

TC - Mathématiques, Statistiques et probabilités Feuille de travaux dirigés ${\sf N}^\circ$ 1

Semestre : 3 A.U. : 2021-2022

Calul des probabilités, Variables aléatoires et lois de probabilités **Prof.** H. El-Otmany

Exercice n°1 On considère un jeu de 32 cartes. Soient A let B deux sous-ensembles de E représentant respectivement les couleurs rouges et les figures. Calculer le cardinal de : A, B et $A \cup B$.

Exercice n°2

- 1. Combien peut-on former de nombres à 4 chiffres ne terminant pas par le chiffre 4?
- 2. Combien peut-on former de nombres à 4 chiffres ne terminant pas par le chiffre 4 et composés de chiffres deux à deux distincts?

Exercice n°3 On lance un dé à 12 faces comportant 5 faces avec un numéro pair, 8 faces avec un numéro multiple de 3 et 3 faces avec un numéro multiple de 6.

- 1. Combien y a-t-il de faces portant un numéro pair ou multiple de 3?
- 2. Déduire le nombre de faces portant un numéro ni pair, ni multiple de 3.

Exercice n°4 McDonald's propose sur sa carte 5 entrées, 3 plats et 4 desserts. Lina décide d'aller déjeuner tous les jours à McDonald's, mais a dit qu'elle n'irait plus dès qu'elle serait contraint de composer un menu qu'elle a déjà consommé.

1. Au bout de combien de jours Lina devra t-elle changer McDonald's?

Exercice n°5 Dans son porte-monnaie, Lina a huit pièces différentes : 1, 2, 5, 10, 20, 50 cents et 1€ et 2€. Elle en sort 5 successivement avec remise et note à chaque tirage la pièce sortie. Combien de tirages différents peut-elle faire?

Exercice n°6 On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire 5 cartes simultanément. Combien y a-t-il de mains :

- 1. au total?
- 2. comportant uniquement des cartes rouges?
- 3. comportant uniquement des ♦?
- 4. comportant uniquement des figures?
- 5. comportant les 4 as?
- 6. comportant exactement 3 rois?
- 7. comportant exactement 3 dames et 2 valets?
- 8. comportant exactement 3 as et 2 cartes de valeurs différentes?

Exercice n°7 Une urne contient 10 boules ①, ②, ③, ④,⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨ et ①. Combien y'a-t-il de tirages au total :

- 1. si on tire trois boules successivement sans remise?
- 2. si on tire quatre boules successivement avec remise?
- 3. si on tire cinq boules simultanément?

Exercice n°8

- 1. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : P(A)=0.5, P(B)=0.4 et $P(A\cap B)=0.3.$
 - (a) Calculer $P(\overline{B})$.

(c) Calculer $P_A(B)$.

(b) Calculer $P(A \cup B)$.

- (d) Calculer $P_B(A)$.
- 2. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : P(A) = 0.4, P(B) = 0.6 et $P_A(B) = 0.2$.
 - (a) Calculer $P(\overline{A})$.

(c) Calculer $P(A \cap B)$.

(b) Calculer $P_A(\overline{B})$.

- (d) Calculer $P(A \cup B)$.
- 3. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que : P(A) = 0.5, $P_A(B) = 0.6$ et $P_B(A) = 0.8$.
 - (a) Calculer $P(A \cap B)$.

(c) Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.

(b) Calculer P(B).

(d) Calculer $P_{\overline{A}}(B)$.

Exercice n°9 Dans un département "techniques de commercialisation", trois formations sont proposées : formation initiale (FI), formation continue (FC) et formation par alternance (FA). On sait que :

- 8% des étudiants sont inscrits en FC;
- 10% des étudiants sont inscrits en FA;
- les femmes représentent :
 - -65% des inscrits en FI;
 - 50% des inscrits en FC;
 - -55% des inscrits en FA.
 - 1. Représenter ce situation à l'aide d'un arbre de probabilité que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
 - 2. On choisit un étudiant au hasard.
 - Déterminer la probabilité que cet étudiant soit une femme en FA.
 - Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme.
 - Déterminer la probabilité que cet étudiant soit un homme ou en FC.
 - Déterminer la probabilité que cet étudiant soit en FI sachant que c'est un homme.

Exercice n°10 On tire simultanément au hasard 3 jetons dans un jeu de 10 jetons. Les jetons sont numérotés comme suit :1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3. Le prix de la participation à ce jeu est 5 euros. On appelle X la variable aléatoire égale au gain qui correspond à la somme obtenue en additionnant les nombres portés sur chaque jeton.

- 1. Déterminer l'univers Ω (ensemble des cas possible pour l'expérience aléatoire)
- 2. Déterminer la loi de probabilité de X.
- 3. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il intéressant pour l'organisateur?
- 4. Calculer la variance V(X). En déduire σ_X .
- 5. Déterminer en-deçà de quel prix le jeu devient intéressant pour l'organisateur?

Exercice n°11 Un investisseur achète une action AIRBUS dont le cours boursier C_0 vaut 100 euros. Au bout d'un an, le cours de l'action est égal à C. L'investisseur s'attend à toucher un dividende D en cours d'année. La richesse de l'investisseur dans un an sera égale à la somme du dividende touché et de la valeur boursière de l'action.

Le cours C et le dividende D sont deux variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par le tableau ci-dessous :

C	0	20	40
80	0.10	0,05	0,05
100	0.05	0.15	0.05
110	0	0.15	0.15
120	0	0.05	0.20

- 1. Calculer l'espérance mathématique du cours C de l'action AIRBUS dans un an.
- 2. Calculer l'espérance mathématique du divende D distribué en cours d'année.
- 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable V où V désigne la variation de la richesse définie par $V = C + D C_0$.
- 4. Calculer la probabilité d'avoir une variation de richesse supérieur ou égale à 0.

Exercice n°12 Dans un jeu de 32 cartes, on effectue un tirage sans remise. Le prix de participation à ce jeu est 5€. À l'issue des quatre tirages :

- 1. si on a tiré exactement 1 roi, on gagne $5 \in$.
- 2. si on a tiré exactement 2 rois, on gagne 10€.
- 3. si on a tiré exactement 3 rois, on gagne $25 \in$.
- 4. si on a tiré 4 rois, on gagne 50€.

On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de rois tirés à l'issue des quatre tirages.

- 1. Donner la loi de probabilité X.
- 2. Calculer E(X) et donner le résultat à 10^{-2} près. Le jeu est-il rentable pour l'organisateur?
- 3. Calculer la variance de X et déduire son écart-type.
- 4. En utilisant les questions précédentes, déterminer le prix pour lequel le jeu devient rentable pour le joueur.

Exercice n°13 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20;0,36)$.. Calculer $P(X=3), P(X \leq 4)$ et $P(X \geq 6)$.

Exercice n°14 Dans un jeu de 32 cartes, on effectue un tirage avec remise. Le prix de participation à ce jeu est 5€. À l'issue des quatre tirages :

- 1. si on a tiré exactement 1 roi, on gagne 5€.
- 2. si on a tiré exactement 2 rois, on gagne 10€.
- 3. si on a tiré exactement 3 rois, on gagne 25€.
- 4. si on a tiré 4 rois, on gagne 50€.

On désigne par X la variable aléatoire associée au nombre de rois tirés à l'issue des quatre tirages.

- 1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p à préciser.
- 2. Calculer la probabilité d'avoir tiré exactement deux rois.
- 3. Calculer la probabilité d'avoir tiré au moins un roi.
- 4. Calculer E(X). Le jeu est-il rentable pour l'organisateur?
- 5. Calculer la variance de X et déduire son écart-type.
- 6. En utilisant les questions précédentes, déterminer le prix pour lequel le jeu devient rentable pour le joueur.

Exercice n°15 Au sein du département Techniques de Commercialisation, le responsable du département a constaté que 3% des tables sont abîmées. Un réparateur doit remplacer les 20 tables. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre des tables abîmées.

- 1. Préciser la loi de probabilité suivie par X.
- 2. Déterminer la probabilité qu'il y en ait aucune table abîmées.
- 3. Déterminer la probabilité qu'il y en ait au moins une table abîmée.

Exercice $n^{\circ}16$ Un livreur Uber Eats doit rendre visite à 7 clients. Il sait que la probabilité d'obtenir une commande est la même pour tous ses clients et que sa valeur est de 0.3. On admet que la décision de chaque client est indépendante des autres. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de clients qui ont passé une commande.

- 1. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- 2. Déterminer la probabilité pour que le commercial obtient exactement trois commandes.
- 3. Déterminer la probabilité pourque le commercial n'obtient aucune commande.
- 4. Le commercial a-t-il plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins deux commandes?
- 5. Calculer E(X) et V(X).

Exercice n°17 Pour se rendre à l'IUT de Tarbes, un étudiant utilise les transports en communs 4 fois par jour. La probabilité d'être contrôlé est 0.01.

- 1. Peut-on associer cette expérence aléatoire à une loi binomiale?
- 2. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant ne soit pas contrôlé pendant la journée.
- 3. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé une fois par jour.
- 4. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé deux fois par jour.
- 5. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé trois fois par jour.
- 6. Déterminer la probabilité pour que l'étudiant soit contrôlé quatre fois par jour.

Exercice n°18 Dans une entreprise les ressources humaines font passer une entrevue préliminaire à 5 et on sait par expérience que seulement 50% passent au travers de ce premier tri.

- 1. Déterminer la probabilité qu'il y en ait au moins 2 qui passent la première entrevue.
- 2. Déterminer la probabilité qu'il y en ait 4 ou plus qui passent la première entrevue.