Fiche technique et méthodes de calcul des intégrales multiples

A.U. : 2020-2021
Prof. H. El-Otmany

NB : *cette fiche présente les techniques de calcul des intégrales multiples et leur applications. ! ! ! Elle n'est pas autorisée pendant le DS et l'examen final de Ma212 ! ! !*

1 Intégrales doubles

1. **Intégration sur un domaine rectangulaire (Théorème de Fubini)** : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un rectangle $D = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b$ et $c < d$). Alors, on a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

2. **Intégrations successives ou itérées** : Soit f une fonction continue sur un domaine borné $\mathcal{R}$. L'intégrale double $\int\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$ se calcule par l'une ou l'autre des manières suivantes :
   — Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$ où h et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors, on a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

   — Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \leqslant y \leqslant d,\ q(y) \leqslant x \leqslant p(y)\}$ où p et q sont deux fonctions continues sur $[c, d]$. Alors, on a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx\right) dy.$$

3. **Changement de variables en $\mathbb{R}^2$** : "les variables x et y sont changées en u et v, c'est-à-dire, avec $det(J)$ est le déterminant jacobien de la transformation, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \varphi(u,v) \\ y & = \psi(u,v) \end{array}\right. ; (x,y) \in D \ \texttt{devient} \ (u,v) \in \Delta \longmapsto \left\{\begin{array}{ll} x & = \varphi(u,v) \\ y & = \psi(u,v) \end{array}\right. ; dxdy = |det(J)|dudv$$

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v))|det(J)|dudv.$$

4. **Coordonnées polaires du point** $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$: $x = a + r\cos(\theta)$, $y = b + r\sin\theta$ avec $(r,\theta) \in R + \times (0, 2\pi)$. On a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta))rdrd\theta.$$

Attention : il ne faut pas oublier r dans l'intégrale. Les bornes de θ dépendent des conditions sur x et y. À titre indicatif, le cercle a pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

5. **Coordonnées elliptiques du point** $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$: $x = a + \alpha r\cos(\theta)$, $y = b + \beta r\sin\theta$ avec $(r,\theta) \in R + \times (0, 2\pi)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(a + \alpha r\cos(\theta), b + \beta r\sin(\theta))\alpha\beta rdrd\theta.$$

Attention : il ne faut pas oublier $\alpha\beta r$ dans l'intégrale. Les bornes de θ dépendent toujours des conditions sur x et y. À titre indicatif, l'ellipse a pour équation $\frac{(x-a)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-b)^2}{\beta^2} = 1$.

6. **Intégration des fonctions séparables** : si $D = [a,b] \times [c,d]$ (avec $a < b$, $c < d$), et si $f(x,y) = g(x)h(y)$, où g et h sont deux fonctions continues d'une seule variable. Alors, on a :
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d g(x)h(y)\, dxdy = \left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\left(\int_c^d h(y)\, dy\right).$$
7. **Symétrie** : si pour tout $(x,y) \in D$, $(-x,y) \in D$ et $f(-x,y) = f(x,y)$ (idem $(x,-y) \in D$ et $f(x,-y) = f(x,y)$) alors
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 2\int\int_{D_{sym}} f(x,y)dxdy, \quad D_{sym} = D \cap \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right).$$

2 Intégrales triples

1. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un parallélépipède $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [m,n]$ ($a < b$, $c < d$ et $m < n$). Alors, on a
$$\begin{aligned}\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_m^n f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx = \int_m^n \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right) dy\right) dz \\ &= \int_m^n \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)dy\right) dx\right) dz = \ldots.\end{aligned}$$
2. Changement de variables en $\mathbb{R}^3$: "les variables x, y et z sont changées en u, v et w, c'est-à-dire, avec $det(J)$ est le déterminant jacobien de la transformation, on a
$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \varphi(u,v,w) \\ y & = \psi(u,v,w) \\ z & = \nu(u,v,w) \end{array}\right. ; (x,y,z) \in \Omega \texttt{ devient } (u,v,w) \in \Delta \longmapsto \left\{\begin{array}{ll} x & = \varphi(u,v,w) \\ y & = \psi(u,v,w) \\ z & = \nu(u,v,w) \end{array}\right.$$
$dxdydz = |det(J)|dudvdw$
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_\Delta f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \nu(u,v,w))|det(J)|dudvdw.$$
3. **Coordonnées cylindriques du point** $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a,b,c)\}$: $x = a + r\cos(\theta)$, $y = b + r\sin\theta$, $z = z$ avec $(r,\theta,z) \in R+ \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$. On a
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_\Delta f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta), z)rdrd\theta dz.$$
Attention : il ne faut pas oublier r lors du changement de variables. Les bornes de θ dépendent des conditions sur x et y.
4. **Coordonnées sphériques du point** $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a,b,c)\}$: $x = a + r\sin\varphi\cos(\theta)$, $y = b + r\sin\varphi\sin\theta$, $z = c + r\cos\varphi$ avec $(r,\theta,\varphi) \in R^+ \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$. On a
$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_\Delta f(a+r\sin\varphi\cos(\theta), b+r\sin\varphi\sin(\theta), c+r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi.$$
Attention : il ne faut pas oublier $r^2\sin\varphi$ lors du changement de variables. Les bornes de θ et φ dépendent toujours des conditions sur x, y et z.
5. **Intégration des fonctions séparables** : si $\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [m,n]$ (avec $a < b$, $c < d$, $m < n$), et si $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, où g, h et k sont deux fonctions continues d'une seule variable. Alors, on a :
$$\int_a^b \int_c^d \int_m^n f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_c^d g(x)h(y)k(z)\, dxdydz = \left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\left(\int_c^d h(y)\, dy\right)\left(\int_m^n k(z)\, dz\right).$$

3 Applications

1. **calcul d'aire** : si D est une région bornée du plan $\mathbb{R}^2$, bordée par une courbe fermée continue, alors on a
$$Aire(D) = \int\int_{(x,y)\in D} dxdy \quad (en\ coordonnées\ cartésiennes)$$
$$Aire(D) = \int\int_{(r,\theta)\in D'} rdrd\theta \quad (en\ coordonnées\ polaires)$$
$$Aire(D) = \int\int_{(r,\theta)\in D'} \alpha\beta rdrd\theta \quad (en\ coordonnées\ elliptiques)$$
2. **calcul du centre de gravité ou d'inertie en** $\mathbb{R}^2$: D est une région de densité massique ρ, le centre de gravité est déterminé par les coordonnées (x_G, y_G) tels que
$$x_G = \frac{\int\int_D x\rho(x,y)dxdy}{\int\int_D \rho(x,y)dxdy},\ y_G = \frac{\int\int_D y\rho(x,y)dxdy}{\int\int_D \rho(x,y)dxdy}$$
3. **calcul des moments en** R^2 : soit D une région du plan $\mathbb{R}^2$ de densité massique ρ. On a
   — I_x le moment d'inertie de la région D par rapport à l'axe des abscisses (OX) : $I_x = \int\int_D x^2\rho(x,y)dxdy$.
   — I_x le moment d'inertie par rapport à l'axe des ordonnées (OY) : $I_y = \int\int_D y^2\rho(x,y)dxdy$.
   — I_o le moment d'inertie de la région D par rapport à l'origine du repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $I_o = \int\int_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$.

   Attention : si la région D est homogène alors la densité massique est constante $\rho(x,y) = c \in \mathbb{R}$.
4. **calcul de volume** : si Ω est un domaine borné de l'espace $\mathbb{R}^3$, bordée par une courbe fermée continue, alors on a
$$Vol(\Omega) = \int\int\int_{(x,y,z)\in\Omega} dxdydz \quad (en\ coordonnées\ cartésiennes)$$
$$Vol(\Omega) = \int\int_{(r,\theta,z)\in\Omega'} rdrd\theta dz \quad (en\ coordonnées\ cylindriques)$$
$$Vol(\Omega) = \int\int_{(r,\theta,\varphi)\in\Omega'} r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi \quad (en\ coordonnées\ sphériques)$$
5. **calcul du centre de gravité ou d'inertie en** $\mathbb{R}^3$: soit D est une région de masse volumique μ, le centre de gravité est déterminé par les coordonnées (x_G, y_G, z_G) tels que
$$x_G = \frac{\int\int\int_\Omega z\mu(x,y,z)dxdy}{\int\int\int_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz},\ y_G = \frac{\int\int\int_\Omega y\mu(x,y,z)dxdy}{\int\int\int_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz},\ z_G = \frac{\int\int\int_\Omega z\mu(x,y,z)dxdy}{\int\int\int_\Omega \mu(x,y,z)dxdydz}$$
6. **calcul des moments en** R^3 : soit Ω une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ de masse volumique μ. On a
   — I_x le moment d'inertie de la région Ω par rapport à l'axe des abscisses (OX) : $I_x = \int\int\int_\Omega (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$.
   — I_x le moment d'inertie de la région Ω par rapport à l'axe des ordonnées (OY) : $I_y = \int\int\int_\Omega (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$.
   — I_x le moment d'inertie de la région Ω par rapport à l'axe des ordonnées (OY) : $I_y = \int\int\int_\Omega (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz$.
   — I_o le moment d'inertie de la région Ω par rapport à l'origine du repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $I_o = \int\int_D (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdy$.

   Attention : si la région Ω est homogène alors la masse volumique est constante $\mu(x,y,z) = c \in \mathbb{R}$.