Université Mohammed V
Faculté des Sciences. Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2018-2019
Filière SMI, Module 18
Probabilité & Statistique

Rattrapage Janvier 2019
(Durée 1H 30)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Il est strictement interdit d'emprunter ou de prêter une calculatrice. Justifier les réponses.

Statistique (10 points)

Exercice : 1 Une étude sur le budget, en milliers de dirhams, consacré aux vacances d'été auprès de ménages dans un quartier de Rabat a donnée les résultats suivants :

Budget	[8, 10[	[10, 14[	[14, 16[	[16, a[	[a, 24[	[24, b[
Fréquences cumulées	$0,08$	$0,18$	$0,34$	$0,64$	$0,73$	1

Partie 1 : Certaines données sont manquantes.

1) Dresser le tableau de distribution des fréquences.

2) Calculer la borne manquante b sachant que l'étendue de la série est égale à 32.

3) Calculer la borne manquante a dans les deux cas suivants :

a) Le budget moyen est égal à 19,950 dirhams.

b) Le budget médian est égal à 19,200 dirhams.

PARTIE 2 : Considérons maintenant que la borne manquante a est égale à 20 et b calculé à la partie 1.

1) Calculer le budget moyen et médian.

2) Sachant que $\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2 = 474120$ et $V(x) = 60,4044$, retrouver l'effectif total des ménages enquêtés ainsi que les effectifs correspondant à chacune des tranches de budgets.

3) Etudier la symétrie de cette série.

Exercice : 2 La moyenne d'âges de N_1 femmes est $\overline{x}$, celle de N_2 hommes est $\overline{y}$. Montrer que la moyenne d'âges de ces hommes et femmes est $\dfrac{N_1\,\overline{x} + N_2\,\overline{y}}{N_1 + N_2}$.

Probabilité (10 points)

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans un quartier de Rabat. L'étude a montré qu'il est possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

L'étude menée dans ce quartier à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 20% des habitants de ce quartier ont contracté la grippe.
- 40% des habitants de ce quartier sont vaccinés.
- 8% des personnes vaccinées ont contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard de ce quartier et on considère les événements :

V : l'événement “la personne est vaccinée contre la grippe”.

G : l'événement “ la personne a contracté la grippe”.

les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Partie A

a) Donner la probabilité des événements G et V.

b) Calculer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

c) Montrer que la probabilité qu'une personne choisie ait contracté la grippe et ne soit pas vaccinée est égale à 0,168

d) La personne choisie n'est pas vaccinée. Calculer la probabilité qu'elle ait contracté la grippe.

e) Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

Partie B

On interroge au hasard n habitants de ce quartier .

On définit la variable aléatoire $X=$ “nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées. ”.

1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

2) Dans cette question, on suppose que $n = 40$. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

3) Dans cette question, on suppose que $n = 3750$.

a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X.

b) Vérifier que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi gaussienne $\mathcal{N}(E(X), V(X))$.

c) On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{X - 1500}{30}$. On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite. En utilisant l'approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait 1450 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

Table de la loi normale centrée réduite

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$0,0$	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
$0,1$	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
$0,2$	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
$0,3$	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
$0,4$	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
$0,5$	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
$0,6$	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
$0,7$	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
$0,8$	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
$0,9$	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
$1,0$	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
$1,1$	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
$1,2$	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
$1,3$	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
$1,4$	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
$1,5$	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
$1,6$	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
$1,7$	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
$1,8$	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
$1,9$	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670

Correction Rattrapage Janvier 2019

Statistique (10 points)

Exercice : 1 Partie 1 :

1) Le tableau de distribution des fréquences.

Budget	[8, 10[	[10, 14[	[14, 16[	[16, a[	[a, 24[	[24, b[	Total
Fréquences cumulées	0,08	0,18	0,34	0,64	0,73	1	
Fréquences	0,08	0,1	0,16	0,3	0,09	0,27	1
c_k	9	12	15	$\frac{y+16}{2}$	$\frac{y+24}{2}$	32	

2) L'étendue $e = x_{max} - x_{min} = b - 8 = 32 \Longrightarrow b = 40$.

3) Calcul de la borne manquante a.

a) Le budget moyen est égal à 19,950 dirhams $\Longrightarrow a = 18$. En effet

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \sum_{k=1}^{n} c_k\, f_k = 0,08 \times 9 + 0,1 \times 12 + 0,16 \times 15 + 0,3 \times \frac{a+16}{2} + 0,09 \times \frac{a+24}{2} + 0,27 \times 32 \\
&= 16,44 + \frac{0,39}{2} \times a = 19,950 \Longrightarrow a = \frac{(19,950 - 16,44) \times 2}{0,39} = 18
\end{aligned}$$

b) Le budget médian est égal à 19,200 dirhams $\Longrightarrow a = 22$. En effet.

La classe médiane est [16, a[car la $1^{ère}$ fréquence supérieure à 0,5 est 0,64 et on a

$$\begin{aligned}
m_e &= x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0.5 - F_i}{F_{i+1} - F_i} = 16 + (a - 16)\frac{0,5 - 0,34}{0,64 - 0,34} \\
&= 16 + (a - 16)\frac{0,16}{0,3} = 19,2 \Longrightarrow a = 16 + \frac{(19,200 - 16) \times 0,3}{0,16} = 22
\end{aligned}$$

PARTIE 2 : La borne manquante $a = 20$ et $b = 40$.

1) $\overline{x} = 20,34$ et $m_e = 18,13$. En effet

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \sum_{k=1}^{n} c_k\, f_k = 16,44 + \frac{0;39}{2} \times a = 16,44 + \frac{0,39}{2} \times 20 = 16,44 + 3,9 = 20,34 \\
m_e &= x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0.5 - F_i}{F_{i+1} - F_i} 16 + (a - 16)\frac{0,16}{0,3} = 16 + (20 - 16)\frac{0,16}{0,3} \\
&= 16 + \frac{4 \times 1,6}{3} = 18,13
\end{aligned}$$

2) Sachant que $\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2 = 474120$ et $V(x) = 60,4044$, retrouvons l'effectif total des ménages enquêtés ainsi que les effectifs correspondant à chacune des tranches de budgets.

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2 - \overline{x}^2 \Longrightarrow N = \frac{\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2}{V(x) + \overline{x}^2} = \frac{474120}{60,4044 + 20,34^2} = 1000$$

D'où les effectifs des classes

Budget	[8, 10[	[10, 14[	[14, 16[	[16, 20[	[20, 24[	[24, 40[	Total
Fréquences	0,08	0,1	0,16	0,3	0,09	0,27	1
Fréquences cumulées	80	100	160	300	90	270	1000

3) Le premier cœfficient d'asymétrie de Pearson

$$A_{P1} = 3 \times \frac{\overline{x} - m_e}{\sigma} = 3 \times \frac{20,34 - 18,13}{\sqrt{60,4044}} = 0,85 > 0 \text{ D'où on a une asymétrie à droite.}$$

<u>Exercice :</u> 2) $\overline{x} = \dfrac{1}{N_1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n_k\, x_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} n_k\, x_k = N_1\, \overline{x}$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{N_2} \displaystyle\sum_{k=1}^{N_1} n_k\, y_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N_2} n_k\, y_k = N_2\, \overline{y}$.

$$\overline{z} = \frac{1}{N_1+N_2} \sum_{k=1}^{N_1+N_2} n_k\, z_k = \frac{1}{N_1+N_2} \left(\sum_{k=1}^{N_1} n_k\, x_k + \sum_{k=1}^{N_2} n_k\, y_k \right) = \frac{1}{N_1+N_2} \left(N_1\, \overline{x} + N_2\, \overline{y} \right) = \frac{N_1\, \overline{x} + N_2\, \overline{y}}{N_1+N_2}.$$

Probabilité (10 points)

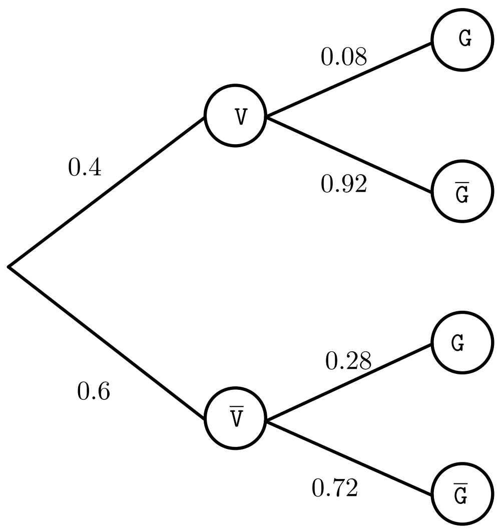
Partie A **a)** $P(G) = 0,2$ et $P(V) = 0,4$.

b) $P(G \cap V) = P(G \setminus V) \times P(V) = 0,08 \times 0,4 = 0,032$.

c) $P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \overline{V}) \Longrightarrow P(G \cap \overline{V}) = P(G) - P(G \cap V) = 0,2 \times 0;032 = 0,168$.

d) $P(G \setminus \overline{V}) = \dfrac{P(G \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$.

e) arbre de probabilité



Partie B **1)** On définit la variable aléatoire $X =$ " nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées" X suit la loi binomiale de paramètre n et $p = P(V) = 0.4$, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En effet, n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir une personne n fois), chaque expérience a deux issues à savoir "la personne est vaccinée" avec une probabilité p et " la personne n'est pas vaccinée" avec une probabilité $1-p$, qui correspond à n variables indépendantes et de même loi $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ de Bernoulli

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{la personne n'est pas vaccinée} \\ 1 & \text{si} \quad \text{la personne est vaccinée} \end{cases}$$

de paramètre $P(X_k = 1) = p$, $k = 1, \cdots, n$ et $X = X_1 + \cdots + X_n$

2) $P(X = 15) = \mathrm{C}_n^{15} p^{15} (1-p)^{n-15}) = \mathrm{C}_{40}^{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25} = 0,123$

3) Dans cette question, on suppose que $n = 3750$.

a) $E(X) = n \times p = 3750 \times 0,4 = 1500$ et $V(X) = n \times p \times (1-p) = 3750 \times 0,4 \times 0,6 = 900$.

b) $\begin{cases} n = 3750 > 30 \\ np = 1500 > 15 \\ np(1-p) = 900 > 5 \end{cases}$

D'où La loi $\mathcal{B}(3750, 0,4)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(1500,\ 900)$.

c)

$$
\begin{aligned}
P\left(X=1450\right) &\approx P\left(1450-0,5\leq X\leq 1450+0,5\right)\\
&\approx P\left(\frac{1449,5-1500}{30}\leq\frac{X-1500}{30}\leq\frac{1450,5-1500}{30}\right)\\
&\approx P\left(-\frac{50,5}{30}\leq Z\leq-\frac{49,5}{30}\right)\\
&\approx P\left(Z\leq-\frac{49,5}{30}\right)-P\left(Z\leq-\frac{50,5}{30}\right)\\
&\approx P\left(Z\leq-1,65\right)-P\left(Z\leq-1,68\right)\\
&\approx \left(1-P\left(Z\leq 1,65\right)\right)-\left(1-P\left(Z\leq 1,68\right)\right)\\
&\approx P\left(Z\leq 1,68\right)-P\left(Z\leq 1,65\right)\\
&\approx 0.95352-0.95053=0,00299\\
&\approx 0,003
\end{aligned}
$$