Rappels:

1) Analyse et complexité des algorithmes

Algorithmique

- **Conception de méthodes pour la résolution de problèmes**
  - On a une description des données d'un problème (entrées, spécification en mots du résultat cherché)
  - On décrit des méthodes pour résoudre le problème ⇒ ALGORITHMES
  - On montre que les méthodes répondent au problème
- **Complexité des méthodes**
  - Efficacité: temps de calcul, espace mémoire utilisé
- **Réalisation**
  - Organisation des données ⇒ CHOIX D'UNE STRUCTURE
  - Implémentation

Algorithme

Historique: Le terme **algorithme** vient d'**Al Khowarizmi**, mathématicien arabe du IXe siècle

- Le livre d'Al Khowarizmi constitue la base de la notation décimale moderne.
- Au départ, le mot "**algorisme**" désignait les règles nécessaires pour effectuer des calculs arithmétiques en utilisant la notation décimale.
- Le terme **algorithme** apparaît au XVIIIe siècle.

Algorithme

Définitions:

1) Le petit Larousse

Ensemble de règles opératoires dont l'application permet de résoudre un problème énoncé au moyen d'un nombre fini d'opérations.

2) Encyclopedia Universalis

Spécification d'un schéma de calcul sous forme d'une suite fini d'opérations élémentaires obéissant à un enchaînement déterminé.

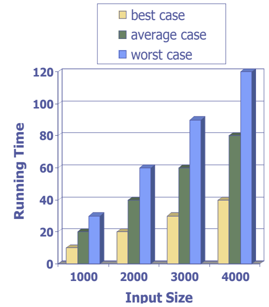
Algorithme

Propriétés:

- **Les entrées:** un algorithme prend des valeurs d'entrées à partir d'ensembles définis
- **La sortie:** constitue la solution du problème de départ
- ➡ **La finitude:** l'algorithme doit produire la sortie souhaitée en un nombre fini (mais peut-être très grand) d'étapes, quelque soit l'entrée
- ➡ **L'efficacité:** Chaque étape de l'algorithme doit pouvoir s'exécuter dans un temps fini
- ➡ **La généralité:** l'algorithme s'applique à tous les problèmes d'une forme désirée

Complexité en temps des algorithmes (§2)

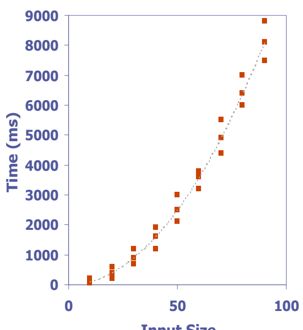
- La plupart des algorithmes transforment des entrées en une sortie
- La complexité en temps d'un algorithme est habituellement fonction de la taille des entrées
- La complexité en moyenne est souvent difficile à obtenir
- On étudie plutôt la complexité dans le pire des cas:
  - plus facile à analyser
  - crucial dans beaucoup d'applications: jeux, finance...



© 2004, Goodrich, Tamassia

Méthode 1: Études expérimentales

- Implémenter l'algorithme en Java (ou autre)
- Faire fonctionner le programme avec des entrées de taille et de composition différentes
- Utiliser une méthode comme System.currentTimeMillis() pour obtenir une mesure réelle du temps d'exécution
- Dessiner le graphique des résultats



© 2004, Goodrich, Tamassia

Limitation de cette méthode

- On doit implémenter l'algorithme
  - On veut connaître la complexité en temps d'un algorithme avant de l'implémenter, question de sauver du temps et de l' $$$$
- Les résultats trouvés ne sont pas représentatifs de toutes les entrées
- Pour comparer 2 algorithmes différents pour le même problème, on doit utiliser le même environnement (hardware, software)

Méthode 2: Analyse Théorique

- Se fait à partir du pseudo-code de l'algorithme et non de l'implémentation
- Caractérise le temps d'exécution comme une fonction de n, la taille de l'entrée
- Prend en considération toutes les entrées
- Indépendant de l'environnement utilisé (hardware, software)

Complexité en temps

T(algo,d) = temps d'exécution de l'algorithme **algo** appliqué aux données **d**

Complexité au pire:

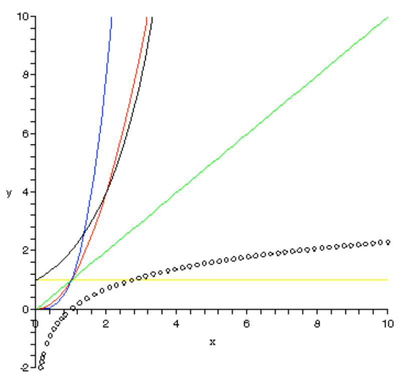
$\mathbf{T_{MAX}}\,\mathbf{(algo,n)} = \max\,\{\mathbf{T(algo,d)},\ \mathbf{d} \text{ de taille } \mathbf{n}\}$

Complexité au mieux:

$\mathbf{T_{MIN}}\,\mathbf{(algo,n)} = \min\,\{\mathbf{T(algo,d)},\ \mathbf{d} \text{ de taille } \mathbf{n}\}$

Plusieurs fonctions importantes (§2.3)

- fonction constante, f(x)=1
- fonction linéaire, f(x)=x
- fonction logarithmique, f(x)=log(x)
- fonction quadratique, f(x)= x^2
- fonction cubique, f(x)=x^3
- fonction exponentielle, f(x)= 2^x



Comparaison des fonctions

log(n)	$\sqrt{n}$	n	n log(n)	n^2
3	3	10	33	100
7	10	100	664	10 000
10	32	1000	9966	1 000 000
13	100	10 000	132 877	100 000 000
17	316	100 000	1 660 964	10 000 000 000
20	1000	1 000 000	19 931 569	1 000 000 000 000

Valeurs des fonctions communément rencontrées, tableau modifié de © 2004, Sedgewick

Temps de résolution très grands problèmes

Opérations par secondes	Taille du problème: 1 million			Taille du problème 1 milliard		
	n	n log(n)	n^2	n	n log(n)	n^2
10^6	Secondes	Secondes	Semaines	Heures	Heures	Jamais
10^9	Immédiat	Immédiat	Heures	Secondes	Secondes	Décennies
10^{12}	Immédiat	Immédiat	Secondes	Immédiat	Immédiat	Semaines

n = 1 million

n log n = ~ 20 millions

n^2 = 1000 milliards

Opérations élémentaires

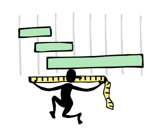
- Opérations de base effectuées par l'algorithme
  - Évaluer une expression
  - Assigner une valeur à une variable
  - Appeler une méthode
  - ...... etc...
- Indépendantes du langage de programmation choisi
- On assume que leur temps d'exécution est **constant**

Compter les opérations élémentaires

En inspectant le pseudocode d'un algorithme, on peut déterminer le nombre maximum d'opérations élémentaires exécuté par un algorithme, comme une fonction de la taille de l'entrée

```
Algorithm arrayMax(A, n)                    # operations
    currentMax ← A[0]                          2
    for i ← 1 to n − 1 do                      2n
        if A[i] > currentMax then             2(n − 1)
            currentMax ← A[i]                     2(n − 1)
    { increment counter i }                   2(n − 1)
    return currentMax                           1
                                           Total    8n − 2
```


Estimer le temps d'exécution



- L'algorithme **arrayMax** exécute 8n-2 opérations élémentaires dans le pire des cas. Soit

  a = temps d'exécution le plus rapide d'une opération élémentaire

  b = temps d'exécution le plus lent d'une opération élémentaire

- Soit **T(n)** la complexité dans le pire des cas de **arrayMax**. Alors
  $\mathbf{a}(8n-2) \leq T(n) \leq \mathbf{b}(8n-2)$

- Le temps d'exécution est donc borné par deux fonctions

Taux de croissance du temps d'exécution

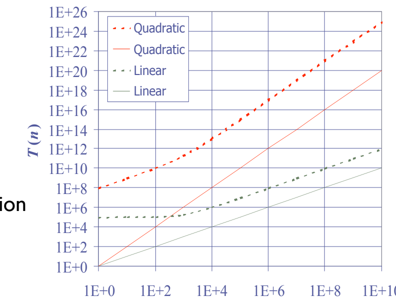
- Changer d'environnement (hardware, software)
  - Affecte **T(n)** d'un facteur constant
  - N'affecte pas le taux de croissance de **T(n)**

- Le taux de croissance linéaire de **T(n)** est une propriété intrinsèque de l'algorithme.

Facteurs constants

- Le taux de croissance d'une fonction n'est pas affecté par
  – les facteurs constants
  – les termes d'ordre plus petit

- Exemples
  – $100n+10^5$ est une fonction linéaire
  – $10^5 n^2 + 10^8 n$ est une fonction quadratique



Facteurs constants

FIGURE 2.1 The growth rate of all terms of function $f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1{,}000$.

n	$f(n)$	n^2		$100n$		$\log_{10} n$		1,000	
	Value	Value	%	Value	%	Value	%	Value	%
1	1,101	1	0.1	100	9.1	0	0.0	1,000	90.83
10	2,101	100	4.76	1,000	47.6	1	0.05	1,000	47.60
100	21,002	10,000	47.6	10,000	47.6	2	0.001	1,000	4.76
1,000	1,101,003	1,000,000	90.8	100,000	9.1	3	0.0003	1,000	0.09
10,000	101,001,004	100,000,000	99.0	1,000,000	0.99	4	0.0	1,000	0.001
100,000	10,010,001,005	10,000,000,000	99.9	10,000,000	0.099	5	0.0	1,000	0.00