A.U.: 2021-2022 **Prof.** H. El-Otmany

NB: cette fiche présente les techniques nécessaires **minimales** sur quelques lois discrètes; elle ne constitue donc pas un objectif mais un pré-requis! Elle est autorisée pendant les contrôles!!

Généralités sur les variables aléatoires 1

- Une variable aléatoire sur l'univers Ω associé à une expérience aléatoire est une fonction définie sur Ω à valeurs dans l'ensemble des réels \mathbb{R} .
- Une variable aléatoire discrète : (dénombrables) lorsque les valeurs x_i qu'elle est susceptible de prendre sont en nombre fini, ou formés de nombres entiers
- Une variable aléatoire continue : (regroupées dans une classe) elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X ou la loi de X est la donnée des probabilités des événements $X=x_i$ pour $i=1,2,\cdots,n$ où x_i les images des éléments de Ω ou, plus simplement les valeurs réelles prises par X.

Propriétés 2

Soient X une variable aléatoire discrète sur l'univers Ω , et $P(X=x_i)$ la probabilité de l'événement $\{X=x_i\}$. Alors on a:

— Espérance :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \dots + P(X = x_n) \times x_n$$

- Variance:
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$$
.

— Écart-type =
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

— Transformation affine des données : soient a et b deux réels, on a

$$-- E(aX + b) = a \times E(X) + b$$

$$- V(aX + b) = a^2 \times V(X)$$

$$-V(aX + b) = a^{2} \times V(X)$$

$$-\sigma_{aX+b} = \sqrt{a^{2}V(X)} = \begin{cases} a \times \sigma_{X} & \text{si } a > 0 \\ -a \times \sigma_{X} & \text{si } a \leqslant 0 \end{cases}$$

Lois de probabilités discrètes

— Loi de Bernoulli :
$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$$

-
$$P(X = 1) = p$$
 et $P(X = 0) = 1 - p$;

$$--E(X) = p$$
, $V(X) = p$ et $\sigma_X = \sqrt{p}$.

— Loi binomiale :
$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \text{ avec } k \text{ compris entre } 0 \text{ et } n;$$

$$P(X = k + 1) = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} P(X = k);$$

$$-P(X=k+1) = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} P(X=k);$$

-
$$E(X) = np, V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}.$$

— Loi binomiale en fréquence
$$F_n = \frac{X}{n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$$

— $P(F_n = \frac{k}{n}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;

$$-P(F_n=\frac{k}{n})=C_n^k p^k (1-p)^{n-k'}$$

$$-E(F_n) = p, V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} \text{ et } \sigma_{F_n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

$$- \text{Loi de Poisson} : X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \text{ avec } \lambda \text{ un réel strictement positif.}$$

—
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda}$$
 avec k un entier naturel;

—
$$E(X) = \lambda$$
, $V(X) = \lambda$ et $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$;

— Approximation d'une loi binomiale : soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$. Si $n \ge 30, 0 \le p \le 0.1$ et np < 10, alors on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np.