***NB :** cette fiche présente les techniques nécessaires minimales pour les formes différentielles, les intégrales curvilignes, Théorème de Green-Riemann, Théorème de Gauss-Ostrogradski et Théorème de Stokes. Elle ne constitue pas un objectif, mais un prérquis ! ! !*

♢ – – – – – – – – – – –FORMES DIFFÉRENTIELLES ET FACTEUR INTÉGRANT – – – – – – – –♢

Soit ω une 1-forme différentielle [1] définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) telle que

$$\omega = Pdx + Qdy \quad (resp. \omega = Pdx + Qdy + Rdz)$$

où P, Q et Q sont des fonctions de classe C^1 sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. ω est de classe C^k si P, Q et Q sont des fonctions de classe C^k sur U.
2. ω est une forme différentielle exacte sur U si et seulement s'il existe $f \to \mathbb{R}$ telle que $df = \omega$.
   — sur $\mathbb{R}^2$, $df = \omega \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.
   — sur $\mathbb{R}^3$, $df = \omega \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = P$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial f}{\partial z} = R$.
   Remarque : ω exacte sur U avec $df = \omega \implies \omega$ admet au moins une primitive f et $\{f + c,\ c \in \mathbb{R}\}$.
   ! ! ! ! Attention : f n'est pas unique sauf s'il vous demande de chercher une primitive qui vérifie une telle condition $f(x_0, y_0, z_0) = b \in \mathbb{R}$, ici il faut chercher la valeur de c.
3. ω est forme différentielle fermée si $d\omega = 0$, c'est-à-dire
   — sur $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
   — sur $\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
   Remarque : ω exacte sur U avec $df = \omega \implies \omega$ fermée sur U.
4. Le champs vectoriel $\vec{\mathbf{V}} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dérive d'un potentiel scalaire (ou admet un potentiel scalaire) s'il existe un champs scalaire $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\vec{\mathbf{V}} = \vec{grad} f$, i.e. si on associe $\vec{\mathbf{V}} = (P, Q, R)$ à une 1-forme différentielle ω, on a $\vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.
   Remarque : ω exacte avec $df = \omega \Leftrightarrow \vec{\mathbf{V}}$ dérive d'un potentiel et $\vec{\mathbf{V}} = \vec{grad} f$.
5. Théorème de Poincaré : si U est étoilé [2] et ω fermée sur U alors ω est exacte sur U.
6. $\vec{\mathbf{V}}$ dérive (admet) d'un potentiel scalaire $\implies \vec{rot}\vec{\mathbf{V}} = \vec{0}$.
7. $\vec{rot}\vec{\mathbf{V}} = \vec{0}$ et U étoilé $\implies \vec{\mathbf{V}}$ dérive (admet) d'un potentiel scalaire,i.e. $\vec{\mathbf{V}} = \vec{grad} f$.
8. ϕ est un facteur intégrant d'une 1-forme différentielle non exacte si $\phi\omega$ est exacte.
   ! ! ! ! Attention : Ici, on cherche
   — sur $\mathbb{R}^2$, $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui depend uniquement d'une seule variable x ou y telle que $\phi\omega = \phi P dx + \phi Q dy$ est exacte.
   — sur $\mathbb{R}^3$, $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2$ qui depend au maximum de deux variables (x, y) ou (y, z) ou (x, z) telle que $\phi\omega = \phi P dx + \phi Q dy + \phi R dz$ est exacte.

1. une 1-forme différentielle ou une forme différentielle de degrée 1 sur U est une application de U dans l'espace dual de $\mathbb{R}^n$ noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $n = 2, 3$
2. on dit que U est étoilé par rapport à un point a si $\forall x \in U$, $[a, x] = \{M(t) : ta + (1 - t)x, t \in [0, 1]\} \subset U$, i.e. le segment $[a, x]$ est inclu dans U pour tout $x \in U$. U est donc étoilé s'il est étoilé par rapport à un point quelconque de U. Exemples : toute partie convexe est étoilé, $\mathbb{R}^2$ est étoilé, $\mathbb{R}^2\{(0, 0)\}$ n'est pas étoilé. Géométriquement, tout milieu sans obstacle (trou, fracture,...) est étoilté

Hammou El-Otmany

◇ – – – – – – – – – – – – – – – – –INTÉGRALE CURVILIGNE– – – – – – – – – – – – – – – ◇

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée (ou paramétrage) dont l'image $\gamma([a, b])$ est le chemin $\overset{\frown}{AB}$ de point initial $A = \gamma(a)$ et de point final $B = \gamma(b)$. Par exemple : $\gamma(t) = (1 + t, 2 - t)$, $t \in [0, 1]$ est le paramétrage de la droite dirigée par le vecteur $(1, -1)$ et qui passe par le point $(1, 2)$, i.e. le paramétrage du segment $[AB]$ avec $A(1, 2)$ et $B(2, 1)$.

1. L'intégrale curviligne de la forme différentielle ω le long du chemin γ est
   — sur $\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]\, dt$ où $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
   — sur $\mathbb{R}^3$, $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\, dt$ où $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
2. Si ω est une 1-forme différentielle exacte alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

   Remarque : γ est fermé, i.e. $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) \Longrightarrow \displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.
3. Relation de Chasles : si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.

   Remarque : Toutes les propriétés des intégrales simples sont valables pour les intégrales curvilignes (linéarité, produit par un scalaire, inversion des bornes,...).

◇ – – – – – – – – – – – – – – – – –THÉORÈME DE GREEN-RIEMANN– – – – – – – – – – – – – ◇

Soient D un compact [3] de $\mathbb{R}^2$ ayant le bord [4] ∂D orienté dans le sens direct et $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert contenant D. Alors, on a

$$\int_{\partial D^+} \omega = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

***Calcul d'aire de** D**,** $Aire(D) = \displaystyle\int\int_D dxdy$:

- En coordonnées cartésiennes : $Aire(D) = \displaystyle\int_{\partial D^+} xdy = -\int_{\partial D^+} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} xdy - ydx$.
- En coordonnées polaires : $Aire(D) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{\partial D^+} r(\theta)^2 d\theta$.

◇ – – – – – – – – – – – – – – – – – –SURFACE ET FLUX– – – – – – – – – – – – – – – – – – ◇

Avant d'énoncer les théorèmes d'intégration sur une surface, il utile de rappeller les notions suivantes :

- Une surface S paramétrée dans l'espace est la donnée d'une fonction $s : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 telle que
$$s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$
- Une surface paramétrée S est régulière en un (u, v) sile vecteur normal $\vec{n}_S := \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$ est non nul au point (u, v). Autrement, si la famille $\left\{\frac{\partial s}{\partial u}, \frac{\partial s}{\partial v}\right\}$ est libre ou linéairement independante.

3. Dest un compact si il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, i.e. de tout recouvrement de D par des ouverts on peut extraire un sousrecouvrement fini. Tout partie fermée bornée est un compact.

4. Le bord de D est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ appartenant à D mais n'appartenant pas à l'intérieur de D, i.e. $\partial D = D \backslash \mathring{D}$

Hammou El-Otmany

— Le flux d'un champs vectoriel $\vec{\mathbf{V}}$ à travers une surface orientée par un choix de normale $\vec{n}_S$ est

$$\Phi(\vec{\mathbf{V}}, S^+) = \iint_{S^+} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S^+} \vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{n}_S dA = \iint_{S^+} \vec{\mathbf{V}}(s(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\right) dudv = -\Phi(\vec{\mathbf{V}}, S^-).$$

$\diamondsuit$ – – – –THÉORÈME DE GAUSS-OSTROGRADSKI OU THÉORÈME DE DIVERGENCE– – – – $\diamondsuit$

Soit S une surface fermée [5] qui délimite un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, i.e. $\partial\Omega = S$. Soient $\vec{\mathbf{V}} = P, Q, R)$ un champs vectoriel de classe C^1 et $\vec{n}_S$ le vecteur normal vers l'extérieur de Ω. Alors, on a

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{\mathbf{V}}\, dxdydz = \oiint_{\partial S^+} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{S} = \Phi(\vec{\mathbf{V}}, S^+)$$

où $\mathrm{div}\vec{\mathbf{V}} = \nabla \cdot \vec{\mathbf{V}} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Remarque : si $\mathrm{div}\vec{\mathbf{V}} = 0$ alors $\Phi(\vec{\mathbf{V}}, S^+) = 0$.

Pour une 1-forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ de classe C^1, on a

$$\oiint_{\partial S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

***Calcul du volume de** Ω : $Vol(\Omega) = \iiint_\Omega dxdydz = \frac{1}{3}\left|\oiint_{\partial S^+} dydz + dxdz + dxdy\right|$.

$\diamondsuit$ – – – – – – –THÉORÈME DE STOKES OU THÉORÈME DE ROTATIONNEL– – – – – – – $\diamondsuit$

Soient S une surface orientée de bord ∂S et $\vec{\mathbf{V}} = (P, Q, R)$ un champs de vecteurs de classe C^1 sur un voisinage de S. Alors, on a

$$\oint_{\partial S^+} \vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{OM}} = \iint_S \vec{rot}\vec{\mathbf{V}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{\mathbf{V}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

où $\vec{rot}\vec{\mathbf{V}} = \nabla \times \vec{\mathbf{V}} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$. En terme de flux, on a $\Phi(\vec{rot}\vec{\mathbf{V}}, S) = circulation(\vec{\mathbf{V}}, \partial S^+)$. De plus, si $\{s(u,v),\ u, v \in D\}$ une paramamétrisation de la surface S compatible avec l'orientation choisie suivant la normale $\vec{n}_S$, alors le théorème de Stokes s'écrit

$$\Phi(\vec{rot}\vec{\mathbf{V}}, S) = \iint_D \vec{rot}\vec{\mathbf{V}} \cdot \vec{n}_S(u,v) dudv = \iint_D \vec{rot}\vec{\mathbf{V}} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\right) dudv.$$

Remarque : Le cercle autour de l'intégrale $\oint$ désigne que l'intégrale est calculée sur un chemin fermé.

Si on associe une 1-forme différentielle de classe C^1 au champrs vectoriel $\vec{\mathbf{V}}$, on obtient :

— sur $\mathbb{R}^3$, $\oint_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

— sur $\mathbb{R}^2$ avec $S = D$, $\oint_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$. (Théorème de Green-Riemann).

Remarque : Si S est une surface fermée (i.e. sans bord) et $\vec{\mathbf{V}}$ est un champs vectoriel de classe C^1 au voisinage de S alors le flux de $\vec{rot}\vec{\mathbf{V}}$ à travers S est nul. On écrit

$$\partial S \Longrightarrow \Phi(\vec{rot}\vec{\mathbf{V}}, S) = 0.$$

5. Une surface paramétrée régulière S est dite fermée (ou sans bord) si son bord est vide i.e. $\partial S = \emptyset$. Exemple : une sphère est une surface fermée. Mais, la surface S paramétrée par $s(u,v) = (u, v, v^2),\ u, v \in [0,1]$ n'est pas fermée car son bord est l'union de 4 courbes.

Hammou El-Otmany