A.U. : 2020-2021
Prof. H. El-Otmany

1. Intégrales doubles

Exercice n°1 *Calcul des intégrales doubles sur un domaine rectangulaire ou pavable.* Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\int\int_D \sin(x+y)dxdy$, $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$
2. $\int\int_D (2+8xye^{x^2+y^2})dxdy$, $D = [0,1] \times [0,2]$
3. $\int\int_D y\cos(xy)dxdy$, $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$
4. $\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$, $D = [-1,0] \times [0,1]$
5. $\int\int_D ye^{xy}dxdy$, $D = [1,2] \times [0,2]$
6. $\int\int_D \frac{1}{(x+y+1)}dxdy$, $D = [0,1] \times [0,1]$
7. $\int\int_D \sin(x)\cos(y)dxdy$, $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Exercice n°2 Pour chacune des intégrales doubles suivantes, représenter graphiquement le domaine d'intégration, puis calculer leurs valeurs

1. $\int\int_D x^2ydxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$.
2. $\int\int_D (x^2+3y^2)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1, x-1 \leqslant y \leqslant 1-x\}$.
3. $\int\int_D (x^2+x+3)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leqslant y \leqslant 1+\frac{x^2}{2}\}$.
4. $\int\int_D x^2ydxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1-y\}$.
5. $\int\int_D (x+ye^x)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$.
6. $\int\int_D (x-y)dxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}y^2+1, -2 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{4}x^2+3\}$.
7. $\int\int_D ydxdy, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant y \leqslant x, x+y \leqslant 2\}$.

Exercice n°3 Pour chacune des intégrales doubles suivantes, déterminer explicitement le domaine d'intégration, puis calculer leurs valeurs

1. $\int\int_D (x^2+x+3)dxdy$ où D est un triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(2,0)$.
2. $\int\int_D (3x-2y+1)dxdy$ où D est la région comprise entre les droites d'équations $x=1$, $x=4$ et les deux paraboles d'équations respectives $y=(x-2)^2-4$, $y=-(x-3)^2+4$.
3. $\int\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$ où D est la région du premier quadrant à l'intérieur du cercle centré à l'origine de rayon R et dans le demi-plan ne contenant pas l'origine, et dont le bord la droite $y=-x+R$.
4. $\int\int_D xydxdy$ où D est la région délimitée par les droites $y=-x-1$, $y=1-x$ et celle passant par $(1,0)$ et parallèle à l'axe (Oy).
5. $\int\int_D xydxdy$ où D est la région délimitée par l'hyperbole $xy=1$ et les droites $x=2$, et $y=x$.
6. $\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ où D est la région délimitée par le parabole $y=x^2$ et la droite $y=x$.
7. $\int\int_D xdxdy$ où D est la région délimitée par le parabole $y=x^2$, l'hyperbole $xy=1$ et la droite $x=\frac{1}{2}$.

Exercice n°4 *Symétrie dans une intégrale*

Soit $D = [-2, 2] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ le carré fermé de sommets $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que $\int\int_D f(x, -y)dxdy = \int\int_D f(x, y)dxdy$ (on pourra par exemple appliquer Fubbini). Montrer de même que $\int\int_D f(-x, y)dxdy = \int\int_D f(x, y)dxdy$ puis que
$$\int\int_D f(-x, -y)dxdy = \int\int_D f(x, y)dxdy.$$
2. Supposons que f est impaire, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in D$ on a $f(-x, -y) = -f(x, y)$. Que peut dire alors de $\int\int_D f(x, y)dxdy$.

Exercice n°5 *Changement de variables*

Pour chacune des intégrales doubles suivantes, représenter graphiquement le domaine d'intégration, puis calculer l'intégrale en utilisant un changement de variable approprié.

1. $\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
2. $\int\int_D (x^2 + y^2)dxdy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3, y \geqslant 0\}$.
3. $\int\int_D (x^2 + y^2)dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 2x < 4\}$.
4. $\int\int_D (2x^3 - y)dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \}$ où $a, b \in \mathbb{R}^*$.
5. $I = \int\int_D (x - y)dxdy$ où D est délimité par les droites d'équations $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.
6. $I = \int\int_D (x + y)e^{x^2-y^2}dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$.
7. $I = \int\int_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$.
8. $I = \int\int_D (x^2 - y)dxdy$ où D est le carré de sommets $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ et $(0, 1)$.
9. $\int\int_D x^2dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4\}$.

2. Intégrales triples

Exercice n°6 *Calcul des intégrales triples sur un domaine parallélépipédique ou borné*

Calculer les intégrales triples suivantes :

1. $\int\int\int_\Omega (x^2 - 2yz)dxdydz$, $\Omega = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$.
2. $\int\int\int_\Omega (1 - 2yz)dxdydz$, Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\}$.
3. $\int\int\int_\Omega (1 + x + y + z)^{-3}dxdydz$ où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+; x + y + z \leqslant 1\}$.
4. $\int\int\int_\Omega (x^2 + yz)dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+;\ x + y + 2z \leqslant 1\}$.
5. $\int\int\int_\Omega (x^2 + y^2 + 1)dxdydz$, $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$.

Exercice n°7 *Changement de variables*

Pour chacune des intégrales triples suivantes, représenter graphiquement le domaine d'intégration, puis calculer l'intégrale en utilisant un changement de variable approprié.

1. $\int\int\int_\Omega (1 + x + y + z)^{-3}dxdydz$ où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+; x + y + z \leqslant 1\}$.
2. $\int\int\int_\Omega (1 - 2yz)dxdydz$ où $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$.

3. $\int\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+;\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9\}$.
4. $\int\int\int_\Omega xyzdxdydz$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}. \quad (a,b,c>0)$
5. $\int\int_\Omega (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9\}$.

3. Applications des intégrales multiples

Exercice n°8 *Calcul d'intégrale simple.* On souhaite calculer

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, on a

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy}dy.$$

   En déduire que $I = \int\int_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$ avec $D = [0,1]\times[0,1]$

2. En intervertissant les rôles de x et y, montrer que

$$2I = \int\int_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$$

3. En déduire que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice n°9 *Aire, Centre de gravité ou d'inertie.* Évaluer l'aire, le centre d'inertie ou de gravité sachant que tous les domaines sont supposés homogènes :

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leqslant y^2+2y \leqslant x \leqslant y+2\}$.
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant 0\}$.
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9,\ x \geqslant 0\}$.
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \}$ où $a,b \in \mathbb{R}^*$.
5. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+2y^2 \leqslant 9, (x-1)^2+2y^2 \geqslant 1\}$.

Exercice n°10 *Calcul de volume d'un solide*

1. Calculer le volume du solide Ω de $\mathbb{R}^3_+$ défini par $x+y+z \leqslant 1$.
2. Calculer le volume du solide Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par $x^2+y^2-x<0$ et $x^2+y^2+z^2<1$.
3. Calculer le volume du solide Ω de $\mathbb{R}^3$ défini par $x^2+y^2+2z<1$ et $z>1$.
4. Calculer le volume du solide Ω de $\mathbb{R}^3$ délimité par le paraboloïde d'équation $z = x^2+y^2$ et le cylindre $z = 9-y^2$.
5. Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangulaire de longueur L et de largeur l.

Exercice n°11 *Potentiel électrique.*

Soient $B(O,R)$ la boule de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R>0$ telle que

$$B(0,R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\},$$

et $S(O,R)$ la sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R>0$ telle que

$$S(0,R)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=R^2\}.$$

En électromagnétisme, le potentiel électrique engendré au point $M(0,0,\alpha)$ si $\alpha>R$ par la sphère $S(O,R)$ chargée uniformément par une densité ρ est donnée par l'intégrale suivante :

$$V_e(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_{B(O,R)}\frac{\rho}{x^2+y^2+(z-\alpha)^2}dxdydz$$

1. Évaluer $V_e(M)$.

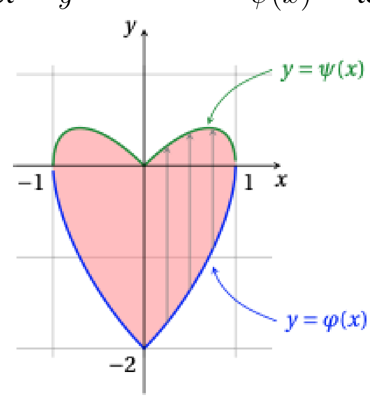
Exercice n°12 On considère un corps sous forme d'un disque de frein d'une roue dont deux morceaux sont usés, représenté par le domaine $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\ |y|\geqslant|x|\}$.

1. Représenter graphiquement le domaine $\mathcal{R}$.
2. Calculer l'aire de $\mathcal{R}$
3. Calculer l'intégrale double $\int\int_{\mathcal{R}}\frac{x}{y}dxdy$.

Exercice n°13 On se propose de calculer l'aire du domaine $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 2x^2-2|x|(y+1)+(y+1)^2\leqslant 1\}$.

1. Déterminer les fonctions $y=\varphi(x)$ et $y=\psi(x)$ telles que

   $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}.$



2. En utilisant le changement de variable $x=\sin(t)$, montrer qu'une primitive de $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1]$ est $\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)}{2}$
3. Par application de la symétrie, déterminer l'aire du domaine $\mathcal{C}$.

Exercice n°14 Dans un chantier publique, un sac de ciment tombe par terre et le ciment s'éparpille au sol avec une concentration non homogène

$$c(x,y)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2},\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Calculer la quantité totale et celle moyenne du ciment éparpillé dans le disque de rayon $R>0$ autour du sac.