuelles et réduction de D_γ** :
   — S'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t+T) = \gamma(t)$, γ est T-périodique (i.e. $x(t+T) = x(t)$ et $y(t+T) = y(t)$) ; on peut alors réduire l'étude de γ à l'intersection de D_γ avec un intervalle de longueur T (en général $D_\gamma \cap [0, T]$ ou $D_\gamma \cap [-T/2, T/2]$, et on déduit ainsi toute la courbe.
   — Si D_γ est symétrique par rapport à 0 et on a une des symétries suivantes :
   i. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x et y fonctions paires de t),
   2i. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x impaire et y paire),
   3i. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x paire et y impaire),
   4i. $\forall t \in D_\gamma : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x et y impaires).
   alors, on peut réduire l'étude à l'intervalle $D_\gamma \cap \mathbb{R}^+$, et on déduit toute la courbe
   i. qui est parcourue deux fois (i.e. les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus),
   2i. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe (OY),
   3i. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe (OX),
   4i. en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'origine O du repère.
   — Si D_γ est symétrique par rapport à t_0 et on a $x(t_0 - t) = \pm x(t)$ et $y(t_0 - t) = \pm y(t)$ (i.e. les points $M(\frac{t_0}{2} + t)$ et $M(\frac{t_0}{2} - t)$ sont symétriques), alors on peut réduire l'étude à $D_\gamma \cap [\frac{t_0}{2}, +\infty[$ et on déduit la courbe par la symétrie adaptée.
   — Autres symétries : certains domaine d'étude peut faire appel au changement de variable suivant :
   — $D_\gamma = [a, b]$, $t \longmapsto a + b - t$ permet de restreindre à $[a, \frac{a+b}{2}]$.
   — $D_\gamma \setminus \{0\}$, $t \longmapsto 1/t$ pour les fonctions logarithmiques et à fractions rationnelles.
3. **Étude simultanée des variations de x et y sur l'intervalle d'étude**.
   — Calculer les dérivées de x et y dans l'intervalle d'étude,
   — Étudier les valeurs d'annulation et les signes de x' et y',
   — Présenter les résultats dans un tableau de signe composé des lignes $x' - -x - -y' - -y - -\frac{y}{x}$. La dernière ligne précise les tangentes ou signale la présence des éventuelles branches infinies.
4. **Étude des tangentes particulières à la courbe** : Soit (I, γ, Γ) une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$, $g \geqslant 1$ et soit $M(t_0)$ un point régulier (i.e. $||\gamma'(t_0)|| \neq 0$) de Γ. Alors, on a
   — si $x'(t) \neq 0$, la tangente en $M(t_0)$ a pour pente $m(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} := \lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$.
   — si $y'(t) = 0$, la tangente en $M(t_0)$ est horizontale.
   — si $x'(t) = 0$, la tangente en $M(t_0)$ est verticale.

5. **Étude des éventuelles branches infinies**. On dit que γ possède une branche infinie lorsque t tends vers t_0 si et seulement si $\lim_{t \longrightarrow t_0} ||\gamma(t)|| = +\infty$, i.e. la distance de $\gamma(t)$ à l'origine tend vers $+\infty$.
   (a) **Premier cas :** l'une des composantes de γ tend vers $\pm\infty$, tandis que l'autre possède une limite finie, c'est-à-dire
      i. $\lim_{t \longrightarrow t_0} x(t) = x_0$ et $\lim_{t \longrightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$, la droite $x = x_0$ est asymptote à la courbe γ.
      ii. $\lim_{t \longrightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \longrightarrow t_0} y(t) = y_0$, la droite $y = y_0$ est asymptote à la courbe γ.
   (b) **Deuxième cas :** les composantes x et/ou y de γ tendent vers $\pm\infty$ lorsque t tend vers t_0, c'est-à-dire : $\lim_{t \longrightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \longrightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$. On utilise la méthode suivante pour étudier l'existence des asymptotes en étudiant la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$:
      i. Si $\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ n'existe pas, on ne peut rien dire.
      ii. Si $\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, il y a une branche parabolique de direction (OX).
      iii. Si $\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, il y a une branche parabolique de direction (OY).
      iv. Si $\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$, il y a une éventuelle branche asymptotique et on traite la différence $y(t) - ax(t)$:
         a. si $\lim_{t \longrightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$, il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$.
         b. si $\lim_{t \longrightarrow t_0} (y(t) - ax(t)) = \infty$, il y a une branche parabolique de pente a.
         c. si $\lim_{t \longrightarrow t_0} (y(t) - ax(t))$ n'existe pas, on ne peut rien dire.
6. **Intersection avec les axes :** trouver $t \in D_\gamma$ qui vérifie $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$.
7. **Recherche des éventuels points multiples ou doubles** : Un point M est dit multiple de la courbe s'il existe $t_1, t_2 \in D_\gamma$ tels que
$$\begin{cases} t_1 & \neq t_2, \\ x(t_1) & = x(t_2), \\ y(t_1) & = y(t_2). \end{cases}$$
   Pour déterminer les points multiples, on résout le système ci-dessus et on calcule les coordonnées es points correspondants.
8. **Tracé définitif de la courbe :** on utilise les résultats précédents en représentant avant tout les asymptotes, les points stationnaires, les points à tangente verticale et horizontale et on ébauche le tracé de la courbe en prenant une échelle adaptée si elle ne nous est pas imposée. Tout est alors en place pour la construction et on peut tracer la courbe grâce aux règles suivantes :
   — Si x croît et y croît, on va vers la droite et vers le haut.
   — Si x croît et y décroît, on va vers la droite et vers le bas.
   — Si x décroît et y croît, on va vers la gauche et vers le haut.
   — Si x décroît et y décroît, on va vers la gauche et vers le bas.