Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques Rabat.

Année 2021-2022
Filière SMI, Module 18
Statistique & Probabilité

**Série Probabilité**

EX 1 : Déterminer l'ensemble $\Omega$ pour les expériences suivantes :

a) Prélever une pièce fabriquée dans un lot et observer si elle est bonne ou défectueuse.

b) Chronométrer une opération manuelle en notant le temps requis pour la réaliser.

c) Vérifier le taux de comptage d'un sol à l'aide de la densité maximale en pourcentage.

d) Vérifier l'affluence à une station de péage d'une autoroute en notant le nombre de voitures arrivant par intervalles de 5 minutes.

EX 2 : Une enquête effectuée auprès de 400 étudiants portant sur la lecture de deux publications hebdomadaires, “ Le Journal ” et “ Al Ayam ” a donné les résultats suivants : 165 lisent “ Le Journal ”, 240 lisent “ Al Ayam ” et 90 lisent les deux.

a) Si un de ces étudiants est choisi au hasard, Quelle est la probabilité qu'il lise l'un ou l'autre de ces deux hebdomadaires ?

b) Quelle est la probabilité qu'il lise uniquement “ Al Ayam ” ?

c) Donner en notation ensembliste “ Ne lire ni Le Journal ni Al Ayam ” et calculer la probabilité de cet événement.

EX 3 : On permute au hasard les 20 tomes d'une encyclopédie. Soit $\Omega$ l'ensemble de toutes les permutations.

a) Déterminer le cardinal de $\Omega$.

b) Calculer la probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte dans cet ordre.

EX 4 : Un étudiant s'habille très vite le matin et prend au hasard un pantalon, un tee-shirt et une paire de chaussettes. Il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires

a) Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ?

b) Quelles sont les probabilités des événements suivants :

$\alpha$) Il est tout en noir.

$\beta$) Une seule pièce est noire sur les trois.

EX 5 : Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, trois boules rouges portent les numéros 1, 1, 2 et une verte porte le numéro 2. On tire successivement deux boules de l'urne. On considère les événements,

$A$ : événement “ Les boules tirées sont de même couleurs ”

$B$ : événement “ Le produit des nombres portés par les deux boules tirées est pair”

1) On suppose que le tirage des deux boules se fait avec remise.

a) Déterminer le cardinal de $\Omega$.

b) Calculer la probabilité des événements $A$ et $B$.

c) Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles portent des nombres ayant un produit pair.

2) Même question que 1) en supposant que le tirage des deux boules se fait sans remise.

EX 6 : Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges. On tire simultanément trois boules. Calculer la probabilité d'obtenir :

$\alpha$) une boule blanche et 2 boules noires.

$\beta$) une boule blanche et une boule noire et une boule rouge.

EX 7 : Dans un jeu de 52 cartes mélangées, une main est formée de 5 cartes au hasard.

a) Combien de main de 5 cartes peut-on former ?.

b) Calculer la probabilité que la main contienne :

$\alpha$) Exactement 3 cartes de la même couleur.

$\beta$) Exactement 4 cartes du même genre.

$\gamma$) deux genres apparaissent exactement deux fois.

EX 8 : Dans une usine les ouvriers forment trois groupes de relais. Le groupe $G_1$ travaille de $8^h$ à $16^h$, le groupe $G_2$ travaille de $16^h$ à $24^h$ et le groupe $G_3$ travaille de $00^h$ à $8^h$. Chaque jour il y a 1% des articles produit par $G_1$, 2% des articles produit par $G_2$ et 5% des articles produit par $G_3$ qui sont défectueux. Supposons que tous les groupes produisent le même nombre d'articles.

a) Déterminer la probabilité qu'un article pris au hasard soit produit par le groupe $G_i$.

b) Calculer la probabilité qu'un article pris au hasard soit défectueux.

c) Un article est défectueux. Calculer la probabilité qu'il soit produit par $G_3$.

EX 9 : Dans une population dont le tiers sont des tricheurs. on fait tirer une carte de jeu de 52 cartes à un individu et on admet que si cet individu est un tricheur, il est sûr de retourner un as.

a) Déterminer la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit un tricheur.

b) Calculer la probabilité qu'un individu choisi au hasard retourne un as.

c) Calculer la probabilité que l'individu choisi soit un tricheur sachant qu'il a retourné un as.

EX 10 : Pour détecter une certaine maladie, les médecins font faire un test au patient. Si ce dernier est malade, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Cependant, il arrive qu'un patient bien portant obtienne un résultat positif dans 2% des cas. Les résultats montrent qu'un patient sur mille souffre de cette maladie.

a) Déterminer la probabilité qu'un patient soit malade.

b) Calculer la probabilité pour qu'un patient, ayant obtenu un résultat de test positif soit malade.

EX 11 : Ali, Aicha et Jawad ont tous les trois la clé du local de leur club.

La probabilité, qu' Aicha arrive au local avant 19 heures est 0.6 et la probabilité que Jawad y arrive avant 19 heures est 0.85. Ali arrive à 19 heures. Il voit de loin que la lumière est allumée, il en déduit qu'au moins un de ses camarades est déja là.

a) Quelle est la probabilité qu'Aicha et Jawad soient là tous les deux ?

b) Quelle est la probabilité que l'un des deux, soient là ? (Pas tous les deux)

EX 12 : La boule d'un billard électrique arrivant en A peut emprunter six trajectoires. Une de ces trajectoires la mène à un emplacement B, deux la mènent à un emplacement C et les trois autres à un emplacement D. Si la boule arrive en B le joueur gagne 3 points, si elle arrive en C il gagne 1 points et si elle arrive en D il perd 1 points. Soit $X$ la v.a gain ou perte du joueur au cours d'une partie et soit $Y$ la v.a gain ou perte du joueur au cours de deux parties. Les six trajectoires sont équiprobables.

a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b) Déterminer la fonction de répartition de $X$ et tracer son graphe.

c) Déterminer la loi de probabilité de $Y$.

d) Calculer la probabilité de $(X = 1)$ sachant $(Y = 2)$.

EX 13 : Soient $X$ et $Y$ deux v.a telles que $Y = X^2$ et que la loi de $X$ est donnée par le tableau :

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $1/6$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/4$ | $1/6$ |

a) Déterminer la loi de $Y$.

b) Déterminer la loi conjointe de $X$ et $Y$ et la loi marginale de $Y$.

c) Les v.a $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

EX 14 : Une urne $A$ contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 3 ; et une urne $B$ contient cinq jetons numérotés 1, 1, 2, 2 et 3. On tire deux jetons, l'un de l'urne $A$ et l'autre de l'urne $B$. On appelle $X$ la v.a le nombre porté par le jeton tiré dans l'urne $A$ et $Y$ la v.a le nombre porté par le jeton tiré dans l'urne $B$. (les tirages sont équiprobables)

a) Donner la loi de probabilité du couple $(X, Y)$ et de la v.a $Z = X + Y$.

b) Calculer la probabilité de $(X = 3)$ sachant $(Z = 4)$.

c) Les v.a $X$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

EX 15 : Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type des v.a : $X$ de l'exercice 12, $Y$ de l'exercice 13 et $Z$ de l'exercice 14.

EX 16 : On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, 6 réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On lui attribue 1 point par bonne réponse. Soit $X$ la v.a le nombre de points obtenus.

a) Déterminer la loi de probabilité de $X$ et la probabilité d'obtenir 5 réponses justes.

b) Déterminer le nombre moyen de points obtenus.

c) Quelle est la probabilité que la réponse à la $5^{eme}$ question soit la première réponse juste ?

Ex 17 : On considère une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaines de montage $A$ et $B$ qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Pour une chaine donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

On suppose que $A$ produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine $A$ soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine $B$ soit défectueux est 0.2.

On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaine $A$".

On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par $A$ est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire $X$ représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure.

Rappeler la loi de $Y$ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de $Y$.

Soient $k$ et $n$ deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/Y = n)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Ex 18 : Dans un lot de "systèmes d'alarme" 8% sont défectueux. On choisit au hasard un échantillon de 100 systèmes pour les tester. Soit $X$ le nombre de systèmes défectueux dans cet échantillon.

a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b) Calculer de deux façons la probabilité que 5 systèmes soient défectueux.

Exercice 19 : Soit $X$ une v.a réelle admettant la densité de probabilité $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.

b) Déterminer la fonction de répartition de $X$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 20 : Soit $X$ une v.a de loi uniforme, $X \sim \mathcal{U}([0,\, 1])$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la v.a $Y = 4\,X + 3$ et sa densité.

b) En déduire la loi de probabilité de $Y$ et donner son espérance et sa variance.

Exercice 21 : Soit $X$ une v.a de loi normale, $X \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$, de fonction de répartition $\Phi_X$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la v.a $Y = |X|$ en fonction de $\Phi_X$.

b) En déduire la densité de probabilité de $Y$.

Exercice 22 : La taille des habitants d'un village suit la loi normale de moyenne $m = 167\,cm$ et d'écart-type $\sigma = 3\,cm$. Qu'elle est le pourcentage des hommes qui ont une taille :

a) Inférieure à 170.69 $cm$ ? b) Supérieure à 167 $cm$ ? c) Inférieure à 159.65 $cm$ ?

d) Comprise entre 161.24 $cm$ et 173.12 $cm$ ?

Exercices Facultatifs

Ex 23 : Soient $X$ une v.a qui suit la loi binomiale de paramètre (6, 0.1) et $Y$ la v.a définit par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X \text{ est impaire} \\ 1 & \text{si} \quad X \text{ est paire} \end{cases}$$

Donner la loi, l'espérance mathématique et la variance de $Y$.

Exercice 24 : Soit $(X,\, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\rho| < 1$.

a) Montrer que la densité du vecteur aléatoire $(X,\, Y)$ est :

$$f(x,\, y) = \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 + y^2 - 2\,\rho\, x\, y\right)\right]$$

b) Soit $(Z,\, Q)$ le vecteur aléatoire défini par $Z = \dfrac{(X+Y)}{\sqrt{2}}$ et $Q = \dfrac{(X-Y)}{\sqrt{2}}$.

1) Calculer $E(Z)$, $E(Q)$, $V(Z)$, $V(Q)$ et $Cov(Z,\, Q)$. En déduire la matrice de variance-covariance de $(Z,\, Q)$, $\Sigma_1$.

2) Calculer la densité du vecteur aléatoire $(Z,\, Q)$. Le vecteur aléatoire $(Z,\, Q)$ est-il gaussien ? justifier la réponse.

3) Les variables aléatoires $Z$ et $Q$ sont-elles indépendantes ?

4) En déduire les densités des variables aléatoires $Z$ et $Q$ ainsi que leurs lois.

Ex 25 : Dans une chasse, on sait qu'un quart des faisans a été élevé par l'homme puis remis en liberté (on fait porter à ces oiseaux une bague pour pouvoir les reconnaître).

Après une partie de chasse, on constate que parmi trois faisans tués il y'a un faisan d'élevage et deux faisans sauvages.

On note $S$ l'événement " être un faisan sauvage " et $T$ l'événement "être tué "

**i)** Les événements $\overline{S}$ et $T$ sont-ils indépendants ?

**ii)** On sait de plus qu'il y'a au cours de la chasse un faisan tué sur six parmi les faisans d'élevage.

Quelle est la probabilité qu'un faisan se fasse tuer sachant qu'il est sauvage ?

Indication : Vous pouvez exprimer la probabilité d'être tué en fonction de la probabilité demandée.

Ex 26 : Dans un amphithéâtre de $n$ étudiants, la probabilité qu'un étudiant sache son cours est $p$ ($p \in ]0,\, 1]$). La probabilité qu'un étudiant qui sait son cours sache faire l'exercice en contrôle continu est $\beta$ ($\beta \in ]0,\, 1]$). Un étudiant qui connaît son cours et qui réussit l'exercice aura une bonne note. On définit les événements suivants :

- $A$ :"l'étudiant sait son cours ".
- $B$ :"l'étudiant réussit son exercice ".

On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants qui savent leur cours et $Y$ la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants qui ont une bonne note.

**a)** Calculer $P(A)$ et $P(A \cap B)$.

**b)** Chercher la loi de $X$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

**c)** Chercher la loi de $Y$ et en déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

Ex 27 : Soit $X$ une v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a : $P(X = k) = \lambda \times 3^{1-k}$

Déterminer $\lambda$ pour que $\{P(X = k)/k \in \mathbb{N}\}$ soit une loi de probabilité. Qu'elle est la loi de probabilité de $X$ ?

Ex 28 : Soit $X$ une v.a qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la v.a $Y$ par :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 2k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, ... \\ 1 & \text{si} \quad X = 2k+1 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

On admet les résultats suivants : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}$

i) Calculer $P(Y = 1)$ et $P(Y = 0)$. En déduire que la v.a $Y$ suit une loi discrète classique dont on déterminera le paramètre et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$

ii) Comparer les probabilités des deux événements suivants :

$A$ : "$X$ est paire " et $B$ : "$X$ est impaire "

**Corrigé de la série Probabilité**

EX 1 : a) $\Omega = \{$ bonne, défectueuse$\}$ b) $\Omega = \mathbb{R}_+^*$ c) $\Omega = [0,\, 100]$ d) $\Omega = \mathbb{N}$

EX 2 : $\Omega = \{$ étudiants de l'enquête $\}$ , $Card(\Omega) = 400$

$A$ : événement " Lire Al Ayam " et $J$ : événement " Lire le Journal "

a) $$\begin{aligned} P(A \cup J) &= P(A) + P(J) - P(A \cap J) \\ &= \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} + \frac{Card(J)}{card(\Omega)} - \frac{Card(A \cap J)}{Card(\Omega)} \\ &= \frac{240}{400} + \frac{165}{400} - \frac{90}{400} = \frac{315}{400} = 0.7875 = 0.788 \end{aligned}$$

b) $B = A \setminus J = A \cap \overline{J} = A \setminus (A \cap J)$

$P(B) = P(A) - P(A \cap J)$ car $(A \cap J) \subset A$.

$$= \frac{240}{400} - \frac{90}{400} = \frac{150}{400} = 0.375$$

c) $C = \overline{A} \cap \overline{J} = \overline{A \cup J},\ P(C) = P(\overline{A \cup J}) = 1 - P(A \cup J) = 1 - \dfrac{315}{400} = 0.2125 = 0.212$

.

EX 3 : a) $\Omega = \{$ permutation de $\{1,\, 2, \cdots,\, 20\}\}$ , $Card(\Omega) = 20!$.

b) Soit $A_k$ l'événement le tome 1 se trouve à la $k^{ème}$ place et le tome 2 à la $(k+1)^{ème}$ place et soit $A$ l'événement le tome 1 et 2 se trouve cote à cote dans cet ordre.

$A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{19} A_k$ et $P(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{19} P(A_k)$ car les $A_k$ sont deux à deux incompatibles.

$Card(A_k) = 18!$ et $P(A_k) = \dfrac{Card(A_k)}{Card(\Omega)} = \dfrac{18!}{20!} = \dfrac{1}{19 \times 20}$, et $P(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{19} P(A_k) = \frac{1}{20}$

EX 4 : a) Une tenue est un triplet (P,T,C) : il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes ce jour-là.

b)$\alpha$) Il y a $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons différentes d'être tout en noire.

La probabilité de l'événement, " être tout en noire ", est donc : $\dfrac{40}{240} = \dfrac{1}{6}$.

$\beta$) notons les événements : $N_1$ la première pièce (pantalon) est noire, $N_2$ la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, $N_3$ la troisième pièce (chaussette) est noire.

L'événement une pièce est noire est représenté par :

$$(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$$

Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent.

• La probabilité de l'événement $(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3})$ est donc : $\dfrac{2 \times 2 \times 3}{240} = \dfrac{12}{240} = \dfrac{1}{20} = 0.05$.

• La probabilité de l'événement $(\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3})$ est donc : $\dfrac{3 \times 4 \times 3}{240} = \dfrac{36}{240} = \dfrac{3}{20} = 0.15$.

• La probabilité de l'événement $(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$ est donc : $\dfrac{3 \times 2 \times 5}{240} = \dfrac{30}{240} = \dfrac{1}{8} = 0.125$.

La probabilité de l'événement " une pièce est noire sur les trois est :

$$\frac{12}{240} + \frac{36}{240} + \frac{30}{240} = \frac{78}{240} = 0.05 + 0.15 + 0.125 = 0.325$$

EX 5 : 1) En notant $R(1)$ la première boule rouge portant le numéro 1, $R'(1)$ la seconde boule rouge portant le numéro 1, $R(2)$ la boule rouge portant le 2 et $V(2)$ la boule verte portant le 2.

a) $\Omega = \{R(1),\, R'(1),\, R(2),\, V(2)\}^2$, $Card(\Omega) = 4^2 = 16$ car il y a ordre et répétition.

b) $A = \{R(1),\, R'(1),\, R(2)\} \times \{R(1),\, R'(1),\, R(2)\} \cup \{V(2)\} \times \{V(2)\}$, $Card(A) = 3^2 + 1 = 10$

$P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$,.

$\overline{B}$ : événement " Le produit des nombres portés par les deux boules tirées est impair"

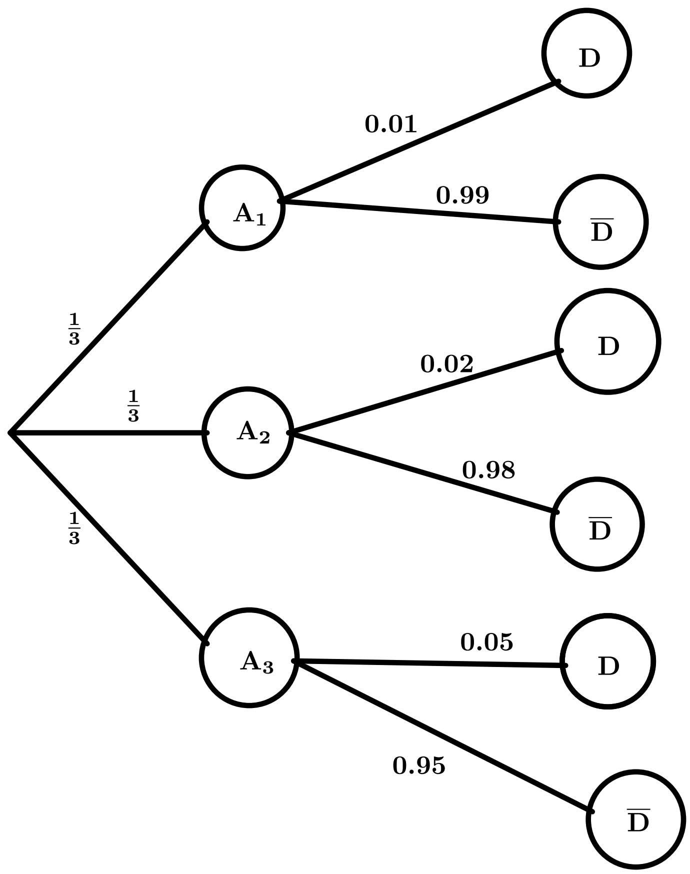
$\overline{B} = \{R(1),\, R'(1)\} \times \{R(1),\, R'(1), \}$, $Card(\overline{B}) = 4$ car il y a ordre et répétition.

$\Omega = B \cup \overline{B} \Longrightarrow Card(\Omega = Card(B) + Card(\overline{B})$ car $B$ et $\overline{B}$ sont incompatible.

$Card(B) = Card(\Omega) - Card(\overline{B})$=16-4=12

On peut voir aussi que
$B = \{R(1),\, R'(1)\} \times \{R(2),\, V(2)\} \cup \{R(2),\, V(2)\} \times \{R(1),\, R'(1)\} \cup \{R(2),\, V(2)\} \times \{R(2),\, V(2)\}$.
$P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$.
c) La probabilité cherchée est $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
$A \cap B = \{(R(1),\, R(2)),\, (R(2),\, R(1)),\, (R'(1),\, R(2)),\, (R(2),\, R'(1)),\, (R(2),\, R(2),\, (V(2),\, V(2)\}$
$Card(A \cap B) = 6$. $P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$.
D'où, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{3}{5}$
2) a) $Card(\Omega) = A_4^2 = 12$ car il y a ordre et pas de répétition c'est un arrangement.
b) $A = \{(R_1,\, R_1),\, (R_1,\, R_1),\, (R_1,\, R_2),\, (R_2,\, R_1),\, (R_1,\, R_2),\, (R_2,\, R_1)\}$, $Card(A) = A_3^2 = 6$
$P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.
$\overline{B}$ : événement " Le produit des nombres portés par les deux boules tirées est impair"$=A = \{(R_1,\, R_1),\, (R_1,\, R_1)\}$,
$Card(\overline{B}) = 2$
$\Omega = B \cup \overline{B} \Longrightarrow Card(\Omega = Card(B) + Card(\overline{B})$ car $B$ et $\overline{B}$ sont incompatible.
$Card(B) = Card(\Omega) - Card(\overline{B})$=12-2=1.
On peut voir aussi que $B = \{(R_1,\, R_2),\, (R_2,\, R_1),\, (R_1,\, V_2),\, (V_2,\, R_1),\, (R_1,\, R_2),\, (R_2,\, R_1),$
$(R_1,\, V_2),\, (V_2,\, R_1),\, (R_2,\, V_2),\, (V_2,\, R_2)\}$.
$P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$..
c) $A \cap B = \{(R_1,\, R_2),\, (R_2,\, R_1),\, (R_1,\, R_2),\, (R_2,\, R_1)\}$, $Card(A \cap B) = 4$..
$P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.
D'où $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$
<u>EX 6 :</u> $Card(\Omega) = C_{10}^3$ car il n'y a pas ordre et il n'y a pas répétition.
$\alpha$) Il y a $C_5^1$ façon de choisir une boule blanche parmi 5 et $C_3^2$ façon de choisir les 2 boules noires parmi les 3.
La probabilité cherchée est : $\dfrac{C_5^1\, C_3^2}{C_{10}^3} = \dfrac{5 \times 3}{10 \times 3 \times 4} = \dfrac{1}{8} = 0.125$
$\beta$) Il y a $C_5^1$ façon de choisir une boule blanche parmi 5 et $C_3^1$ façon de choisir une boule noires parmi les 3 et $C_2^1$ façon de choisir une boule rouge parmi 2. La probabilité cherchée est Il y a $C_5^1$ façon de choisir une boule blanche parmi 5 et $C_3^2$ façon de choisir les 2 boules noires parmi les 3. La probabilité cherchée est : $\dfrac{C_5^1\, C_3^1\, C_2^1}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{4} = 0.25$
<u>EX 7 :</u> a) $\Omega = \{$mains formées de 5 cartes$\}$, $Card(\Omega) = C_{52}^5$ ca il n'y a pas ordre et il n'y a pas répétition.
b) $\alpha$) Il y a $C_2^1$ façon de choisir une couleur parmi 2 et $C_{26}^3$ façon de choisir les 3 cartes parmi les 26 cartes de la même couleur et $C_{26}^2$ façon de choisir les 2 autres cartes. d'où il y a $C_2^1 \times C_{26}^3 \times C_{26}^2$ façon de choisir 5 cartes dont exactement 3 sont de la même couleur.
la probabilité cherché est $\dfrac{C_2^1 \times C_{26}^3 \times C_{26}^2}{C_{52}^5} = \dfrac{2 \times 26 \times 25 \times 24 \times 26 \times 25 \times 5!}{3 \times 2 \times 2 \times 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} = 0.650260104$
$\beta$) Il y a $C_4^1$ façon de choisir un genre parmi 4 et $C_{13}^4$ façon de choisir les 4 cartes parmi les 13 cartes du même genre et $C_{39}^1$ façon de choisir la $5^{ème}$ cartes. d'où il y a $C_4^1 \times C_{13}^4 \times C_{39}^1$ façon de choisir 5 cartes dont exactement 4 sont du même genre.
la probabilité cherché est $\dfrac{C_4^1 \times C_{13}^4 \times C_{39}^1}{C_{52}^5} = \dfrac{4 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 39 \times 5!}{4! \times 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} = 0.04291716687$
<u>EX 8 :</u> Soient les événements $A_i$ " Article produit par le groupe $G_i$" $i = 1,\, 2,\, 3$, et
$D$ " Article défectueux". On a

a) $P(A_i) = \dfrac{1}{3}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. car les 3 groupes produisent le même nombre d'articles.
$PD/A1) = 0.01$, $PD/A2) = 0.02$ et $PD/A3) = 0.05$. D'où l'arbre de probabilité

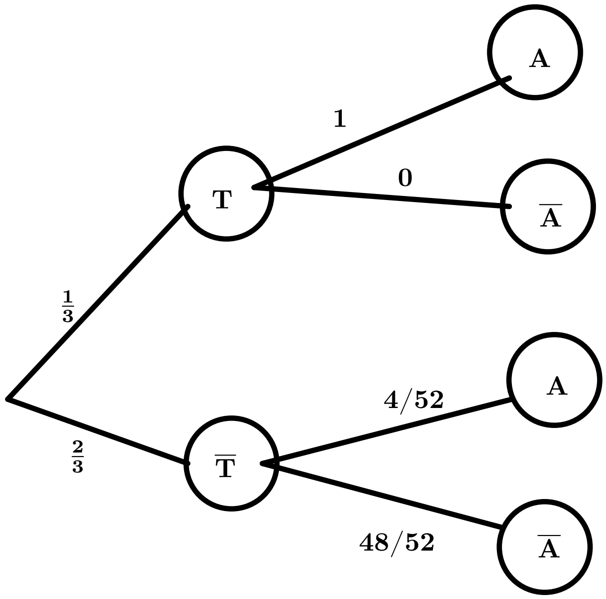



## Arbre de Probabilité

b) $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$ forme une partition de $\Omega$. D'après le théorème des probabilités totales,
$P(D) = P(D/A_1)P(A_1) + P(D/A_2)P(A_2) + P(D/A_3)P(A_3) = \dfrac{0.01 + 0.02 + 0.05}{3} = \dfrac{8}{300}$

c) D'après la formule de Bayes, $P(A_3/D) = \dfrac{P(D/A_3)P(A_3)}{P(D)} = \dfrac{\frac{5}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{8}{300}} = \dfrac{5}{8}$

EX 9 : Soient les événements $T$ " l'individu choisi est un tricheur " et
$A$ " l'individu choisi retourne un as ". On a
a) $P(T) = \dfrac{1}{3}$ car le tiers de la population sont des tricheurs.
$P(A/T) = 1$ et $P()A/\overline{T}) = 4/52$. D'ou l'arbre de probabilité

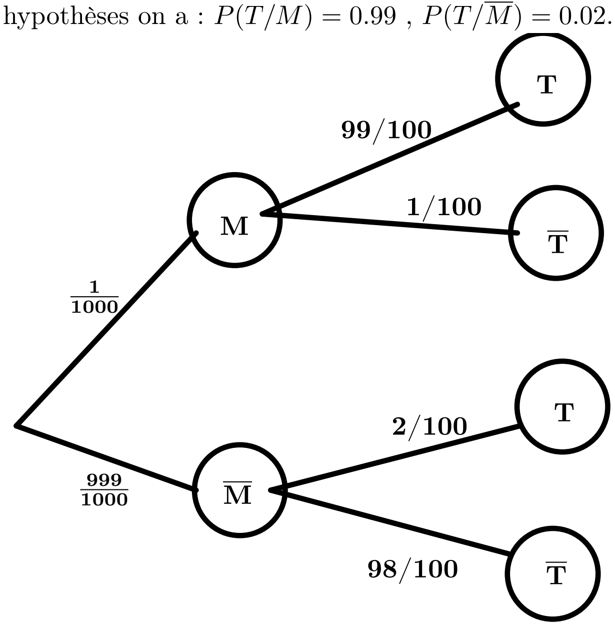



## Arbre de Probabilité

b) $\{T, \overline{T}\}$ forme une partition de $\Omega$. D'après le théorème des probabilités totales,
$P(A) = P(A/T)\,P(T) + P(A/\overline{T})\,P(\overline{T}) = 1 \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{52} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{15}{39} = 0.3846153846.$
b) D'après la formule de Bayes,
$P(T/A) = \dfrac{P(A/T)P(T)}{P(A/T)\,P(T) + P(A/\overline{T})\,P(\overline{T})} = \dfrac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{15}{39}} = \dfrac{13}{15} = 0.8666666667.$
<u>EX 10 :</u> Soient les événements $M$ “ l'individu choisi est malade ” et
$T$ “ le test est positif ” et $\overline{T}$ “ le test est négatif ”.

a) $P(M) = \dfrac{1}{1000} = 0.001$ car un patient sur mille souffre de cette maladie.

D'après les hypothèses on a : $P(T/M) = 0.99$ , $P(T/\overline{M}) = 0.02$. d'ou l'arbre de probabilité




## Arbre de Probabilité

b) D'après la formule de Bayes, $P(M/T) = \dfrac{P(T/M)P(M)}{P(T)}$

$P(T/M) = ,99$ et $P(M) = 0,001$. Il faut calculer $P(T)$
On a $\{M, \overline{M}\}$ forment un système complet d'événement ou une partition de $\Omega$. D'après le Théorème des probabilités totales,

$$P(T) = P(T/M)P(M) + P(T/\overline{M})\, P(\overline{M})$$

$$P(T) = \frac{99}{100}\frac{1}{1000} + \frac{2}{100}(1 - \frac{1}{1000}) = \frac{2097}{100000}$$

$$P(M/T) = \frac{P(T/M)P(M)}{P(T)} = \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}}{\frac{2097}{100000}} = \frac{99}{2097} = 0.047.$$

<u>EX 11 :</u> Soient les événements $A$ : "Aicha arrive avant $19^h$" et $J$ : "Jawad arrive avant $19^h$". $A$ et $J$ sont indépendants donc on a $P(A\cap B) = P(A)\, P(B) = 0.6 \times 0.85 = 0.51$
a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.6 + 0.85 - 0.51 = 0.94$
b) $(A\cap B) \subset (A\cup B)$, on a : $P\left((A\cup B)\backslash(A\cap B)\right) = P(A\cup B) - P(A\cap B) = 0.94 - 0.51 = 0.43$
<u>EX 12 :</u> $\Omega_{X_1} = \{-1,\, 1,\, 3\}, \quad \Omega_Y = \{-2,\, 0,\, 2,\, 4,\, 6\}$

a)

| $x_i$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $1/2$ | $1/3$ | $1/6$ |

b) $$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 5/6 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

c) c) $\Omega_Y = \{-2,\, 0,\, 2,\, 4,\, 6\}$ on définie les v.a :
$X_k$ = gain ou perte du joueur au cours de la partie $k$, $k = 1,\, 2$. Les v.a $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes car la boule arrivant en $A$ emprunte une des six trajectoires avec la même probabilité. Donc le résultat de la première partie n'influence celui de la deuxième. On a $Y = X_1 + X_2$.
$P(Y = -2) = P(X_1 + X_2 = -2) = P(X_1 = -1, X_2 = -1) = P(X_1 = -1) \times P(X_2 = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
$P(Y = 0) = P(X_1 + X_2 = 0) = P((X_1 = -1), (X_2 = 1)) + P(X_1 = 1, X_2 = -1)) = P(X_1 = -1) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
$P(Y = 2) = P(X_1 + X_2 = 2) = P(X_1 = -1, X_2 = 3) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 3, X_2 = -1) = P(X_1 = -1) \times P(X_2 = 3) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 3) \times P(X_2 = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$.
$P(Y = 4) = P(X_1 + X_2 = 4) = P(X_1 = 1, X_2 = 3) + P(X_1 = 3, X_2 = 1) = P(X_1 = 1), (X_2 = 3) + P((X_1 = 3), (X_2 = 1)) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.
$P(Y = 6) = P(X_1 + X_2 = 6) = P(X_1 = 3, X_2 = -3) = P(X_1 = 3) \times P(X_2 = 3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

| $y_i$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $1/4$ | $1/3$ | $5/18$ | $1/9$ | $1/36$ |

.

d) $P(X_1 = 1 \setminus Y = 2) = \dfrac{P(X_1 = 1, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \dfrac{P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)}{P(Y = 2)} = \dfrac{1/9}{5/18} = \dfrac{2}{5}$
<u>EX 13 :</u> a) $\Omega_Y = \{0,\, 1,\, 4\}$
$P(Y = 0) = P(X = 0) = \dfrac{1}{6}$

$$P(Y = 1) = P((X = -1) \cup (X = 1)) = P(X = -1) + P(X = 1) - P(\underbrace{(X = -1) \cap (X = 1)}_{=\emptyset}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 4) = P((X = -2) \cup (X = 2)) = P(X = -2) + P(X = 2) - P(\underbrace{(X = -2) \cap (X = 2)}_{=\emptyset}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{3}.$$

| $y_i$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | $1/6$ | $1/2$ | $1/3$ |

b) $$P(X = -2, Y = 0) = P(X = -2, X^2 = 0) = P(\underbrace{(X = -2) \cap (X^2 = 0)}_{=\emptyset}) = 0.$$

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0, X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{6}.$$

$P(X=-2,Y=1)=P(X=-2,X^2=1)=P(\underbrace{(X=-2)\cap(X^2=1)}_{=\emptyset})=0.$

$P(X=-1,Y=1)=P(X=-1,X^2=1)=P(X=-1)=\dfrac{1}{4}.$

$P(X=-1,Y=4)=P(X=-1,X^2=4)=P(\underbrace{(X=-1)\cap(X^2=4)}_{=\emptyset})=0.$

$P(X=-2,Y=4)=P(X=-2,X^2=4)=P(X=-2)=\dfrac{1}{6}.$

| $y_i \setminus x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $P(Y=y_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1/6 | 0 | 0 | 1/6 |
| 1 | 0 | 1/4 | 0 | 1/4 | 0 | 1/2 |
| 4 | 1/6 | 0 | 0 | 0 | 1/6 | 1/3 |
| $P(X=x_i)$ | 1/6 | 1/4 | 1/6 | 1/4 | 1/6 | |

c) $\dfrac{1}{4}=P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)\,P(Y=1)=\dfrac{1}{8}$ donc $X$ et $Y$ ne sont pas dépendantes.

Ex 14 : a) $\Omega_X=\{1,\,2,\,3\}$, $\Omega_Y=\{1,\,2,\,3\}$. La loi du couple $(X,\,Y)$ est :

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)\times P(Y=1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{20}.$

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)\times P(Y=2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{20}.$

$P(X=1,Y=3)=P(X=1)\times P(Y=3)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{20}.$

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)\times P(Y=1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{20}.$

$P(X=2,Y=2)=P(X=2)\times P(Y=2)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{20}.$

$P(X=2,Y=3)=P(X=2)\times P(Y=3)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{20}.$

$P(X=3,Y=1)=P(X=3)\times P(Y=1)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{20}.$

$P(X=3,Y=2)=P(X=3)\times P(Y=2)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{20}.$

$P(X=3,Y=3)=P(X=3)\times P(Y=3)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{20}.$

| $y_i \setminus x_i$ | 1 | 2 | 3 | $P(Y=y_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2/20 | 2/20 | 4/20 | 8/20 |
| 2 | 2/20 | 2/20 | 4/20 | 8/20 |
| 3 | 1/20 | 1/20 | 2/20 | 4/20 |
| $P(X=x_i)$ | 5/20 | 5/20 | 10/20 | |

$\Omega_Z=\{2,\,3,\,4,\,5,\,6\}$. La loi du couple $Z=X+Y$ est :

$P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=\dfrac{2}{20}.$

$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\dfrac{2}{20}+\dfrac{2}{20}=\dfrac{4}{20}.$

$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=2)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{2}{20}+\dfrac{4}{20}=\dfrac{7}{20}.$

$P(Z=5)=P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=2)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{4}{20}=\dfrac{5}{20}.$

$P(Z=6)=P(X=3,Y=3)=\dfrac{2}{20}.$

| $z_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 2/20 | 4/20 | 7/20 | 5/20 | 2/20 |

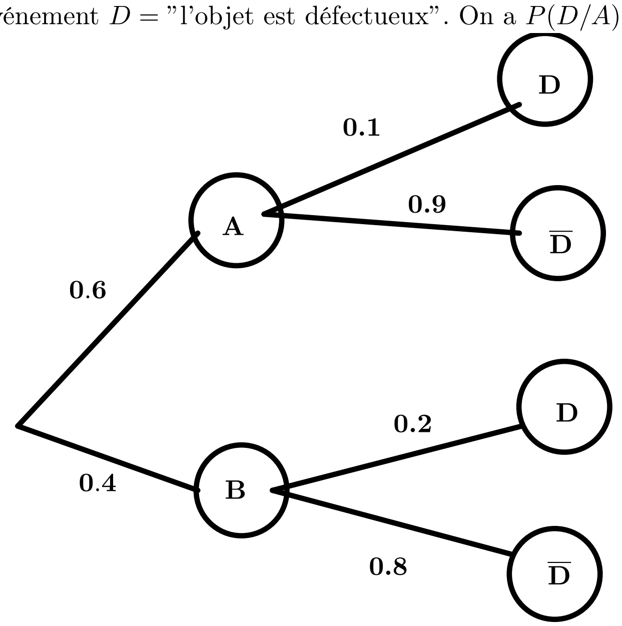
b) $P(X=3\setminus Z=4)=\dfrac{P(X=3,\,Z=4)}{P(Z=4)}=\dfrac{P(X=3,\,Y=1)}{P(Z=4)}=\dfrac{\frac{4}{20}}{\frac{7}{20}}=\dfrac{4}{7}\neq P(X=3)=\dfrac{10}{20}$

c) D'après b) les v.a $X$ et $Z$ ne sont pas indépendantes.

Ex 15 : a) $E(X)=-1\times 1/2+1\times 1/3+3\times 1/6=1/3$ ,

$V(X)=(-1)^2\times 1/2+1^2\times 1/3+3^2\times 1/6-(1/3)^2=20/9$, $\sigma_X=\sqrt{20/9}=1.26$

$E(Y) = 0 \times 1/6 + 1 \times 1/2 + 4 \times 1/3 = 11/6$ ,
$V(Y) = 0^2 \times 1/6 + 1^2 \times 1/2 + 4^2 \times 1/3 - (11/6)^2 = 89/36$ , $\sigma_Y = \sqrt{89/36} = 1.57$
$E(Z) = 2 \times 2/20 + 3 \times 4/20 + 4 \times 7/2 + 5 \times 5/20 + 6 \times 2/20 = 81/20$ ,
$V(Z) = 2^2 \times 2/20 + 3^2 \times 4/20 + 4^2 \times 7/2 + 5^2 \times 5/20 + 6^2 \times 2/20 - (81/20)^2 = 499/400$ , $\sigma_Z = \sqrt{89/36} = 1.117$
Ex 16 : a) Pour $i = 1, \cdots, 20$, notons $X_i$ la v.a,
$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \text{la réponse à la i}^{ème} \text{ question est fausse} \\ 1 & \text{si} \quad \text{la réponse à la i}^{ème} \text{ question est juste} \end{cases} \quad p = P(X_i = 1) = \frac{1}{6}$$
On $X = X_1 + \cdots + X_{20}$. Les $\{X_i\}_{i=1}^{20}$ sont des v.a de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$ indépendantes, donc $X$ suit la loi binomiale de paramètre $(20,\ p = \frac{1}{6})$, $X \sim \mathcal{B}(20,\ \frac{1}{6})$.
$P(X = k) = C_{20}^k (1/6)^k (1 - 1/6)^{20-k}$ $k = 0, \cdots, 20$
$P(X = 5) = C_{20}^5 (1/6)^5 (1 - 1/6)^{15} = C_{20}^5 (5^{15}/6^{20})$.
b) $E(X) = 20 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$.
c) $P(X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0,\ X_5 = 1)$
$= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)P(X_4 = 0)P(X_5 = 1) = (1 - \frac{1}{6})^4 \times \frac{1}{6} = 0.08037551440$.
Ex 17 : Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$.
Soit l'événement $D =$ "l'objet est défectueux". On a $P(D/A) = 0.1$ et $P(D|B) = 0.2$.




## Arbre de Probabilité

$\{A, B\}$ est un système complet d'événements ou partition, on a d'après le théorème des probabilités totales,

$$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) = 0.1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4 = 0.14$$

Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "'objet provient de la chaine A" est $P(A|D)$ que l'on calcule par la formule de Bayes :

$$P(A/D) = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.1 \times 0.6}{0.14} = \frac{3}{7}.$$

On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par $A$ est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. On considère la variable aléatoire $X$ représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaine $A$ en une heure. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $n$ : $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$.
$E(Y) = \lambda = 20$ et $V(Y) = \lambda = 20$.

Quand $Y = n$, $X$ est le nombre d'objets défectueux parmi $n$, qui sont défectueux indépendamment les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X/Y = n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et 0.1.

En particulier, $P[X = k/Y = n] = 0$ si $k > n$ et $P[X = k/Y = n] = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 0.1^k 0.9^{n-k}$ si $0 \leq k \leq n$.

Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un système complet d'événements on a pour tout entier $k$ :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = k/Y = n]\, P(Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} P[X = k/Y = n]\, P(Y = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P[X = k/Y = n]\, P(Y = n) \\
&= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} P[X = k/Y = n]\, P(Y = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} 0.1^k 0.9^{n-k} \times \frac{\lambda^n\, e^{-\lambda}}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k 0.9^n \times \frac{20^n\, e^{-20}}{n!} \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{e^{-20}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{18^n}{(n-k)!} = \left(\frac{1}{9}\right)^k \frac{e^{-20}}{k!} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{18^{l+k}}{(n)!} \\
&= \left(\frac{1}{9}\right)^k 18^k \frac{e^{-20}}{k!} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{18^l}{l!} = 2^k\, \frac{e^{-20}}{k!}\, e^{18} \\
&= 2^k\, \frac{e^{-2}}{k!}
\end{aligned}$$

D'où $X$ suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 2$.

Ex 18 : a) $X \sim \mathcal{B}(100,\, 0.08)$.

b) $i)$ $1^{ere}$ méthode : $P(X = 5) = C_{100}^5 (0.08)^5\,(1 - 0.8)^{95} = 0.08953988336$

$ii)$ $2^{eme}$ méthode : On a $n = 100 > 30$, $p = 0.08 \leq 0.1$ et $n \times p = 0.08 \times 100 = 8 < 15$ donc on peut approximer la loi binomiale par la loi de poisson $\mathcal{P}(8)$. $P(X = 5) \simeq e^{-8}\, \dfrac{8^5}{5!} = 0.092$.

**EX 19 :** a) $f \geq 0$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{0} (x+1)\, dx + \int_{0}^{1} (-x+1)\, dx + \int_{1}^{+\infty} 0\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_{0}^{1} = -(\frac{1}{2} - 1) + (-\frac{1}{2} + 1) = 1
\end{aligned}$$

b) Si • $x < -1$ , $F(x) = 0$

- Si $x \in [-1,\, 0]$, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} t + 1\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{x} = (\frac{x^2}{2} + x) - (\frac{1}{2} - 1) = \frac{(x+1)^2}{2}$
- Si $x \in [0,\, 1]$, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{0} t + 1\, dt + \int_{0}^{x} -t + 1\, dt = \frac{1}{2} + (-\frac{x^2}{2} + x)$
- Si $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{0} t + 1\, dt + \int_{0}^{1} -t + 1\, dt = 1$

c) $E(X) = 0$ et $V(x) = \dfrac{1}{6}$

**EX 20 :** a) Si $X \sim \mathcal{U}([0,\, 1])$ alors $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad\quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$ et $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq 1 \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La fonction de répartition de $Y = 4X + 3$ est donnée par :

$$F_Y(y) = P(4X+3 \leq y) = P(X \leq \frac{y-3}{4}) = F_X(\frac{y-3}{4}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{y-3}{4} < 0 \\ \frac{y-3}{4} & \text{si} \quad 0 \leq \frac{y-3}{4} < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq \frac{y-3}{4} \end{cases}$$

D'où $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 3 \\ \frac{y-3}{4} & \text{si} \quad 3 \leq y < 7 \\ 1 & \text{si} \quad 7 \leq 7 \end{cases} \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$

et par dérivation on a la densité :$f_Y(y) = \frac{1}{4} f(\frac{y-3}{4}) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq \frac{y-3}{4} \leq 1 \Longleftrightarrow 3 \leq y \leq 7 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ d'où $Y \sim \mathcal{U}([3,7])$. $E(X) = \frac{7+3}{2} = 5$ et $V(X) = \frac{(7-3)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.

**EX 21 :** $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(|X| \leq x)$ , $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Si $x < 0$, on a $F_Y(x) = P(|X| \leq x) = 0$ car $(Y < x) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) < x\} = \emptyset$ car $Y = |X| \geq 0$

Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) = P(Y \leq x) &= P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) \\ &= P(X \leq x) - P(\leq X \leq -x) = \Phi_X(x) - \Phi_X(-x) \\ &= \Phi_X(x) - (1 - \Phi_X(x) = 2 \times \Phi_X(x) - 1 \end{aligned}$$

d'où par dérivation , la densité de $Y$ est

$f_Y(x) = F_Y'(x) = (2 \times \Phi_X(x) - 1)' = 2\,\Phi'(x)$

$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}]$

$f_Y(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}]$

$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2\,\Phi'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}] & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

**EX 22 :**

$X$ suit la gaussienne ou la loi normale de paramètre $m = 167$ et $\sigma^2 = 3^2$, $X \sim \mathcal{N}(16,\, 3^2)$

La v.a $Y = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-167}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$ suit la loi normale centré réduite ou la loi normale standard.

Notons $\Phi_Y$ la fonction de répartition de la loi normale standard.

a)

$$\begin{aligned} P(X < 170.69) &= P\left(\frac{X-167}{3} < \frac{170.69-167}{3}\right) \\ &= P\left(Y < \frac{170.69-167}{3}\right) \\ &= P(Y < 1.23) = \Phi_Y(1.23) = 0.89065 \end{aligned}$$

Donc 89.07% des habitants ont une taille inférieure à 167.69 *cm*.

b)

$$\begin{aligned} P(X > 167) &= P\left(\frac{X-167}{3} > \frac{167-167}{3}\right) = P(Y > 0) \\ &= 1 - P(Y \leq 0) = 1 - \Phi_Y(0) \\ &= 1 - 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

Donc 50% des habitants ont une taille supérieure à la moyenne 167 *cm*.

c)

$$
\begin{aligned}
P(X < 159.65) &= P\left(\frac{X-167}{3} < \frac{159.65-167}{3}\right) \\
&= P\left(Y < \frac{159.65-167}{3}\right) \\
&= P(Y < -2.45) = \Phi_Y(-2.45) = 1 - \phi_Y(2.45) \\
&= 1 - 0.99286 = 0.00714
\end{aligned}
$$

Donc 0.71% des habitants ont une taille inférieure à 159.65 $cm$.

d)

$$
\begin{aligned}
P(161.24 \leq X \leq 173.12) &= P\left(\frac{161.24-167}{3} \leq \frac{X-167}{3} \leq \frac{173.12-167}{3}\right) \\
&= P\left(\frac{161.24-167}{3} \leq Y \leq \frac{173.12-167}{3}\right) \\
&= P(-1.92 \leq Y \leq 2.04) \\
&= \Phi_Y(2.04) - \Phi_Y(-1.92) \\
&= \Phi_Y(2.04) - (1 - \Phi_Y(1.92)) \\
&= 0.97932 - (1 - 0.97257) = 0.95189
\end{aligned}
$$

Donc 95.19% des habitants ont une taille comprise entre 161.24 $cm$ et 173.12 $cm$.

<u>**EX 23 :**</u> $Y$ suit la loi de Bernoulli de paramètre
$p = P(X \text{ est pair}) = C_6^0(0.1)^0(0.9)^6 + C_6^2(0.1)^2(0.9)^4 + C_6^4(0.1)^4(0.9)^2 + C_6^6(0.1)^6(0.9)^0$ $E(Y) = p$ et $V(Y) = p\,(1-p)$.

<u>Exercice 24 :</u>

$a)$ $X$ et $Y$ sont des variables aléatoires gaussiennes $\mathcal{N}(0,\,1)$.

0n a $det(\Sigma) = 1 - \rho^2$ et $\Sigma^{-1} = \dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
(x\ y)\,\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{1-\rho^2}(x\,y)\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}(x - \rho\,y \ \ y - \rho\,x)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}(x^2 + y^2 - 2\,\rho\,x\,y)
\end{aligned}
$$

le couple $(X,\,Y)$ étant gaussien centré, sa densité est :

$$
f(x,\,y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{det(\Sigma)}}\exp[-\frac{1}{2}(x\ y)\,\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}] = \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 + y^2 - 2\,\rho\,x\,y\right)\right]
$$

b) Soit $(Z,\,Q)$ le vecteur aléatoire défini par $Z = \dfrac{(X+Y)}{\sqrt{2}}$ et $Q = \dfrac{(X-Y)}{\sqrt{2}}$.

1)$E(Z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E(X) + E(Y)) = 0$ et $E(Q) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(E(X) - E(Y)) = 0$. On a :

$Var(Z) = \dfrac{(Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,\,Y))}{2} = \dfrac{1+1+2\,\rho}{2} = 1 + \rho.$

$Var(Q) = \dfrac{(Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,\,Y))}{2} = \dfrac{1+1-2\,\rho}{2} = 1 - \rho.$

$Cov(Z,Q) = E(Z\,Q) - E(Z)\,E(Q) = E(\dfrac{(X+Y)}{\sqrt{2}}\,\dfrac{(X-Y)}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{2}E(X^2 - Y^2)$

$= \dfrac{1}{2}(Var(X) - Var(Y)) = \dfrac{1}{2}(1-1) = 0$

Donc la matrice de covariance est : $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}$

2) Soit $\varphi$ la fonction définie par $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x\,,y) & \longrightarrow & (\frac{x+y}{\sqrt{2}},\, \frac{x-y}{\sqrt{2}}) \end{array}$ $D_\varphi = \mathbb{R}^2$

$\varphi$ est bijective en effet : $\varphi(x,\, y) = \varphi(x_1,\, y_1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{2\,x}{\sqrt{2}} = \frac{2\,x_1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow x = x_1 \\ \frac{2\,y}{\sqrt{2}} = \frac{2\,y_1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow y = y_1 \end{cases}$ d'où $\varphi$ est injective.

$\varphi(x,\, y) = (u,\, v) \Longleftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ v = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \\ v = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \end{cases}$ d'où $\varphi$ est surjective.

$S = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,\, y) > 0\} = \mathbb{R}^2$ et $T = \varphi(S \cap D_\varphi) = \mathbb{R}^2$.

$J_{\varphi^{-1}}(u,\, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial {\varphi_1}^{-1}}{\partial u}(u,\, v) & \frac{\partial {\varphi_1}^{-1}}{\partial v}(u,\, v) \\ \frac{\partial {\varphi_2}^{-1}}{\partial u}(u,\, v) & \frac{\partial {\varphi_2}^{-1}}{\partial v}(u,\, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$det(J_{\varphi^{-1}}(u,\, v)) = -1 \Longrightarrow |J_{\varphi^{-1}}(u,\, v)| = 1.$

$$\begin{aligned} f_{Z,\,Q)}(u,\, v) &= f_{(X,\,Y)}(\varphi^{-1}(u,\, v))|J_{\varphi^{-1}}(u,\, v)|1_T(u,\, v) \\ &= \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((\frac{u+v}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{u-v}{\sqrt{2}})^2 - 2\,\rho\,(\frac{u+v}{\sqrt{2}})\,(\frac{u-v}{\sqrt{2}})\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2+v^2-2\,\rho\,u^2\,v^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2(1-\varphi)+v^2(1+\varphi)\right)\right] \end{aligned}$$

0n a $det(\Sigma_1) = 1-\rho^2$ et $\Sigma_1^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (u\;v)\,\Sigma_1^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \frac{1}{1-\rho^2}(u\,v)\begin{pmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}(u(1-\rho)\quad,v(1+\rho))\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}(u^2(1-\rho)+v^2(1+\rho)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{det(\Sigma_1)}}\exp[-\frac{1}{2}(u\;v)\,\Sigma_1^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}] = \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2(1-\rho)+v^2(1+\rho)\right)\right] = f_{(Z,\,Q)}(u,\, v)$$

D'où le vecteur $(Z,\, Q)$ est gaussien centré de matrice de variance-covariance $\Sigma_1$.

3)Le vecteur $(Z,\, Q)$ est gaussien et $Cov(Z,Q) = 0$, alors les v.a. $Z$, $Q$ sont indépendantes.

4) On a, le couple $(Z,\, Q)$ étant gaussien centré, sa densité est :

$$\begin{aligned} f_{(Z,\,Q)}(u,\, v) &= \frac{1}{2\,\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2(1-\rho)+v^2(1+\rho)\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sqrt{1+\rho}}\exp\left[-\frac{1}{2(1+\rho)}u^2\right]\;\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sqrt{1-\rho}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho)}v^2\right] \\ &= f_Z(u)\,f_Q(v) \end{aligned}$$

D'où $Z \sim \mathcal{N}(0,\, 1+\rho)$ et $Q \sim \mathcal{N}(0,\, 1-\rho)$.

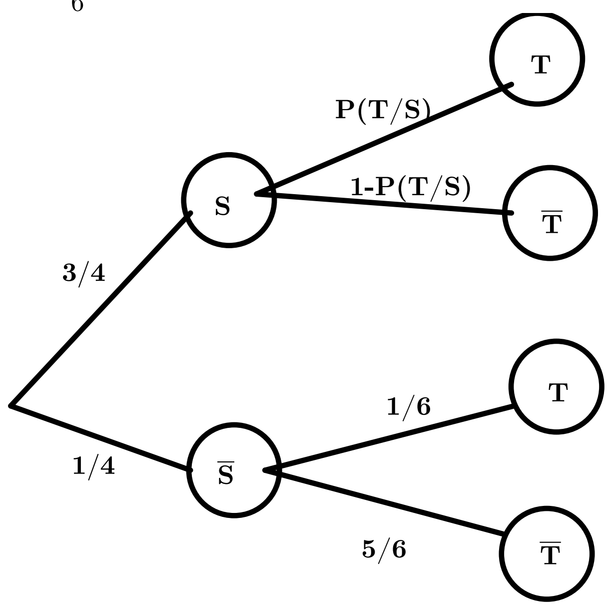
<u>Exercices Facultatifs</u>

<u>Ex 25 :</u> $P(\overline{S}) = \frac{1}{4} \Longrightarrow P(S) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $P(\overline{S}/T) = \frac{1}{3}$ d'où $P(\overline{S}/T) \neq P(\overline{S})$ donc les événements $T$ et $\overline{S}$

ne sont pas indépendants.
ii) On cherche à calculer $P(S/T)$. D'après la formule de Bayes, on a

$$P(T/S) = \frac{P(S/T)P(T)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{3}P(T)}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{9}\,P(T) \tag{1}$$

car $P(S/T) = 1 - P(\overline{S}/T) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $P(S) = \dfrac{3}{4}$.
On a a$P(T/\overline{S}) = \dfrac{1}{6}$, D'où l'arbre de probabilité




## Arbre de Probabilité

$\{S\,,\,\overline{S}\}$ forme une partition de $\Omega$, on a d'après le théorème des probabilité totales,

$$P(T) = P(T/S)\,P(S) + P(T/\overline{S})\,P(\overline{S}) = \frac{3}{4}\,P(T/S) + \frac{1}{24}$$

d'où d'après (1) on a, $P(T/S) = \dfrac{8}{9}(\dfrac{3}{4}\,P(T/S) + \dfrac{1}{24}) = \dfrac{2}{3}P(T/S) + \dfrac{1}{27} \Longrightarrow P(T/S) = \dfrac{1}{9}$

<u>EX 26 :</u> a) • $P(A) = p$ •• $P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = \beta \times p$.

b) Pour $i = 1, \cdots n$, Notons $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'étudiant } i \text{ sait son cours} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

$P(X_i = 1) = P(A) = p$, $X_i \sim \mathcal{B}_{er}(p)$ et les $X_i$ sont des v.a de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p$. D'où $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}_(n,\, p) \Longrightarrow E(X) = n\,p$ et $V(X) = n\,p\,(1-p)$.

c) Pour $i = 1, \cdots n$, Notons $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'étudiant } i \text{ a une bonne note} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

$P(Y_i = 1) = P(A \cap B) = \beta\,p$ , $Y_i \sim \mathcal{B}_{er}(\beta\,p)$.
les $Y_i$ des v.a de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\beta\,p$.
D'où $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{B}_(n,\, \beta\,p) \Longrightarrow E(X) = n\,\beta\,p$ et $V(X) = n\,\beta\,p\,(1-\beta\,p)$.

<u>Ex 27 :</u> il faut que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda \times 3^{1-k} = \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} 3^{-j} = \lambda \times \frac{3}{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$.

Pour $p = \dfrac{2}{3}$ on a $p(X=k) = p\,(1-p)^{k-1} = \dfrac{2}{3}(1-\dfrac{2}{3})^{k-1} \Longrightarrow X \sim \mathcal{G}(\dfrac{2}{3})$

<u>EX 28 :</u> $P(Y=1) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2k+1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} = \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2}$$

$P(Y=0) = 1 - P(Y=1) = 1 - \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2} = \frac{1+e^{-2\,\lambda}}{2}$

$Y$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2}$

ii) $E(Y) = \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2}$ $\qquad V(Y) = \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2}(1 - \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2}) = \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2} \times \frac{1+e^{-2\,\lambda}}{2} = \frac{1-e^{-4\,\lambda}}{4}$

iii) $P(A) = P(Y=0) = \frac{1+e^{-2\,\lambda}}{2}$ $\qquad P(B) = P(Y=1) = \frac{1-e^{-2\,\lambda}}{2}$

$P(A) - P(B) = e^{-2\,\lambda} > 0 \Longrightarrow P(A) > P(B)$