Université Mohammed V
Faculté des Sciences. Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2021-2022
Filière SMI, Module M18
Probabilité & Statistique

Contrôle Final Février 2022

(Durée 1H 30)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Il est strictement interdit d'emprunter ou de prêter une calculatrice.

Probabilité (11.5 points)

Exercice 1 : Un récipient contient un gaz constitué de trois types de particules A, B et C. Ce récipient contient 45 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2. L'expérience est modélisée de la manière suivante :

- Une particule isolée au hasard parmi les particules de type A entre dans K_1 avec la probabilité $\frac{1}{8}$.
- La probabilité que la particule isolée au hasard soit de type B et entre dans K_2 est $\frac{1}{5}$.
- Une particule isolée au hasard parmi les particules de type C entre dans K_2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

On définit les événements :

A : l'événement " La particule est de type A." B : l'événement " La particule est de type B."

C : l'événement " La particule est de type C." K : l'événement " La particules entre dans K_1."

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près

Question Préliminaire : Traduire les données de l'énoncé en probabilités d'événements.

1) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) $A1$: l'événement " La particule isolée au hasard est de type A et elle entre dans K_1."

b) $B1$: l'événement " La particule isolée au hasard entre dans K_2 sachant qu'elle est de type B."

c) $C1$: l'événement " La particule isolée au hasard est de type C et elle entre dans K_2."

2) Faire un arbre de probabilité.

3) Calculer la probabilité que la particule isolée au hasard entre dans K_1.

4) La particule isolée au hasard entre dans K_2. Calculer la probabilité qu'elle soit de type A.

5) La particule isolée au hasard entre dans K_1 mais n'est pas de type B. Calculer la probabilité qu'elle soit de type A.

Exercice 2 : Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher, trois blanches et six rouges. On considère les événements :

A : l'événement " Obtenir une boule blanche et deux rouges."

B : l'événement " Obtenir au moins une boule blanche."

(**Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles**)

Partie A : On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1) Déterminer le cardinal de Ω.

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche et deux rouges.

3) Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est égale à $\frac{16}{21}$.

4) On tire simultanément trois boules quarante deux fois avec remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement B est réalisé.

a) Donner la loi de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ainsi que sa variance.

Partie B : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

1) Déterminer le cardinal de Ω.

2) Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche et deux rouges.

3) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

Statistique (8.5 points)

Une société immobilière dispose de N appartements dont les surfaces sont données par le tableau suivant :

Surfaces	[30, 50[	[50, 60[	[60, 80[	[80, 90[	[90, 100[	[100, 120[
Fréquences cumulées	0.05	0.2	F_3	F_4	0.9	1

où F_3 et F_4 sont des réels inconnus.

(**Les résultats seront donnés à $\mathbf{10^{-2}}$ près**)

1) Déterminer :

a) La population étudiée.

b) La variable étudiée.

c) La nature de la variable étudiée.

2) Dresser le tableau de distribution des fréquences en fonction de F_3 et F_4.

3) Sachant que la médiane est égale à 82, donner une équation liant F_3 et F_4.

4) Sachant que la moyenne $\overline{x}$ est égale à 79 donner une équation liant F_3 et F_4.

5) Calculer F_3 et F_4.

6) Etudier la symétrie sachant que l'écart-type σ_x est égale à 81.59. (Justifier la réponse)

7) On sait que $P_k = 100 \times F_k$ et $q_k = 100 \times \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i \times c_i}{\overline{x}}$ pour $k = 1, \cdots, 6$.

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Surfaces	[30, 50[	[50, 60[	[60, 80[	[80, 90[	[90, 100[	[100, 120[
f_k						
F_k	0.05	0.2			0.9	1
P_k	5	20			90	100
q_K	2.53	12.97			86.08	

b) Calculer la médiale de cette série. (Justifier la réponse)

FIN

Correction Rattrapage Février2022

Probabilité (11.5 points)

Exercice 1 :

Question Préliminaire : Traduisons les chiffres de l'énoncé en probabilité :

$P(A) = 0.45.$ **0.25 pt**

$P(B) = 0.25.$ **0.25 pt**

$P(K/A) = \frac{1}{8} = 0.125.$ **0.25 pt**

$P(B \cap \overline{k}) = \frac{1}{5} = 0.2.$ **0.25 pt**

$P(\overline{k}/C) = \frac{1}{4} = 0.25.$ **0.25 pt**

1)

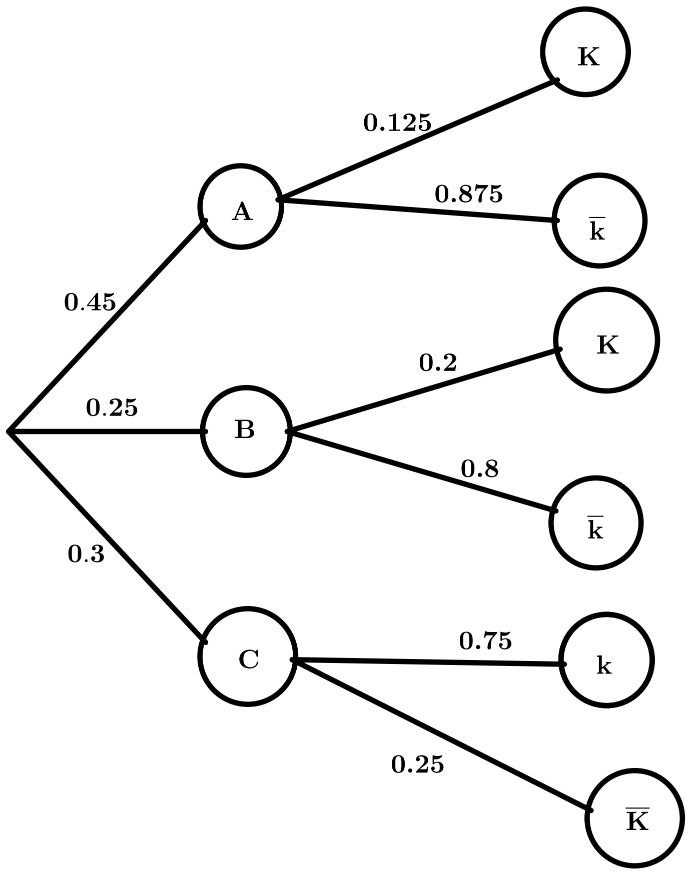
a) $P(A1) = P(A \cap K) = P(K/A) \times P(A) = 0.125 \times 0.45 = 0.056.$ **0.5 pt**

b) $P(B1) = P(\overline{k}/B) = \frac{P(\overline{k} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8.$ **0.5 pt**

c) $P(C1) = P(C \cap \overline{k}) = P(\overline{k}/C) \times P(C) = 0.25 \times 0.3 = 0.075.$ **0.5 pt**

2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

. **0.5 pt**



Arbre de Probabilité

.

3) On a $\{A, B, C\}$forment un S.C.E ou partition, **0.25 pt**

donc d'après le T.P.T, on a

$P(K) = P(K/A) \times P(A) + P(K/B) \times P(B) + P(K/C) \times P(C).$ **0.25 pt**

$P(K) = 0.125 \times 0.45 + 0.2 \times 0.25 + 0.75 \times 0.3 = 0.056 + 0.05 + 0.225 = 0.331$ **0.75 pt**

4) $P(A/\overline{K}) = \frac{P(\overline{K}/A) \times P(A)}{P(\overline{K})}$ d'après la règle de Bayes. D'où. **0.25 pt**

$P(A/\overline{K}) = \dfrac{P(\overline{K}/A)\times P(A)}{P(\overline{K})} = \dfrac{P(\overline{K}/A)\times P(A)}{1-P(K)} = \dfrac{0.875\times 0.45}{1-0.331} = 0.589.$ **0.75 pt**

5) $P(A/(K\backslash B)) = \dfrac{P(A\cap(K\backslash B))\times P(A)}{P((K\backslash B))}.$ **0.5 pt**

On a $(K\backslash B) = K\cap\overline{B} = K\cap(A\cup C)$ car $\{A,\, B,\, C\}$forment un S.C.E ou partition. **0.25 pt**

$P(A/(K\backslash B)) = \dfrac{P(A\cap K\cap(A\cup C)}{P(K\cap(A\cup C))} = \dfrac{P(A\cap K)}{P(K\cap A)+P(K\cap C))}$ **0.25 pt**

$= \dfrac{P(K/A)\times P(A)}{P(K/A)\times P(A)+P(K/C)\times P(C)}$ **0.25 pt**

$= \dfrac{0.125\times 0.45}{0.125\times 0.45+0.75\times 0.3} = \dfrac{0.056}{0.281} = 0.199 \simeq 0.2.$ **0.5 pt**

Exercice 2 :

Partie A :

1) Il n'y a pas ordre et il n'y a pas répétition donc c'est une combinaison.

$Card(\Omega) = C_9^3 = \dfrac{9!}{3!\times(9-3)!} = \dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2} = 84$ **0.5 pt**

2) A : l'événement " Obtenir une boule blanche et deux rouges."

$Card(A) = C_3^1\times C_6^2 = 3\times 15 = 45$. D'où $P(A) = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}.$ **0.5 pt**

3) B : l'événement " Obtenir au moins une boule blanche." son complémentaire est :
$\overline{B}$: l'événement " Obtenir trois boules rouges."

$Card(B) = Card(\Omega) - Card(\overline{B}),\ Card(\overline{B}) = C_6^3 = 20 \Longrightarrow Card(B) = 84-20 = 64$

$P(B) = \dfrac{64}{84} = \dfrac{16}{21}.$ **0.75 pt**

4)

a) X suit la loi Binomiale de paramètre $n = 42$ et $p = P(B) = \dfrac{16}{21}.$ **0.5 pt**

b)

$E(X) = n\times p = 42\times\dfrac{16}{21} = 32.$ **0.25 pt**

$V(X) = n\times p\times(1-p) = 42\times\dfrac{16}{21}\times\left(1-\dfrac{16}{21}\right) = \dfrac{160}{21}.$ **0.25 pt**

Partie B :

1) Il y'a ordre et il n'y a pas répétition donc c'est un arrangement.

$Card(\Omega) = A_9^3 = \dfrac{9!}{(9-3)!} = 9\times 8\times 7 = 504$ **0.5 pt**

2)

$Card(A) = 3\times A_3^1\times A_6^2 = 3\times 3\times 30 = 270$. D'où $P(A) = \dfrac{270}{504} = \dfrac{15}{28}.$ **0.5 pt**

3)B : l'événement " Obtenir au moins une boule blanche." son complémentaire est :
$\overline{B}$: l'événement " Obtenir trois boules rouges. "

$Card(B) = Card(\Omega) - Card(\overline{B}),\ Card(\overline{B}) = A_6^3 = 120 \Longrightarrow Card(B) = 504-120 = 384$

$P(B) = \dfrac{384}{504} = \dfrac{16}{21}.$ **0.5 pt**

Statistique (8.5 points)

1)

a) Les appartements dont dispose la société immobilière. **0.25 pt**

b) La surface des appartements. **0.25 pt**

c) une variable quantitative continue. **0.25 pt**

2) Le tableau de distribution des fréquences et fréquences cumulées. **0.5 pt**

Surfaces	[30, 50[	[50, 60[	[60, 80[	[80, 90[	[90, 100[	[100, 120[
Fréquences	0.05	0.15	$F_3-0.2$	F_4-F_3	$0.9-F_4$	0.1
Fréquences cumulées	0.05	0.2	F_3	F_4	0.9	1

3) La médiane est égale à 82 $\Longrightarrow$ la classe de la médiane est $]80,\, 90]$, **0.25 pt**

$$m_e = x_k + (x_{k+1} - x_k)\frac{0.5 - F_k}{F_{k+1} - F_k}$$ **0.25 pt**

$x_k = 80$, $x_{k+1} = 90$, $F_k = F_3$ et $F_{k+1} = F_4$ d'où,

$m_e = 80 + (90 - 80)\dfrac{0.5 - F_3}{F_4 - F_3} = 82 \Longrightarrow$

$(90 - 80) \times (0.5 - F_3) = (82 - 80) \times (F_4 - F_3) \Longrightarrow 5 - 10 \times F_3 = 2 \times F_4 - 2 \times F_3 \Longrightarrow 5 = 2 \times F_4 + 8 \times F_3.$

D'où l'équation $8 \times F_3 + 2 \times F_4 = 5.$ **0.75 pt**

4) $\overline{x} = \sum_i f_i c_i$ **0.25 pt**

$$\begin{aligned}
&= 0.05 \times 40 + 0.15 \times 55 + (F_3 - 0.2) \times 70 + (F_4 - F_3) \times 85 + (0.9 - F_4) \times 95 + 0.1 \times 110 \\
&= 2 + 8.25 + 70 \times F_3 - 14 + 85 \times F_4 - 85 \times F_3 + 85.5 - 95 \times F_4 + 11 \\
&= 92.75 - 15 \times F_3 - 10 \times F_4 = 79 \\
&\Longrightarrow 15 \times F_3 + 10 \times F_4 = 13.75.
\end{aligned}$$ **0.75 pt**

5) D'où le système d'équation

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 8 \times F_3 & + & 2 \times F_4 & = & 5 \\ 15 \times F_3 & + & 10 \times F_4 & = & 13.75 \end{array}\right.$$ **0.25 pt**

$$\left.\begin{array}{ccccc} 8 \times F_3 & + & 2 \times F_4 & = & 5 \\ 15 \times F_3 & + & 10 \times F_4 & = & 13.75 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc} 40 \times F_3 & + & 10 \times F_4 & = & 25 \\ 15 \times F_3 & + & 10 \times F_4 & = & 13.75 \end{array}\right\}$$

d'où $25 \times F_3 = 11.25 \Longrightarrow F_3 = \dfrac{11.25}{25} = 0.45$ **1 pt**

On a $8 \times F_3 + 2 \times F_4 = 5 \Longrightarrow F_4 = \dfrac{5 - 8 \times F_3}{2} = \dfrac{5 - 8 \times 0.45}{2} = \dfrac{5 - 3.6}{2} = \dfrac{1.4}{2} = 0.7.$ **1 pt**

5) La variance $\sigma_x = 81.59$, $m_e = 82$ et $\overline{x} = 79$.

a) D'après le 1^{er} coefficient d'asymétrie de Pearson, on a :

$$\begin{aligned}
A_{P1} &= 3 \times \frac{\overline{x} - m_e}{\sigma_x} \\
&= 3 \times \frac{79 - 82}{81.59} = -0.11 < 0.
\end{aligned}$$ **0.25 pt**

D'où la distribution est asymétrique à gauche. **0.5 pt**

7) On sait que $P_k = 100 \times F_k$ et $q_k = 100 \times \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_k \times c_k}{\overline{x}}$,

a) **0.75 pt**

Surfaces	[30, 50[	[50, 60[	[60, 80[	[80, 90[	[90, 100[	[100, 120[
f_k	0.05	0.15	0.25	0.25	0.2	0.1
F_k	0.05	0.2	0.45	0.7	0.9	1
P_k	5	20	45	70	90	100
q_K	2.53	12.97	35.13	62.03	86.08	100

b) La classe médiale est [80, 90]. **0.25 pt**

car la $1^{ère}$ masse des valeurs q_k supérieure ou égale à 50 est 62.03.

$$m_l = x_k + (x_{k+1} - x_k)\frac{50 - q_k}{q_{k+1} - q_k}$$ **0.25 pt**

$x_k = 80$, $x_{k+1} = 90$, $q_k = 35.13$ et $q_{k+1} = 62.03$ d'où,

$$\begin{aligned}
m_l &= 80 + (90 - 80) \times \frac{50 - 35.13}{(62.03 - 35.13)} \\
&= 80 + 10 \times \frac{14.87}{26.9} \\
&= 85.53.
\end{aligned}$$

D'où $m_l = 85.53.$ **0.75**