Série 1 :

Exercice 01 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. f croissante sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ F croissante sur $\mathbb{R}$.
4. f positive sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ F positive sur $\mathbb{R}$.
5. f positive sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ F croissante sur $\mathbb{R}$.
6. f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. f paire sur $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ F impaire sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. **Vrai**, car f est une fonction dérivable.
2. **Vrai** , car elle s'agit d'une primitive de f .
3. **Faux** ; Contre exemple : On prend la fonction $f(t) = 2t$ croissante sur $\mathbb{R}$, alors que : $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^2$ est une fonction (strictement) décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. **Faux** ; Contre exemple : On prend la fonction : $f(t) = t^2 \geq 0$, on a : $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{x^3}{3}$ est négative sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$ et positive sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$.
5. **Vrai**.
6. **Faux** ; Contre-exemple : On prend la fonction $f(t) = \cos(t) + c$ avec $c \neq 0$ est une fonction périodique alors que $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sin(x) + cx$ est une fonction non périodique .
7. **Vrai**.

Exercice 02 :

1. Montrer que la fonction $f : x \to \int_x^{2x} \dfrac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Déterminer la limite de f en 0.

Correction :

Rappel : f est dite localement intégrable sur $I \subseteq \mathbb{R}$ si $\forall [a, b] \subseteq I$, $\int_{[a,b]} f$ converge .

1. On a la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^t}{t}$ est définie , continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$ On a :

$$(x, 2x) = \begin{cases} [x, 2x] & \text{Si } x > 0 \\ [2x, x] & \text{Sinon} \end{cases}$$

Or $(x, 2x) \subseteq \mathbb{R}^*$. Par suite $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$ est définie et $D_f = \mathbb{R}^*$.

Soit F la primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^t}{t}$ telle que $f(x) = F(2x) - F(x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (car $x \longmapsto 2x$, $x \longmapsto x$ et la fonction F sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$).

2. Déterminons la limite de f en 0, on procède par un encadrement :

$$\begin{aligned}
x \leq & \quad t & \leq 2x \\
e^x \leq & \quad e^t & \leq e^{2x} \\
\frac{e^x}{t} \leq & \quad \frac{e^t}{t} & \leq \frac{e^{2x}}{t} \\
\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\mathrm{d}t \leq & \quad f(x) & \leq \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\mathrm{d}t \\
e^x \ln(t)\Big|_x^{2x} \leq & \quad f(x) & \leq e^{2x} \ln(t)\Big|_x^{2x} \\
e^x \ln(2) \leq & \quad f(x) & \leq e^{2x} \ln(t)
\end{aligned}$$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ln(2) \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \ln(2) \end{cases}$ Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln(2)$

? Exercice 03 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue .
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimez leurs dérivées .

a) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$ b) $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} xf(t)\mathrm{d}t$ c) $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} f(t+x)\mathrm{d}t$

Correction :

la justification de la dérivabilité des fonctions (b) et (c) sera analogue à celle du premier cas (a) .

a) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$:

On a f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive F dans $\mathbb{R}$ telle que : $g(x) = F(x^2) - F(2x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $x \mapsto 2x$, $x \mapsto x^2$ et la fonction F sont dérivables sur $\mathbb{R}$). Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2xF'(x^2) - F(2x) \\
&= 2xf(x^2) - 2f(2x)
\end{aligned}$$

b) $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} xf(t)\mathrm{d}t$:

$$g(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x\left(F(x) - F(0)\right)$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= F(x) - F(0) + xF'(x) \\
&= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)
\end{aligned}$$

c) $g(x)=\int_0^x f(t+x)\mathrm{d}t$:

On pose $u=t+x$, on aura donc :

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\ ,\ t=0\Rightarrow u=x \text{ et } t=x\Rightarrow u=2x$$

Donc :

$$g(x)=\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u=F(2x)-F(x)$$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée :

$$\begin{aligned} g'(x)&=2F'(2x)-F'(x)\\ &=2f(2x)-f(x)\end{aligned}$$

Exercice 04 :

Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t^3+t+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

Correction :

La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^3+t+1}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}^+$, donc g admet une primitive G et par suite $F(x)=G(x^2)-G(x)$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$(car $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x$ et la fonction G sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$). On a donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{aligned} F'(x)&=2x\ G'(x^2)-G'(x)\\ &=\frac{2x}{x^6+x^2+1}-\frac{1}{x^3+x+1}\end{aligned}$$

Exercice 05 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue .
Déterminer $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Application : Calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

Correction :

Méthode 1 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une primitive F telle que :

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}(F(x)-F(0))$$

Lorsque $x\to0$, on a :

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f(0)$$

Méthode 2 :

On a f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc :

$$\exists c_x\in]0,x[\text{ tel que : } f(c_x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Il s'agit de la 1^{re} formule de la moyenne. Or $0 \leq c_x \leq x$ avec $\lim_{x\to 0} c_x = 0$ donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0} f(c_x) \\ &= f\left(\lim_{x\to 0} c_x\right) \qquad \text{car } f \text{ est continue en } 0 \\ &= f(0)\end{aligned}$$

Application

Pour $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = f(0) = 1$$

? Exercice 06 :

> Soit n un entier naturel non nul . Étudier la convergence de l'integrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^n - 1}$.

Correction :

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{1}{t^n - 1}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]1, 2]$ et par suite l'intégrale I_n est impropre en 1 .
Pour $n = 1$:

$I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \underset{u=t-1}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}$ qui est une intégrale divergente (Riemann avec $\alpha = 1$)

Pour $n = 2$:

$$I_2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)}$$

On a :

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} \geq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1} \geq 0$$

Or $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{3(t-1)}$ diverge donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)}$ diverge.

Pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$

On pose : $s = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$
Donc $ts = t + t^2 + \cdots + t^{n-1} + t^n$

Et on a :

$$\begin{aligned} & ts - s = t^n - 1 \\ \Longrightarrow\ & s(t-1) = t^n - 1 \\ \Longrightarrow\ & (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})(t-1) = t^n - 1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^n-1} &= \frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\\ &\geq \frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{1+2+2^2\cdots+2^{n-1}}\\ &= \frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{1}{t-1}\geq 0\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t-1}$ diverge donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^n-1}$ diverge aussi.

? Exercice 07 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}}$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$ h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t$

Correction :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,1[$ et par suite l'intégrale a) est impropre en 0 et 1 .

※ **Au voisinage de 0 :**

$\dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable au voisinage de 0 .

※ **Au voisinage de 1 :**

$0 \leq \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{1-t}$ non intégrable au voisinage de 1 . D'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$ diverge .

Définition : $\displaystyle\int_{]a,b[} f$ **converge** $\Longleftrightarrow \exists\ c \in]a,b[\ /\ \displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ **convergent .**

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto e^{-t}\ln(t)$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale b) est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de 0 :**

On pose : $f(t) = e^{-t}\ln(t)$

On a $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}\,|f(t)|=0 \Longleftrightarrow |f(t)|=\circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Or $t\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc $f(t)$ aussi . D'où $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente .

※ **Au voisinage de** $+\infty$:

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\, f(t)=0 \Longleftrightarrow f(t)=\circ\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

Or $t\longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann pour $\alpha=2$) donc $f(t)$ aussi et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente . D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t\longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale c) est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de 0 :**

On a $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}\left|\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}\right|=0 \Longleftrightarrow \left|\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}\right|=\circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Or $t\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc $\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ aussi et donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est convergente .

※ **Au voisinage de** $+\infty$:

On a $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(t)}{t^2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\dfrac{\ln(t)}{t^2}=0 \Longleftrightarrow \dfrac{\ln(t)}{t^2}=\circ\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$

Or $t\longmapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ aussi et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est convergente .

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est convergente

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t\longmapsto \dfrac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale d) est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de 0 :**

On a $\dfrac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}\underset{0}{\sim}\dfrac{t}{t^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc $\dfrac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}$ aussi et donc $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ est convergente .

※ **Au voisinage de** $+\infty$:

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{4}{3}} \dfrac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}} = \circ\left(\dfrac{1}{t^{\frac{4}{3}}}\right)$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\frac{4}{3}}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\dfrac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}$ aussi et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ est convergente . D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ est convergente .

$e)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ définie , continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite l'intégrale e) est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

De plus la fonction à intégrer est paire donc il suffit de l'étudier au voisinage de $+\infty$.

※ **Au voisinage de** $+\infty$ **:**

On a $\dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{ln(t^2)}{t^2} = 2\cdot\dfrac{ln(t)}{t^2} = 2\cdot\dfrac{1}{t^2(ln(t))^{-1}}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2(ln(t))^{-1}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Bertrand avec $\alpha = 2$) donc $\dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ aussi et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge. Et par parité , on peut déduire que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente .

$f)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale f) est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de** $+\infty$ **:**

On a $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ aussi et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est convergente .

※ **Au voisinage de 0** :

On a $\sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ est bornée sur $]0,1]$ borné donc intégrable et par suite $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est convergente . D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est convergente .

$g)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{1}{e^t-1}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale g) est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de 0 :**

$0 \leq \dfrac{1}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t}$ non intégrable au voisinage de 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1}$ diverge . D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 1}$ est divergente .

☆ $h)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}\right) \mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$ définie , continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$ et par suite l'intégrale h) est impropre en $+\infty$.

※ **Au voisinage de $+\infty$:**

On a $t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1} = \dfrac{t^2 + 4t + 4 - t^2 - 4t - 1}{t + 2 + \sqrt{t^2 + 4t + 1}} = \dfrac{3}{t + 2 + \sqrt{t^2 + 4t + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2t}$

Or $t \longmapsto \dfrac{3}{2t}$ est non intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1}\right) \mathrm{d}t$ est divergente .

☑ **FIN DE LA SÉRIE 1** ☑

Série 2 :

Exercice 01 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t$ *b)* $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ *c)* $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

d) $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t^2+1} - t\right)\mathrm{d}t$ *e)* $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{ln|t|}$

Correction :

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{t\ln(t)}{t-1}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,1[$ et par suite l'intégrale a) est impropre en 0 et 1 .

※ **Au voisinage de 0 :**

On a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\ln(t)}{t-1} = 0$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable au voisinage de 0 .

※ **Au voisinage de 1 :**

On a :

$$\lim_{t\to 1} \frac{t\ln(t)}{t-1} = 1$$

Donc f est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable au voisinage de 1 .

D'où $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t$ est convergente .

b) $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ définie , continue donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$ et par suite l'intégrale b) est impropre en $+\infty$.

On a :

$$-1 \leq \sin(t) \leq 1$$
$$-\frac{1}{t^2} \leq \frac{\sin(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Or $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right|$ aussi , et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge .

Et on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right|\mathrm{d}t$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente , d'où I_2 est convergente .

c) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,1]$ et par suite l'intégrale c) est impropre en 0 .

On a

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{4}}\cdot\ln(t) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} = \circ\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc $\dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ aussi et I_3 est convergente .

d) $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \sqrt{t^2+1}-t$ définie , continue donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$ et par suite l'intégrale d) est impropre en $+\infty$.

※ **Au voisinage de $+\infty$:**

On a $\sqrt{t^2+1}-t = \dfrac{t^2+1-t^2}{\sqrt{t^2+1}+t} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}+t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2t}$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{2t}$ est non intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\sqrt{t^2+1}-t$ aussi , et donc I_4 est divergente .

e) $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{\ln|t|}$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln|t|}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$ et par suite l'intégrale e) est impropre en -1 , 0 et 1 .

De plus la fonction à intégrer est paire donc il suffit de l'étudier au voisinage de 0 et 1 .

※ **Au voisinage de $0 \Leftrightarrow$ Etude de la nature de :** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}t}{\ln|t|}$ **:**

On a :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t}}{\ln|t|} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\ln|t|} = \circ\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc $\dfrac{1}{\ln|t|}$ aussi et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}t}{\ln|t|}$ est convergente.

※ **Au voisinage de $1 \Leftrightarrow$ Etude de la nature de :** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{\ln|t|}$ **:**

On a :

$$\frac{1}{\ln(t)} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$$

Or $\dfrac{1}{t-1}$ est non intégrable donc $\dfrac{1}{\ln|t|}$ aussi et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln|t|}$ est divergente .
Et par parité , on peut déduire que I_5 est divergente .

? Exercice 02 :

> Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)} dt$ converge .

Correction :

Montrons que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)} dt$ est convergente .

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{sin(t)}{\ln(t+1)}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$ et par suite l'intégrale est impropre en 0 et $+\infty$.

※ Au voisinage de 0 :

On a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \times \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable au voisinage de 0 .
D'où I est convergente.

Rappel (Lemme d'Abel) :

Soient g et h deux fonctions continues sur un intervalle $[a, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

1. **Il existe un réel M tel que $\forall x \geq a,\ \left| \displaystyle\int_a^x g(t)dt \right| \leq M$.**
2. **La fonction h est décroissante et vérifie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$**

Alors l'intégrale : $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)h(t)\mathrm{d}t$ converge.

※ Au voisinage de $+\infty$:

On pose $h(t) = \dfrac{1}{\ln(t+1)}$ est une fonction décroissante et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(t+1)} = 0$
Et soient $g(t) = \sin(t)$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0 \qquad \left| \int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t \right| &= |[-\cos(t)]_0^x\ | \\
&= |\cos(0) - \cos(x)| \\
&\leq |\cos(0)| + |\cos(x)| \\
&\leq 2\ (= M)
\end{aligned}$$

Donc d'après le Lemme d'Abel $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\ln(t+1)} dt$ est convergente .

Exercice 03 :

Montrer que les fonctions $\sin(t)$ et $\dfrac{\sin(t)}{t}$ ne sont pas intégrables sur $[0;+\infty[$

Correction :

Montrons que les fonctions $\sin(t)$ et $\dfrac{\sin(t)}{t}$ ne sont pas intégrables sur $[0;+\infty[$

Soit :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}[-\cos(t)]_0^x\\ &= \lim_{x\to+\infty} 1-\cos(t)\end{aligned}$$

La limite n'existe pas et donc la fonction $\sin(t)$ n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$

La fonction $t\longmapsto \dfrac{\sin}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$ *(voir le cours pages : 13 - 14)*

Exercice 04 :

Soit f une fonction continue non identiquement nulle telle que :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t$$

Déterminer explicitement la fonction .

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t &\Longrightarrow \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 (f(t))^2\mathrm{d}t = 0\\ &\Longrightarrow \int_0^1 (f(t)-(f(t))^2)\mathrm{d}t = 0\\ &\Longrightarrow \int_0^1 f(t)(1-f(t))\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Or $t\in[0,1] \Longrightarrow f(t)\in[0,1] \Longrightarrow f(t)(1-f(t))\geq 0$

Donc $\forall t \quad f(t)(1-f(t))=0 \Longrightarrow f(t)=0$ ou $f(t)=1$.

f est une fonction continue et non identiquement nulle d'où $\forall t\in[0,1]$, $f(t)=1$

Exercice 05 :

1 Etudier la convergence de l'intégrale : $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

2 Par le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$ calculer : $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$.

3 Soit a un réel strictement positif calculer : $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt$.

Correction :

1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale c) est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de 0 :**

On a $\displaystyle\lim_{t\to 0} \sqrt{t}\left|\frac{\ln(t)}{t^2+1}\right| = 0 \Longleftrightarrow \left|\frac{\ln(t)}{t^2+1}\right| = \circ\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 donc $\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ aussi et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est convergente .

※ **Au voisinage de** $+\infty$:

On a $\displaystyle\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(t)}{t^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln(t)}{t^2} = \circ\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$

Or $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}$ aussi et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est convergente .

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ est convergente .

2 Soit $u = \dfrac{1}{t} \implies t = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{-\mathrm{d}u}{u^2}$

$$\begin{aligned} I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t &= -\int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{\ln(u)}{u^2+1}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Donc $I = -I \implies I = 0$

3 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculons : $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$

On pose : $t = au \Leftrightarrow dt = adu$, donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{a\ln(au)}{a^2+a^2u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a)+\ln(u)}{a(1+u^2)}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(a)}{a(1+u^2)}\mathrm{d}u + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(u)}{a(1+u^2)}\mathrm{d}u=0$, donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\ln(a)}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{\ln(a)}{a}\left[\arctan(u)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi\ln(a)}{2a} \end{aligned}$$

? Exercice 06 :

On considère l'intégrale suivante : $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est convergente .
2. Montrer que $I=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ et en déduire que $I=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(t))\mathrm{d}t$
3. Montrer que : $I=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2t))\mathrm{d}t$
4. En utilisant l'expression de $\sin(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$ et les relations précédentes,en déduire la valeur de I .

Correction :

1. Montrons que I est convergente :

☆ $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$

Soit la fonction : $t\longmapsto\ln(\sin(t))$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,\pi[$ et par suite l'intégrale I est impropre en 0 et π .

※ **Au voisinage de 0** :

On a $\ln(\sin(t))\underset{0}{\sim}\ln(t)$.

Or $\ln(t)$ est intégrable au voisinage de 0 car $\ln(t)=\circ\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ intégrable donc $\ln(\sin(t))$ aussi et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ est convergente .

※ **Au voisinage de π :**

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln(\sin(t))\mathrm{d}t &\underset{u=\pi-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin(u))(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u \end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u$ est convergente *(d'après l'étude précédente)* .
On conclut alors que l'intégrale I est convergente .

2 On peut déduire cette égalité d'après la question précédente :

Soit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Déduisons que $I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t \underset{u=\frac{\pi}{2}-t}{=} & -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)\Big)\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

3 Montrons que : $I = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t \underset{t=2u}{=} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2u))(2\mathrm{d}u) \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2u))\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

4 On sait que : $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$

$$\begin{aligned}I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos(t)\sin(t))\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}t + \underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t}_{=I} + \underbrace{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t}_{=I} \\ &= 2\ln(2)\cdot\frac{\pi}{2} + 2I\end{aligned}$$

Donc : $I = \pi\ln(2) + 2I$

D'où $I = -\pi\ln(2)$

❓ Exercice 07 :

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée .

1 Montrer que $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}\mathrm{d}t$ sont deux intégrales convergentes .

2 Comparer ces deux intégrales .

3 Application : Pour $n \geq 0$, calculer :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t$$

Correction :

1 Montrons que I_1 est une intégrale convergente :

Soit $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ définie , continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et par suite l'intégrale I_1 est impropre en $+\infty$.

※ **Au voisinage de $+\infty$** :

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{M}{1+t^2} \leq \dfrac{M}{t^2}$

On sait bien que $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ *(Riemann)* donc $\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ aussi d'où I_1 est une intégrale convergente .

Montrons que $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente :

Soit $t \longmapsto \dfrac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}$ définie , continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et par suite l'intégrale I_2 est impropre en 0 et $+\infty$.

※ **Au voisinage de 0** :

$\left|\dfrac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{M}{1+t^2} \underset{0}{\sim} M$ *(intégrable).*

⚠ **Rappel : Toute fonction bornée dans une partie bornée est intégrable**

※ **Au voisinage de $+\infty$** :

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\dfrac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{M}{1+t^2} \leq \dfrac{M}{t^2}$

On sait bien que $\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ *(Riemann)* donc $\dfrac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}$ aussi d'où I_2 est une intégrale convergente .

2 Comparons les deux intégrales :

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{f(\frac{1}{t})}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{t=\frac{1}{u}}{=} & \int_{+\infty}^{0} \frac{f(u)}{1+\frac{1}{u^2}}\left(\frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &= I_1 \end{aligned}$$

3 Application : Pour $n \geq 0$, calculons : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t$

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^n}$.

On a d'après ce qui précède $I = J = I_1$
Donc :

$$\begin{aligned}
2I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{(1+t^2)(1+t^n)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)} \\
&= \lim_{x \to +\infty} [\arctan(t)]_0^x \\
&= \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) - \arctan(0) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc $I = \dfrac{\pi}{4}$

? Exercice 08 :

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \to \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ soit bornée .

1 Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$

2 En déduire la nature de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$.

Correction :

1 Etudions la convergence de l'intégrale (Lemme d'Abel) :

On a la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est une fonction décroissante et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$ et la fonction $F(x)$ est bornée .

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente .

2 Par une intégration par partie ,on trouve que :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t &= \left[\frac{F(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $0 \leq \left|\dfrac{F(x)}{x}\right| \leq \dfrac{M}{x}$

Lorsque x tend vers $+\infty$ $\dfrac{F(x)}{x}$ tend vers 0 et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

On en déduit alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente .

FIN DE LA SÉRIE 2

Série 3 :

Exercice 01 :

Etudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ 3) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ 5) $f(x,y) = \dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$ 6) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}$

Correction :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Méthode 1 :

On a : $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \to 0$ donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Méthode 2 : En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0} r\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\
&= 0 \quad (\text{car} \quad |\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \leq 1)
\end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$$

Méthode 1 :

On a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

Si $x = y$, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{3}{2}$

Si $y = -x$, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x}} \left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}$

Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$

Méthode 2 : En coordonnées polaires :

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} \\
&= \lim_{r\to 0} \cos^2(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)+\sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

La limite dans ce cas dépend de θ donc f n'admet pas de limite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Méthode 1 :

On a : $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq y^2 \to 0$ donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$

Méthode 2 : En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= 0 \quad (\text{car} \quad \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \text{ est bornée})\end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$$

Méthode 1 :

On a : $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^2}{y} = 1$ et $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x^2}} \frac{x^2}{y} = \frac{1}{2}$

Donc $\dfrac{x^2}{y}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$

Méthode 2 : En coordonnées polaires :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y} = \lim_{r\to 0} r\cdot\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y^2}$$

Méthode 1 :

Pour $y=0$ On a : $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{pour} \quad x\to 0^+ \\ -\infty & \text{pour} \quad x\to 0^- \end{cases}$

Donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$

Méthode 2 : En coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x^2-y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos(\theta)+2r\sin(\theta)}{r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\,\frac{\cos(\theta)-2\sin(\theta)}{\cos(2\theta)}\end{aligned}$$

Pour $\theta=0$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$
Pour $\theta=\pi$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty$

Alors la limite dépend de θ d'où la limite n'existe pas .

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,\frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2}\\ &= 0\times\frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

Exercice 02 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction réelle de deux variables réelles définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2-1 & \text{si} \quad x^2+y^2>1\\[2mm] -\dfrac{x^2}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Correction :

Soit $D=D((0,0),1)$, On a : $f(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad (x,y)\in\bar{D}=D\cup C((0,0),1)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2-1 & \text{si} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}\end{cases}$

Sur D , f est polynomiale donc continue .
Sur $\bar{D}$, f est polynomiale donc continue . Donc le problème est en C .

Soit $X_0(x_0,y_0)\in C$ donc $x_0^2+y_0^2=1$ et $f(X_0)=-\dfrac{x_0^2}{2}$

Question qui se pose : A t-on $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=f(X_0)$?

On distingue deux cas : Si $X\in\bar{D}$ ou $X\in\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$

On a :

$$\lim_{\substack{X\to X_0\\ X\in\bar{D}}} f(X) = \lim_{X\to X_0}\frac{-x^2}{2} = \frac{-x_0^2}{2} = f(X_0)$$

Et

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{X\to X_0\\ X\in\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}}} f(X) &= \lim_{X\to X_0}\frac{x^2}{2}+y^2-1\\ &= \frac{x_0^2}{2}+y_0^2-1\\ &= \frac{x_0^2}{2}+y_0^2-x_0^2-y_0^2\\ &= \frac{-x_0^2}{2} = f(X_0)\end{aligned}$$

Donc f est continue en $X_0(x_0,y_0)$ $\forall X_0\in C$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

? Exercice 03 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

Soient A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue .
Soient Y et Z deux éléments de A et y un réel tel que :

$$f(Y) \leq y \leq f(Z)$$

Montrer qu'il existe $X \in A$ tel que $f(X) = y$

Correction :

Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires :
Pour toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

Définition : Partie convexe
On dit que $\Omega \subseteq T$,avec T un espace topologique , est une partie convexe si :

$$\forall (x, y) \in \Omega^2 \quad [x, y] \subseteq \Omega$$

Relation :
Soit $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ tel que $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$

On a : $x, y \in f([a, b]) \implies [x, y] \subseteq f([a, b])$. Si $f \in C^0([a, b])$ alors $f([a, b])$ convexe .

$$\text{Soit} \quad \begin{array}{ccccc} [0,1] & \xrightarrow{\varphi} & [Y, Z] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & Y + t(Z - Y) & \longrightarrow & f(Y + t(Z - Y)) \end{array}$$

$f \circ \varphi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ car f et φ sont continues . On a :

$$f(Y) \leq y \leq f(Z)$$
$$f \circ \varphi(0) \leq y \leq f \circ \varphi(1)$$

Donc d'après le TVI $\exists t_0 \in [0, 1] \ / \ y = f(\varphi(t_0))$

Soit $X = \varphi(t_0)$, on a bien $f(X) = y$ avec $X \in [Y, Z] \subseteq A$ car A est convexe .

? Exercice 04 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction réelle de deux variables réelles définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon toute direction sans y être continue .

Correction :

Définition : La dérivée directionnelle de f en $X_0(x_0, y_0)$ selon la direction $\vec{u}$ est :

$$\begin{aligned} df_{\vec{u}}(X_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\vec{u}) - f(X_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hx, y_0 + hy) - f(x_0, y_0)}{h} \end{aligned}$$

Si $\vec{u}=(1,0)$, on a :

$$\begin{aligned} df_{(1,0)}(X_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f((x_0,y_0)+h(1,0))-f(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \\ &= f'_x(X_0) \end{aligned}$$

De même si $\vec{u}=(0,1)$ on obtiendra que $df_{\vec{u}}(X_0)=f'_y(X_0)$

Soit $\vec{u}=(x,y)$

$$\begin{aligned} df_{\vec{u}}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(hx,hy)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2x^2hy}{h(h^4x^4+h^2y^2)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2y}{h^2x^4+y^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y=0 \\ \dfrac{x^2}{y} & \text{si } \ y\neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et on a : $\begin{cases} f'_x(0,0)=0 & \text{si } \ \vec{u}(1,0) \\ f'_y(0,0)=0 & \text{si } \ \vec{u}(0,1) \end{cases}$

Et $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\frac{1}{2}\neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

Donc la fonction f n'admet pas de limite en $(0,0)$ donc non continue en $(0,0)$

Exercice 05 :

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(t)=f(2t\ ,\ 1+t^2)$$

Exprimer $g'(t)$ en fonctions des dérivées partielles de f .

Correction :

Soit $g:\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \xrightarrow{\varphi} & (2t,1+t^2) & \xrightarrow{f} & f(2t,1+t^2) \end{array}$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et les deux fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$
Et donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(2t,1+t^2) \\ &= 2f'_x(2t,1+t^2)+2tf'_y(2t,1+t^2) \end{aligned}$$

Exercice 06 :

Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g(u,v)=f(uv\ ,\ u^2+v^2)$$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f .

Correction :

1 g est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et les deux fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

2 Soient :

$$g'_u = vf'_x(uv, u^2+v^2) + 2uf'_y(uv, u^2+v^2)$$

Et

$$g'_v = uf'_x(uv, u^2+v^2) + 2vf'_y(uv, u^2+v^2)$$

Exercice 07 :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction réelle de deux variables réelles définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est elle de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

Correction :

Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ f est fractionnelle dans $\mathcal{C}^\infty$ en particulier en $\mathcal{C}^2$

En $(0,0)$: $\left|\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq |xy| \to 0$, donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

f est alors continue en (0,0) .

On a $f'_x(0,0)$ est définie . En effet :

$$f'_x(0,0) = \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

.
Par un simple calcul , on obtient que :

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) &= \lim_{r\to 0} r(\cos^4(\theta)\sin(\theta) - \sin^5(\theta) + 4\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)) \\ &= 0 = f'_x(0,0) \end{aligned}$$

Donc f'_x est continue en (0,0)

On remarque que :

$$f(y,x) = -f(x,y)$$

Or f est antisymétrique donc :

$$f'_y(x,y) = \frac{xy^4 - x^5 + 4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Et :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0$$

Donc f'_y est continue en (0,0)
i.e f est de classe $\mathcal{C}^1$ en (0,0) et par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Soit :

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{xy}(0,0) &= (f'_x)'_y(0,0) \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,k) - f'_x(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} -\frac{k^5}{k^5} = -1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{yx}(0,0) &= (f'_y)'_x(0,0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(h,0) - f'_y(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1 \end{aligned}$$

On a donc : $f^{(2)}_{xy}(0,0) \neq f^{(2)}_{yx}(0,0)$

f n'est pas alors de classe $\mathcal{C}^2$ en (0,0) , d'où f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

? Exercice 08 :

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction réelle de deux variables réelles définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f
2. Etudier l'existence et les valeurs éventuelles des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f
3. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.
4. Conclure .

Correction :

1. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y = 0\}$,la droite d'équation $y = 0$

   - Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (Produit de 2 fonctions de $\mathcal{C}^\infty$) .

- Sur Δ : Soit $X_0=(x_0,0)\in\Delta$. On a :

$$\lim_{\substack{(x_0,0)\to(0,0)\\(x,y)\in\Delta}} f(x,y)=0=f(X_0)$$

Et

$$\lim_{\substack{(x_0,0)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x_0,0)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta}} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)=0 \qquad \left(\text{car}\left|y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right|\leq|y^2|\to 0\right)$$

Et par suite f est continue sur Δ , d'où f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$.

2 - Sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$:

Dérivées partielles première de f :

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \left(y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x \\ &= y^2\times\frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \left(y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y \\ &= 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)+y^2\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Les dérivées partielles mixtes :

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{xy}(x,y) = \left(f'_x(x,y)\right)'_y &= \left(y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y \\ &= \cos\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}\times y\sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{yx}(x,y) = \left(f'_y(x,y)\right)'_x &= \left(2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x \\ &= 2\cos\left(\frac{x}{y}\right)-\cos\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \cos\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned} f^{(2)}_{x^2}(x,y) &= \left(y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x \\ &= -y\times\frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f_{y^2}^{(2)}(x,y) &= \left(2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y \\ &= 2\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

- Sur Δ : Soit $X_0 = (x_0, 0) \in \Delta$, les dérivées partielles premières :

$$f'_x(X_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,0) - f(x_0,0)}{h} = 0$$

Et :

$$\begin{aligned} f'_y(X_0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,k) - f(x_0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{k^2\sin\left(\frac{x_0}{k}\right)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} k\sin\left(\frac{x_0}{k}\right) = 0 \end{aligned}$$

Les dérivées partielles mixtes :

$$\begin{aligned} f_{xy}^{(2)}(X_0) &= (f'_x)'_y(X_0) \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(x_0,k) - f'_x(x_0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{k\cos\left(\frac{x_0}{k}\right)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} k\cos\left(\frac{x_0}{k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 = 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si} \quad x_0 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} f_{yx}^{(2)}(X_0) &= (f'_y)'_x(X_0) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(x_0+h,0) - f'_y(x_0,0)}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les dérivées partielles deuxièmes :

$$f_{x^2}^{(2)} = (f'_x)'_x(X_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(x_0+h,0) - f'_x(x_0,0)}{h} = 0$$

Et

$$\begin{aligned} f_{y^2}^{(2)} &= (f'_y)'_y(X_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_y(x_0,k) - f'_y(x_0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{2k\sin\left(\frac{x_0}{k}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{k}\right)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} 2\sin\left(\frac{x_0}{k}\right) - \frac{x_0}{k}\cos\left(\frac{x_0}{k}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_0 = 0 \\ \text{n'existe pas} & \text{si} \quad x_0 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3 On a :

$$f_{xy}^{(2)}(0,0) = 1 \neq f_{yx}^{(2)}(0,0) = 0$$

4 f n'est pas de classe $\mathcal{C}_2$ en (0,0)

? Exercice 09 :

Les fonctions suivantes sont elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

b) $g(x,y) = \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

c) $h(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$

Correction :

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Soit :

$$f(x,x) = \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x}{1+x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$$f(x^2,x) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2}$$

Donc f n'admet pas de limite en (0,0) , d'où f n'est pas prolongeable par continuité en (0,0).

b) $g(x,y) = \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Soit :

$$f(x,0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 1$$

$$f(0,y) = -\frac{\sin(y^2)}{y^2} \xrightarrow{x \to 0} -1$$

Donc g n'admet pas de limite en (0,0) , d'où g n'est pas prolongeable par continuité en (0,0) .

c) $h(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(x,0)/x \in \mathbb{R}\}$

Soit :

$$\lim_{x \to 0} h(x,x^2) = \lim_{x \to 0} xe^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \to 0^- \\ +\infty & \text{si} \quad x \to 0^+ \end{cases}$$

Donc h n'admet pas de limite en (0,0) , d'où h n'est pas prolongeable par continuité en (0,0) .

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction réelle de deux variables réelles définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passante par l'origine est continue en $(0,0)$.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$?
4. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction :

1. Montrons la continuité en (0,0) de la restriction de f à toute droite passante par l'origine :
On a toute droite passante par l'origine est de la forme : $y = ax$ ou $\Delta_y = 0$ ou $\Delta_x = 0$
La restriction de f aux droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle qui est continue en (0,0) .

Pour $a \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=ax}} f(x,y) &= \lim_{(0,0)} \frac{ax^3}{x^4 - 2ax^3 + 3(ax)^2} \\ &= \lim_{(0,0)} \frac{ax}{x^2 - 2ax + 3a^2} \\ &= 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

Alors , la restriction de f à toute droite passante par l'origine est continue en $(0,0)$.

2. Soit pour $y = x^2$
On a $f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$ Donc $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

D'où f est pas continue en (0,0) .

3. On a f n'est pas continue en (0,0) donc elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en (0,0)
4. f n'est pas continue en (0,0) donc n'est pas différentiable en (0,0)

Exercice 11 :

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. g est-elle continue en $(0,0)$?
2. g est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction :

1 On a :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \; r(\cos^2(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin^2(\theta)) \\ &= 0 \quad (\text{car } |r(\cos^2(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin^2(\theta))| \leq 2r) \\ &= g(0,0)\end{aligned}$$

Donc g est continue en (0,0)

Rappel : Définition d'une fonction différentiable en $X_0 = (x_0, y_0)$

On dit que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en X_0 ssi il existe une

$$\mathrm{d}f_{X_0} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ H=(h,k) & \longrightarrow & \mathrm{d}f_{X_0}(H) = f'_x(x_0,y_0)h + f'_y(x_0,y_0)k \end{array}$$ une application linéaire tq :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)h-f'_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

2 Déterminons les dérivées partielles premières de g en (0,0) :

$$\text{Soient } \begin{cases} g'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = 0 \\ \\ g'_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{g(0,k)-g(0,0)}{k} = 0 \end{cases}$$

Donc si g est différentiable en (0,0) , alors $\mathrm{d}g_{(0,0)} = 0$
De plus , on a :

$$\begin{aligned}\lim_{H\to(0,0)} \frac{g((0,0)+H)-g(0,0)-\mathrm{d}g_{(0,0)}}{||H||} &= \lim_{H\to(0,0)} \frac{g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{H\to(0,0)} \frac{h^2k+hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{H\to(0,0)} \frac{h^2k+hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{r\to 0} \; \cos^2(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta)\sin(\theta)+\cos(\theta)\sin^2(\theta)\end{aligned}$$

La limite dépend de θ donc n'existe pas . D'où g n'est pas différentiable en (0,0) .

FIN DE LA SÉRIE 3

Série 4 :

Exercice 01 :

Déterminer les points critiques des fonctions réelles de deux variables réelles f et g suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y.$
2. $g(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

Correction :

Déterminons les points critiques des fonctions réelles de deux variables réelles f et g.

$f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$

Rappel : X(x,y) est un point critique ssi $f'_x(X) = f'_y(X) = 0$

Soient : $\begin{cases} f'_x(X) & = & 3x^2 + 6xy - 15 \\ f'_y(X) & = & 3x^2 - 12 \end{cases}$

Donc $X(x,y)$ est un point critique ssi $\begin{cases} 3x^2 + 6xy - 15 & = & 0 \\ 3x^2 - 12 & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6xy - 15 & = & 0 \\ x \in \{-2, 2\} \end{cases}$

Si $x = -2$, on aura :

$$3 \times (-2)^2 - 6 \times 2 \times y - 15 = 0 \Longrightarrow y = \frac{-1}{4}$$

Si $x = 2$, on aura :

$$3 \times 2^2 + 6 \times 2 \times y - 15 = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{4}$$

Les points critiques de f sont : $A = \left(-2, \frac{-1}{4}\right)$ et $B = \left(2 \, , \, \frac{1}{4}\right)$

$g(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Soient : $\begin{cases} g'_x(X) & = & 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ g'_y(X) & = & 6xy - 12 \end{cases}$

Donc $X(x,y)$ est un point critique ssi $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 & = & 0 \\ 6xy - 12 & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 - 5 & = & 0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^4 - 5y^2 + 4 & = & 0 \end{cases}$

On remarque que -1 , 1 sont deux solutions de l'équation $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ ... Par une division euclidienne , on obtient que :

$$\begin{cases} y = \pm 1 \quad \text{ou} \quad y = \pm 2 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases} \Longrightarrow (x,y) \in \{C(1,2) \;\; D(-1,-2) \, , \, E(2,1) \, , \, F(-2,-1)\}$$

Points	r	s	t	$rt-s^2$	**Nature du point**
$A\left(-2,\dfrac{-1}{4}\right)$	$\dfrac{-27}{2}$	-12	0	-144	Selle
$B\left(2\ ,\ \dfrac{1}{4}\right)$	$\dfrac{27}{2}$	12	0	-144	Selle
$C(1\ ,\ 2)$	6	12	6	-108	Selle
$D(-1,-2)$	-6	-12	-6	-108	Selle
$E(2\ ,\ 1)$	12	6	12	108	Minimum
$F(-2,-1)$	-12	-6	-12	108	Maximum

? Exercice 02 :

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y)=(y\sin(x)\ ,\ e^xy^2\ ,\ x^2y)$.

1. Donner la matrice jacobienne de f.
2. Calculer $f(0,1)$. En utilisant la jacobienne en déduire une valeur approchée de $f(0.01\ ,\ 1.02)$.

Correction :

1. La matrice jacobienne de f en X est :

$$J_f(X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\cos(x) & \sin(x)\\ e^xy^2 & 2ye^x\\ 2xy & x^2\end{pmatrix}$$

2. Soit $f(0,1)=(0,1,0)$

   On a :

$$\begin{aligned}f(0.01,1.02)&=f(X_0+H)\qquad \text{avec : } X_0=(0\ ,\ 1)\text{ et } H=(0.01,0.02)\\ &\simeq f(X_0)+J_f(X_0)\cdot H\\ &=(0,1,0)+\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.01\\0.02\end{pmatrix}\\ &=(0,1,0)+(0.01,0.05,0)\\ &=(0.01,1.05,0)\end{aligned}$$

Exercice 03 :

On mesure un cube de béton. La mesure d'un côté est $l = 10cm$ et la masse est $m = 2.2kg$. Nos appareils de mesure nous indiquent $\Delta l = 0.1cm$ et $\Delta m = 0.1kg$.

1. Calculer la masse volumique de ce béton en $kg.m^{-3}$.
2. Calculer une estimation de l'erreur absolue commise avec ces mesures.
3. Calculer une estimation de l'erreur relative commise.

Correction :

1. La masse volumique de ce béton en $kg.m^{-3}$ est :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l^3} = \frac{2.2}{(0.1)^3} = 2200kg.m^{-3}$$

2. Une estimation de l'erreur absolue commise :

On a : $\rho = \dfrac{m}{l^3}$, donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial m}\mathrm{d}m + \frac{\partial \rho}{\partial l}\mathrm{d}l \\ &= \frac{1}{l^3}\mathrm{d}m - \frac{3m}{l^4}\mathrm{d}l \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{l^3}\Delta m + \frac{3m}{l^4}\Delta l \\ &= \frac{0.1}{10^{-3}} + \frac{3 \times 2.2}{10^{-4}} \times 10^{-3} \\ &= 166kg.m^{-3} \end{aligned}$$

3. Une estimation de l'erreur relative commise :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{166}{2200} = 0.0754 = 7,54\%$$

Exercice 04 :

Calculer l'intégrale :

$$I = \iint_D (x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq 1, y \leq 1 \ \ et \ \ x + y \geq 1\}$

Correction :

On a : $x \leq 1$, $y \leq 1$ et $x + y \geq 1$ Donc $x + y \geq x$, d'où $y \geq 0$.

De même , on trouve que : $x \geq 0$.

Soit :

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x+y)\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{1-2x+x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

? Exercice 05 :

Calculer l'intégrale de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation :

$$x^2 + \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{3}{4} z^2 + xz = 1$$

Correction :

Soit :

$$
\begin{aligned}
& x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz && = 1 \\
\iff\quad & \left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 && = 1 \\
\iff\quad & u^2 + v^2 + w^2 && = 1
\end{aligned}
$$

Avec : $u = x + \frac{1}{2}z$, $v = \frac{y}{\sqrt{2}}$, $w = \frac{z}{\sqrt{2}}$

Soit : $\det(J_\varphi) = \dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$

Donc d'après le théorème de changement de variable on a :

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_\delta \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \qquad \text{avec } \delta = \left\{x,y,z \in \mathbb{R} \backslash\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz \leq 1\right\} \\
&= \iiint_\alpha |\det(J_{\varphi^{-1}})| \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}w \qquad \text{avec } \alpha = \left\{u,v,w \in \mathbb{R} \backslash\ u^2+v^2+w^2 \leq 1\right\} \\
&= 2 \times \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

? Exercice 06 :

Calculer l'intégrale $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ où D est la partie de $\mathbb{R}^2$ située entre les cercles d'équations :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad et \quad x^2 + y^2 = 4$$

Correction :

On pose : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ Et on a : $J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$

Donc : $\det(J_{\varphi^{-1}}) = r$, on pose : $\beta = \{u, v, w \in \mathbb{R}\backslash\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$:

$$\begin{aligned}
\iint_\beta e^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{1\leq r^2\leq 4} re^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_1^2 re^{-r^2}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_1^2 \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-1}\right) \\
&= \pi(e^{-1} - e^{-4})
\end{aligned}$$

? Exercice 07 :

Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$

Correction :

On a :

$$\begin{aligned}
I \times I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On pose $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$, avec $\det(J_{\varphi^{-1}}) = r$

Donc :

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^{+\infty} \\
&= 2\pi\left(\frac{e^{-\infty}}{-2} - \frac{e^{-0}}{-2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Donc $I = \sqrt{\pi}$

? Exercice 08 :

Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\, dx\, dy$ où D est le paraléllogramme délimité par les droites d'équations :

$$x+y=0\ ,\ x+y=1\ ,\ 2x-y=0\ \ et\ \ 2x-y=3$$

Correction :

On pose $\begin{cases} u = x+y \\ v = 2x-y \end{cases}$, et $\varphi(x,y) = (u,v)$

On a :

$$\det(J_\varphi) = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \implies \det(J_{\varphi^{-1}}) = -\frac{1}{3}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_0^3 \int_0^1 \frac{1}{3} u^2 \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}v \int_0^1 u^2 \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}\ [v]_0^3\ \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{3}$

? Exercice 09 :

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

Correction :

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$

1. Montrons que D est un disque :

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2-2x+1 \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ (x-1)^2+(y-0)^2 \leq 1^2\right\} \end{aligned}$$

Donc D est le disque de centre $\mathcal{O}(1,0)$ et de rayon $\mathcal{R} = 1$

2. On pose $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$

Soit

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{\varphi(D)} r^2\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$$

Avec

$$\begin{aligned}\varphi(D) &= \left\{(r,\theta)\ /\ r^2 - 2r\cos(\theta) \leq 0\right\} \\ &= \{(r,\theta)\ /\ r(r-2\cos(\theta)) \leq 0\} \\ &= \{(r,\theta)\ /\ 0 \leq r \leq 2\cos(\theta)\}\end{aligned}$$

Donc : $\quad r \geq 0 \quad$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos(\theta)} r^2 \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\ r^3\right]_0^{2\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Soit

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta)$$

En effet :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) \\ &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \\ &= (2\cos^2(\theta)-1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2(1-\cos^2(\theta))\cos(\theta) \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta) + 2\cos^3(\theta) \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}(\cos(3\theta) + 2\cos(\theta))\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{2}{9}\sin(3\theta) + 2\sin(\theta)\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{-2}{9} + 2 - \frac{2}{9} + 2 \\ &= \frac{32}{9}\end{aligned}$$

FIN DE LA SÉRIE 4

Série 5 :

? Exercice 01 :

Déterminer les bornes d'intégration pour l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ \ et \ \ x+y \leq 1\}$
2. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq x \ \ et \ \ x^2+y^2 \leq y\}$
3. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq x^2 \ \ et \ \ 1-x^2 \geq 1\}$

Correction :

1. $\iint_{\mathcal{D}} f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$
2. Soit :

$$\begin{aligned} x^2+y^2 \leq x &\implies x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ &\implies \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

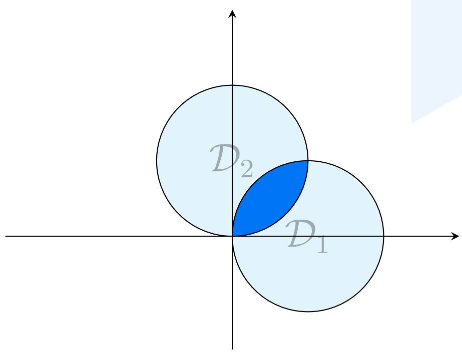
Et

$$\begin{aligned} x^2+y^2 \leq y &\implies x^2 - y + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4} \\ &\implies x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

$\mathcal{D}_1$ est le disque de centre $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$\mathcal{D}_2$ est le disque de centre $\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = x \\ x^2+y^2 = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = x \end{cases} \iff \begin{cases} x(2x-1) = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : Pour $(x,y) \in \mathcal{D}$ on a : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$

Déterminons $y_1(x)$ et $y_2(x)$:
$y_1(x)$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = y \\ \iff & x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \iff & \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x^2 \\ \iff & y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \quad (\text{car} \ \ y \leq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Donc $y_1(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$

$y_2(x)$ vérifie l'équation suivante :

$$x^2 + y^2 = x \iff y = \sqrt{x - x^2}$$

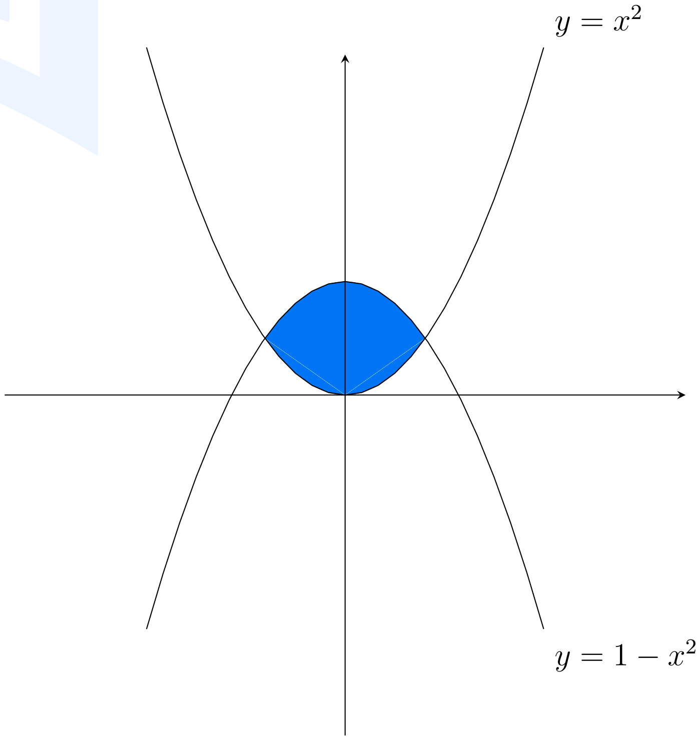
Donc $y_2(x) = \sqrt{x - x^2}$

On peut déduire alors que :

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ \ et \ \ x + y \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \ \ \text{et} \ \ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq y \leq \sqrt{x - x^2}\right\} \end{aligned}$$

Donc $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

3 Soit $\begin{cases} y &= x^2 \\ y &= 1 - x^2 \end{cases} \iff x^2 = 1 - x^2 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff$ ou $\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



Donc $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x^2 \leq y \leq 1 - x^2$

D'où $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

Exercice 02 :

1 Calculer l'aire du domaine :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 \leq 1 \ \ et \ \ x^2 + y^2 - 2y \leq 0\right\}$$

2 Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq 0 \leq x \ \ et \ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (x^2 \ + \ 2xy) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$.

3 Calculer l'intégrale :

$$\iint_{\mathcal{D}} x\cos(y) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$$

Où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \leq x + 2 \ \ et \ \ x^2 \leq y + 4\}$

4 Calculer $I = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)^2 \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z$ où :

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ \ et \ \ x + y + z \leq 1\right\}$$

Correction :

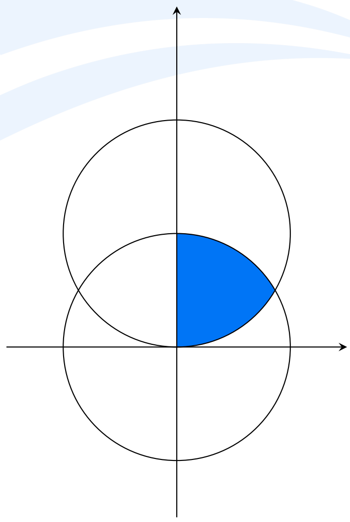
1 On a : $x^2 + y^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre (0,0) et de rayon 1 .
Et $x^2 + y^2 - 2y = 0 \implies x^2 + (y-1)^2 = 1$ est l'équation du cercle de centre (0,1) et de rayon 1

Soit :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 &\implies y^2 = 1 - x^2 \\ &\implies y = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{car } y \geq 0) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 = 1 &\implies y - 1 = -\sqrt{1 - x^2} \quad (\text{car } y < 1) \\ &\implies y = 1 - \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$



Les deux cercles se coupent en :

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{1 - x^2} \\ \implies & 2\sqrt{1 - x^2} = 1 \\ \implies & x^2 = \frac{3}{4} \implies \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{1-x^2} - 1\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

On pose $x = \sin(t) \implies \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\sqrt{1-\sin^2(t)} - 1\right) \cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos(t) - 1)\cos(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos^2(t) - \cos(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos(2t) - \cos(t))\mathrm{d}t \\ &= \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t) - \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

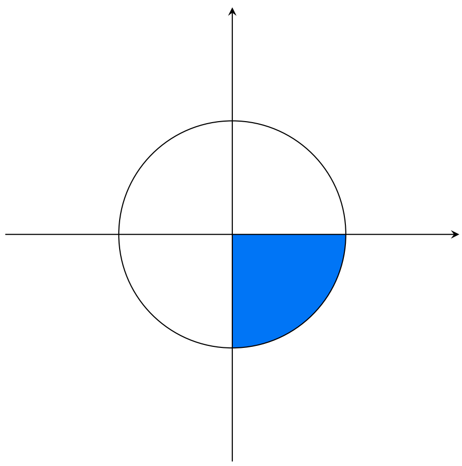
2 On pose : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 2xy \\ &= r^2\cos^2(\theta) + 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= r^2\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} + r^2\sin(2\theta)\right) \\ &= g(r,\theta) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{D}) &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ r\cos(\theta) \geq 0 \ , \ r\sin(\theta) \leq 0 \ , \ r^2 \leq 1\right\} \\ &= \left\{(r,\theta) \ / \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} \ , \ 0\right] \ , 0 \leq r \leq 1\right\} \end{aligned}$$

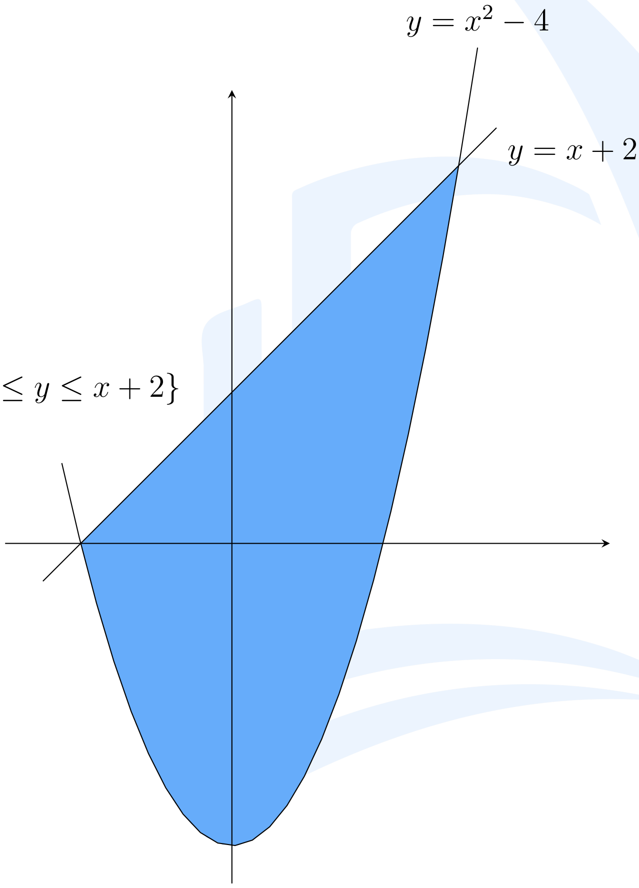


Donc

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\varphi(\mathcal{D})} g(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{r^2}{2}(1+\cos(2\theta)+r^2\sin(2\theta)\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)+\sin(2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{4}+\frac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

3. Pour trouver l'intersection de la droite et la parabole , on résout l'équation :

$$\begin{aligned}
& x^2-4 = x+2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-x-6=0 \\
\Leftrightarrow\ & x \in \{-2,3\}
\end{aligned}$$



Donc $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -2 \leq x \leq 3 \ \text{ et } \ x^2-4 \leq y \leq x+2\}$
Et

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^3 x\left(\int_{x^2-4}^{x+2}\cos(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^3 x(\sin(x+2)-\sin\big(x^2-4)\big)\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_{-2}^3 x\sin(x+2)\mathrm{d}x}_{=I_1} - \underbrace{\int_{-2}^3 x\sin\big(x^2-4)\big)\mathrm{d}x}_{=I_2}
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} u' = \sin(x+2) \\ v = x \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u = -\cos(x+2) \\ v' = 1 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-2}^3 x\sin(x+2)\mathrm{d}x \\
&= [-x\cos(x+2)]_{-2}^3 + \int_{-2}^3 \cos(x+2)\mathrm{d}x \\
&= [-x\cos(x+2)]_{-2}^3 + [\sin(x+2)]_{-2}^3 \\
&= -3\cos(5) - 2 + \sin(5)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-2}^{3} x\sin\left(x^2-4\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\left[-\cos(x^2-4)\right]_{-2}^{3}}{2} \\ &= \frac{-\cos(5)}{2}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= -3\cos(5)-2+\sin(5)-\frac{-\cos(5)}{2}+\frac{1}{2} \\ &= \sin(5)-\frac{5}{2}\cos(5)-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

4. Soit $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ z\geq 0\ \ et\ \ x+y+z\leq 1\}$

On a :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-(x+y)}(x+y+z)^2\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[\frac{(x+y+z)^3}{3}\right]_0^{1-(x+y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\frac{1-(x+y)^3}{3}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1\left[y-\frac{(x+y)^4}{4}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x-\frac{(1-x^4)}{4}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left[x-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^5}{20}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

? Exercice 03 :

Montrer que la fonction $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C}\\ z & \to & \bar{z}\end{array}$, où $\bar{z}$ est le conjugué de z , est $\mathbb{R}$ -différentiable mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}$

Correction :

Soient $z=x+iy$ et $H=h+ik$
On a :

$$\begin{aligned} f(z+H) &= f((x+h)+i(y+k)) \\ &= (x+h)-i(y+k) \\ &= (x-iy)+(h-ik) \\ &= f(z)+df(z)\cdot H \qquad \text{avec } \ df(z)\cdot H = h-ik \end{aligned}$$

Donc f est $\mathbb{R}$ différentiable .

On rappelle que :

f *est* $\mathbb{C}$ *différentiable* $\Longleftrightarrow$ f est $\mathbb{R}$ *différentiable et vérifie les conditions de Cauchy Riemann.*

Dans la suite de cet exercice , $\delta(z)$ constitue la partie réelle de z et $\varphi(z)$ sa partie imaginaire . ($ou\ encore\ \ \delta(z) = x\ ,\ \varphi(z) = -y$)

On a :

$$\begin{aligned} df_{x_0 - iy_0}(x - iy) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\delta(z)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi(z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\delta(z)}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi(z)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\partial\delta(z)}{\partial x} \neq \dfrac{\partial\varphi(z)}{\partial y}$ alors f n'est pas $\mathbb{C}$ différentiable .

? Exercice 04 :

Etudier la dérivabilité de f définie par :

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Correction :

Pour étudier la dérivabilité de f , on va étudier la limite suivante :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{\dfrac{1+z+\delta}{1-z-\delta} - \dfrac{1+z}{1-z}}{\delta} \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{2}{(1-z-\delta)(1-z)} \\ &= \frac{2}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{C} - \{1\}$ et $f'(z) = \dfrac{2}{(1-z)^2}$.

D'où f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{1\}$.

? Exercice 05 :

La fonction définie dans par $f(z) = (Re(z))^2\ Im(z) + iIm(z)$ est-elle holomorphe ?

Correction :

Vérifions d'abord les conditions de Cauchy Riemann .

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$
On a

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2y + iy \\ &= P(z) + iQ(z) \qquad \text{avec} \;\; P(z) = x^2y \text{ et } \; Q(z) = y \end{aligned}$$

Pour que f soit dérivable en z il faut que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P(z)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(z)}{\partial x} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P(z)}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial Q(z)}{\partial y} = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P(z)}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial Q(z)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ *Contradiction*

D'où f n'est différentiable en aucun point de $\mathbb{C}$ alors f n'est pas holomorphe .

? Exercice 06 :

Soit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = x + iy^2$ pour tout $z = x + iy$.

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$ -différentiable sur $\mathbb{C}$ et déterminer sa différentielle.
2. En quels points est-elle différentiable ?
3. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f_{/U}$ soit holomorphe sur U .

Correction :

1. La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{C}$.

   Et on a :

$$df_{x_0+iy_0^2}(x + iy^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y_0y \end{pmatrix} = x + 2iy_0y$$

2. Pour que f soit $\mathbb{C}$ différentiable , il faut que : $2y = 1 \iff y = \dfrac{1}{2}$

   Donc f est $\mathbb{C}$ différentiable sur la droite $\Delta y = \dfrac{1}{2}$

3. La droite $\Delta y = \dfrac{1}{2}$ ne contient aucun ouvert non vide dans $\mathbb{C}$ d'où f n'est holomorphe sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{C}$

? Exercice 07 :

Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentiel de z par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$$

Montrer que f est entière et $f'(z) = e^z$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

Correction :

Soit

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) \\ &= P(z) + iQ(z) \end{aligned}$$

Or P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f est $\mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{C}$

On a : $\begin{cases} \dfrac{\partial P(z)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(z)}{\partial y} = e^x \cos(y) \\ \dfrac{\partial P(z)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(z)}{\partial x} = -e^x \sin(y) \end{cases}$

Donc d'après Cauchy Riemann est $\mathbb{C}$ différentiable en tout point de $\mathbb{C}$. D'où f est entière .

Soit :

$$\begin{aligned} f'(z) &= (P_x(z) + iQ_x(z))' \\ &= P'_x(z) + iQ'_x(z) \\ &= e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) \end{aligned}$$

FIN DE LA SÉRIE 5

Série 6 :

Exercice 01 :

Déterminer les rayons de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ dans les cas suivants :

1) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $a_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$ 3) $a_n = \dfrac{n!}{2^{2^n}\sqrt{(2n)!}}$

4) $a_n = \ln(n)$ 5) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{\sqrt{n}}{2^n+1} z^{2n}$ 6) $a_n = 2+ni$

7) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{1\times 3 \ \cdots \times (2n-1)}$ 8) $a_n = n^{\ln(n)}$

Correction :

1 *On va utiliser le théorème d'Alembert :*

$$\begin{aligned}
R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n!}{(2n)!}\cdot\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\right| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{4n^2+6n+2}{n+1}\right| \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{2^{2^n}\sqrt{(2n)!}}\cdot\frac{2^{2^{(n+1)}}\sqrt{2(n+1)!}}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2^n\cdot 2}}{2^{2^n}}\cdot\sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2^n}\cdot\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{n+1} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}. \\ &= 1 \end{aligned}$$

5 *On utilisera le critère de Cauchy*
Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1}\, r^{2n} \quad &\overset{+\infty}{\sim} \quad \frac{\sqrt{n}}{2^n}\, r^{2n} && \text{bornée} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{n}\left(\frac{r^2}{2}\right)^n && \text{bornée} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r^2}{2}\right)^n = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{r^2}{2} < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad r < \sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{r \in \mathbb{R}^+ \ / \ a_n r^{2n} \text{ borné}\right\} = \left[0, \sqrt{2}\right[$$

Et d'après Cauchy , on a $R = sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \ / \ a_n r^{2n} \text{ borné}\right\} = \sqrt{2}.$

6

$$\begin{aligned} R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}}{\sqrt{4+(n+1)^2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4+n^2}{n^2+2n+5}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned} R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)(2(n+1)-1)}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2n+2-1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

8 *On va appliquer dans ce cas le lemme d'Hadamard :*
On a :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n\ln(n)} &= n^{\frac{\ln(n)}{n}} \\ &= e^{\frac{\ln(n)}{n}\times\ln(n)} \\ &= e^{\frac{\ln^2(n)}{n}} \end{aligned}$$

Et $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln^2(n)}{n}} = 1$, d'où $R = 1$

? Exercice 02 :

Développer en série de Laurent :

$$1)\quad f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}} \qquad\qquad 2)\quad f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$$

Correction :

1 Soit : $e_z=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}$, donc :

$$\begin{aligned} f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}} &= z^2\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n}\\ &=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^{n-2}}\end{aligned}$$

2 Soit :

$$\begin{aligned} f(z)=e^{z+\frac{1}{z}} &= e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}\\ &=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}\,\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!\,z^k}\\ &=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c_jz^j\end{aligned}$$

Trouvons l'expression de c_j :

Pour $j\geq 0$:

On obtient les termes en z^j en prenant tous les termes qui s'écrivent de la forme z^{n+j} dans e^z et en les multipliant par les $\frac{1}{z^k}$ de $e^{\frac{1}{z}}$ On trouve alors que, pour $j\geq 0$, $c_j=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+j)n!}$

En procédant de la même manière , on trouve que pour $j<0$, $c_j=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n-j)n!}$

On alors $f(z)=\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+|j|)n!}z^j$

? Exercice 03 :

Développer en série de Laurent la fonction suivante : $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans les cas suivants :

$$a)\quad |z|\leq 1 \qquad\qquad b)\quad 1\leq|z|\leq 2 \qquad\qquad c)\quad |z|\geq 2$$

Correction :

a) Soit

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\
&= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} \\
&= \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n
\end{aligned}
$$

b) Soit

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} \\
&= \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
&= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

c) Soit

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2} \\
&= \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\
&= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{z}\right)^n \\
&= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n\geq 0} (2^n - 1) \frac{1}{z^{n+1}} \\
&= \sum_{n\geq 1} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^n}
\end{aligned}
$$