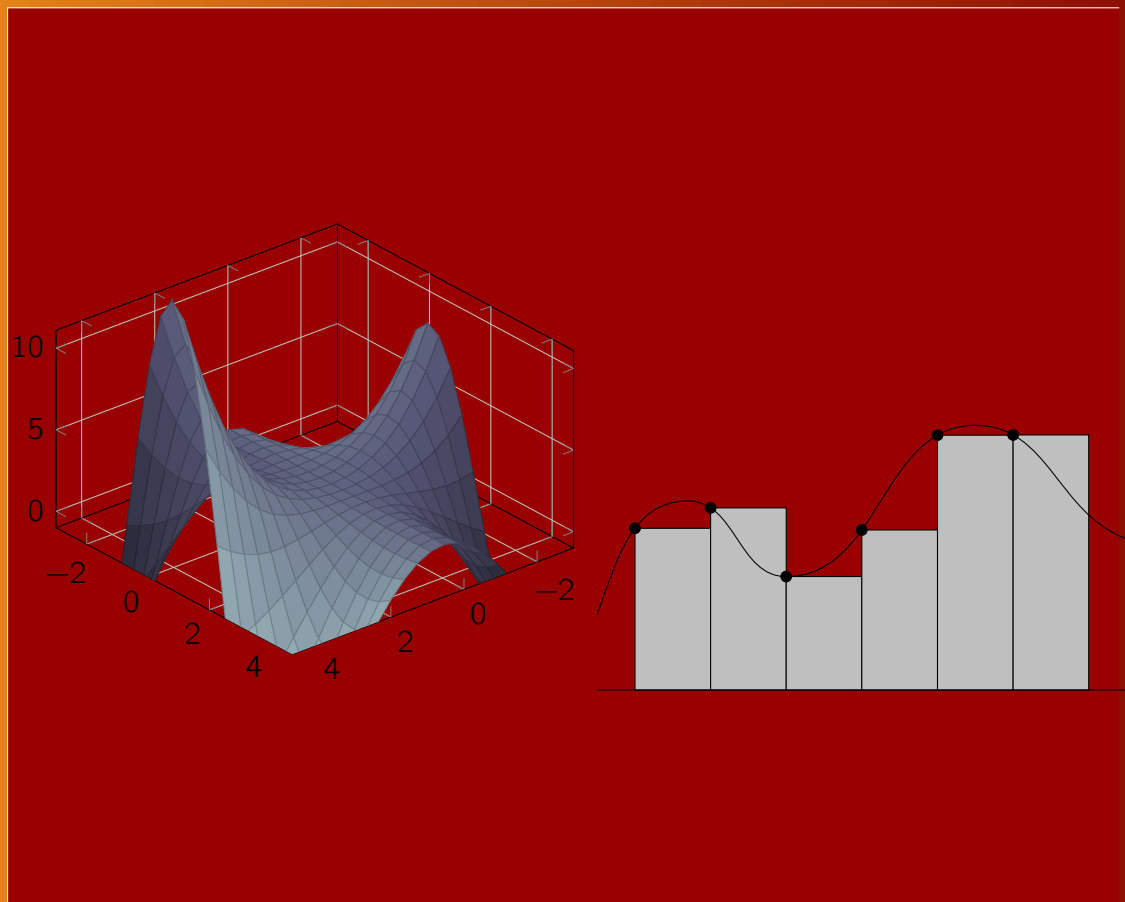


# Calibration des modèles en Finance



**Hammou El-Otmany**

# Table des matières

\*\*\*

<b>1</b>	<b>Modèle à volatilité locale</b>	<b>3</b>
.1.1	Présentation et hypothèse du modèle . . . . .	4
.1.2	L'EDP de Feynman-Kac et interprétation probabiliste . . . . .	5
.1.2.1	Intérêt pratique en Finance de Feynman-Kac . . . . .	7
.1.3	Propriétés des prix dans le modèle à volatilité locale . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Calibration de modèles</b>	<b>9</b>
.2.1	Introduction . . . . .	9
.2.2	Calibration de modèles . . . . .	10
.2.3	Problèmes inverses, bien posés, mal posés . . . . .	12
.2.4	Régularisation de problème mal posés linéaires en dimension $< +\infty$ . . . .	13
	<b>Bibliographie</b>	<b>15</b>
	<b>Références</b>	<b>16</b>
	<b>Index</b>	<b>17</b>

# Modèle à volatilité locale

\*\*\*

*A brainy quote – Its Author*

---

## chapter.1

.1.1	Présentation et hypothèse du modèle . . . . .	4
.1.2	L'EDP de Feynman-Kac et interprétation probabiliste . . . . .	5
.1.2.1	Intérêt pratique en Finance de Feynman-Kac . . . . .	7
.1.3	Propriétés des prix dans le modèle à volatilité locale . . . . .	7
.2.1	Introduction . . . . .	9
.2.2	Calibration de modèles . . . . .	10
.2.3	Problèmes inverses, bien posés, mal posés . . . . .	12
.2.4	Régularisation de problème mal posés linéaires en dimension $< +\infty$ . . . .	13

---

## .1.1 Présentation et hypothèse du modèle

On se place sur un espace de probabilité risque neutre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose que le marché est constitué d'un actif sans risque :

equation  $S_t = \exp(rt)$  (1.0) et d'un actif risqué  $(S_t, t \geq 0)$  qui suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dS_t = (r - \eta)S_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dW_t, \\ S_0 > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $(W_t, t \geq 0)$  est mouvement brownien,  $\eta \geq 0$  est le taux de dividendes ; détenir une action entre  $t$  et  $t + dt$  rapport  $\eta S_t dt$  en cash.

La fonction  $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est appelée fonction de volatilité locale .

On considère les hypothèses suivantes :

- $\sigma$  est  $C^0$ .
- $\forall T > 0, K_T, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, t \in [0; T]$  tel que

$$|x\sigma(t, x) - y\sigma(t, y)| \leq K_T |x - y| \quad (1.2)$$

L'équation différentielle stochastique (??) admet alors une unique solution forte  $(S_t, t \geq 0)$ , c'est-à-dire toute autre solution  $\tilde{S}_t$  est telle que  $P(S_t = \tilde{S}_t, p.p) = 1$ .

En particulier, le processus  $(S_t, t \geq 0)$  est un processus de Markov. Et on a même le résultat énoncé dans le lemme suivant :

### Lemme 1.

Si  $(S_u^{t,x})_{u \geq t}$  désigne la solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dS_u^{t,x} = (r - \eta)S_u^{t,x} du + S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u, \\ S_x^{t,x} > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

alors, pour  $t \leq u \leq T$ ,  $S_T^{t,x} = S_T^{u, S_u^{t,x}}$  p.s.

**Remarque 1.1** Sous les hypothèses de lipschitzieneté, nous avons un contrôle des moments :

$$\forall x \geq 0, \forall p \geq 1, \exists c(p, T) : \mathbb{E} \left( \max_{t \in [0, T]} |S_t^{0, x}|^p \right) \leq c(p, T) (1 + x^p).$$

## .1.2 L'EDP de Feynman-Kac et interprétation probabiliste

Nous nous intéressons au prix d'une option européenne qui paye  $f(S_T)$  en  $T$ . Son prix à l'instant  $t$  sachant  $t = x$  est donnée par :

$$v(t, x) = \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T^{t, x}) \right). \quad (1.4)$$

On suppose que  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait la condition suivante :

$$\exists c > 0 |f(x)| \leq c(1 + |x|^q), \quad (1.5)$$

si bien que

$$|v(t, x)| \leq c (1 + \mathbb{E}(|S_T^{t, x}|^q)) \leq \tilde{c}(1 + |x|^q). \quad (1.6)$$

### Théorème 2.

On suppose que  $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  telle que :  $\exists C > 0, \exists q > 0$

$$\max_{t \in [0, T]} |v(t, x)| \leq C(1 + x^q), \quad x \geq 0 \quad (1.7)$$

et telle que  $v$  résout l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) - rv(t, x) + (r - \eta)x \partial_x v(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \partial_{xx}^2 v(t, x) = 0, \\ v(T, x) = f(x) \end{cases} \quad (1.8)$$

alors

$$v(t, x) = \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T^{t, x}) \right).$$

Réciproquement, si  $v(t, x) \mapsto \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T^{t, x}) \right)$  est  $C^{1,2}$  alors  $v$  résout l'équation (1.8).

**Démonstration :** pour démontrer le théorème ci-dessus, on procède comme suit : **Sens direct :** On suppose que  $v$  est solution de l'EDP (1.8). On applique la formule d'Itô à

$e^{-r(u-t)}v(u, S_u^{t,x})$  entre  $u = t$  et  $u = T$

$$e^{-r(T-t)}v(T, S_T^{t,x}) = v(t, x) + \int_t^T (\partial_t v(u, S_u^{t,x}) - rv(u, S_u^{t,x}) + (r - \eta)x \partial_x v(u, S_u^{t,x})) du \\ + \int_t^T \left( \frac{1}{2} \sigma^2(u, S_u^{t,x}) \partial_{xx}^2 v(u, S_u^{t,x}) \right) du + \int_t^T e^{-r(u-t)} \partial_x v(u, S_u^{t,x}) S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u.$$

En utilisant (1.8), il vient que

$$e^{-r(T-t)}v(T, S_T^{t,x}) = e^{-r(T-t)}f(S_T^{t,x}) = v(t, x) + \int_t^T e^{-r(u-t)} \partial_x v(u, S_u^{t,x}) S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u$$

Si on peut prendre l'espérance et dire que  $\mathbb{E} \left( \int_t^T e^{-r(u-t)} \partial_x v(u, S_u^{t,x}) S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u \right) = 0$ , alors on a bien

$$v(t, x) = \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T^{t,x}) \right).$$

Ceci est vérifié si  $\mathbb{E} \left( \int_t^T (e^{-r(u-t)} \partial_x v(u, S_u^{t,x}) S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x}))^2 du \right) < +\infty$ .

A ce stade, nous fréquentons le problème suivant : Pas de contrôle sur  $\partial_x v$  donc on ne peut pas vérifier cette condition. Pour remédier à ce problème, nous nous intéressons au temps d'arrêt afin de localiser ce problème. La solution est de localiser.

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_n = \inf \{u \geq 0, S_u^{t,x} \geq x\}$ . On applique la formule d'Itô entre  $u = t$  et  $u = T \wedge \tau_n$ , on obtient

$$e^{-r(T-t)}v(T \wedge \tau_n, S_{T \wedge \tau_n}^{t,x}) = v(t, x) + \int_t^T \mathbb{1}_{u \leq \tau_n} e^{-r(u-t)} \partial_x v(u, S_u^{t,x}) S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x}) dW_u.$$

On utilise la bornitude de  $\partial_x v(u, S_u^{t,x}) S_u^{t,x} \sigma(u, S_u^{t,x})$  (i.e. ce terme est borné) sur le compact  $[0, T] \times [0, u]$ . Ainsi

$$\mathbb{1}_{T \geq \tau_n} + \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} v(\tau_n, S_{\tau_n}^{t,x}) \mathbb{1}_{T < \tau_n} \right)$$

Maintenant, on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , il vient que

(1.9)

Ici, nous avons utilisé  $u \mapsto S_u^{t,x}$  est  $C^0$  p.s. (presque sûrement) et bornée p.s. pour  $u \in [1, T]$ .

à revoir à la fin du document ..... page 3 ????

**Sens réciproque** : on suppose  $v(t, x) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} f(S_T^{t,x}) | \mathcal{F}_t)$  est  $C^{1,2}$  sur  $([0, T] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ . On considère  $S_t$  la solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dS_t = (r - \eta)S_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dW_t, \\ S_0 > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

On écrit,  $\mathbb{E}(e^{-rT} f(S_T) | \mathcal{F}_t)$  est une martingale, par la propriété de Markov

$$\mathbb{E}(e^{-rT} f(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-rt} v(t, S_t). \quad (1.11)$$

On applique la formule d'Itô et on écrit le drift (la partie associée à  $dt$ ) est nul p.s., on obtient l'EDP (1.8). ■

### .1.2.1 Intérêt pratique en Finance de Feynman-Kac

On peut calculer les prix d'options européennes en résolvant numériquement l'équation aux dérivées partielles (EDP) efficace comme ici en dimension  $d = 1$ .

En revanche, en dimension plus grande ( $d \geq 4$ ), il y'a toujours une équation aux dérivées partielles (EDP) de Feynman-Kac pour  $\mathbb{E}(F(S_T^1, \dots, S_T^d))$  mais le calcul par la méthode Monte Carlo (MC) est en général plus simple et plus rapide pour résoudre l'EDP.

## .1.3 Propriétés des prix dans le modèle à volatilité locale

Pour plus de détails sur ce paragraphe, le lecteur est invité à consulter [?]. Dans ce paragraphe, nous allons prouver que le prix d'une option européenne de payoff convexe est une fonction convexe de la valeur actuelle du sous-jacent. Cela va nous permettre d'obtenir un résultat de monotonie des prix par rapport à la volatilité et de robustesse de la stratégie de réplication dans le modèle à volatilité locale. Cela veut dire que si l'on sur-estime (respectivement sous-estime) la volatilité dans un modèle à volatilité locale, on sur-réplique (respectivement sous-répique) toute option européenne de payoff convexe en utilisant ce modèle pour calculer la stratégie de couverture.

**Théorème 3.**

Sous les hypothèses précédentes sur  $\sigma$ , si  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe telle que  $\exists c > 0, q > 0 : |f(x)| \leq c(1 + |x|^q)$ . Alors le prix de l'option européenne  $v(t, x) = \mathbb{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T^{t,x}) \right)$  est une fonction convexe de  $x$ .

**Remarque 1.2** — L'option **Call** définie par  $x \mapsto (x - K)^+$  entre dans ce cadre.

— L'option **Put** telle que  $x \mapsto (K - x)^+$  est aussi intégrée dans ce cadre.

**Démonstration :** Pour démontrer le Théorème 3, il suffit de prouver le résultat pour  $t = 0$ . Nous pouvons aussi se ramener au cas  $r = \delta = 0$ . En effet, ■



# Calibration de modèles

\*\*\*

Les éléments contenus dans ce cours de statistique descriptive peuvent vite atteindre des limites dans l'analyse de données. Ce sera le premier point développé dans ce chapitre concluant ces notes. Ensuite, une simple présentation des questions classiques de statistique sera faite, en liaison avec les problèmes étudiés dans ce cours.

## .2.1 Introduction

Nous allons donner quelque rudiments usuels de la calibration. Néanmoins, il faut avoir en tête que la calibration (c'est-à-dire faire en sorte qu'un modèle donne des prix de marché) est un domaine très vaste où il y a peu de théorie et beaucoup de pratique (Finance (banque), génie civil (bâtiment), ...). En plus, ce savoir faire est confidentiel. Les modèles sont connus mais la manière de les utiliser de façon pertinente par rapport aux données de marché est une information cruciale pour les utilisateurs et des ses données reste assez secrète. En outre, une procédure de calibration est obtenue par des moyens heuristiques et est le fruit d'un travail commun entre quants et traders.

En outre, la calibration peut dépendre du problème considéré, voir l'exemple ci-dessous.

**Exemple 1** Si on souhaite utiliser un modèle à volatilité locale pour pricer une option exotique de maturité 1 an. Dans ce cas, il est inutile de calibrer  $\sigma(t, x)$  au delà de  $t \geq 1$  ans. Il suffit de faire une calibration fixe aux prix d'options sur le marché de maturité  $\leq 1$  year. Inversement, si on souhaite pricer  $T = 10$  ans, il n'est pas forcément nécessaire de calibrer furent aux options  $t \leq 10$  ans, et on va donner plus de poids aux options de maturité plus longues sous 7 ans. Ce qui nous permet de dire ; même pour un modèle, il peut y avoir différentes manières de le calibrer selon le problème considéré.

## .2.2 Calibration de modèles

Nous allons donner quelques éléments pour distinguer la calibration d'un modèle et l'estimation statistique d'un modèle. Il existe entre les deux techniques des différences fondamentales :

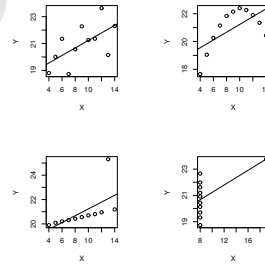
1. L'estimation statistique des paramètres :
  - donne une estimation des paramètres d'un modèle à partir des évolutions passées (séries chronologiques, moindres carrées, ....)
  - est effectuée sous la probabilité historique
2. La calibration d'un modèle aux prix du marché :
  - reflète l'opinion du marché sous les évolutions futures de l'actif
  - est effectuée sous une probabilité risque neutre

**Exemple 2 Modèle de Black-Scholes** On considère l'actif  $S_t$  qui suit le modèle de Black-Scholes, sous la probabilité historique, tel que :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.1)$$

et ,sous la probabilité risque neutre, tel que :

$$dS_t = (r - \delta) S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t, \quad (2.2)$$



**Fig. .2.2.1** – Évolution de l'actif  $S_t$ .

L'estimation de  $\mu$  et  $\sigma$  est donné par les formules suivantes :

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{S_{t-(i-1)\Delta t} - S_{t-i\Delta t}}{S_{t-i\Delta t}}, \quad (2.3)$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_{t-(i-1)\Delta t} - S_{t-i\Delta t}}{S_{t-i\Delta t}} \right)^2. \quad (2.4)$$

Dans cette approche, on fréquente le problème suivant : quelle taille fenêtre qu'on va prendre pour avoir une bonne estimation. D'un côté, plus  $n$  est grand, plus l'estimation est précise. D'un autre côté, plus  $n$  est grand, plus on donne du poids au passé (informations passées) et moins l'estimation est actuelle.

**Calibration : On ne calibre que la volatilité  $\sigma$**  Si on calibre un seul prix d'option européenne  $P(T, K)$

Si on veut calibrer avec un paramètre tous les prix observés, on utilise la minimisation de la fonction coût suivante :

$$\sigma = \arg \inf \sum_{i,j} -T_i, K_j \left( P^{BS \text{ avec } \sigma}(T_i, K_j) - P_{\text{market}}(T_i, K_j) \right)^2. \quad (2.5)$$

Quelque soit le choix de la volatilité  $\sigma$  obtenue par la calibration donne la façon dont le marché anticipe la volatilité.

Laquelle de ces deux approches est utilisée en pratique ? La réponse à cette question dépend de l'activité que l'on a et qu'on veut réaliser.

Si on effectue de la couverture de produits dérivés, on va préférer l'approche calibration qui donne directement les paramètres du modèle sous probabilité risque neutre dans laquelle on calcule les stratégies de couvertures.

Inversement, si on veut identifier des stratégies d'arbitrage, ou par exemple que l'on souhaite investir dans un actif risqué et estimer le meilleur rendement  $\hat{\mu}$  d'un actif, on utilise la technique d'estimation des paramètres.

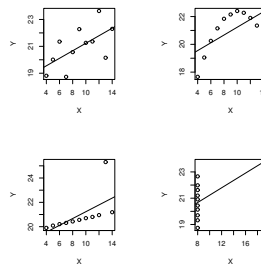
Néanmoins, si on a le choix entre les deux techniques (par exemple : calibrer ou estimer le paramètre  $\sigma$  dans le modèle de Black-Scholes) la calibration présente l'avantage de donner la façon dont le marché anticipe le futur.

Avant de conclure l'introduction, donnons quelques éléments de bon sens. Il est clair que plus un modèle a des paramètres, plus on va pouvoir s'approcher des données de marchés, mais moins les paramètres calibrés ont du sens.

Dans le cas où on a autant de données que de paramètres, on peut espérer calibrer parfaitement les données, mais cela ne veut pas dire pour autant que le modèle est meilleur.

Dans cet exemple, on propose deux modèles :

1. **Modèle 1** : Régression linéaire pour expliquer le prix du produit financier en fonction du prix d'exercice (Strike)  $K$ .



**Exemple 3**

**Fig. .2.2.2** – Évolution du prix d'un actif dans le marché.

2. **Modèle 2** : Trouver un polynôme de degré minimal qui passe par tous les points et qui explique le prix du produit financier.

Est-ce que le modèle 2 est meilleur ? Ce modèle calibre parfaitement les prix du marché mais il n'a pas forcément de sens.

Idéalement, un modèle doit avoir sensiblement moins de paramètres que de données. Il doit être réaliste par rapport au problème considéré et avoir si possible une paramétrisation intuitive. Enfin, il est important d'avoir une technique de calibration rapide et satisfaisante.

## .2.3 Problèmes inverses, bien posés, mal posés

La distinction entre les problèmes directs et inverses n'est pas mathématiques mais d'ordre sémantique. En général, on dit les "causes" entament les "effets".

**Problème direct** : calculer les effets à partir des causes. **Problème inverse** : calculer les causes à partir des effets.

**Exemple 4** 1. En physique :

2. En génie pétrolier :
3. En finance :

Un problème est dit bien posé au sens Hadamard s'il vérifie les trois conditions :

- Il admet une solution pour toute donnée du problème
- La solution est unique
- Cette solution évolue continuellement par rapport aux données du problème.

Le problème de calibration en finance, qui pour un modèle donné cherche à identifier les paramètres du modèle à partir des prix de marché est un problème inverse mal posé . En toute généralité, soit  $\Phi : \mathbf{m} \mapsto \mathbf{P}$  où  $\mathbf{m}$  est les paramètres à identifier,  $\mathbf{P}$  est le prix d'un produit financier.

On cherche " $\Phi^{-1}$ ".  $\Phi$  n'est pas néanmoins inversible, ni même surjective. Comment s'y prendre pour répondre à cette question ?

Nous commençons à étudier les problèmes inverses linéaires en dimension finie, ce qui est un cadre très simplifié mais qui donne des idées importantes.

## .2.4 Régularisation de problème mal posés linéaires en dimension $< +\infty$

On considère un opérateur linéaire  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . On regarde le problème suivant : pour  $y \in \mathbb{R}^m$ , trouver  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax = y$ .

- Si  $A$  n'est pas injectif : le problème est mal posé (pas d'unicité de solution).
- Si  $A$  n'est pas surjectif : le problème est mal posé (pas d'existence d'une solution).

Le problème est bien posé si et seulement si  $A$  est bijectif et alors  $m = n$  ( $A^{-1}$  est bien  $C^0$ ).

Cependant, même dans le cas où  $A$  est bijectif, on peut avoir intérêt à régulariser, notamment si la donnée  $y$  que l'on observe est bruitée (il existe un bruit dans les données).

En finance, le bruit sur les données est indiqué par le *Bid/Ask spread*. Par exemple, le prix côté par les options est le prix *mid*, donné par

$$\text{mid} = \frac{\text{Bid} + \text{Ask}}{2} \quad (2.6)$$

avec une incertitude  $\alpha_- = \text{Ask} - \text{Bid}$ .

**Exemple 5** On considère la matrice  $A$  telle que

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & 0 \\ -\varepsilon^{-1} & 1 & 0 \\ -\varepsilon^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Supposons que l'on observe  $y + \delta$  au lieu de  $y$  où  $\delta$  est bruit.

$$A^{-1}y = \begin{pmatrix} y_1 \varepsilon^{-1} + \delta_1 \varepsilon^{-1} \\ y_2 + \delta_2 - y_1 \varepsilon^{-1} - \delta_1 \varepsilon^{-1} \\ y_3 + \delta_3 - y_1 \varepsilon^{-1} - \delta_1 \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Si  $\varepsilon$  est petit, le bruit est amplifié sur toutes les coordonnées.

De manière générale, dès que  $A$  a des valeurs propres petites, on peut avoir intérêt à régulariser le problème " $Ax = y$ " même si la matrice  $A$  est inversible (et le problème bien posé).

Nous allons maintenant présenter la régularisation de problème linéaire.

**Premier cas :** On suppose que  $A$  est injectif mais pas surjectif ( $n \leq m$ ). Le problème inverse admet une solution seulement si  $y \in \text{Im } A$ . On cherche un problème bien posé qui coïncide avec cette solution si  $y \in \text{Im } A$ .

On considère le problème régularisé suivant :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n$$

Ainsi, si  $y \in \text{Im } A$ , l'unique antécédent de  $y$  par  $A$  est solution de ce problème.

De façon générale, on pose  $J(x) = \|Ax - y\|^2 = xA^*Ax - 2xA^*y + \|y\|^2$ . On cherche maintenant les points critiques de  $J(x)$ . Pour ce faire, il suffit de calculer  $dJ(x)$  :

$$dJ(x) = 2A^*x - 2A^*y = 0. \quad (2.9)$$

En utilisant que  $J(x)$  est convexe, il vient que

$$x = (A^*A)^{-1}A^*y. \quad (2.10)$$

Ici, nous avons utilisé  $A^*A$  inversible car  $A^*Ax = 0 \implies xA^*Ax = 0 \implies \|Ax\|^2 = 0 \implies x = 0$  ( $A$  injectif).

Ainsi, pour résoudre le problème mal posé "trouver  $x$  tel que  $Ax = y$ ".

On considère le problème approché :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ qui minimise } \|Ax - y\|^2. \quad (2.11)$$

Ce problème est bien posé, donc  $x = (A^*A)^{-1}A^*y$  est unique et dépend continuellement de  $y$ .

**Deuxième cas :** On suppose que  $A$  est surjectif mais pas injectif, alors  $n \geq m$ .

Dans ce cas le problème " $Ax = y$ " est **mal posé** car il y a une infinité de solution. On considère le problème régularisé suivant qui consiste à choisir la solution de norme

minimale :

$$\text{Trouver } x \text{ de norme minimale tel que} \quad Ax = y, \quad (2.12)$$

c'est-à-dire,

$$\text{Trouver } x \text{ tel que} \quad x = \arg \inf \{ \|x\|, x \in \mathbb{R}^n : Ax = y \}. \quad (2.13)$$

Pour ce faire, il faut minimiser  $\|x\|^2$  sur l'hyperplan  $Ax = y$  en utilisant le fait que  $A : (\text{Ker}A)^\perp \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bijectif. Si on note  $x = x_{\text{Ker}A} + x_{(\text{Ker}A)^\perp}$ , alors  $\|x\|^2 = \|x_{\text{Ker}A}\|^2 + \|x_{(\text{Ker}A)^\perp}\|^2$ . Donc  $x$  est l'unique antécédent de  $y$  par  $A$  qui appartient à  $(\text{Ker}A)^\perp$ .

En pratique, on fréquente le **problème** délicat de calcul ou de paramétrisation de  $(\text{Ker}A)^\perp$  (il n'est pas simple de calculer  $(\text{Ker}A)^\perp$ ). Pour remédier à ce problème, on préfère travailler avec une autre méthode permettant de régulariser ce problème ; c'est-à-dire la solution trouvée est contrôlée au moyen d'un terme de régularisation qui dépend d'un paramètre. On trouve une solution quasiment stable par rapport aux données. Il existe différentes méthodes dans la littérature telles que : la méthode de quasi-réversibilité, des méthodes de type contrôle optimal (gradient-conjugué, méthode de Landweber-Fridman,...) et les méthodes de type Tikhonov . Dans la suite, on s'intéresse à la méthode de régularisation de Tikhonov, voir [5]. On rappelle brièvement cette technique en quelques mots et les méthodes permettant de choisir le paramètre de régularisation. Cette technique consiste à remplacer le problème mal posé par un problème approché bien posé. Le caractère bien posé est obtenu grâce à l'ajout d'un terme de contrôle pondéré par un paramètre de régularisation  $\alpha$ . Le problème  $\alpha$ -régularisé au sens de Tikhonov consiste à trouver  $x$  qui minimise la fonction

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2. \quad (2.14)$$

En utilisant le fait que  $J_\alpha$  est convexe Avec cette technique de régularisation au sens de Tikhonov, on obtient une solution approchée au problème mal posé, stable par rapport aux données mais elle dépend du paramètre  $\alpha$ . Pour bien choisir le paramètre  $\alpha$ , il existe plusieurs méthodes telles que le critère de Morozov [6], le critère de validation croisée [4] ou la méthode de la courbe en L (L-curve) [1–3].

# Bibliographie

\*\*\*

- [1] P. C. Hansen. Analysis of discrete Ill-Posed Problems by means of the Lcurve. review, 34(4) : 561-580, 1992.
- [2] M. Hanke. Limitations of the L-curve method in Ill-Posed Problems. BIT Numerical Mathematics, 36(2) :287-301, 1996.
- [3] P. C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. Computational Inverse Problems in Electrocardiology, pages 119-142. WIT Press, 2001.
- [4] G. Wahba. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. SIAM Journal on Numerical Analysis, 14(4) :651-667, 1977.
- [5] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. Methods for solving Ill-Posed Problems. Nauka, 1986.
- [6] V. A. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization. In Soviet Math. Dokl, volume 7, pages 414-417, 1966.



# Index

\*\*\*

Ask, 14

Bid, 14

bien posé, 13

Call, 9

convexe, 9

couverture, 12

estimation, 12

mal posé, 13, 15

mid, 14

payoff, 9

probabilité historique, 11

probabilité risque neutre, 11

Put, 9

robustesse, 9

réplication, 9

sous-estime, 9

sur-estime, 9

Tikhonov, 16

volatilité locale, 6