Règlement : *Documents écrits, électroniques, calculatrices programmées et téléphones portables interdits. Soignez votre rédaction. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve). Toute réponse doit être justifiée. Le barème est donné à titre indicatif.*
Ce sujet, comportant 2 pages, est constitué de questions de cours et 3 exercices. Bon courage !

****

Questions de cours *[2 points, 10 min]*

1. Énoncer le Théorème de Fubini dans un pavé de $\mathbb{R}^2$.
2. Qu'est-ce qu'une surface fermée ? Donner un exemple.

Exercice n°1 *[4 points, 20min]* Calculer les intégrales doubles et triples suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_D 2x dx dy$ où $D = [0,1] \times [1,2]$.
2. $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2) dx dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 3\}$.
3. $\displaystyle\int\int\int_\Omega (x^2+z^2) y dx dy dz$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^2;\ x^2+y^2 \leqslant 16, z \leqslant 5\}$.
4. $\displaystyle\int\int\int_\Omega \frac{xz^2 dx dy dz}{x^2+y^2+z^2}$ où $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3;\ 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16\}$.

Exercice n°2 *[7 points, 1h]* On souhaite étudier le mouvement d'un fluide incompressible de viscosité μ s'écoulant en régime stationnaire dans un domaine rectangulaire $\Omega = [-3,3] \times [-5,5]$ à obstacle D. On suppose que l'obstacle D est déterminé par les paraboles $\mathcal{P}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$, et que le champs de vitesses est associé à une 1-forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega(x,y) = (x^2+y^2-9)dx - 6y dy.$$

1. Calculer l'aire du domaine D par un calcul direct et en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. Montrer que la forme différentielle ω n'est pas exacte.
3. Quelle condition doit vérifier la viscosité μ pour que la forme différentielle $\mu\omega$ soit fermée
4. La condition trouvée en question 3. est-elle suffisante pour que $\mu\omega$ soit exacte ?
5. Déterminer la viscosité μ et donner l'expression de la forme différentielle $\mu\omega$.
6. Montrer que le champs de vitesses $\mu\omega$ est un champs de gradient (indication : chercher la primitive de $\mu\omega$.
7. Calculer la circulation $\mu\omega$ le long du circuit formé par la portion de $\mathcal{P}_1$ allant de $A(0,0)$ vers $B(1,1)$, puis celle de $\mathcal{P}_2$ allant de $B(1,1)$ vers $A(0,0)$.
8. On recouvre l'obstacle par un cube de $\mathbb{R}^3$ de côtés $[0,1]$, orienté par les vecteurs normaux sortant du cube. Calculer le flux de champs de vitesses $V(\mu(x^2+y^2-9), -6y\mu, 0)$ à travers le cube en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P. $\hookrightarrow$

Exercice n°3 *[10 points, 1h30min]* Lors d'une course cycliste, le peloton souhaite contrôler la position d'un coureur X en étudiant sa trajectoire. À ce stade, deux spécialistes interviennent en proposant deux modèles mathématiques différents qui donnent les mêmes résultats en multipliant par un fonctionnel précis. Le premier modèle utilise les courbes cartésiennes en repérant un point $M(t)$ du coureur. Cependant, le deuxième modèle utilise les courbes polaires en identifiant un point $M(\theta)$ de la roue du coureur.
Modèle cartésien : $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ **avec** $x(t) = t(t^2 - 3)$ **et** $y(t) = (t-3)e^t$**,** $t \in \mathbb{R}$**.**

1. Déterminer la région admissible D_γ de parcours du coureur X.
2. Le mouvement du coureur est-t-il régulier le long de la course ?
3. Dresser le tableau de variation des fonctions x et y.
4. Donner la position du coureur aux instants $t = -1, 0, 1, 2$, puis déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe à chaque point.
5. Déterminer les éventuelles branches infinies.
6. Tracer la trajectoire du coureur X dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en respectant les résultats trouvés dans les questions précédentes.
7. *** Calculer la longueur de la trajectoire entre $t = 0$ et $t = 81$.

Modèle polaire : $\rho(\theta) = 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$**,** $\theta \in \mathbb{R}$

8. Déterminer la région admissible D_ρ de parcours du coureur X et l'intervalle d'étude de ρ.
9. Dresser le tableau de variations de la fonction ρ sur $[-\pi; \pi]$.
10. Donner la position du coureur à $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}$, puis déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe en ce point.
11. Tracer la trajectoire de la roue dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en respectant les résultats trouvés dans les questions précédentes.
12. *** Déterminer une transformation angulaire et non-linéaire permettant de retrouver le tracé proposé en modèle cartésien via le modèle polaire.
13. *** Calculer la longueur de la trajectoire entre $\theta = 0$ et $\theta = 9\pi$.

1. Pour un tracé cohérent, il faudra absolument respecter les règles ci-dessous :
$\diamondsuit$ le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ doit être orthonormé avec $1\, cm$ correspondant à 1 carreau ;
$\diamondsuit$ l'axe des abscisses (Ox) sera gradué de -5 à 20 ;
$\diamondsuit$ l'axe des ordonnées s(Oy) sera gradué de -10 à 6.
2. Les questions notées en * sont basées sur les notions de symétrie et de géométrie différentielle.**

FIN D'ÉPREUVE.