Devoir surveillé, Samedi 22 mai 2021
Durée : 2 heures **Prof.** H. El-Otmany

Règlement : *Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits. Soignez votre rédaction. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve). Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif.*
Ce sujet, comportant 2 pages, est constitué de questions de cours et 4 exercices. Bon courage !

****

Questions de cours *[2 points]*

1. Énoncer le Théorème de Fubini dans un pavé de $\mathbb{R}^2$.
2. Qu'est-ce qu'une courbe plane paramétrée ? Donner un exemple de paramétrisation d'une droite et d'un cercle.

Exercice n°1 *[6 points]* Calculer les intégrales doubles et triples suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_D (x+ye^x)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ |y|\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$.
2. $\displaystyle\int\int_D exp\left(\frac{x}{y}\right)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geqslant 0,\ x\leqslant y\leqslant 1\}$.
3. $\displaystyle\int\int_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+xy}$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 16\}$.
4. $\displaystyle\int\int\int_\Omega (x^2+2yz)dxdy$ où $\Omega=[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$.
5. $\displaystyle\int\int\int_\Omega (1+2yz)dxdy$ où $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 3,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$.
6. $\displaystyle\int\int\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}dxdyz$ où $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+;\ 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16\}$.

Exercice n°2 *[4 points]*

1. Représenter la région D et calculer son aire lorsque :
   a) D est l'intérieur de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{7}=1$.
   b) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+;\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x\}$.
2. Supposons que le solide Ω est homogène et sa masse volumique vaut 1, calculer son volume et son centre de gravité dans les cas suivants :
   a) Ω est l'intérieur de la boule unité de rayon $R=5$.
   b) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\leqslant 2x,\ x^2+y^2\leqslant 2y,\ 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\}$.

Exercice n°3 *[4 points]* On souhaite connaître l'usure d'un disque de freinage de voiture en calculant l'intégrale $I=\displaystyle\int\int_D \frac{x}{y}dxdy$ avec $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9,\ |y|\leqslant|x|\}$. Pour ce faire, on propose deux manières différentes pour calculer I.

1. Représenter graphiquement D et calculer son aire.
2. Sachant que le disque de freinage a une densité massique $\mu(x,y)=\alpha\dfrac{x}{y}+(1-\alpha)\dfrac{y}{x}$ où $\alpha\in]0,1]$ est l'indicateur d'usure (si $\alpha=1$, le disque est usé).

TOURNEZ LA PAGE S.V.P. ↪

a) Calculer la masse et le centre de gravité de D.
b) Déterminer la partie usée du disque de freinage.

3. Exprimer I de trois manières comme une intégrale itérée avec des expressions explicites des bornes d'intégration :
   a) comme $\displaystyle\int\int \frac{x}{y} dxdy$.
   b) comme $\displaystyle\int\int \frac{x}{y} dydx$.
   c) en utilisant un changement de variables approprié.
4. Retrouver la valeur de I en utilisant une des méthodes précédentes (au choix).
5. Calculer le volume du solide $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant \frac{x}{y}\}$.

Exercice n°4 *[6 points]* On souhaite étudier le mouvement du point mobile $M(t)$ dont la trajectoire est donnée par la courbe plane γ paramétrée en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) & = t^3 - 2t, \\ y(t) & = t^3 - 3t + \frac{4}{3t}. \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition et l'ensemble de réduction pour étudier γ.
2. Le mouvement du mobile $M(t)$ est-t-elle régulier ? (indication : il suffit de montrer que la courbe γ est régulière).
3. Dresser le tableau de variation des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
4. Déterminer les droites tangentes à la courbe γ aux points particuliers du domaine d'étude.
5. Déterminer les branches infinies de γ.
6. Préciser les points multiples de la courbe γ en résolvant $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pour $t_1 \neq t_2$.
7. Tracer la trajectoire du point mobile $M(t)$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en utilisant les questions précédentes.

FIN D'ÉPREUVE.

Nom : Prénom :

FEUILLE À RENDRE AVEC LA COPIE

Question 7. de l'exercice n°4 : tracé de la trajectoire de $M(t)$.