جامعة ابن طفيل
UNIVERSITÉ IBN TOFAÏL

Master 2-INTRODUCTION AU CALCUL STOCHASTIQUE

————-

EXAMEN

Enseignant : H. El-Otmany **A.U.** : 2014-2015

ENCG de Kénitra

Exercice n°1 On note =$(F_t)_{t\geqslant 0}$ la filtration naturelle associée à $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

1. Calculer pour tout couple $(s,\ t)$ les quantités : $\mathbf{E}(B_s B_t^2)$, $\mathbf{E}(B_t|\mathcal{F}_s)$, $\mathbf{E}(B_t|B_s)$ et $\mathbf{E}(e^{2B_t}|B_s)$.
2. Calculer $\mathbf{E}(e^{B_t}|\mathcal{F}_s)$, $\mathbf{E}((e^{B_t}-1)^+|\mathcal{F}_s)$.
3. Donner la loi de $B_t + B_s$.

Exercice n°2 Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales :

1. $\alpha \in \mathbb{R}$, $X_t = e^{-\alpha^2 t/2}\cosh(\alpha B_t)$.
2. $M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s\, ds$.
3. $Z_t = B_t^3 3tB_t$.
4. $N_t = tB_t - \int_0^t B_s\, ds$
5. $U_t = \sin(B_t) + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^t \sin(B_s)\, ds$.
6. $Y_t = t^2 B_t - 2\int_0^t B_s\, ds$

Exercice n°3 On considère un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

1. Donner le processus d'Itô des processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ donnés ci-dessous :
   a. $X_t = (2B_t + t)e^{-2B_t - t}$
   b. $Y_t = \cos(B_t)e^t$.
2. Donner la solution de l'équation différentielle stochastique suivante (on admet que cette solution est strictement positive) :
$$dX_t = \frac{1}{\sqrt{3}} X_t dt + X_t dB_t,\ Y_0 = 1$$
3. Donner une équation différentielle stochastique vérifiée par le processus suivant :
$$Y_t = \frac{2B_t}{1+t}.$$

Exercice n°4 Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t.$$

où $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement Brownien standard, et $\alpha,\ \beta,\ \sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On note $(F_t)_{t\geqslant 0}$ la filtration naturelle associée à $(W_t)_{t\geqslant 0}$.

1. Que pouvez-vous dire sur le comportement des trajectoires du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$?

Hammou El-Otmany

2. On pose $Y_t = e^{at} X_t$ pour $t \geqslant 0$, écrire une l'EDS satisfaite par le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$.
3. En déduire, pour $u \geqslant 0$, l'expression de Y_u en fonction de u, Y_0, α, β, σ et du processus $(M_u)_{u\geqslant 0}$ donné par :
$$\forall u \geqslant 0,\ M_u = \int_0^u e^{as} X_s \, dWs.$$
4. Montrer que $(M_u)_{u\geqslant 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(F_t)_{t\geqslant 0}$. En déduire $\mathbf{E}(M_u)$ pour $u \geqslant 0$.
5. Exprimer $\mathbf{E}(Y_u)$ et $\mathbf{E}(X_u)$ en fonction u, X_0 α, β et σ.
6. Le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est-il une martingale, relativement à $(F_t)_{t\geqslant 0}$?

Hammou El-Otmany