Université Mohammed V
Faculté des Sciences. Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2020-2021
Filière SMI, Module M18
Probabilité & Statistique

Rattrapage Mars 2021 (Duré 1H 30)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Il est strictement interdit d'emprunter ou de prêter une calculatrice.

Statistique (10 points)

Q.C.M : (2 points) Choisir la (les) bonne(s) réponse(s) :

1) Le coefficient de variation d'une série statistique x représentant le salaire d'une entreprise compris entre 5000 et 10000 dirhams

• Il s'exprime en dirhams. • Il n'a pas d'unité. • $\in [0, 1]$ • Autre réponse.

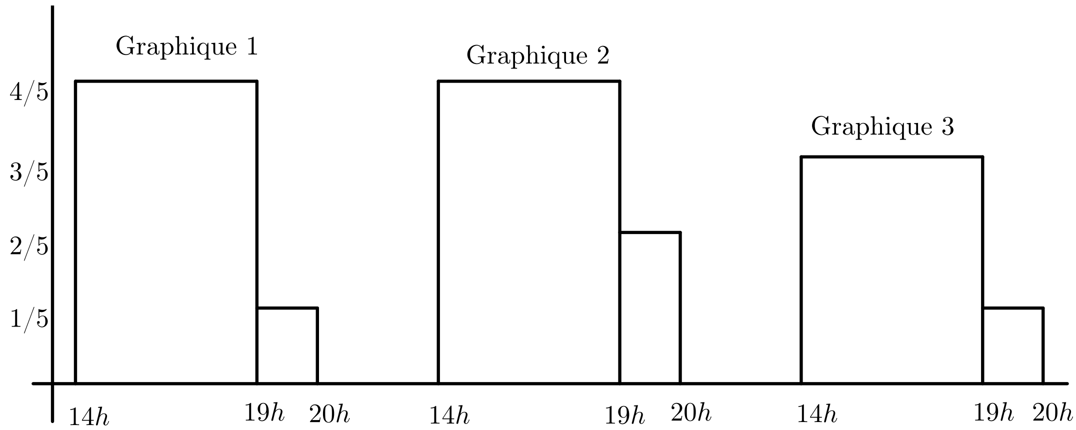
2) Sur 200000 appels reçus pour une émission de télévision à $14h$, 160000 sont reçus entre $14h$ et $19h$, les autres sont reçus entre $19h$ et $20h$.

a) La population étudiée est :

• Le nombre d'appels. • L'heure d'appel. • Une émission.

b) L'histogramme correspondant est :

• Le graphique 1. • Le graphique 2. • Le graphique 3.



c) La classe modale de cette série est :

• $14h - 15h$. • $18h - 19h$. • $18h30 - 19h30$. • $19h - 20h$.

Exercice 1) (2.5 pts) Soit x_k pour $k = 1, \cdots, n$ une série statistique quantitative d'unité u, de moyenne $\overline{x}$ et d'écart-type σ_x(chaque modalité est observée une et une seule fois).

On définit une nouvelle série statistique par la formule $y_k = \dfrac{x_k - \overline{x}}{\sigma_x}$ pour $k = 1, \cdots, n$.

a) Calculer $\overline{y}$ et σ_y.

b) Qu'elle est l'unité de la variable statistique y

Exercice 2 : (5.5 pts) La répartition du nombre de pièces des appartements dans un quartier de rabat est :

n^{bre} de pièces	1	2	3	4	5	6
effectifs	27	35	55	47	25	12

On prendra 3 chiffres après la virgule et on précisera les formules utilisées.

1) Déterminer :

a) La population étudiée. **b)** La variable étudiée. **c)** La nature de la variable étudiée.

2) L'outil graphique pour représenter cette distribution est

• Un histogramme. • Un tuyau d'orgues. • Un diagramme en bâtons. • Un diagramme circulaire.

3) Calculer la moyenne et étudier la symétrie de cette distribution.
4) Recopier le tableau ci-dessus est calculer les effectifs cumulés.
5) Calculer la médiane de cette distribution.
6) Donner la série inférieure et la série supérieure
7) Calculer le premier et le troisième quartile de cette distribution.

Probabilité (10 points)

Exercice 1 : (6 pts) Un concours de recrutement de techniciens hautement qualifiés est ouvert uniquement aux étudiants de deux écoles l'une s'appelle Archimède et l'autre Aristote.

la proportion de candidats issus de l'école Archimède est p.

Les taux de réussite à ce concours pour l'année 2001 sont les suivants :

• Le taux de réussite pour les candidats issus de l'école Archimède est de 85%.
• Le taux de réussite pour les candidats issus de l'autre école est de 80%.
• Le taux de réussite pour l'ensemble des candidats est de 82%.

On choisit un candidat au hasard. On définit les événements suivants :

• R :"le candidat a réussi".
• A :"le candidat est issu de l'école Archimède".

1)a) Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

b) Les événements R et A sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2) L'objet de cette question est de déterminer q la proportion de candidats issus de l'école Aristote, c'est aussi la probabilité qu'un candidat, choisi au hasard, soit issu de cette école. Déterminer

a) La probabilité qu'un candidat réussisse et qu'il soit issu de l'école Archimède.

b) En déduire la probabilité de l'événement le candidat réussit ?

c) Déterminer la valeur de q.

3) On choisit au hasard n copies d'examens des candidats soit X La variable aléatoire égale au nombre des candidats qui ont réussit le concours.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

b) Quelle doit être le nombre minimum n de copies pour que la probabilité qu'aucun candidat ne réussi soit inférieure ou égale à 0,001 ?

Exercice 2 : (4 pts) Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées. Soit X la variable aléatoire «épaisseur de la plaque en mm», on suppose que X suit une loi gaussienne de paramètres $m = 0.3$ et σ^2.

a) La probabilité que l'épaisseur d'une plaque soit comprise entre 0.23 et 0.37mm est égale à 0.51608. Montrer que $\sigma = 0.1$ sachant que pour Y une variable aléatoire normale standard, $P(Y \leq 0.7) = 0.75804$

b) Calculez la probabilité pour que X soit comprise entre 0.21 et 0.43mm.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$0,6$	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
$0,7$	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
$0,8$	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
$0,9$	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
$1,0$	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
$1,1$	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
$1,2$	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
$1,3$	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
$1,4$	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189

FIN

Correction
Statistique (10 points)
Q.C.M : (2 points)

1) (**0.5 point**)
a) Le coefficient de variation : • n'a pas d'unité.
2)(**0.5+0.5+0.5 point**)
a) La population étudiée est : • Le nombre d'appels.
b) L'histogramme correspondant est : •Graphique 1.
c) La classe modale de cette série est : • $19h - 20h$.

Exercice 1 :(**1+1+0.5 point**)

a) $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k - \overline{x}}{\sigma_x} = \dfrac{1}{\sigma_x}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})\right) = \dfrac{1}{\sigma_x}\left(\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) - \overline{x}\right) = \dfrac{1}{\sigma_x}\left(\overline{x} - \overline{x}\right)) = 0.$

$Vy = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x_k - \overline{x}}{\sigma_x}\right)^2 = \dfrac{1}{\sigma_x^2}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 = \dfrac{1}{\sigma_x^2}V_x = 1,\ \sigma_y = \sqrt{V_y} = 1.$

b) L'unité de la variable statistique y est : • n'a pa d'unité.

Exercice 2 : (5.5 pts)

1)(**0.25+0.25+0.25+0.25 point**)
a) Les appartements dans un quartier de rabat.
b) Le nombre de pièces des appartements dans un quartier de rabat.
c) Quantitative discrète.
2)(**0.25 point**)
L'outil graphique pour représenter cette variable est • Un diagramme en bâtons.
3)(**0.5+0.5+0.5 point**)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} n_k x_k = \dfrac{27\times 1 + 35\times 2 + 55\times 3 + 47\times 4 + 25\times 5 + 12\times 6}{27+35+55+47+25+12} = \dfrac{647}{201} = 3.219$

Le mode $m_d = 3$ car le plus grand effectif est 55.
$\overline{x} > m_d$ donc une asymétrie à droite.
4)(**0.5 point**)

n^{bre} de pièces	1	2	3	4	5	6
effectifs	27	35	55	47	25	12
effectifs cumulés	27	62	117	164	189	201

5)(**0.5 point**) La médiane. $N = 201$ est impaire $\dfrac{N+1}{2} = \dfrac{202}{2} = 101$
$m_e = x_{\frac{N+1}{2}} = x_{101} = 3$ car le première effectif cumulé supérieur ou égal à 101 est 117 et la valeur de la variable qui correspond à 117 est 3
6)(**0.5+0.5 point**) Les série inférieure et supérieure sont. $N_1 = \dfrac{N-1}{2} = \dfrac{200}{2} = 100$ est pair

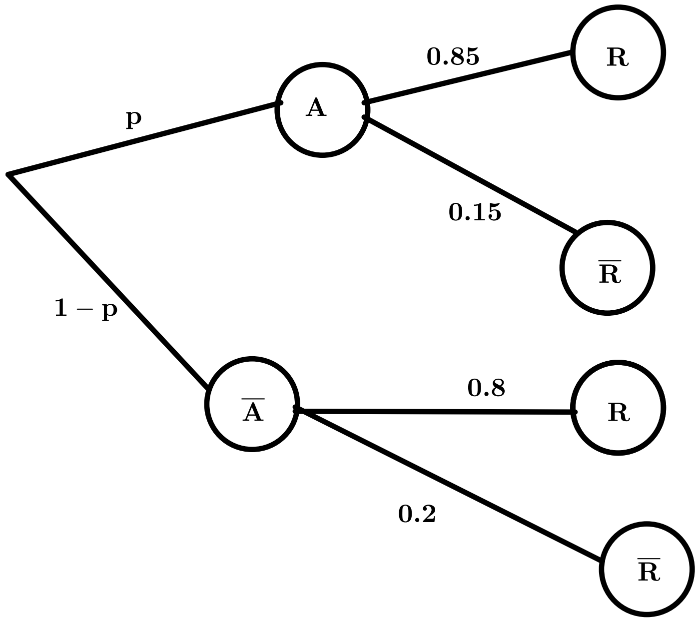
n^{bre} de pièce	1	2	3
effectifs	27	35	38
effectifs	27	62	100

n^{bre} de pièce	3	4	5	6
effectifs	16	47	25	12
effectifs	16	63	88	100

7)(**0.5+0.5 point**) Le premier quartile. $N_1 = 100$ est pair $\dfrac{N_1}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$
$Q_1 = \dfrac{x_{\frac{N_1}{2}} + x_{\frac{N_1}{2}+1}}{2} = \dfrac{x_{50} + x_{51}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2$ car le première effectif cumulé supérieur ou égal à 50 et 51 est 62 et la valeur de la variable qui correspond à 62 est 2
Le troisième quartile. $N_1 = 100$ est pair $\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$
$Q_3 = \dfrac{x_{\frac{N_1}{2}} + x_{\frac{N_1}{2}+1}}{2} = \dfrac{x_{50} + x_{51}}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 2$ car le première effectif cumulé supérieur ou égal à 50 et 51 est 63 et la valeur de la variable qui correspond à 63 est 4

<u>Probabilité</u> ((**6 pts**)

<u>Exercice 1 :</u> 1)a) (**1 point**)



Arbre de Probabilité

b) (**1 point**) $P(R) = 0.82 \neq 0.85 = P(R/A) \Longrightarrow R$ et A sont dépendants

2)(**1+1+1 points**)

a) $P(A \cap R) = P(R/A)\,P(A) = 0.85 \times p$

b) A et $\overline{A}$ forment une partition, donc

$P(R) = P(R/A)\,P(A) + P(R/\overline{A})\,P(\overline{A}) = 0.85 \times p + 0.8 \times (1-p) = 0.05 \times p + 0.8 = 0.5(1-q) + 0.8.$

c) $P(R) = 0.82 = 0.05 \times (1-q) + 0.8 \Longrightarrow q = \dfrac{0.85 - 0.82}{0.05} = 0.6.$

3)a) (**0.5+0.5 point**)

X suit la loi binomiale de paramètre n et $p = 0.82$, $\mathcal{B}(n,\,0.82)$. En effet, n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir une copie n fois), chaque expérience a deux issues à savoir « le candidat a réussi » avec une probabilité $p = P(R) = 0,82$ et « le candidat n'a pas réussi » avec une probabilité $1 - p = 0,18$, qui correspond à n variables $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ de Bernoulli indépendantes et de même loi de paramètre $p = P(X_k = 1) = 0,82$ et $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

b)(**1 point**)

$P(X = 0) = C_n^0 \times 0.82^0 \times (1 - 0.82)^{n-0} = 0.18^n \leq 0.001.$

$\ln(0.18^n) \leq \ln(0.001)) \Longrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0.001)}{\ln(0.18)} \simeq 4.03 \Longrightarrow n = 5$

<u>Exercice 2 :</u>(**0,5+2+1.5 points**)

Notons $Y = \dfrac{X - 0.3}{\sigma}$. Y suit la loi normale standard. On a $P(Y \leq 0.7) = 0.75804$

a) La probabilité pour que X soit compris entre 0.23 et 0.37mm est

$$
\begin{aligned}
P(0.23 \leq X \leq 0.37) &= P\left(\frac{0.23 - 0.3}{\sigma} \leq \frac{X - 0.3}{\sigma} \leq \frac{0.37 - 0.3}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{-0.07}{\sigma} \leq Y \leq \frac{0.07}{\sigma}\right) = P\left(Y \leq \frac{0.07}{\sigma}\right) - P\left(Y \leq -\frac{0.07}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Y \leq \frac{0.07}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(Y \leq \frac{0.07}{\sigma}\right)\right) \\
&= 2\,P\left(Y \leq \frac{0.07}{\sigma}\right) - 1 = 0.51608 \\
\Longrightarrow P\left(Y \leq \frac{0.07}{\sigma}\right) &= 0.75804 \Longrightarrow \frac{0.07}{\sigma} = 0.7 \Longrightarrow \sigma = 0.1
\end{aligned}
$$

b) La probabilité pour que X soit compris entre 0.21 et 0.43mm est

$$\begin{aligned}
P(0.24 \le X \le 0.35) &= P\left(\frac{0.21-0.3}{0.1} \le \frac{X-0.3}{0.1} \le \frac{0.43-0.3}{0.1}\right) \\
&= P\left(-0.9 \le Y \le 0.13\right) \\
&= P\left(Y \le 1.3\right) - P\left(Y \le -0.9\right) \\
&= P\left(\le Y \le 1.3\right) - \left(1 - P\left(Y \le 0.9\right)\right) \\
&= P\left(\le Y \le 1.3\right) + P\left(Y \le 0.9\right) - 1 \\
&= 0.90320 + 0.81594 - 1 = 1.71914 - 1 = 0.71914
\end{aligned}$$