Université Mohammed V — Année 2020-2021
Faculté des Sciences. Rabat — Filière SMI, Module M18
Département de Mathématiques. — Probabilité & Statistique

Contrôle Final Février 2021 (Duré 1H 30)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Il est strictement interdit d'emprunter ou de prêter une calculatrice.

Statistique (13 points)

Q.C.M : (4 points) Choisir la (les) bonne(s) réponse(s) :

1) Une grande entreprise utilise 5 usines de fabrication de taille différente. Les parts du chiffre d'affaires (CA) pour chacune d'entre elles sont : 30%, 30%, 20%, 15% et 5%.

a) La population statistique étudiée est :

• Le CA. • Les 5 usines de l'entreprise. • La taille des usines. • Autre réponse.

b) Un individu de cette population est :

• Un CA. • Une des 5 usines étudiées. • Un ouvrier • une entreprise.

2) Sur 200 notes arrondies au point entre 0 et 20 d'étudiants à un examen de statistiques, on a récupéré les informations suivantes : $\sum_{k=1}^{200} x_k = 2100$ et $\sum_{k=1}^{200} x_k^2 = 24600$.

a) Qu'elles sont les affirmations vraies :

• $\overline{x} = 10.5$. • $\sigma_x \simeq 3.57$. • $Var(x) = 13.75$ • $Var(x) = -12.75$.

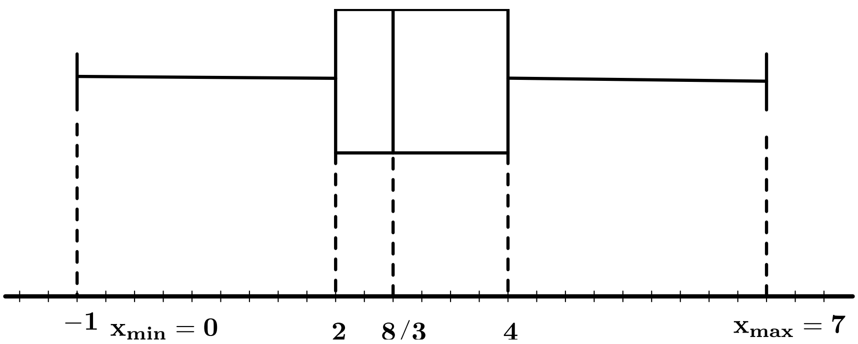
b) La médiane est égale à 10.8. la distribution statistique est

• Symétrique. • Asymétrique à gauche. • Asymétrique à droite. • $A_{P1} = -0.25$.

3) L'intervalle inter-quartile $[Q_1, Q_3]$ signifie que

• 25% des observations sont supérieures à Q_1.
• 75% des observations sont supérieures à Q_3.
• 50% des observations sont concentrées dans cet intervalle.
• 50% des observations se trouvent à l'extérieur de cet intervalle.

Exercice 1 : (2 pts) Recopiez et compléter le tableau ci-dessous à partir du diagramme en boîte (mettre une croix quand le paramètre n'est pas calculable).



Paramétre	Etendue	$\overline{x}$	$[Q_1, Q_3]$	m_e	m_d	σ	$R(Q)$	$Q_1 - 1.5 \times R(Q)$
Valeurs								

Exercice 2 : (7 pts) Une association de défense des droits des femmes a mené une enquête sur les salaires des femmes d'une grande entreprise d'un secteur industriel. Les résultats concernant les salaires mensuels net en milliers de Dirhams sont résumé dans le tableau suivant :

Budget en millier de DH	]3, 6]	]6, 9]	]9, 12]	]12, 15]	]15, 18]	]18, 21]
fréquences			0.16		0,08	0,06
fréquences cumulées	0.38	0,61				

On prendra 3 chiffres après la virgule et on précisera les formules utilisées.

1) Déterminer :

a) la population étudiée. **b)** la variable étudiée. **c)** la nature de la variable étudiée.

2) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

3) Calculer la médiane de cette série.

4) Calculer x sachant que seulement 25% des salaires sont supérieur ou égal à x.

5) Sachant que l'écart inter-quartile est égal à 6.651, étudier la symétrie.

6) Le salaire moyen est égal à 8.82, $V(x) = 21.4776$ et $\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2 = 9927$, Calculer N l'effectif total.

7) Calculer k tel que $[\overline{x} - k\,\sigma, \overline{x} + k\,\sigma] = [-2.765; 20.405]$. En déduire le pourcentage minimum des observations appartenant à l'intervalle [3, 20.405].

Probabilité (7 points)

Un magasin de jardinage vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois régions. 35% des plants proviennent de la région 1, 25% de la région 2 et le reste de la région 3. Deux catégories d'arbres proviennent de chaque région $C1$ et $C2$. La livraison de la région 1 comporte 80% des arbres $C1$ alors que celle de la région 2 n'en comporte que 50% et celle de la région 3 seulement 30%.
Le propriétaire du magasin choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

- Rk : « l'arbre choisi provient de la région k », $k = 1, 2, 3$
- $C1$: « l'arbre choisi est de la catégorie C1 »

1) Construire un arbre de probabilité traduisant cette situation.

2) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit de la catégorie $C1$ et acheter chez $R3$.

3) montrer que la probabilité de l'événement $C1$ est égale à 0. 525.

4) L'arbre choisi est de la catégorie $C1$. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez $R1$? On arrondira à 10^{-3}.

On choisit au hasard un échantillon de 40 arbres dans le stock de ce magasin. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'arbre de catégorie $C1$ dans l'échantillon choisi.

5) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

6) calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

7) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 25 arbres $C1$?

8) Donner une approximation par la loi Normale de la probabilité que cet échantillon contient 25 arbres $C2$? On prendra deux chiffre après la virgule.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1,4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1,5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1,6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1,7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1,8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1,9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2,0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2,1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2,2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2,3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2,4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2,5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2,6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643

FIN

<u>**Correction**</u>

Statistique (13 points)

<u>**Q.C.M : (4 points)**</u>

1) (0.5+0.5 point)

a) La population statistique étudiée est : • Les 5 usines étudiées.

b) Un individu de cette population est : Une des 5 usines étudiées.

2) (0.5+0.5+0.5+0.5 point)

a) Qu'elles sont les affirmations vraies : • $\overline{x} = 10.5$. • $\sigma_x \simeq 3.57$.

b) La distribution statistique est • Asymétrique à gauche. • $A_{P1} = -0.25$.

3) (0.5+0.5 point)

L'intervalle inter-quartile $[Q_1, Q_3]$ signifie que

• 50% des observations sont concentrées dans cet intervalle.

• 50% des observations se trouvent à l'extérieur de cet intervalle.

<u>**Exercice 1 :**</u> (**2 point**), (0.25 point par bonne réponse)

Paramétre	Etendue	$\overline{x}$	$[Q_1, Q_3]$	m_e	m_d	σ	$R(Q)$	$Q_1 - 1.5 \times R(Q)$
Valeurs	6	$\times$	$[2, 4]$	$8/3$	$\times$	$\times$	2	-1

<u>**Exercice 2 :**</u> **(7 pts)**

1) (0.25+0.25+0.25 point)

a) la population étudiée : Les femmes d'une grande entreprise d'un secteur industriel.

b) la variable étudiée : Les salaires mensuels net en milliers de Dirhams des femmes d'une grande entreprise d'un secteur industriel.

c) la nature de la variable étudiée : Quantitative continue.

2) (0.75 point)

Budget en millier de DH	$]3, 6]$	$]6, 9]$	$]9, 12]$	$]12, 15]$	$]15, 18]$	$]18, 21]$
fréquences	0.38	0.23	0.16	0.09	$0,08$	$0,06$
fréquences cumulées	$0,38$	$0,61$	$0,77$	0.86	0.94	1

3) (1 point)

La classe médiane est $]6, 9]$ car la $1^{ère}$ fréquence cumulée supérieure ou égale à 0.5 est 0.61

$x_i = 6$, $x_{i+1} = 9$, $F_i = 0.38$ et $F_{i+1} = 0.61$

$$m_e = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0.5 - F_i}{F_{i+1} - F_i} = 6 + (9 - 6) \times \frac{0.5 - 0.38}{0.61 - 0.38} = 6 + 3 \times \frac{0.12}{0.23} = 7.565$$

4) (1 point)

x n'est autre que le $3^{ème}$ quartile. La classe du $3^{ème}$ quartile est $]9, 12]$ car la $1^{ère}$ fréquence cumulée supérieure ou égale à 0.75 est 0.77

$x_i = 9$, $x_{i+1} = 12$, $F_i = 0.61$ et $F_{i+1} = 0.77$

$$m_e = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0.75 - F_i}{F_{i+1} - F_i} = 9 + (12 - 9) \times \frac{0.75 - 0.61}{0.77 - 0.61} = 9 + 3 \times \frac{0.14}{0.16} = 11.625$$

5) (0.25+0.5+0.5 point)

$R(Q) = Q_3 - Q_1 \Longrightarrow Q_1 = Q_3 - R(Q) = 11.625 - 6.651 = 4.974$. Le coefficient d'asymétrie de Yule est $A_Y = \dfrac{Q_1 + Q_3 - 2 \times m_e}{R(Q)} = \dfrac{4.973 + 11.625 - 2 \times 7.565}{6.651} = 0.221 > 0$ donc on a une asymétrie à droite.

6) (1 point)

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2 - \overline{x}^2 \Longrightarrow N = \frac{\sum_{k=1}^{6} n_k c_k^2}{V(x) + \overline{x}^2} = \frac{9927}{21.4776 + 8.82^2} = 100$$

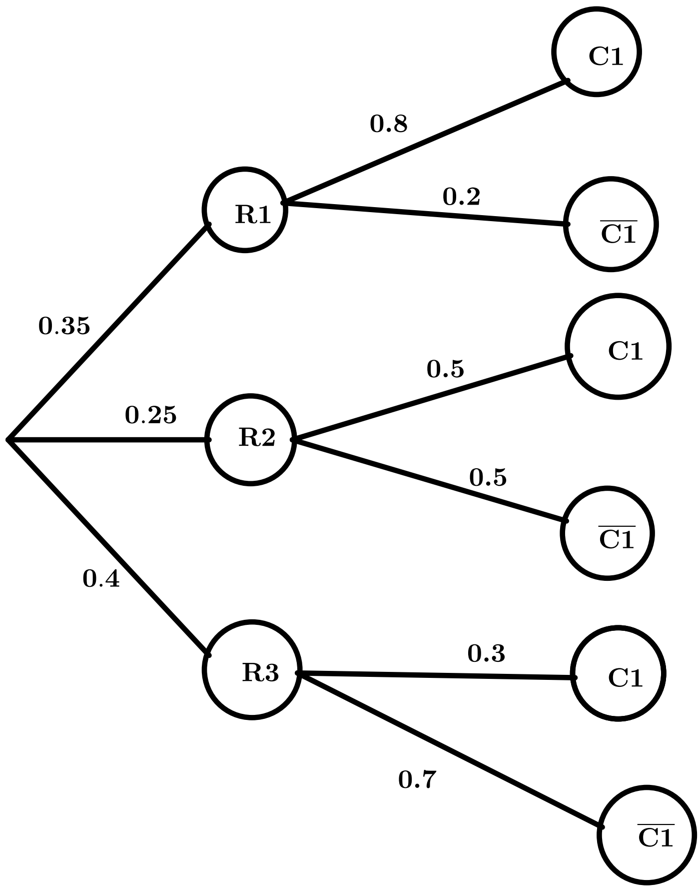
7) (0.25+0.5+0.5 point)

$V(x) = 21.4776 \Longrightarrow \sigma_x = \sqrt{21.4776} = 4.634$

$k = \dfrac{\overline{x} + 2.765}{\sigma} = \dfrac{8.82 + 2.765}{4.634} = 2.5$ de même on a $k = \dfrac{20.405 - \overline{x}}{\sigma} = \dfrac{20.405 - 8.82}{4.634} = 2.5$. D'où d'après le théorème de tchebychev le pourcentage minimum des observations comprise entre $[3, 20.405]$ est : $100 \times (1 - \dfrac{1}{2.5^2})\% = 84\%$

<u>Probabilité</u> ((**7 pts**)

1) (**1 point**)



Arbre de Probabilité

2) (**1 point**)

La probabilité demandée est $P(A_1 \cap P_3) = P(C1/R3)P(R3) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$.

3) (**1 point**)

$\{R1,\, R2,\, R3\}$ forme une partition ou un système complet d'événement de Ω. D'après le théorème des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(C1) &= P(C1/R1)P(R1) + P(C1/R2)P(R2) + P(C1/R3)P(R3) \\
&= 0.35 \times 0.8 + 0.25 \times 0.5 + 0.4 \times 0.3 \\
&= 0.28 + 0.125 + 0.12 \\
&= 0.525
\end{aligned}$$

4) (**1 point**)

D'après la formule de Bayes, $P(R1/C1) = \dfrac{P(C1/R1)P(R1)}{P(C1)} = \dfrac{0.8 \times 0.35}{0.525} = \dfrac{0.28}{0.525} = \dfrac{0.056}{0.105} = 0.533$

5) (1 point)
X suit la loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0.525$, $\mathcal{B}(40,\ 0.525)$. En effet, 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées (choisir un arbre 40 fois), chaque expérience a deux issues à savoir « l'arbre choisi est un $C1$ » avec une probabilité $p = P(C1) = 0,525$ (d'après la question 1)c)) et « l'arbre choisi n'est pas un $C1$ » avec une probabilité $1 - p = 0,475$, qui correspond à 40 variables $\{X_k\}_{k=1}^{40}$de Bernoulli indépendantes et de même loi de paramètre $p = P(X_k = 1) = 0,525$ et $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{40}$.
6) (1 point))
$E(X) = n \times p = 40 \times 0.525 = 21$ et $V(X) = n \times p \times (1 - p) = 40 \times 0.525 \times 0.475 = 9.975$ et $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9.975} = 3.158$
7) (0.5 point)
$P(X = 25) = C_{40}^{25} \times 0.525^{25} \times (1 - 0.525)^{15} = 0.057$.
8) (0.5+1 point))
$n = 40 > 30$, $n \times p = 40 \times 0.525 = 21 > 15$ et $n \times p \times (1 - p) = 40 \times 0.525 \times 0.475 = 9.975 > 5$ donc on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(40,\ 0.525)$ par la loi gaussienne $\mathcal{N}(21,\ 9.975)$
$Z = \dfrac{X - 21}{3.158}$ suit la loi Normale standard $\mathcal{N}(0,\ 1)$.
$P(X = 15) \approx P(15 - 0.5 \leq X \leq 15 + 0.5)$.

$$\begin{aligned}
P(14.5 \leq X \leq 15.5) &= P(\frac{14.5 - 21}{3.158} \leq \frac{X - 21}{3.158} \leq \frac{15.5 - 21}{3.158}) \\
\text{``} &= P(\frac{-6.5}{3.158} \leq Z \leq \frac{-5.5}{3.158}) \\
&= P(-2.06 \leq Z \leq -1.74) \\
&= \varphi(-1.74) - \varphi(-2.06) \\
&= (1 - \varphi(1.74)) - (1 - \varphi(2.06)) \\
&= \varphi(2.06) - \varphi(1.74) \\
&= 0.98030 - 0.95907 \\
&= 0.02123
\end{aligned}$$

où φ est la fonction de répartition de la loi normale centré réduite..