***NB :** cette fiche présente les techniques nécessaires **minimales** sur quelques lois discrètes ; elle ne constitue donc pas un objectif mais un pré-requis ! Elle est autorisée pendant les contrôles ! !*

1 Généralités sur les variables aléatoires

- Une variable aléatoire sur l'univers Ω associé à une expérience aléatoire est une fonction définie sur Ω à valeurs dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
- Une variable aléatoire discrète : (dénombrables) lorsque les valeurs x_i qu'elle est susceptible de prendre sont en nombre fini, ou formés de nombres entiers
- Une variable aléatoire continue : (regroupées dans une classe) elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.
- La loi de probabilité de la variable aléatoire X ou la loi de X est la donnée des probabilités des événements $X = x_i$ pour $i = 1, 2, \cdots, n$ où x_i les images des éléments de Ω ou, plus simplement les valeurs réelles prises par X.

2 Propriétés

Soient X une variable aléatoire discrète sur l'univers Ω, et $P(X = x_i)$ la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$. Alors on a :

- Espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i = P(X = x_1) \times x_1 + P(X = x_2) \times x_2 + \cdots + P(X = x_n) \times x_n$
- Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$.
- Écart-type = $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$
- Transformation affine des données : soient a et b deux réels, on a
  - $E(aX + b) = a \times E(X) + b$
  - $V(aX + b) = a^2 \times V(X)$
  - $\sigma_{aX+b} = \sqrt{a^2 V(X)} = \begin{cases} a \times \sigma_X & si\ a > 0 \\ -a \times \sigma_X & si\ a \leqslant 0 \end{cases}$

3 Lois de probabilités discrètes

- Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
  - $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$;
  - $E(X) = p$, $V(X) = p$ et $\sigma_X = \sqrt{p}$.
- Loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$
  - $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ avec k compris entre 0 et n ;
  - $P(X = k + 1) = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} P(X = k)$;
  - $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma_X = \sqrt{np(1 - p)}$.
- Loi binomiale en fréquence $F_n = \frac{X}{n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$
  - $P(F_n = \frac{k}{n}) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$;
  - $E(F_n) = p$, $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n}$ et $\sigma_{F_n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
- Loi de Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec λ un réel strictement positif.
  - $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda}$ avec k un entier naturel ;
  - $E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$ et $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$;
  - Approximation d'une loi binomiale : soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$. Si $n \geqslant 30$, $0 \leqslant p \leqslant 0.1$ et $np < 10$, alors on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np.