Arbres de probabilités, Espérance, Variance, loi binomiale et son approximation

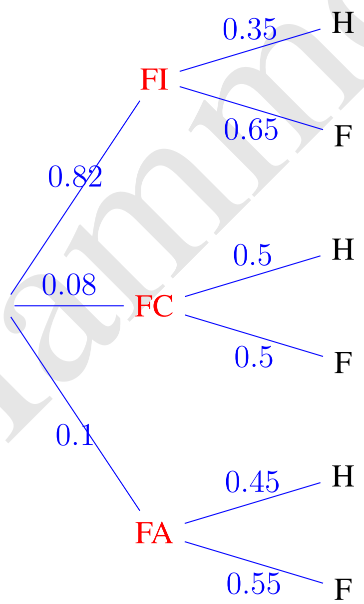
Semestre : 3
A.U. : 2022-2023
Prof. H. El-Otmany

Corrigé n°1

1. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$ et $P(A\cap B)=0.3$.
   (a) $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.4=0.6.$
   (b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.4-0.3=0.6.$
   (c) $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.5}=0.6.$
   (d) $P_B(A)=\frac{P(A\cap B}{P(B)}=\frac{0.3}{0.4}=0.75.$
2. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A)=0.4$, $P(B)=0.6$ et $P_A(B)=0.2$.
   (a) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6.$
   (b) $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)=1-0.2=0.8.$
   (c) $P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)=0.2\times 0/4=0.08.$
   (d) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.6-0.08=0.92.$
3. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : $P(A)=0.5$, $P_A(B)=0.6$ et $P_B(B)=0.8$.
   (a) $P(A\cap B)=P_a(B)\times P(A)=0.6\times 0.5=0.3$
   (b) $P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P_B(A)}=\frac{0.3}{0.8}=0.375.$
   (c) $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\Longrightarrow P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.375-0.3=0.075.$
   (d) $P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0.075}{1-0.5}=0.15.$

Corrigé n°2 Dans un département "techniques de commercialisation", trois formations sont proposées : formation initiale (FI), formation continue (FC) et formation par alternance (FA). On sait que : 8% des étudiants sont inscrits en FC ; 10% des étudiants sont inscrits en FA ; les femmes représentent : 65% des inscrits en FI ; 50% des inscrits en FC et 55% des inscrits en FA.

1. Représenter ce situation à l'aide d'un arbre de probabilité que l'on complétera dans la suite de l'exercice.



$P(H\cap FI)=P_{FI}(H)\times P(FI)=0.35\times 0.82=0.287$

$P(FI\cap F)=P_{FI}(F)\times P(FI)=0.65\times 0.82=0.533$

$P(FC\cap H)=P_{FC}(H)\times P(FC)=0.5\times 0.08=0.04$

$P(FC\cap F)=P_{FC}(F)\times P(FC)=0.5\times 0.08=0.04$

$P(FA\cap H)=P_{FA}(H)\times P(FA)=0.45\times 0.1=0.045$

$P(FA\cap F)=P_{FA}(F)\times P(FA)=0.55\times 0.1=0.055$

2. On choisit un étudiant au hasard.

— Déterminer la probabilité que cet étudiant soit une femme en FA.
$P(F \cap FA) = P_{FA}(F) \times P(FA) = 0.55 \times 0.1 = 0.055.$

— Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme.
$P(H) = P(H \cap FI) + P(H \cap FC) + P(H \cap FA) = (1 - 0.65) \times (1 - 0.08 - 0.1) + (1 - 0.5) \times 0.08 + (1 - 0.55) \times 0.1 = 0.372.$

— Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme ou en FC.
$P(H \cup FC) = P(H) + P(FC) - P(H \cap FC) = 0.372 + 0.08 - 0.08 \times 0.5 = 0.412.$

— Déterminer la probabilité que cet étudiant soit en FI sachant que c'est un homme.
$P_H(FI) = \frac{P(H \cap FI}{P(H)} = \frac{0.82 \times 0.35}{0.372} \approx 0.7715.$

Corrigé n°3 On tire simultanément au hasard 3 jetons dans un jeu de 10 jetons. Les jetons sont numérotés comme suit :$1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3$. Le prix de la participation à ce jeu est 5 euros.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain qui correspond à la somme obtenue en additionnant les nombres portés sur chaque jeton.

1. Déterminer l'univers Ω (ensemble des cas possibles pour l'expérience aléatoire) :

Univers Ω	$(1;1;1)$	$\cdots$	$\cdots$	$(1;1;2)$	$\cdots$	$(1;2;2)$	$\cdots$	$(2;2;2)$	$(2;2;3)$
Valeurs x_i	3	$\cdots$	$\cdots$	4	$\cdots$	5	$\cdots$	6	7

On en déduit le nombre des cas possibles : $C_{10}^3 = \binom{10}{3} = 120$ et le valeurs de Ω : $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Déterminer la loi de probabilité de X. Ici, on calcule les probailités associées à chaque valeur x_i. Par définition, on a

$$P(\texttt{Evénement}) = \frac{\texttt{Nombre de cas favorables}}{\texttt{Nombre de cas possibles}} = \frac{card(\texttt{Evénement})}{card(\Omega)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
P(X = 3) &= \frac{C_5^3 \times C_4^0 \times C_1^0}{C_{10}^3} = \frac{10}{120}\\
P(X = 4) &= \frac{C_5^2 \times C_4^1 \times C_1^0}{C_{10}^3} = \frac{40}{120}\\
P(X = 5) &= \frac{C_5^1 \times C_4^2 \times C_1^0 + C_5^2 \times C_4^0 \times C_1^1}{C_{10}^3} =\\
P(X = 6) &= \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_1^1 + C_5^0 \times C_3^0 \times C_0^1}{C_{10}^3} = \frac{24}{120}\\
P(X = 7) &= \frac{C_5^0 \times C_4^2 \times C_1^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{120}
\end{aligned}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est

Valeurs x_i	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{6}{120}$

On vérifie facilement que la somme des probabilités vaut 1.

3. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il intéressant pour l'organisateur ?
   Par définition, on a

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + x_3 \times P(X = x_3) + x_4 \times P(X = x_4) + x_5 \times P(X = x_5)$$
$$= 3 \times \frac{10}{120} + 4 \times \frac{40}{120} + 5 \times \frac{40}{120} + 6 \times \frac{24}{120} + 7 \times \frac{6}{120} = 4.8$$

   Le jeu n'est pas intéressant car le gain moyen $E(X) = 4.8$€ est inférieur au prix de participation (5€.)

4. Calculer la variance $V(X)$. En déduire σ_X. Ici on souhaite mesurer l'écart par rapport à la moyenne : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} V(X) &= x_1^2 \times P(X = x_1) + x_2^2 \times P(X = x_2) + x_3^2 \times P(X = x_3) + x_4^2 \times P(X = x_4) \\ &\quad + x_5^2 \times P(X = x_5) - [E(X)]^2 \\ &= 3^2 \times \frac{10}{120} + 4^2 \times \frac{40}{120} + 5^2 \times \frac{40}{120} + 6^2 \times \frac{24}{120} + 7^2 \times \frac{6}{120} - 4.8^2 \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

   Par conséquent, $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.02} \approx 1$€.
   Remarque
   — plus l'écart-type est proche de 0, plus le risque de perte est faible.
   — plus l'écart-type est proche de l'espérance, plus le risque de perte est grand.

Corrigé n°4 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0.36)$.. Calculer $P(X = 3)$, $P(X \leqslant 4)$ et $P(X \geqslant 6)$.

— $P(X = 3) = C_{20}^3 \times 0.36^3 \times (1 - 0.36)^{20-3} = 1140 \times 0.36^3 \times 0.64^{17} \approx 0.02697$.
— $P(X \leqslant 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 4) &= 1 \times (1 - 0.36)^{20} + C_{20}^1 \times 0.36^1 \times (1 - 0.36)^{20-1} + C_{20}^2 \times 0.36^2 \times (1 - 0.36)^{20-2} \\ &\quad + C_{20}^3 \times 0.36^3 \times (1 - 0.36)^{20-3} + C_{20}^4 \times 0.36^4 \times (1 - 0.36)^{20-4} \\ &= 1 \times 0.64^{20} + 20 \times 0.36^1 \times 0.64^{19} + 190 \times 0.36^2 \times 0.64^{18} \\ &\quad + 1140 \times 0.36^3 \times 0.64^{17} + 4845 \times 0.36^4 \times 0.64^{16} \approx 0.1011. \end{aligned}$$

— $P(X \geqslant 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - [P(X \leqslant 4) + P(X = 5)] = 1 - [C_{20}^5 \times 0.36^5 \times (1 - 0.36)^{20-5}] = 1 - [0.1011 + 15504 \times 0.36^5 \times 0.64^{15}] \approx 0.7828$.
— $P(3 \leqslant X \leqslant 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1140 \times 0.36^3 \times 0.64^{17} + 4845 \times 0.36^4 \times 0.64^{16} + 15504 \times 0.36^5 \times 0.64^{15} \approx 0.2438$.

Corrigé n°5 Un livreur Uber Eats doit rendre visite à 7 clients. Il sait que la probabilité d'obtenir une commande est la même pour tous ses clients et que sa valeur est de 0.3. On admet que la décision de chaque client est indépendante des autres. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de clients qui ont passé une commande.

1. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
   On répète 7 fois la même expérience à 2 issues de manière indépendante. X compte le nombre de succès. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0.3$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n = 7; p = 0.3)$.

2. Déterminer la probabilité pour que le livreur obtient exactement trois commandes.

$$P(X=3) = C_7^3 \times 0.3^3 \times (1-0.3)^{7-3} = C_7^3 \times 0.3^3 \times (1-0.3)^4$$

3. Déterminer la probabilité pour que le livreur n'obtient aucune commande.

$$P(X=0) = C_7^0 \times 0.3^0 \times (1-0.3)^{7-0} = C_7^0 \times (1-0.3)^7 =$$

4. Le livreur a-t-il plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins deux commandes ?

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \\ &= 1 - \left(C_7^0 \times 0.3^0 \times (1-0.3)^{7-0} + C_7^1 \times 0.3^1 \times (1-0.3)^{7-1}\right) \end{aligned}$$

5. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Pour répondre à cette question, il faut donner la loi de probabilité de X.

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{6}{120}$	...	...	...

Par définition, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{7} x_i P(X=x_i) \\ &= (0 \times \frac{10}{120}) + (1 \times \frac{40}{120}) + (2 \times \frac{40}{120}) + (3 \times \frac{24}{120}) + (4 \times \frac{6}{120}) + (5 \times ...) + (6 \times ...) + (7 \times ....) \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=0}^{7} x_i^2 P(X=x_i) - [E(X)]^2 \\ &= (0^2 \times \frac{10}{120}) + (1^2 \times \frac{40}{120}) + (2^2 \times \frac{40}{120}) + (3^2 \times \frac{24}{120}) + (4^2 \times \frac{6}{120}) \\ &\quad + (5^2 \times ...) + (6^2 \times ...) + (7^2 \times ....) - [E(X)]^2 . \end{aligned}$$