MA212 : ANALYSE-INTÉGRALES MULTIPLES
DEVOIR MAISON N° 1
———-

A.U. : 2020-2021
Prof. H. El-Otmany

Règlement : *Devoir à rendre avant vendredi 14 mai 2021.*
****

Exercice n°1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int\int_D x^y dxdy$ où $D = [0,1] \times [3,4]$. En déduire la valeur $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 - x^3}{\ln x} dx$.
2. $\displaystyle\int\int_D (x-y)^{2021} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geqslant x^2,\ x \geqslant y^2\}$.
3. $\displaystyle\int\int_D (x + ye^x) dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant \sqrt{1-x^2}\}$.
4. $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+5} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leqslant 4\}$.
5. $\displaystyle\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)^2 dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 25\}$.
6. $\displaystyle\int\int\int_\Omega (x^2+y^2+1) dxdydz$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$.

Exercice n°2

On considère deux domaines D_1 et D_2 du plan $\mathbb{R}^2$ tels que

$$D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y \leqslant 2,\ y-x \leqslant 2,\ y \geqslant x^2\},$$
$$D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x+y \leqslant 2,\ y-x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}.$$

1. Représenter graphiquement D_1 et D_2
2. Calculer l'aire de D_1 et D_2. Déduire que la somme des aires D_1 et D_2 vaut 4.
3. Calculer le volume du solide Ω tel que $\Omega = \{(x,y;z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ (x,y) \in D_2, 0 \leqslant z \leqslant 2xy\}$.

Exercice n°3 Soit S la surface d'une plaque d'induction. La distribution de la température sur la plaque est donnée par la fonction suivante : $T(x,y) = 20 - 4x^2 - 4y^2$, pour tout $(x,y) \in S$

1. Calculer la température totale et moyenne qui se propagent dans une surface circulaire de rayon $R > 0$.

Exercice n°4 On souhaite calculer l'énergie cinétique d'un milieu homogène $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ $(R > 0)$ ayant une masse M et qui tourne avec une vitesse angulaire de la toupie $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2) dxdy$.
2. Supposons qu'un petit élément de surface $\delta S = \delta x \delta y$, on a $\delta m = \rho \delta x \delta y$ avec ρ est la densité du milieu homogène. Démontrer que l'énergie cinétique est $\delta E_c = \dfrac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 \delta x \delta y$.
3. En déduire la valeur de l'énergie cinétique totale du milieu homogène sachant que $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$.
4. Calculer le volume du solide Ω émergé dans le milieu D tel que $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ (x,y) \in D,\ z \leqslant \dfrac{4(x^2+y^2)}{MR^2w^2}\right\}$.