



Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.
Rabat Maroc



Filière : SMI
Semestre 3
Module 18

Cours
calcul des probabilités
et
variables aléatoires

Par le
Professeur HAKAM Samir

Année : 2020- 2021

Table des matières

Introduction	ii
1 Notions de Probabilités	1
1.1 Langage de Probabilités	1
1.1.1 Expérience aléatoire et ensemble des résultats	1
1.1.2 Événements	2
1.1.3 Opérations sur les événements	2
1.1.4 Langage probabiliste des événements	2
1.2 Définition et propriétés d'une Probabilité	3
1.2.1 Définition	3
1.2.2 Propriété	4
1.2.3 Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable	5
1.2.3.1 Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable	5
1.2.3.2 Equiprobabilité	5
1.3 Analyse Combinatoire	6
1.3.1 Généralités	6
1.3.2 Cardinal d'un ensemble	6
1.3.3 Arbre de dénombrement :	7
1.3.4 Analyse combinatoire	8
1.3.4.1 Permutation :	8
1.3.4.2 Echantillons ordonnés	8
1.3.4.3 Echantillons non ordonnés	9
1.3.5 Exemple :	10
1.4 Probabilités Conditionnelles-Indépendance	11
1.4.1 Probabilité Conditionnelle	11
1.4.2 Arbre de probabilité :	13
1.4.3 Théorème des Probabilités Totales	14
1.4.4 Formule de Bayes	15
1.4.5 Événements Indépendants	16
2 Variables aléatoires	17
2.1 Variables aléatoires	17
2.1.1 Définition	17
2.1.2 Différents types de variables aléatoires	17

2.2	Fonction de répartition	18
3	Variable aléatoire discrète	19
3.1	Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète	19
3.1.1	Loi de probabilité	19
3.1.2	Fonction de répartition	20
3.2	Loi de probabilité d'un couple de v.a	21
3.2.1	Lois marginales	22
3.2.2	Lois conditionnelles	22
3.2.3	Indépendance	23
3.2.4	Loi de la somme	23
3.2.5	Loi du produit	23
3.3	Moments	24
3.3.1	Espérance mathématique	24
3.3.2	Moments	24
3.3.3	Variance - Ecart-type - Covariance - Corrélation	24
3.4	Exemples de lois de probabilités discrètes	26
3.4.1	Loi uniforme	26
3.4.2	Loi de Bernoulli	26
3.4.3	Loi Binomiale	26
3.4.4	Loi multinômiale	28
3.4.5	Loi hypergéométrique	29
3.4.6	Loi de poisson	29
3.4.7	Loi géométrique	31
3.4.8	Loi binomiale négative	31
3.4.9	Tableaux des lois de probabilités discrètes	32
4	Variables aléatoires continues	33
4.1	Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue	33
4.1.1	Fonction de répartition	33
4.1.2	Densité de probabilité	33
4.1.3	Changement de variable	34
4.2	Loi de probabilité d'un couple de v.a	34
4.2.1	Fonction de répartition	34
4.2.2	Densité de probabilité	34
4.2.3	Lois marginales	35
4.2.4	Lois conditionnelles	35
4.2.5	Indépendance	35
4.2.6	Changement de variable	36
4.3	Moments	36
4.3.1	Espérance mathématique	36
4.3.2	Moments	36
4.3.3	Variance - Ecart-type - Covariance - Corrélation	36

4.3.4	Matrice de Variance-Covariance	37
4.4	Exemples de lois de probabilités continues	37
4.4.1	Loi uniforme	37
4.4.2	Loi exponentielle	38
4.4.3	Loi Gamma	38
4.5	Loi Normale ou Gaussienne	38
4.5.1	Loi Normale ou Gaussienne	38
4.5.2	Table de la loi Normale standard	39
4.5.3	Couple gaussien	41
4.5.4	Lois déduites de la loi Normale	41
4.5.4.1	Loi du khi-deux	41
4.5.4.2	Loi de Student	41
4.5.4.3	Loi de Fisher-Snedecor	42
4.5.5	Tableaux des lois de probabilités continues	42
4.5.6	Approximation par la loi Normale	43
4.5.6.1	Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale	43
4.5.6.2	Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale	43
4.5.6.3	Théorème de la limite centrale	44

Introduction

La théorie des probabilités ne cesse de se développer pour répondre à de réels besoins aussi multiples que variés. Les jeux de hasard, les files d’attente, la fiabilité des systèmes, la propagation d’une épidémie, les télécommunications, les finances ... ont été à l’origine de certains problèmes mathématiques difficiles dont la théorie des probabilités fournit des solutions totales ou partielles. Le résultat d’un jet de dé ou d’un scrutin est un exemple simple d’événements issus d’une expérience dont le résultat ne peut être prédit. De tels événements, dépendant du hasard, sont dits aléatoires et constituent un concept important en théorie des probabilités.

Ce cours a pour but de familiariser l’étudiant avec le raisonnement probabiliste. Par rapport à un autre cours de mathématiques, il se distingue par l’ambition de modéliser certains phénomènes réels. Un modèle mathématiquement correct ne suffirait donc pas toujours, il faudrait encore que celui-ci corresponde aux observations. Cette partie se divise en deux parties principales : la première concerne les probabilités discrètes et la seconde les probabilités continues.

A ses débuts, la théorie du “calcul des probabilités” a concerné principalement l’étude et la modélisation des jeux de hasard. Les premiers travaux sont attribués à Pascal et à Fermat (1654) sur des problèmes posés par le Chevalier de Méré, joueur professionnel et mathématicien amateur. La probabilité est définie comme le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles et la solution fait souvent appel au dénombrement.

Imaginons maintenant que je joue une partie de tennis contre un joueur P professionnel. Si on veut bien avoir l’indulgence d’admettre qu’il y a deux solutions pour le joueur P, il ne paraît pas raisonnable de leur donner la même probabilité. Il faut donc généraliser la notion de probabilité, c’est ce qui est fait au Chapitres 1 et 3. On y définit dans sa plus grande généralité la notion de probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable. C’est la partie “probabilités discrètes”.

Dans certaines situations, le cadre théorique précédent est insuffisant, c’est le cas en particulier quand on s’intéresse à une mesure physique (poids, tension électrique, ...) qui prend ses valeurs sur \mathbb{R} qui n’est malheureusement pas dénombrable. Ce sont alors d’autres techniques qui sont employées au chapitre 4 qui est consacré à la notion de densité de probabilité et à l’approximation par la loi normale. C’est la partie “probabilités continues”.

Afin de mettre l’accent sur les problèmes fondamentaux de conditionnement et de modélisation, nous avons réduit à sa plus simple expression le matériel théorique de ce cours. Nous avons en particulier toujours privilégié la démarche constructive à la démarche axiomatique.

Chapitre 1

Notions de Probabilités

L'étude d'un phénomène aléatoire commence par la description de l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple 1.0.1 :

Expérience 1 : On jette un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le numéro apparu sur la face supérieure.

On obtient un nombre $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

$\omega \in \Omega$ est appelé une réalisation ou une "épreuve".

$A \subset \Omega$ est appelé un événement.

$A = \text{"le nombre obtenu est pair"}$, A est réalisé $\iff \omega \in \{2, 4, 6\}$

Expérience 2 : Soit un jeu de dominos (chacun des dominos porte deux nombres de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ éventuellement identiques).

On tire au hasard un domino. On obtient une paire

$\{x, y\} \in \Omega = \{\{x, y\} : x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$; $\{x, y\}$ est une réalisation ou une "épreuve".

$A \subset \Omega$ est appelé un événement.

$A = \text{"la somme des deux nombres obtenus est supérieure ou égale à 8"}$

$$\begin{aligned} A &= \{\{x, y\} / x + y \geq 8\} \\ &= \{\{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 6\}\} \\ A \text{ est réalisé } &\iff \{x, y\} \in A \end{aligned}$$

Ω est l'événement qui est toujours réalisé "événement certain" ou "espace de l'univers".

\emptyset est l'événement qui n'est jamais réalisé "événement impossible".

1.1 Langage de Probabilités

1.1.1 Expérience aléatoire et ensemble des résultats

Une expérience aléatoire \mathcal{C} est une expérience dont le résultat est soumis au hasard, c'est aussi une expérience dont on ne peut prévoir complètement le résultat.

Le résultat de la dite expérience, qui a priori n'est pas connu est représenté par l'ensemble Ω de toutes les réalisations possibles. Ω est appelé l'ensemble des résultats (ou référentiel).

Une réalisation $\omega \in \Omega$ est aussi appelée épreuve aléatoire.

Exemple 1.1.1 :

N°	Expérience	Ensemble de résultats possibles
1	Jeter un dé et relever le nombre qui est sur sa face supérieure	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2	Jeter une pièce de monnaie	$\Omega = \{\text{pile, face}\} = \{P, F\}$
3	Compter le nombre de personnes entrant dans un magasin entre 8h 30 et 22h	$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$
4	Jeter un dé deux fois de suite	$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
5	Jeter une pièce de monnaie trois de fois de suite	$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$
6	Observer la durée de vie d'une ampoule électrique	$\Omega = \mathbb{R}^+$

1.1.2 Événements

Les sous-ensembles de Ω sont appelés événements. On distingue les événements simples ou événements élémentaires qui sont constitués d'un seul élément (autrement dit, un singleton), des événements composés.

Exemple 1.1.2 :

Dans l'expérience N°4 de l'exemple 4.1.1 :

$A = \{(1, 2)\}$ est un événement simple.

$B = \{(1, 2), (1, 4), (5, 3)\}$ est un événement composé.

$C = \{\text{la somme des points obtenus est égale à 4}\}$

Il est clair que $C = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ est un événement composé.

1.1.3 Opérations sur les événements

- Événement impossible : $A = \emptyset$
- Événement certain : $A = \Omega$
- Événement contraire : $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- Événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$
- Réalisation simultanée de deux événements : $A \cap B$
- Réalisation d'un événement au moins : $A \cup B$
- Événement $A \setminus B = A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B)$. Cet événement est caractérisé par la réalisation de A et la non réalisation de B .

1.1.4 Langage probabiliste des événements

Soient A et B deux événements d'un ensemble Ω .

- A chaque événement A correspond son événement contraire.

“Non A ” est réalisé si et seulement A ne l'est pas.

$$\omega \in \text{“Non } A\text{”} \iff \omega \notin A \iff \omega \in \bar{A}$$

• L'événement “ A et B ” est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés au cours de la même expérience.

$$\omega \in “A \text{ et } B” \iff \omega \in A \text{ et } \omega \in B \iff \omega \in A \cap B$$

A et B sont incompatibles ou disjoints si et seulement si A et B ne peuvent être réalisés simultanément, ce qui est équivalent à $A \cap B = \emptyset$.

• L'événement “ A ou B ” est réalisé si et seulement si A est réalisé ou B est réalisé.

$$\omega \in “A \text{ ou } B” \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \iff \omega \in A \cup B$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B) \text{ , } A \cup B = A \cup (B \setminus A) \text{ , } A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

• On dit que “ A implique B ” si la réalisation de A entraîne la réalisation de B . On a :

$$\omega \in A \implies A \text{ est réalisé } \implies B \text{ est réalisé } \implies \omega \in B \text{ donc } A \subset B$$

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A$$

1.2 Définition et propriétés d'une Probabilité

1.2.1 Définition

Une probabilité P sur l'ensemble Ω est une application :

$$P : A \subset \Omega \longrightarrow [0, 1]$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\underbrace{\text{Axiomes de probabilité}}_{\left\{ \begin{array}{l} i) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subset \Omega \\ ii) \quad \forall A, B \subset \Omega : \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset. \\ iii) \quad \text{Pour toute suite } \{A_n\}_{n \geq 1} \text{ d'événements de } \Omega \\ \quad \text{deux à deux disjoints ou incompatibles c'est à dire} \\ \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j, \text{ on a :} \\ \quad \underline{\text{Additivité}} : P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \\ iv) \quad P(\Omega) = 1 \end{array} \right.}$$

On dit alors que Ω est muni d'une probabilité P .

Exemple 1.2.1 :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \forall i \in \Omega \quad \text{et} \quad P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^6 \{i\}\right) = \sum_{i=1}^6 P(\{i\}) = 1$$

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \frac{1}{2}.$$

1.2.2 Propriété

Soient Ω un ensemble et P une probabilité sur Ω , alors la probabilité P vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad P(\emptyset) = 0 \\ 2) \quad \forall A \in \Omega : P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\ 3) \quad \forall A, B \in \Omega : A \subset B \implies \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \end{cases} \\ 4) \quad \forall A, B \in \Omega : A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \text{ et } P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \\ 5) \quad \text{Pour toute suite } \{A_i\}_{i=1}^n \text{ d'événements de } \Omega \\ \quad \text{deux à deux disjoints c'est à dire } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j, \text{ on a :} \\ \quad \text{Additivité : } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \\ 6) \quad \forall A, B \in \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 7) \quad \text{Pour toute suite } \{A_n\}_{n \geq 1} \text{ d'événements de } \Omega \text{ on a :} \\ \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \end{array} \right.$$

Preuve :

1) $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ D'après l'axiome *ii*).

d'où $1 = 1 + P(\emptyset)$ D'après l'axiome *iv*). Donc $P(\emptyset) = 0$

2) $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$ donc d'après l'axiome *iv*) et *ii*), on a

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \implies P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

3) $A \subset B \implies B = A \cup (B \setminus A)$ avec $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ d'où $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$$\implies \begin{cases} P(A) \leq P(B) \text{ d'après l'axiome } i) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \end{cases}$$

4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ et $A \cap B \subset A \implies P(A \setminus B) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$.

5) Par récurrence sur n en utilisant l'axiome *ii*).

On a $A_1 \cap A_2 = \emptyset \implies P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ d'où la relation est vraie pour $n = 2$.

Hypothèse de récurrence : Supposant que la relation est vraie jusqu'à l'ordre n

$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

On a $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \implies A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) + P(A_{n+1}) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

6) $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ et $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$. D'après 2) et 4) on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

7) On a, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup \dots \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \bar{A}_{n-1} \cap A_n) \cup \dots$

union d'événements deux à deux incompatibles. D'après l'axiome *iii*) et la propriété 3),

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)) + \dots + P((\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \bar{A}_{n-1} \cap A_n)) + \dots \\ &\leq P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

1.2.3 Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Un ensemble Ω est dit dénombrable si il existe une bijection de Ω vers \mathbb{N} ou une partie de \mathbb{N} . Les ensembles dénombrables sont soit finis, soit infinis.

1.2.3.1 Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Toute probabilité P sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée d'un ensemble $\{P(\{\omega\}); \omega \in \Omega\}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} i) \quad & \forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) \geq 0 \\ ii) \quad & \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1 \end{aligned}$$

on a alors $\forall A \subset \Omega \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

Notation : $P(\{\omega\}) = P(\omega)$

Exemple 1.2.2 :

D'un jeu de 32 cartes neuf et battu, on extrait une carte. Pour des raisons de symétrie, chaque carte joue le même rôle, donc "a la même chance" d'être tirée. Par exemple la probabilité de l'événement A : "tirer le roi de coeur" est

$$P(A) = \frac{1}{32}$$

La probabilité de l'événement B : "tirer un as" est $P(B) = \frac{\text{Nombre d'As}}{\text{Nombre de cartes}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

1.2.3.2 Equiprobabilité

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque Ω est fini, de cardinal n , et tous les événements simples sont de même probabilité c'est à dire elles ont la même chance de se réaliser (équiprobables). Dans ce cas :

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} \quad \forall \omega \in \Omega$$

où $\text{Card}(\Omega)$ est le nombre d'élément de Ω .

la probabilité P sur Ω est dite uniforme.

Si les événements simples sont équiprobables, la probabilité de tout événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Exemple 1.2.3 :

On jette deux dés de couleurs différentes. On note i le résultat du premier dé et j du second dé. On a donc

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(i, j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$

$$\text{Card}(\Omega) = 36$$

On munit l'ensemble Ω de la probabilité uniforme, $P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{36}$

on s'intéresse à la probabilité de la somme $i + j$ des deux dés. Soit l'événement A_k

$$A_k = \{(i, j) \in \Omega : i + j = k\}, \quad k \in \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= P\{(1, 1)\} = \frac{1}{36} \\
P(A_3) &= P\{(1, 2), (2, 1)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\
P(A_4) &= P\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\
P(A_7) &= P\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\
P(A_{12}) &= P\{(6, 6)\} = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

Soit A l'événement : “ le total des points est inférieur à 4”.

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\} \implies \text{Card}(A) = 3 \text{ et } P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

1.3 Analyse Combinatoire

L'analyse combinatoire regroupe les méthodes qui servent en mathématiques à effectuer un dénombrement c'est à dire à compter, parmi un ensemble fini donné, ceux de ses éléments qui vérifient une propriété donnée. Il s'agit donc de déterminer le cardinal d'un sous ensemble bien défini.

Le but de l'analyse combinatoire est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble de cardinal fini. Il permet aussi de compter le nombre de résultats possibles d'une expérience.

1.3.1 Généralités

Soient E et F deux ensembles finis.

Définition 1.3.1 : Le produit cartésien des ensembles E et F est l'ensemble des couples (a, b) , où a appartient à E et b appartient à F . On le note $E \times F$.

Exemple 1.3.1 :

Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$, on a :

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

On généralise cette notion à n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n en faisant intervenir des n -uplets.

Exemple 1.3.2 :

Soient $E_1 = \{a, b, c\}$, $E_2 = \{1, 2\}$, $E_3 = \{x, y\}$ et $E_4 = \{3, 4\}$ on a :

$$\begin{aligned}
E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4 &= \{(a, 1, x, 3), (a, 1, x, 4), (a, 1, y, 3), (a, 1, y, 4), (a, 2, x, 3), (a, 2, x, 4) \\
&\quad (a, 2, y, 3), (a, 2, y, 4), (b, 1, x, 3), (b, 1, x, 4), (b, 1, y, 3), (b, 1, y, 4) \\
&\quad (b, 2, x, 3), (b, 2, x, 4), (b, 2, y, 3), (b, 2, y, 4), (c, 1, x, 3), (c, 1, x, 4) \\
&\quad (c, 1, y, 3), (c, 1, y, 4), \{(c, 2, x, 3), (c, 2, x, 4), (c, 2, y, 3), (c, 2, y, 4)\}
\end{aligned}$$

$(c, 1, x, 4)$ est un 4-uplet.

1.3.2 Cardinal d'un ensemble

Définition 1.3.2 : Si un ensemble E est fini et contient n éléments, alors le nombre n est appelé le cardinal de E . On note $\text{Card}(E) = n$, en convenant que $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Règle 1 : Soient E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles finis deux à deux disjoints c'est à dire

$E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. On note $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$. Alors on a

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \dots + \text{Card}(E_n)$$

On a les résultats suivants : Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E .

- Si A et B sont disjointes c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
- Dans tous les cas, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
- $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

1.3.3 Arbre de dénombrement :

Lorsqu'une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, \dots, n_p possibilités (où chaque n_k ne dépend que de l'étape k), le nombre total d'issues est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$. Une telle situation peut être représentée par un arbre.

Exemple 1.3.3 :

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Dénombrer tous les nombres formés de 3 chiffres distincts de E et commençant par 1. Une solution est représentée par un triplet ordonné de 3 chiffres choisis parmi les chiffres 1, 2, 3 et 4 sachant que le 1^{er} chiffre doit être le «1» et que tous les chiffres sont distincts. Ainsi le triplet (1, 3, 2) signifie qu'on a choisi en 1^{er} le «1», en second le «3» puis enfin le «2». Ce triplet correspond au nombre 132. le nombre total des triplets est $n_1 \times n_2 \times n_3 = 1 \times 3 \times 2 = 6$, 123, 124, 132, 134, 142, 143, Pour trouver les 6 triplets possible on construit un arbre :

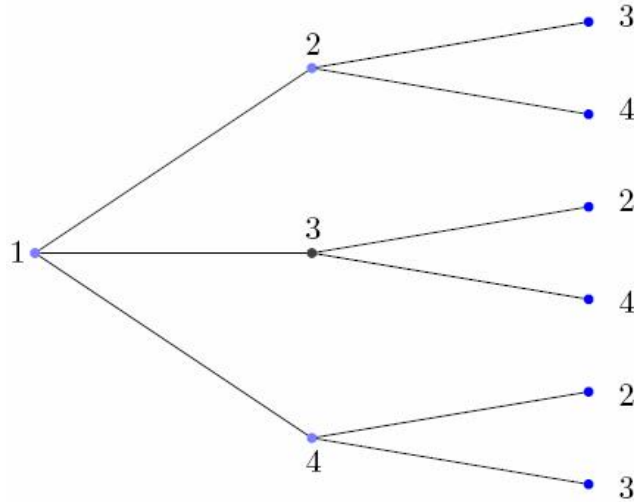


FIGURE 1.1 – Arbre de dénombrement

Règle 2 : Soient E_1, E_2, \dots, E_n des ensembles finis. On note $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Alors on a :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_n)$$

1.3.4 Analyse combinatoire

On se place sur un ensemble Ω fini. On note n son cardinal. On va s'intéresser à l'étude des différentes manières d'ordonner des objets qui seront appelés des échantillons.

1.3.4.1 Permutation :

Définition 1.3.3 : Une permutation est un rangement ordonné de n objets distinguables. C'est également une bijection d'un ensemble de n éléments vers lui même.

i) Permutations sans répétitions

Le nombre de permutations de n objets distincts est égal à $n! = 1 \times 2 \dots \times n$. C'est aussi le nombre de bijections d'un ensemble de n éléments vers lui même.

Exemple 1.3.4 :

Les permutations possibles des lettres A, B et C sont : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. soit $1 \times 2 \times 3 = 6$ permutations.

ii) Permutations avec répétitions

Le nombre de permutations de n objets comprenant n_1, n_2, \dots, n_r objets identiques ou indiscernables est égal à

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!} \text{ avec } \sum_{i=1}^r n_i = n$$

Exemple 1.3.5 :

Les permutations possibles des lettres A, B, B, B et C sont :

ABBB, ABBCB, ABCBB, ACBBB, CABBB, BABBC, BABCB, BACBB, BCABB, CBABB, BBABC, BBACB, BBCAB, BCBAB, CBBAB, BBBAC, BBBAC, BBCBA, BCBBA, CBBBA, soit $\frac{5!}{1! \times 3! \times 1!} = \frac{120}{6} = 20$ permutations.

1.3.4.2 Echantillons ordonnés

i) Echantillons ordonnés avec répétitions

Définition 1.3.4 : Un échantillon ordonné avec répétitions de longueur p d'éléments de Ω est une suite ordonnée de p éléments de Ω non nécessairement distincts ($p \leq n$), (e_1, e_2, \dots, e_p) , c'est également un élément de $\Omega^p = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega$, (p fois) c'est donc un p -uplet d'éléments de Ω que l'on appelle couple lorsque $p = 2$ et triplet lorsque $p = 3$. Il correspond à une application de $\{1, 2, \dots, p\}$ vers Ω . Le nombre d'échantillons ordonnés avec répétitions de longueur p sur Ω est :

$$n^p = \text{Card}(\Omega)^p$$

C'est aussi le nombre d'applications de $\{1, 2, \dots, p\}$ vers Ω .

Exemple 1.3.6 :

Combien de sigles de trois lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ?

Il y a répétition car AAA est un sigle et Il y a ordre car $ABC \neq BAC$.

La taille de Ω est égale à $\text{Card} \Omega = 26$ et $p = 3$. Donc il y a $26^3 = 17576$.

ii) Echantillons ordonnés sans répétitions ou Arrangement

Définition 1.3.5 : Un échantillon ordonné sans répétitions de longueur p sur Ω est un p -uplet, (e_1, e_2, \dots, e_p) , dont tous les éléments sont différents. Il faut donc que $p \leq n$. Il correspond à une application injective de $\{1, 2, \dots, p\}$ vers Ω .

Le nombre d'échantillons ordonné sans répétitions ou le nombre d'arrangements de p éléments parmi n de Ω est :

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ zéro} && \text{si } p > n \\ &\bullet A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} && \text{si } p \leq n \end{aligned}$$

C'est aussi le nombre d'applications injectives d'un ensemble de p éléments vers un ensemble de n éléments.

Remarque : Quand $p = n$ On retrouve le nombre de permutations (sans répétition) de n objets distincts $n!$.

Exemple 1.3.7 :

Si l'on numérote les 8 coureurs de 1 à 8, le podiums (c'est à dire les 3 premiers arrivés) correspond à un tirage ordonné de 3 boules distinctes dans une urne contenant des boules numérotés de 1 à 8 et évidemment sans remise de la boule tirée. Le nombre de podium ou le nombre de tirages possibles vaut donc

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

1.3.4.3 Echantillons non ordonnés

i) Echantillons non ordonnés sans répétitions ou Combinaison

Définition 1.3.6 : Un échantillon non ordonné sans répétitions de taille p sur Ω est tout simplement un sous ensemble de p éléments de Ω ($p \leq n$), $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$.

Le nombre de sous-ensembles de taille p de Ω ou le nombre de combinaisons de p éléments parmi n de Ω est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si } p \leq n \quad 0 \quad \text{sinon}$$

On a $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

Exemple 1.3.8 :

i) Combien de couleurs peut-on obtenir en mélangeant deux couleurs non identiques des trois couleurs : Rouge, Bleu, Jaune?

On considère des échantillons non ordonnés : Rouge + Bleu = Bleu + rouge.

Il n'y a pas répétition : Jaune + Jaune ne convient pas.

La réponse est donc : $C_3^2 = 3$.

ii) *Nombre de tirages du Loto.* Les boules sont numérotées de 1 à 49. On tire 6 boules. Un tirage de 6 numéros parmi 49, est une combinaison de 6 parmi 49. Le nombre de tirages possibles vaut donc

$$C_{49}^6 = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13983816$$

Application : La formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$.

Remarque : Le nombre de possibilités de diviser un ensemble de n éléments en r partitions contenant respectivement n_1, n_2, \dots, n_r éléments est donné par

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!} \text{ avec } \sum_{i=1}^r n_i = n$$

Application : La formule du binôme généralisée : $(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_r = n} C_n^{n_1, \dots, n_r} a_1^{n_1} \dots a_r^{n_r}$.

ii) Echantillons non ordonnés avec répétitions

Si nous tirons avec remise p objets parmi n objets discernables, et nous les disposons sans tenir compte de l'ordre d'apparition, ces objets peuvent apparaître plusieurs fois et nous ne pouvons les représenter ni avec une partie à p éléments, ni avec un p -uplet puisque leur ordre de placement n'intervient pas.

Définition 1.3.7 : Un échantillon non ordonné avec répétitions de taille p sur Ω ou le nombre de combinaisons avec répétitions de taille p sur Ω est une liste de p éléments de Ω non ordonné et non nécessairement distincts.

Le nombre d'échantillon non ordonné avec répétitions de taille p sur Ω est

$$C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p! (n-1)!}$$

Exemple 1.3.9 :

i) Après développement et réduction combien de termes comportera $(a+b+c)^3$?

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$. Il y a $C_{3+3-1}^3 = C_5^3 = 10$ termes.

ii) On dispose d'un grand nombre de paquets de beurre, paire d'œufs, sucre et farine pesant tous exactement 100g. Combien peut-on faire de gâteaux d'un kilo différents avec ces ingrédients ? On admettra comme "gâteau" des solutions triviales comme : Omelette pure, Beurre pur, farine pure, etc ... Un exemple de solution non triviale est donné par :

$$(Be, Be, Be, Oe, Oe, Oe, Su, Su, Fa, Fa)$$

Il est clair que l'ordre des ingrédients n'intervient pas. On a $n = 4$ et $p = 10$. Il y a donc $C_{10+4-1}^{10} = C_{13}^{10} = 286$ recettes.

1.3.5 Exemple :

Un domino comportant deux nombres est une combinaison de deux nombres de

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Il y a $C_7^2 = 21$ dominos comportant deux nombres distincts et 7 dominos portant un double. D'où le jeu de domino contient $C_7^2 + 7 = 28$ dominos.

La probabilité de tirer un domino est : $P(\omega) = \frac{1}{28}$

La probabilité pour qu'un domino tiré soit double est :

$$P(\text{double}) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25$$

On tire cinq dominos au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double ?
Toutes les combinaisons de 5 dominos parmi les 28 sont équiprobables. Donc il y a C_{28}^5 cas possibles.
L'événement contraire "ne pas obtenir de double", sa probabilité est $\frac{C_{21}^5}{C_{28}^5}$ car il y a C_{21}^5 combinaisons de 5 dominos pris parmi les 21 qui ne comportent pas de doubles. La probabilité cherchée est :

$$1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 1 - \frac{323}{1560} \simeq 0,79$$

1.4 Probabilités Conditionnelles-Indépendance

1.4.1 Probabilité Conditionnelle

Exemple 1.4.1 :

i) Soit une famille composée de 4 enfants.

$\Omega = \{(g, g, g, g), (g, g, g, f), (g, g, f, g), (g, f, g, g), (f, g, g, g), (g, g, f, f), (g, f, g, f), (g, f, f, g), (f, g, g, f), (f, g, f, g), (f, f, g, g), (g, f, f, f), (f, g, f, f), (f, f, g, f), (f, f, f, g), (f, f, f, f)\}$.

$Card(\Omega) = 16$. soient les événements

A " la famille a au moins 3 garçons ", on a $P(A) = \frac{5}{16}$.

B " la famille a au moins une fille ", on a $P(B) = \frac{15}{16}$.

Supposons que l'on sache que l'événement B est réalisé, que devienne la probabilité de A ?

L'ensemble des réalisations s'est modifié est vaut :

$\Omega' = \{(g, g, g, f), (g, g, f, g), (g, f, g, g), (f, g, g, g), (g, g, f, f), (g, f, g, f), (g, f, f, g), (f, g, g, f), (f, g, f, g), (f, f, g, g), (g, f, f, f), (f, g, f, f), (f, f, g, f), (f, f, f, g), (f, f, f, f)\}$.

$Card(\Omega') = 15$

L'événement A devient maintenant $A' = \{(g, g, g, f), (g, g, f, g), (g, f, g, g), (f, g, g, g)\}$ est la probabilité est modifiée : on la note P' . On a

$$P'(A') = \frac{Card(A')}{Card(\Omega')} = \frac{4}{15}$$

Cette nouvelle probabilité est notée

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ réalisé et } B \text{ réalisé})}{P(B)} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{15}{16}}$$

ii) On lance un dé cubique.

Soit A l'événement : "On obtient un nombre inférieur ou égal à 5" : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Soit B l'événement : "On obtient un nombre supérieur ou égal à 3" : $B = \{3, 4, 5, 6\}$

Supposons que l'on sache que A est réalisé.

Le résultat du lancer est donc un élément $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, est la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé est $P'(B) = \frac{3}{5}$ (car il y a 5 cas possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 3 cas favorables : 3, 4, 5). On a :

$$P'(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{5} \text{ car } P(A) = \frac{5}{6} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{3}{6}$$

Soient A et B deux événements d'un même référentiel Ω tel que $P(A) > 0$.

Définition 1.4.1 : On appelle “ probabilité conditionnelle de B sachant A ” ou bien “ probabilité pour que B se réalise sachant que A est réalisé ”, le réel :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Remarque :
$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \implies P(B \cap A) = \begin{cases} P(B/A)P(A) \\ P(A/B)P(B) \end{cases}$$

Exemple 1.4.2 :

On jette un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité d’obtenir un total inférieur à 5 sachant que l’on a obtenu 2 au premier jet ?

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$Card(\Omega) = 6^2 = 36$$

A : l’événement “ obtenir 2 au premier jet ”

$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$, $Card(A) = 6$ et

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B : l’événement “ la somme des deux nombres obtenus est inférieure à 5 ”

$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$, $B \cap A = \{(2, 1), (2, 2)\}$, $Card(A \cap B) = 2$ et

$$P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

La probabilité cherchée est :
$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$$

Exemple 1.4.3 :

une urne contient 10 boules noires et 15 boules blanches. On effectue deux tirages successifs sans remettre la première boule tirée dans l’urne (tirage sans remise). Quelle est la probabilité d’obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage ?

$$Card(\Omega) = 25$$

A : l’événement “ Obtenir une boule noire au premier tirage ”

$$Card(A) = 10 \text{ et } P(A) = \frac{10}{25}$$

B : l’événement “ Obtenir une boule blanche au deuxième tirage ”

$$Card(B) = 15 \text{ et } P(B/A) = \frac{15}{24}$$

C : l’événement “ Obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage ” $C = A \cap B \implies P(C) = P(A \cap B)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \implies P(B \cap A) = P(B/A) \times P(A)$$

d’où

$$P(A \cap B) = \frac{15}{24} \times \frac{10}{25} = \frac{1}{4}$$

1.4.2 Arbre de probabilité :

Définition 1.4.2 : Un arbre de probabilité est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.

Exemple 1.4.4 :

On lance un dé, si le numéro obtenu est un multiple de 3, on extrait au hasard une boule dans l'urne U_1 qui contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 3 boules rouges. Si le numéro obtenu n'est pas un multiple de 3, on extrait une boule dans l'urne U_2 qui contient 3 boules noires et 2 boules blanches. Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

La première étape permet de définir une équiprobabilité sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On considère les deux événements complémentaires :

A " le lancer donne un multiple de 3 ", $A = \{3, 6\}$ et $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{3}$,

\bar{A} " le lancer ne donne pas un multiple de 3 ", $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5\}$ et $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$.

La seconde étape permet d'étudier ce qui se passe quand on tire dans l'urne U_1 ou U_2 .

Le tirage dans U_1 permet de définir une équiprobabilité sur $\Omega_1 = \{N, N, N, B, B, B, B, R, R, R\}$.

On considère les deux événements complémentaires :

U_{1N} " on tire une boule noire " $U_{1N} = \{N, N, N\}$ et $P(U_{1N}) = \frac{\text{Card}(U_{1N})}{\text{Card}(\Omega_1)} = \frac{3}{10}$,

U_{1BR} " le tirage ne donne pas une boule noire " et $P(U_{1BR}) = 1 - P(U_{1N}) = \frac{7}{10}$.

Le tirage dans l'urne U_2 permet de définir une équiprobabilité sur $\Omega_2 = \{N, N, N, B, B\}$. On considère les deux événements complémentaires :

U_{2N} " on tire une boule noire " $U_{2N} = \{N, N, N\}$ et $P(U_{2N}) = \frac{\text{Card}(U_{2N})}{\text{Card}(\Omega_2)} = \frac{3}{5}$,

U_{2B} " le tirage ne donne pas une boule noire " et $P(U_{2B}) = 1 - P(U_{2N}) = \frac{2}{5}$.

L'expérience se résume alors dans l'arbre suivant :

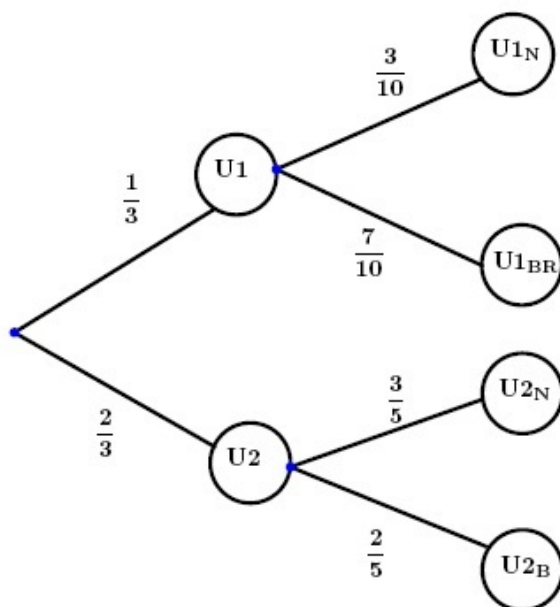


FIGURE 1.2 – Arbre de probabilité

La lecture des probabilités se fait alors aisément :

La probabilité de tirer dans l'urne 1 et d'obtenir une boule noire est :

$$P(A \cap U1_N) = P(U1_N/A)P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}.$$

La Probabilité de tirer dans l'urne 2 et d'obtenir une boule noire est :

$$P(\bar{A} \cap U2_N) = P(U2_N/\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$

La probabilité de tirer une boule noire est :

$$P(A \cap U1_N) + P(\bar{A} \cap U2_N) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

1.4.3 Théorème des Probabilités Totales

Système complet d'événements : Un Système complet d'événements est un ensemble d'événements qui constitue une partition de Ω , c'est à dire un ensemble d'événements incompatibles 2 à 2 dont la réunion forme Ω .

Définition 1.4.3 : On dit que $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ est un système complet d'événements ou partition de Ω si :

- i) $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega$
- ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad ; i, j = 1, 2, \dots, n.$

Théorème 1.4.1 : Soit $\{\Omega_i\}_{i=1 \dots n}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités non nulles c'est à dire $P(\Omega_i) > 0, \forall i = 1, \dots, n$. Alors pour tout événement B , on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega_1) + P(B \cap \Omega_2) + \dots + P(B \cap \Omega_n) \\ &= P(B/\Omega_1)P(\Omega_1) + P(B/\Omega_2)P(\Omega_2) + \dots + P(B/\Omega_n)P(\Omega_n). \end{aligned}$$

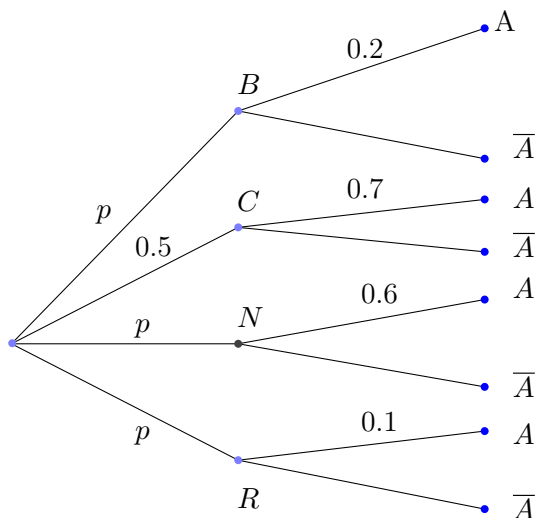
preuve : $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap \Omega_i).$

Les $B \cap \Omega_i$ sont disjoints deux à deux. Donc

$$\left. \begin{aligned} P(B) &= \sum_{i \in I} P(B \cap \Omega_i) \\ P(B \cap \Omega_i) &= P(B/\Omega_i)P(\Omega_i) \end{aligned} \right\} \implies P(B) = \sum_{i \in I} P(B/\Omega_i)P(\Omega_i)$$

Exemple 1.4.5 :

Dans une population le nombre de châains est de 50% et les nombres de blonds, de noirs ou d'autres couleurs sont égaux. La génétique nous apprend que les probabilités conditionnelles pour qu'un enfant soit châtain (événement A) sachant que son père est blond (événement B) est $P(A/B) = 0.2$, et que de même avec des notations évidentes $P(A/C) = 0.7, P(A/N) = 0.6$ et $P(A/R) = 0.1$. Calculons $P(A)$.



Les événements B, C, N, R forment un système complet d'événements. Puisque

$$P(B) + P(N) + P(R) + P(C) = 1 \text{ alors } p = P(B) = P(N) = P(R) = \frac{1}{6} \text{ et } P(C) = \frac{1}{2}$$

Le théorème des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B)P(B) + P(A/C)P(C) + P(A/N)P(N) + P(A/R)P(R) \\ &= 0.2 \times \frac{1}{6} + 0.7 \times \frac{1}{2} + 0.6 \times \frac{1}{6} + 0.1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.4.4 Formule de Bayes

Soit $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$ un système complet d'événements de Ω .

A désignant un événement de Ω tel que $P(A) > 0$. La formule de Bayes s'écrit :

$$P(\Omega_k/A) = \frac{P(A/\Omega_k) \times P(\Omega_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/\Omega_i) \times P(\Omega_i)} = \frac{P(A/\Omega_k) \times P(\Omega_k)}{P(A)}$$

Exemple 1.4.6 :

i) Dans l'exemple précédent, calculons $P(B/A)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.2 \times \frac{1}{6}}{0.5} = \frac{1}{15}$$

ii) Soient deux cages remplies de lapins. La première C_1 contient dix (10) lapins gris et trente (30) blancs ; la seconde C_2 contient vingt (20) de chaque. On tire sans préférence particulière une des deux cages au hasard et dans cette cage, on tire un lapin au hasard. Le lapin est blanc. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré ce lapin de la première cage ?

On veut calculer la probabilité de C_1 sachant B .

Intuitivement, on comprend bien qu'il est plus probable que ce lapin provienne de la première cage,

que de la seconde. Donc, cette probabilité devrait être supérieure à 0.5. La réponse exacte vient du théorème de Bayes . Soit C_1 l'événement “ On tire dans la première cage. ” et C_2 l'événement “ On tire dans la seconde cage. ”. Comme on tire sans préférence particulière, $P(C_1) = P(C_2)$; de plus, comme on a certainement tiré dans une des deux cages, la somme des deux probabilités vaut 1 : chacune vaut donc $\frac{1}{2}$. Notons B l'information donnée “ On tire un lapin blanc ” Comme on tire un lapin au hasard dans une des cages,

- la probabilité de B sachant C_1 vaut : $P(B/C_1) = \frac{P(B \cap C_1)}{P(C_1)} = \frac{30}{40} = 0.75$.
- la probabilité de B sachant C_2 vaut : $P(B/C_2) = \frac{P(B \cap C_2)}{P(C_2)} = \frac{20}{40} = 0.5$.

La formule de Bayes nous donne donc,

$$P(C_1/B) = \frac{P(B/C_1) \times P(C_1)}{P(B/C_1) \times P(C_1) + P(B/C_2) \times P(C_2)} = \frac{0.75 \times 0.5}{0.75 \times 0.5 + 0.5 \times 0.5} = \frac{0.375}{0.625} = 0.6$$

1.4.5 Événements Indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$ c'est à dire :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque : Si A et B sont indépendants alors A et \bar{B} , \bar{A} et B et \bar{A} et \bar{B} sont aussi indépendants.

Exemple 1.4.7 :

On lance deux fois un dé cubique.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $Card(\Omega) = 36$.

- A_1 : “Le premier nombre obtenu est pair” = $\{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- A_2 : “Le deuxième nombre obtenu est impair” = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}$
- A_3 : “La somme des deux nombres est paire” = $\{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$

$Card(A_1) = 18$ $Card(A_2) = 18$ $Card(A_3) = 18$.

$A_1 \cap A_2 = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}$ et $Card(A_1 \cap A_2) = 9$

$A_1 \cap A_3 = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$ et $Card(A_1 \cap A_2) = 9$

$A_2 \cap A_3 = \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}$ et $Card(A_1 \cap A_2) = 9$

$$P(A_1) = \frac{Card(A_1)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2} , \quad P(A_2) = \frac{Card(A_2)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(A_3) = \frac{Card(A_3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{Card(A_1 \cap A_2)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{4} , \quad P(A_1 \cap A_3) = \frac{Card(A_1 \cap A_3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{4} \quad \text{et}$$

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{Card(A_2 \cap A_3)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4} \implies A_1 \text{ et } A_2 \text{ sont indépendants}$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \frac{1}{4} \implies A_1 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants}$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{4} \implies A_2 \text{ et } A_3 \text{ sont indépendants}$$

Chapitre 2

Variables aléatoires

2.1 Variables aléatoires

2.1.1 Définition

Soient Ω un ensemble et X une application de Ω dans \mathbb{R} .

Notation : Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

- $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in I\} = (X \in I)$
- $X^{-1}(]-\infty, x]) = (X \leq x)$
- $X^{-1}(]x, +\infty]) = (X > x)$
- $X^{-1}([a, b[) = (a \leq X < b)$
- $X^{-1}(\{x\}) = (X = x)$

Définition 2.1.1 : Une variable aléatoire (v.a) X est une grandeur numérique représentant le résultat d'une expérience aléatoire. On peut donc considérer X comme une application :

$$\begin{array}{ll} X : \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow X(\omega) \end{array}$$

$X(\Omega)$ désignera l'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par la v.a X , $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

Propriété 2.1.1 : Soient X et Y deux v.a sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$X + Y$, λX , XY , $X - Y$, $\sup(X, Y)$ et $\inf(X, Y)$ sont des v.a sur Ω

2.1.2 Différents types de variables aléatoires

On distingue deux types de v.a, discrète et continue.

• Si $X(\Omega)$, l'ensemble des possibilités, est fini ou dénombrable, on dit que X est une v.a discrète c'est à dire, X ne prend que des valeurs numériques isolées.

• Si $X(\Omega)$, l'ensemble des possibilités, est un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} où \mathbb{R} , on dit que X est une v.a continue.

Exemple 2.1.1 :

i) L'expérience consiste à jeter trois pièces de monnaie simultanément.

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

Soit $X =$ " nombre de faces obtenues " Dans ce cas : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

ii) On lance un dé. On appelle X le numéro obtenu et Y son complément à 6.
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$Y(\omega)$	5	4	3	2	1	0
$\sup(X, Y)$	5	4	3	4	5	6

$$\sup(X, Y) \neq \begin{cases} X \\ Y \end{cases}$$

2.2 Fonction de répartition

Soient Ω un ensemble, X une application de Ω dans \mathbb{R} et P une probabilité sur Ω .

Définition 2.2.1 : On appelle fonction de répartition d'une v.a X , la fonction réelle F définie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

avec $P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\})$.

Remarque : F est définie sur \mathbb{R} car $(X \leq x) = X^{-1}(]-\infty, x]) \subset \Omega$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 2.2.1 :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \in [0, 1]$
- F est croissante.
- F est continue à droite : $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Réciproquement Toute fonction F définie sur \mathbb{R} et vérifiant les 4 propriétés ci-dessus est une fonction de répartition d'une v.a réelle.

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}, P(X > a) = 1 - F(a)$.

Chapitre 3

Variable aléatoire discrète

3.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit Ω un ensemble et P est une probabilité sur Ω .

Une v.a est dite discrète si elle ne prend que des valeurs numériques isolées. Deux cas se présentent :

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, X est dite v.a discrète finie.
- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, X est dite v.a discrète infinie .

3.1.1 Loi de probabilité

Définition 3.1.1 : Soit X une v.a discrète. La loi de probabilité (ou loi) de X est la fonction :

$$\begin{aligned} P : X(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow P(x) = P(X = x) \text{ avec } (X = x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

et on a $\sum_{x \in X(\Omega)} P(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Si X une v.a discrète finie, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. La loi de de X est définie par :

$$p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \dots, p_n = P(X = x_n) \text{ où } 0 \leq p_k \leq 1 \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\sum_{k=1}^n p_k = 1 \text{ et } P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x), \forall A \subset X(\Omega).$$

Dans le cas où X est une v.a discrète infinie, sa loi de probabilité est définie par la suite infinie :

$$p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), \dots, p_n = P(X = x_n), \dots$$

où $0 \leq p_k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple 3.1.1 :

On lance un dé. On appelle X le numéro obtenu et Y son complément à 6 et $Z = \sup(X, Y)$.

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$Z(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$. Les lois des v.a X et Y et Z sont :

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	—	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
$P(Y = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	—
$P(\sup(X, Y) = x)$	—	—	—	1/6	2/6	2/6	1/6

Théorème 3.1.1 : $\{(x_i, P_i) / 1 \leq i \leq n\}$ est la loi de probabilité d'une v.a

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} 0 \leq P_i \leq 1 \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \sum_{i=1}^n P_i = 1 \end{cases}$$

3.1.2 Fonction de répartition

Par définition, la fonction de répartition de la v.a X , est : $F(x) = P(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Propriété 3.1.1 : Soit X une v.a finie de fonction de répartition F et de loi $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $(x_1 < x_2 < \dots < x_n)$, alors

- i) $\forall x \in]-\infty, x_1[$, $F(x) = 0$
- ii) $\forall x \in [x_k, x_{k+1}[$, $F(x) = p_1 + \dots + p_k$ $1 \leq k \leq n-1$
- iii) $\forall x \in [x_n, +\infty[$, $F(x) = 1$
- iv) $p_k = P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$

Remarque : Il est parfois plus simple de déterminer la loi d'une v.a à partir de sa fonction de répartition en utilisant la propriété *iv*.

Exemple 3.1.2 :

$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{2}, p_2 = P(X = 2) = \frac{1}{3}, p_3 = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 5/6 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

la courbe de la fonction de répartition est une courbe en escalier.

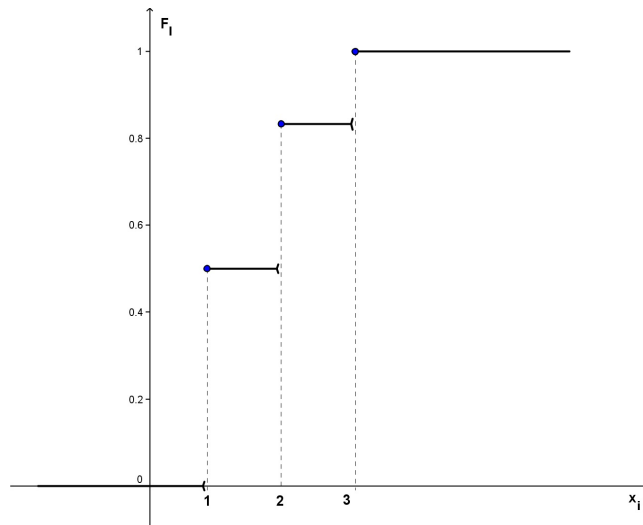


FIGURE 3.1 – Courbe de la fonction de répartition

3.2 Loi de probabilité d'un couple de v.a

Soient X, Y deux v.a telles que : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$.

Définition 3.2.1 : On appelle loi de probabilité du couple (X, Y) ou loi conjointe de X et Y l'ensemble $\{p_{kl}, k = 1, 2, \dots, r \text{ et } l = 1, 2, \dots, s\}$ où

$$p_{kl} = P((X = x_k) \cap (Y = y_l)) = P(X = x_k, Y = y_l) \text{ , } x_k \in X(\Omega) \text{ et } y_l \in Y(\Omega)$$

p_{kl} est la probabilité pour que X prenne la valeur x_k et Y prenne la valeur y_l ,

$X \setminus Y$	y_1	\dots	y_l	\dots	y_s
x_1	p_{11}	\dots	p_{1l}	\dots	p_{1s}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
x_k	p_{k1}	\dots	p_{kl}	\dots	p_{ks}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
x_r	p_{r1}	\dots	p_{rl}	\dots	p_{rs}

$$\text{et on a } \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s p_{kl} = \sum_{l=1}^s \sum_{k=1}^r p_{kl} = 1.$$

Exemple 3.2.1 :

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement deux boules avec remise et on note X_1 et X_2 les nombres obtenus. Soient les v.a $X = X_1$ et $Y = X_1 - X_2$. $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y(\Omega) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et P la probabilité uniforme sur Ω .

Les lois conjointes de (X_1, X_2) et de (X, Y) sont données par les tableaux suivants :

$X_1 \setminus X_2$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16
3	1/16	1/16	1/16	1/16
4	1/16	1/16	1/16	1/16

$Y \setminus X$	1	2	3	4
-3	1/16	0	0	0
-2	1/16	1/16	0	0
-1	1/16	1/16	1/16	0
0	1/16	1/16	1/16	1/16
1	0	1/16	1/16	1/16
2	0	0	1/16	1/16
3	0	0	0	1/16

$$P[(X_1 = i) \cap (X_2 = j)] = P[X_1 = i, X_2 = j] = P[(i, j)] = \frac{1}{16}, \forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2.$$

$$P(X = 2, Y = -2) = P[(2, 4)] = \frac{1}{16} \text{ et } P[(X = 3) \cap (Y = 0)] = P[(3, 3)] = \frac{1}{16}.$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(\emptyset) = 0$$

Théorème 3.2.1 : $\{(x_i, y_j), P_{ij} / 1 \leq i \leq r \text{ et } 1 \leq j \leq s\}$ est la loi de probabilité d'un couple de v.a si et seulement si :

$$\begin{cases} 0 \leq P_{ij} \leq 1 \text{ pour tout } (i, j) \in \{1, 2, \dots, r\} \times \{1, 2, \dots, s\} \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s P_{ij} = 1 \end{cases}$$

3.2.1 Lois marginales

Définition 3.2.2 :

- i) Les v.a X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) .
- ii) La loi de la v.a X (resp. Y) du couple (X, Y) est appelée la loi marginale de X (resp. Y).

Notation : La probabilité $P(X = x_i)$ est noté $p_{i.}$ et $P(Y = y_j)$ est noté $p_{.j}$.

Propriété 3.2.1 : Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, alors

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad p_{i.} &= P(X = x_i) = \sum_{j=1}^s P(X = x_i, Y = y_j) \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, s\}, \quad p_{.j} &= P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^r P(X = x_i, Y = y_j) \\ \sum_{i,j=1}^{r,s} P(X = x_i, Y = y_j) &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 3.2.2 :

Reprenons l'exemple 3.2.1. Les lois marginales de X et Y sont donc

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p_{i.} = P(X = x_i)$	—	—	—	—	1/4	1/4	1/4	1/4
$p_{.j} = P(Y = y_j)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16	—

La loi marginale de X coïncide avec la loi de X_1 déterminée directement, en ne considérant que le premier tirage d'une boule dans le sac contenant les 4 boules.

3.2.2 Lois conditionnelles

Définition 3.2.3 : Soient X une v.a sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ et soit A un événement de probabilité non nulle, $P(A) > 0$.

Pour $k = 1, \dots, r$, la loi conditionnelle de $(X = x_k)$ sachant A est :

$$P[(X = x_k)/A] = \frac{P[(X = x_k) \cap A]}{P(A)}, \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, r\}$$

Remarque : $\sum_{k=1}^r P[(X = x_k)/A] = 1$.

Cas particulier : Si Y est une v.a sur Ω telle que $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, pour $k = 1, \dots, r$, la loi conditionnelle de $(X = x_k)$ sachant $(Y = y_l)$ est

$$P[(X = x_k)/(Y = y_l)] = \frac{P(X = x_k, Y = y_l)}{P(Y = y_l)}, \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, r\}$$

Exemple 3.2.3 :

Reprenons l'exemple 3.2.1. La loi conditionnelle de X sachant $(Y = 3)$ est donnée par le tableau :

x_k	1	2	3	4
$P[(X = x_k)/(Y = -2)]$	1/2	1/2	0	0

(1/2 + 1/2 + 0 + 0 = 1)

$$P(X = 1/Y = -2) = \frac{P(X = 1, Y = -2)}{P(Y = -2)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$$

3.2.3 Indépendance

Deux v.a sont indépendantes si la loi de l'une n'est pas influencée par la loi de l'autre.

Définition 3.2.4 : Les v.a X et Y sont dites indépendantes si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Exemple 3.2.4 :

i) Les v.a X_1 et X_2 de l'exemple 3.2.1 sont indépendantes, car les deux tirages sont indépendants puisqu'ils se font avec remise.

ii) Les v.a X et Y de l'exemple 3.2.1 ne sont pas indépendantes, car

$$P(X = 3, Y = 3) = 0, \text{ et } P(X = 3)P(Y = 3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} \neq 0$$

3.2.4 Loi de la somme

Soient X et Y deux v.a. La loi de $X + Y$ est définie par :

$$P(X + Y = z) = \sum_{x \in X} P(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y} P(X = z - y, Y = y)$$

Si X et Y sont indépendantes

$$P(X + Y = z) = \sum_{x \in X} P(X = x)P(Y = z - x) = \sum_{y \in Y} P(X = z - y)P(Y = y)$$

Exemple 3.2.5 :

Reprenons l'exemple 3.2.1 et cherchons la loi de $Z = X_1 + X_2$, $Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

z	2	3	4	5	6	7	8
P_z	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 5) &= P[(X_1 = 1, X_2 = 4)] + P[(X_1 = 2, X_2 = 3)] + P[(X_1 = 3, X_2 = 2)] \\ &\quad + P[(X_1 = 4, X_2 = 1)] = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} \end{aligned}$$

3.2.5 Loi du produit

Soient X et Y deux v.a. La loi de $X \times Y$ est définie par

$$P(X \times Y = z) = \sum_{x \times y = z / (x, y) \in X \times Y} P(X = x, Y = y)$$

$$\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes } P(X \times Y = z) = \sum_{x \times y = z / (x, y) \in X \times Y} P(X = x)P(Y = y)$$

Exemple 3.2.6 :

Reprenons l'exemple 3.2.1 et cherchons la loi de $Z = X_1 \times X_2$,

$$Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$$

z	1	2	3	4	6	8	9	12	16
P_z	1/16	2/16	2/16	3/16	2/16	2/16	1/16	2/16	1/16

$$\begin{aligned} P(X_1 \times X_2 = 4) &= P[(X_1 = 1, X_2 = 4)] + P[(X_1 = 2, X_2 = 2)] + P[(X_1 = 4, X_2 = 1)] \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

3.3 Moments

3.3.1 Espérance mathématique

Soit X une v.a discrète avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

On appelle espérance mathématique de X l'expression suivante :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

L'espérance mathématique de X représente sa valeur moyenne.

Une v.a X est dite centrée si et seulement si son espérance est nulle : $E(X) = 0$. Si X admet une espérance alors la v.a $X - E(X)$ est centrée.

Exemple 3.3.1 :

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}, P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{3}, P(X = 3) = \frac{1}{6}$$
$$m = E(X) = \sum_{k=1}^3 k P(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

Propriété 3.3.1 :

- Si g est une application, alors $Y = g(X)$ est une v.a et on a :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n g(x_k) P(X = x_k)$$

- Propriété de linéarité : Si X et Y sont deux v.a, alors on a

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad , \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- Si X et Y sont deux v.a indépendantes, alors on a : $E(XY) = E(X)E(Y)$

3.3.2 Moments

Soit X une v.a discrète.

- On appelle moment d'ordre r de X l'expression suivante :

$$m_r = E(X^r) = \sum_{k=1}^n x_k^r P(X = x_k)$$

Remarquons que le moment d'ordre 1 est l'espérance mathématique $m_1 = E(X)$.

- On appelle moment centré d'ordre r de X l'expression suivante :

$$\mu_r(X) = E[(X - E(X))^r] = \sum_{k=1}^n (x_k - E(X))^r P(X = x_k)$$

Remarquons que le moment centré d'ordre 1 est nulle $\mu_1 = 0$.

3.3.3 Variance - Ecart-type - Covariance - Corrélation

Définition 3.3.1 : Soient X et Y deux v.a.

- On appelle variance de la v.a X le réel positif

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2(X) = \mu_2$$

La variance n'est autre que μ_2 le moment centré d'ordre 2 de la v.a. X .

Une v.a X est dite réduite si et seulement si sa variance est égale à 1 : $V(X) = 1$.

- On appelle écart-type de la v.a X le réel positif

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X - E(X))^2]}$$

Si X admet une variance alors la v.a $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est réduite. De plus on a la v.a $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

- On appelle covariance des v.a X et Y le réel

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- On appelle coefficient de corrélation des v.a X et Y le réel compris entre -1 et 1

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriété 3.3.2 : Soient X et Y deux v.a et $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si X est une constante alors $V(X) = 0$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$.
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)$.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
- $Cov(aX_1 + bX_2, Y) = aCov(X_1, Y) + bCov(X_2, Y)$.
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $V(X + \lambda Y) = V(X) + \lambda^2V(Y) + 2\lambda Cov(X, Y) \geq 0$ d'où,

$$\Delta = 4Cov^2(X, Y) - 4V(X)V(Y) \leq 0 \implies \rho^2(X, Y) = \frac{Cov^2(X, Y)}{V(X)V(Y)} \leq 1 \text{ d'où } -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Exemple 3.3.2 :

Soit (X, Y) un couple de loi conjointe

$X \setminus Y$	0	1	2	$P(X = x)$
0	1/20	1/4	0	3/10
1	17/60	1/4	1/6	7/10
$P(Y = y)$	1/3	1/2	1/6	

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^1 k P(X = k) = \frac{7}{10} \\ E(X^2) &= \sum_{k=0}^1 k^2 P(X = k) = \frac{7}{10} \\ V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{10} \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{21}{100} \\ E(XY) &= \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^2 kl P(X = k)P(Y = l) = \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \frac{7}{12} \end{aligned} \right| \begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^2 k P(Y = k) = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \\ E(Y^2) &= \sum_{k=0}^2 k^2 P(Y = k) = \frac{1}{2} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} \\ V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{7}{6} - \frac{25}{36} = \frac{17}{36} \\ E(X)E(Y) &= \frac{7}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

d'où $E(XY) = E(X)E(Y) \implies Cov(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

$P(X = 0, Y = 2) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 2) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes .

Conclusion :

$$\left. \begin{array}{lcl} V(X+Y) & = & V(X) + V(Y) \\ E(XY) & = & E(X)E(Y) \\ Cov(X,Y) & = & 0 \end{array} \right\} \nRightarrow X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

Propriété 3.3.3 :

Si deux v.a X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$, $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. La réciproque est fausse.

3.4 Exemples de lois de probabilités discrètes

3.4.1 Loi uniforme

La v.a X suit la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ si et seulement si X prend les valeurs x_1, \dots, x_n avec les probabilités $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$ c'est à dire il y a équiprobabilité. On a alors

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - [E(X)]^2$$

3.4.2 Loi de Bernoulli

Soit une expérience à deux issues, succès et échec (ou vrai et faux) par exemple. Soit la v.a X :

$$\begin{cases} X = 0 & \text{si le résultat est un échec} \\ X = 1 & \text{si le résultat est un succès} \end{cases}$$

La loi de probabilité de la v.a X est : $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$, ($0 < p < 1$).

p est la probabilité du succès.

On dit que la v.a X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 ($X(\Omega) = \{0, 1\}$) et $P(X = 1) = p$. On écrit $X \sim \mathcal{B}_{er}(p)$

L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = p, \quad V(X) = p(1 - p)$$

3.4.3 Loi Binomiale

Soit une expérience à deux issues, succès ou échec (ou vrai et faux) par exemple, on répète cette expérience dans les mêmes conditions n fois. On note X_k la $k^{\text{ème}}$ observations

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{si le résultat est un échec} \\ 1 & \text{si le résultat est un succès} \end{cases}$$

et p la probabilité du succès.

Les v.a X_1, \dots, X_n sont des v.a de Bernoulli de paramètre p indépendantes.

soit $X = X_1 + \dots + X_n$ le nombre de succès obtenu en n expériences indépendantes. Cherchons la loi de X c'est à dire calculons $P(X = k)$

- Si $k > n$ il est clair qu'il n'y a pas de solution et que la probabilité est nulle.

• Si $k \leq n$, on cherche tout les n -uplets comportant k “un” et $n - k$ “zéro”. Il y en a C_n^k . A cause de l’indépendance, chacune de ces n -uplets a une probabilité égale à $p^k(1 - p)^{n-k}$. au totale nous obtenons :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

d’une autre façon, il y a k succès et $n - k$ échecs, soit (x_1, \dots, x_n) une suite de 0 et 1 tel que $x_1 + \dots + x_n = k$. Il y a C_n^k n -uplets (x_1, \dots, x_n) comportant k “un” et $n - k$ “zéro”.

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n) = p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} P(x = k) &= \sum_{x_1 + \dots + x_n = k} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{x_1 + \dots + x_n = k} P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n) \\ &= C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \end{aligned}$$

En résumé : On considère une épreuve dont l’issue est un succès ou un échec. L’épreuve est répétée n fois de suite. Le nombre de succès est représenté par la variable aléatoire X .

La v.a X est dite binomiale de paramètre n et p , $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, elle est notée $\mathcal{B}(n, p)$ et on écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, sa loi de probabilité est :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On peut écrire : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

où X_1, \dots, X_n sont indépendantes ayant la loi de Bernoulli de paramètre p .

L’espérance et la variance de X sont :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n E(X_1) = n p \\ V(X) &= \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n V(X_1) = n p (1 - p) \text{ car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.

Propriété 3.4.1 : Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes suivant respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Exemple 3.4.1 :

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle événement E l’obtention sur la face supérieure 3 ou 6. On lance le dé, quelle est la probabilité de l’événement E ? On lance le dé, 8100 fois, calculer la moyenne et l’écart-type du nombre d’arrivées de l’événement E .

• $P(E) = 1/3$

On considère l’épreuve à deux issues

• “ succès ” si E se produit c’est à dire on obtient 3 ou 6. $p = 1/3$.

• “ échec ” si E ne se produit pas c’est à dire on n’obtient ni 3 ni 6.

On répète l’épreuve 8100 fois. Soit la v.a, $X =$ “ nombre d’arrivées de E ou nombre de succès ou nombre d’apparitions de 3 et 6 ”.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8100, 1/3)$. Pour $k = 0, 1, 2, \dots, 8100$,

$$P(X = k) = C_n^k (1/3)^k (2/3)^{n-k}, \quad E(X) = 8100 \times \frac{1}{3} = 2700, \quad V(X) = 8100 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 1800 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

3.4.4 Loi multinômiale

Considérons une expérience dont les résultats possibles R_1, R_2, \dots, R_k peuvent se réaliser avec les probabilités respectivement p_1, p_2, \dots, p_k . On répète cette expérience n fois et on note x_i le nombre de fois où le résultat R_i se réalise, pour $i = 1, \dots, k$. On a bien

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k x_i = n$$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ et $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ l'événement "Obtenir x_i fois le résultat R_i " pour $i = 1, 2, \dots, k$. Alors

$$P(A(x_1, \dots, x_k)) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

Exemple 3.4.2 :

i) On jette six fois deux pièces de monnaie équilibrées, l'une après l'autre. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois "2 faces" une fois "2 piles" et trois fois "1 pile et 1 face". on définit les résultats d'un lancer des pièces suivants :

R_1 = "obtenir deux faces", R_2 = "obtenir deux piles" et R_3 = "obtenir un pile et une face". on a alors $P(R_1) = \frac{1}{4} = p_1$, $P(R_2) = \frac{1}{4} = p_2$ et $P(R_3) = \frac{1}{2} = p_3$.

Pour $i = 1, 2, 3$ on note x_i le nombre de fois où l'événement R_i a été observé $x_1 = 2, x_2 = 1$ et $x_3 = 3$. Alors on a :

$$P\{A(2, 1, 3)\} = \frac{6!}{2! 1! 3!} \times (0.25)^2 (0.25)^1 (0.5)^3$$

ii) Dans une chaîne de production, 95% d'articles ne présentent aucun défaut de fabrication, 3% présentent un défaut de "type 1" et 2% présentent un défaut de "type 2". Un contrôleur prélève 20 articles pour inspection. Calculer la probabilité qu'il trouve au moins deux articles qui présentent un défaut de "type 1" ou au moins deux articles qui présentent un défaut de "type 2". On définit les événements suivants :

R_1 : " L'article présente un défaut de "type 1"", R_2 : " L'article présente un défaut de "type 2"" et R_3 : " L'article ne présente aucun défaut".

On a alors, $P(R_1) = p_1 = 0.03$, $P(R_2) = p_2 = 0.02$ et $P(R_3) = p_3 = 0.95$.

Pour $i = 1, 2, 3$ On note X_i le nombre de fois où l'événement R_i a été observé. Soit l'événement $B = \{X_1 \geq 2\} \cup \{X_2 \geq 2\}$ ($\bar{B} = \{X_1 < 2\} \cap \{X_2 < 2\}$). On a alors

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) \\ &= 1 - (P\{A(0, 0, 20)\} + P\{A(1, 0, 19)\} + P\{A(0, 1, 19)\} + P\{A(1, 1, 18)\}) \\ &= 1 - \left(\frac{20!}{0! 0! 20!} \times (0.03)^0 (0.02)^0 (0.95)^{20} + \frac{20!}{1! 0! 19!} \times (0.03)^1 (0.02)^0 (0.95)^{19} \right. \\ &\quad \left. + \frac{20!}{0! 1! 19!} \times (0.03)^0 (0.02)^1 (0.95)^{19} + \frac{20!}{1! 1! 18!} \times (0.03)^1 (0.02)^1 (0.95)^{18} \right) \\ &= 0.1736 \end{aligned}$$

3.4.5 Loi hypergéométrique

Soit E un ensemble constitué de N éléments dont M de “type 1” et $N - M$ de “type 2”. On effectue n tirage sans remise dans E ($n \leq N$). Soit X la v.a “nombre d’éléments de type 1”. X prend la valeur k si et seulement si :

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq M \\ 0 \leq n - k \leq N - M \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} 0 \leq k \leq M \\ \max(0, n - N + M) \leq k \leq n \end{cases}$$

X peut donc prendre une valeur entière k de $\max(0, n - N + M)$ à $\min(n, M)$. En effet, si n est plus grand que le nombre d’éléments de “type 2” $N - M$, on tire au moins $n - (N - M)$ éléments de “type 1”. Sinon, on peut tirer 0 éléments de “type 1”. De l’autre côté, le nombre d’éléments de “type 1” tirés est au maximum égal à la taille n de l’échantillon lorsque n est inférieur au nombre d’éléments de “type 1” M et il est au maximum égal au nombre d’éléments de “type 1” lorsque n la taille de l’échantillon est supérieure au nombre M d’éléments de “type 1” .

Donc les valeurs prises par X sont les entiers k appartenant à l’ensemble $\{0, 1, \dots, \min(n, M)\}$. le nombre de n éléments dans E choisies aléatoirement est : C_N^n .

Pour chaque k , il y a C_M^k façon de choisir la combinaison de k éléments de “type 1”, puis pour chaque combinaison, il y a C_{N-M}^{n-k} façon de choisir la combinaison de $n - k$ éléments de “type 2”. Donc le nombre de n éléments dont k sont de “type 1” est $C_M^k C_{N-M}^{n-k}$ est par conséquent

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, \min(n, M)\}$$

On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètre N, n, M , $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, \min(n, M)\}$ et on écrit $X \sim \mathcal{H}(N, n, M)$. L’espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = n \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad V(X) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N - n}{N - 1}$$

Remarque : Si les tirages sont effectués avec remise, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $p = \frac{M}{N}$.

Exemple 3.4.3 :

On prélève au hasard un échantillon de $n = 10$ pièces dans une production totale de $N = 1000$ pièces comportant en tout $M = 50$ pièces défectueuses. Quelle est la probabilité qu’il y ait exactement $k = 6$ pièces défectueuses dans l’échantillon ?

Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l’échantillon.

Le nombre X de pièces défectueuses dans un échantillon de n pièces suit une loi hypergéométrique de paramètre N, n et M ($X \sim \mathcal{H}(N, n, M)$) donnée par :

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, 10 = \min(n, M)\}$$

$$P(X = 6) = \frac{C_{50}^6 C_{950}^4}{C_{1000}^{10}} = 2.3 \times 10^{-3}$$

3.4.6 Loi de poisson

La loi de poisson est une loi de probabilité qui s’applique aux événements rares, elle décrit aussi le nombre d’apparitions d’un événement pendant une durée de temps déterminée. Le nombre aléatoire X de ces événements suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ qui représente la moyenne d’événements survenus.

Définition 3.4.1 : On dit que la v.a X suit la loi de poisson de paramètre λ si :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \exp[-\lambda]}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k \exp[-\lambda]}{k!} = \lambda \quad \text{car} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp[\lambda]$$

$$V(X) = \lambda$$

Propriété 3.4.2 : Soient X_1 et X_2 deux v.a indépendantes suivant respectivement les lois de poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exemple 3.4.4 :

Une machine utilisée dans une chaîne de production tombe en panne en moyenne 2 fois par mois. Soit X le nombre de pannes par mois. Quelle est la probabilité que dans un mois donnée la machine ne tombe pas en panne ?, tombe en panne au moins deux fois ?

X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 2$, $X \sim \mathcal{P}(2)$, $P(X = k) = \frac{2^k \exp[-2]}{k!}$.

La machine ne tombe pas en panne donc $k = 0$ et la probabilité est

$$P(X = 0) = \frac{2^0 \exp[-2]}{0!} = \exp[-2] = 0.135.$$

La machine tombe en panne au moins deux fois donc $k \geq 2$ et la probabilité est :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(\frac{2^0 \exp[-2]}{0!} + \frac{2^1 \exp[-2]}{1!} \right) = 1 - (\exp[-2] + 2 \times \exp[-2]) = 1 - 0.405 = 0.595.$$

Approximation de la loi binomiale par la loi de poisson

On a n morceau de tissus de surfaces égales. Soient λ le nombre de défaut par m^2 et X_k la v.a de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

$$X_k = \begin{cases} 0 & \text{s'il n'y a pas de défaut dans le morceau } k, \quad P(X_k = 0) = 1 - p_n \\ 1 & \text{s'il y a des défauts dans le morceau } k, \quad P(X_k = 1) = p_n \end{cases}$$

$S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ est une loi binomiale de paramètre n et p_n , $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$

Théorème 3.4.1 : Soient X_1, \dots, X_n n v.a de Bernoulli indépendantes de paramètre p_n .

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p_n) , $(S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n))$.

Si $n \rightarrow +\infty$, $p_n \rightarrow 0$ et $n p_n \rightarrow \lambda > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k \exp[-\lambda]}{k!}$

Pour n assez grand et p_n assez petit $P(S_n = k)$ est approchée par $\frac{\lambda^k \exp[-\lambda]}{k!}$ avec $\lambda = n p_n$. En pratique, on a :

La loi $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi de poisson $\mathcal{P}(n \times p)$ si $\begin{cases} n > 30 \\ p \leq 0.1 \\ np < 15 \end{cases}$

Exemple 3.4.5 :

Soit X une v.a qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.03)$,

$$P(X = 2) = C_{40}^2 \times 0.03^2 \times 0.97^{38} \simeq 0.2206$$

Or $\mathcal{B}(40, 0.03)$ peut être approchée par $\mathcal{P}(40 \times 0.03)$ et si X suit la loi $\mathcal{P}(1.2)$,

$$P(X = 2) = \frac{1.2^2 \exp[-1.2]}{2!} \simeq 0.2168$$

3.4.7 Loi géométrique

On considère une épreuve dont l'issue est un succès ou un échec avec p la probabilité du succès. L'épreuve est répétée une infinité de fois. Le nombre de fois nécessaire pour obtenir le premier succès est représenté par la variable aléatoire X .

Par exemple on lance une pièce de monnaie, avec p la probabilité d'avoir face, si c'est face qui apparaît on arrête si non on lance la pièce une deuxième fois et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtient une face. Soit X la v.a obtenir une face

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p , $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

L'espérance et la variance de X sont

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 3.4.6 :

Dans une boîte, il y a n cartes numérotées de 1 à n . On effectue des tirages successifs avec remise, jusqu'à obtenir la carte n . Soit X le nombre de tirages effectués. Quelle est la loi de X . Calculer la probabilité que le nombre de cartes tirées soit égal à x , pour $x = 31$. Quelle est la probabilité que le nombre de cartes tirées soit inférieur ou égal à 50? Application : $n = 100$.

On répète, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli (tirage d'une carte) dans laquelle la probabilité du succès (tirer la carte numéro n) est $p = \frac{1}{n}$, jusqu'à l'obtention d'un succès. Le nombre de répétitions nécessaire à l'obtention d'un succès suit une loi géométrique sur \mathbb{N}^* de paramètre p .

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} = \frac{(n-1)^{x-1}}{n^x}, P(X = 31) = p(1 - p)^{30} = \frac{(99)^{30}}{100^{31}} = 0.0074.$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 50) &= 1 - P(X > 50) = 1 - \sum_{x=51}^{+\infty} P(X = x) = 1 - \sum_{x=51}^{+\infty} p(1 - p)^{x-1} \\ &= 1 - p(1 - p)^{50} \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1 - (1 - p)^{50} = 1 - \frac{(n-1)^{50}}{n^{50}} = 1 - \frac{(99)^{50}}{100^{50}} = 0.395. \end{aligned}$$

3.4.8 Loi binomiale négative

Au cours d'une expérience un certain événement E se réalise avec une probabilité $p \in]0; 1[$. On répète de façon indépendante l'expérience jusqu'à obtenir r fois E . Soit X la v.a "nombre de fois où E n'est pas réaliser". X peut prendre toutes les valeurs entières de \mathbb{N} .

Soit $k \in \mathbb{N}$, $(X = k)$ est réalisé si et seulement si on a effectué $k + r$ expériences, l'événement E se réalise à la $(k + r)^{\text{ème}}$ expérience, au cours des $k + r - 1$ expériences, l'événement E se réalise $r - 1$ fois et ne se réalise pas k fois. Le résultat des $(k + r)$ expériences réalisant $(X = k)$ peut être représenté par un ensemble dont les éléments sont de la forme $\{e_1, \dots, e_{k+r-1}, E\}$ où il y a k \overline{E} et $(r - 1)$ E dans $\{e_1, \dots, e_{k+r-1}\}$. (\overline{E} signifie que E n'est pas réaliser).

Il y a C_{k+r-1}^k éléments de ce type chacune ayant pour probabilité $p^r (1 - p)^k$. Donc

$$P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^r (1 - p)^k$$

On dit que X suit la loi binomiale négative de paramètre p , $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on note,

$X \sim \mathcal{BN}(r, p)$.

L'espérance et la variance de X sont

$$E(X) = r \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = r \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple 3.4.7 :

Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion $p = \frac{1}{3}$ et des boules noires en proportion $q = 1 - p$.

On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à obtention de 10 boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues avant la 10^{ème} boule blanche. Calculer la probabilité d'avoir 5 boules noires et la probabilité d'avoir au plus 2 boules noires. Calculer l'espérance et la variance. La v.a X suit la loi binomiale négative avec $r = 10$ et $p = \frac{1}{3}$, $\mathcal{BN}(10, \frac{1}{3})$ d'où la probabilité d'avoir 5 boules noires est $P(X = 5) = C_{14}^5 (\frac{1}{3})^{10} (1 - \frac{1}{3})^5 = 0.00446$.

La probabilité d'avoir au plus 2 boules noires est $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = C_9^0 (\frac{1}{3})^{10} (1 - \frac{1}{3})^0 + C_{10}^1 (\frac{1}{3})^{10} (1 - \frac{1}{3})^1 + C_{11}^2 (\frac{1}{3})^{10} (1 - \frac{1}{3})^2 = 0.00054$.

L'espérance de X est $E(X) = r \frac{1-p}{p} = 10 \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 20$.

La variance de X est $V(X) = r \frac{1-p}{p^2} = 10 \frac{1 - \frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = 60$.

3.4.9 Tableaux des lois de probabilités discrètes

Loi	Loi de probabilité	Espérance	Variance
Uniforme	$P(X = k) = \frac{1}{n}, k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
bernoulli	$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	np	$np(1-p)$
Multinômiale	$P(A(x_1, \dots, x_n)) = \frac{n!}{x_1! \dots x_n!} p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}$ $x_1 \dots x_n \in \{0, 1, \dots, n\}$ $x_1 + \dots + x_n = 1,$		
Hyperéométrique	$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $k \in \{0, 1, \dots, \min(n, M)\}$	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) \frac{N-n}{N-1}$
Poisson	$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ pour $\lambda \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$	λ	λ
Géométrique	$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Binomiale négative	$P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^r (1-p)^k$ $k \in \mathbb{N}, r > 0$	$r \frac{1-p}{p}$	$r \frac{1-p}{p^2}$

Chapitre 4

Variables aléatoires continues

4.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire continue réelle, $X(\Omega)$, l'ensemble des possibilités, est un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} ou \mathbb{R} et P une probabilité sur Ω

4.1.1 Fonction de répartition

Par définition, la fonction de répartition (f.r) de la v.a X , est définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

La fonction de répartition définit la loi de la v.a X .

Propriété 4.1.1 : Soient X une v.a continue et F sa fonction de répartition. Alors :

- $P(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b), \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $P(X > a) = P(X \geq a) = 1 - F(a), \forall a \in \mathbb{R}$.

4.1.2 Densité de probabilité

Définition 4.1.1 :

i) Soit f est une fonction à valeurs réelles positives ayant au plus un nombre fini de points de discontinuité. On dit que f est la densité d'une v.a X , si sa f.r F s'écrit sous la forme :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

ii) Une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} est une densité de probabilité si et seulement si

- $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- f est continue sauf en un nombre fini de points.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

Propriété 4.1.2 : Soient X une v.a de densité f et F sa fonction de répartition. Alors :

- F est continue sur \mathbb{R} .
- F est dérivable en tout point x_0 où f est continue et on a $F'(x_0) = f(x_0)$.
- $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt, \forall a \in \mathbb{R}$.

4.1.3 Changement de variable

Soient S et T deux ouverts de \mathbb{R} et X une v.a. continue à valeurs dans S et de densité f_X et Soit φ une bijection de S vers $T = \text{Im}\varphi$, continûment différentiable (de classe C^1) ainsi que son inverse φ^{-1} . Alors, la v.a. $Y = \varphi(X)$ à valeurs dans T admet pour densité :

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1})'(y)| 1_T(y)$$

4.2 Loi de probabilité d'un couple de v.a

Soient X, Y deux v.a continues.

4.2.1 Fonction de répartition

Définition 4.2.1 : On appelle fonction de répartition du couple (X, Y) l'application définie sur \mathbb{R}^2 et à valeur dans $[0, 1]$ par

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\longrightarrow F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) \end{aligned}$$

Propriété 4.2.1 :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) \in [0, 1]$.
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (-\infty, -\infty)} F(x, y) = 0$ et $\lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1$.

4.2.2 Densité de probabilité

Définition 4.2.2 :

i) On dit que le couple de v.a (X, Y) admet une densité f , si sa f.r F s'écrit sous la forme :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

où f est une fonction réelles positives ayant au plus un nombre fini de points de discontinuité.

ii) Une fonction réelle f définie sur \mathbb{R}^2 est une densité de probabilité si et seulement si

- $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- f est continue sauf en un nombre fini de points.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = 1$

Propriété 4.2.2 : Soient (X, Y) un couple de v.a de densité f et F sa fonction de répartition. Alors :

- F est continue sur \mathbb{R}^2 .
- F admet des dérivés partielles secondes continues en tout point (x_0, y_0) où f est continue et on a $f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

- $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int \int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy$

Exemple 4.2.1 :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{4}\right] (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

4.2.3 Lois marginales

Définition 4.2.3 :

- i) Les v.a X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y) .
- ii) La fonction de répartition de la v.a X (resp. Y) du couple (X, Y) est appelée f.r marginale de X (resp. Y) noté F_X (resp. F_Y) et on a

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \text{ et } F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

- iii) La densité de la v.a X (resp. Y) du couple (X, Y) est appelée densité marginale de X (resp. Y) noté f_X (resp. f_Y) et on a

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \text{ et } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Exemple 4.2.2 :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{4}\right] dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{4}\right] dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{8}\right]$$

4.2.4 Lois conditionnelles

Définition 4.2.4 : Soient (X, Y) un couple de v.a et $A_Y = \{y \in \mathbb{R}; , f_Y(y) > 0\}$, la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est :

$$f(x/Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ pour tout } y \in A_Y$$

de même pour $A_X = \{x \in \mathbb{R}; , f_X(x) > 0\}$, la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ est :

$$f(y/X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \text{ pour tout } x \in A_X$$

Remarque : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/Y = y) dx = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y/X = x) dy = 1$.

Exemple 4.2.3 :

$$f(y/X = x) = \frac{\frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{4}\right]}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{4}\right]} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2xy + y^2}{4}\right]$$

$$f(x/Y = y) = \frac{\frac{1}{4\pi} \exp\left[-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{4}\right]}{\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{8}\right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{8}\right]$$

4.2.5 Indépendance

Définition 4.2.5 : Deux v.a sont indépendantes si la loi de l'une n'est pas influencée par la loi de l'autre.

Théorème 4.2.1 : Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- Les v.a X et Y sont indépendantes.
- $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $f(x/Y = y) = f_X(x) \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times A_Y$
- $f(y/X = x) = f_Y(y) \forall (x, y) \in A_X \times \mathbb{R}$

4.2.6 Changement de variable

Soient (X, Y) un couple de v.a de densité $f_{(X,Y)}$ et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 de domaine de définition D_φ , bijective de D_φ dans $\varphi(D_\varphi)$, de classe C^1 ainsi que son inverse φ^{-1} . Notons :

- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f_{(X,Y)}(x, y) > 0\}$.
- $T = \varphi(S \cap D_\varphi)$.
- $J_{\varphi^{-1}}(u, v)$ le jacobien de $\varphi^{-1}(u, v)$.

Alors

$$f_{\varphi(X,Y)}(u, v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u, v)) |det(J_{\varphi^{-1}}(u, v))| \mathbf{1}_T(u, v)$$

où pour $h = (h_1, h_2)$, le jacobien de h est $J_h(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$

4.3 Moments

4.3.1 Espérance mathématique

Soit X une v.a admettant une densité f , l'espérance mathématique de la v.a X est le réel,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

L'espérance mathématique de X représente sa valeur moyenne.

Une v.a X est dite centrée si et seulement si son espérance est nulle : $E(X) = 0$. Si X admet une espérance alors la v.a $X - E(X)$ est centrée.

Propriété 4.3.1 : Soient X et Y deux v.a et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

4.3.2 Moments

- On appelle moment d'ordre k ($k \geq 1$) de X , l'espérance mathématique de la v.a X^k

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

Remarquons que le moment d'ordre 1 est l'espérance mathématique $m_1 = E(X)$.

- On appelle moment centré d'ordre k de X l'expression suivante :

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

Remarquons que le moment centré d'ordre 1 est nulle $\mu_1 = 0$.

4.3.3 Variance - Ecart-type - Covariance - Corrélation

- On appelle variance de la v.a X le réel positif

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2 = \mu_2 \geq 0$$

Une v.a X est dite réduite si et seulement si sa variance est égale à 1 : $V(X) = 1$.

- On appelle écart-type de la v.a X le réel positif, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X - E(X))^2]}$

Si X admet une variance alors la v.a $\frac{X}{\sigma(X)}$ est réduite. De plus on a la v.a $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

- Si le couple (X, Y) admet une densité f , on appelle covariance des v.a X et Y le réel,

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y f(x, y) dx dy - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \right) \end{aligned}$$

- Si le couple (X, Y) admet une densité f , on appelle coefficient de corrélation des v.a X et Y le réel compris entre -1 et 1,

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Propriété 4.3.2 :

Soient X une v.a et $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si X est une constante alors $V(X) = 0$.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$.
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)$.
- $Cov(aX_1 + bX_2, Y) = aCov(X_1, Y) + bCov(X_2, Y)$.
- $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Proposition : Si X et Y sont deux v.a indépendantes, alors on a :

- $Cov(X, Y) = 0$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

La réciproque est fausse.

4.3.4 Matrice de Variance-Covariance

- On appelle espérance mathématique du couple (X, Y) , le couple appartenant à \mathbb{R}^2 ,

$$E[(X, Y)] = (E(X), E(Y))$$

- On appelle matrice de variance-covariance du couple (X, Y) la matrice carrée d'ordre 2 symétrique définie par :

$$\Gamma(X, Y) = E[(X - E(X), Y - E(Y)), {}^t(X - E(X), Y - E(Y))] = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

ses termes diagonaux sont les variances des composantes du couple.

Soient A une matrice carrée d'ordre 2 et $Z = A^t(X, Y)$ un couple de v.a. dans \mathbb{R}^2 , on a :

$$E(Z) = E(A^t(X, Y)) = A^tE(X, Y) \text{ et } \Gamma(Z) = A\Gamma(X, Y) {}^tA$$

où le produit est pris au sens des matrices.

4.4 Exemples de lois de probabilités continues

4.4.1 Loi uniforme

Une v.a X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha)} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on écrit $X \sim \mathcal{U}([\alpha, \beta])$. L'espérance et la variance de X sont :

$$E(X) = \frac{\beta + \alpha}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

Sa fonction de répartition est :
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & \text{si } x \geq \beta \end{cases}$$

4.4.2 Loi exponentielle

Une v.a X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp[-\lambda x] & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et on écrit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. L'espérance et la variance de X sont : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Sa fonction de répartition est :
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-\lambda x] & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La loi exponentielle sert de modèle dans les problèmes de files d'attentes et de durée de vie.

4.4.3 Loi Gamma

Une v.a X suit la loi Gamma de paramètre (a, λ) si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp[-\lambda x] & \text{si } x > 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } a \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

avec $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \exp[-x] dx$. et on écrit $X \sim \Gamma(a, \lambda)$.

L'espérance et la variance de X sont : $E(X) = \frac{a}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{a}{\lambda^2}$

Lorsque $a = 1$, on constate que la loi $\Gamma(1, \lambda)$ est la loi exponentielle de paramètre λ , $\mathcal{E}(\lambda)$.

4.5 Loi Normale ou Gaussienne

4.5.1 Loi Normale ou Gaussienne

La v.a X suit la loi normale (ou loi de Gauss) d'espérance mathématique m et de variance σ^2 , si X peut prendre n'importe quelle valeur de \mathbb{R} et si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

et on écrit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Sa représentation graphique est

On remarque que la courbe est symétrique et admet pour axe de symétrie la droite $x = m$.

Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$ on l'appelle la loi normale standard ou loi normale centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (centré $m = E(X) = 0$, réduite $V(X) = 1$).

Propriété 4.5.1 : Soient $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors on a :

- $Y = aX + b \sim \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.
- Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $X = \sigma Z + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

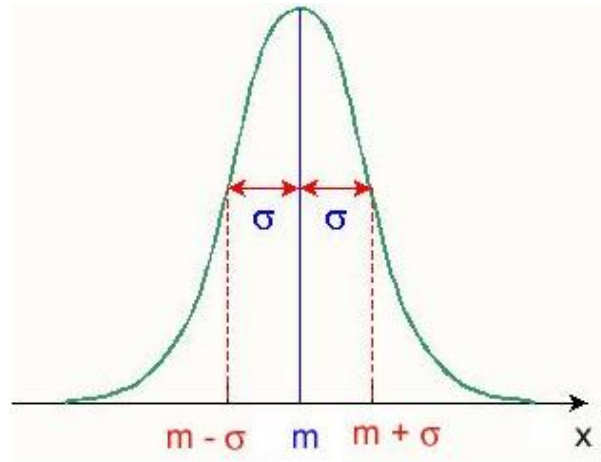


FIGURE 4.1 – Courbe de la densité de la loi normale

4.5.2 Table de la loi Normale standard

La loi Normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ est tabulée. la table donne les valeurs des probabilités $P(X \leq x)$ pour différentes valeurs de x .

Nous savons que si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La densité de X est donnée par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et sa fonction de répartition Φ est donnée par la formule : $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right] dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a l'identité : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La table suivante donne pour tout x de 0 jusqu'à 2.99 par pas de 0.01, la valeur de $\Phi(x)$. L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de x , c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes.

Par exemple : $\Phi(1,73) = P(X \leq 1,73) = 0,95818$, $\Phi(1,96) = P(X \leq 1,96) = 0,975$, $\Phi(-1,54) = 1 - \Phi(1,54) = 1 - 0,93822 = 0.06178$.

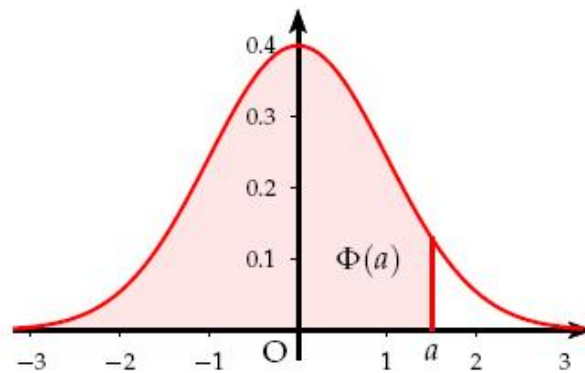


FIGURE 4.2 – Courbe de la densité de la loi normale standard

Table de la loi normale centrée réduite

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0,0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0,1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0,2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0,3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0,4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0,5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0,6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0,7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0,8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0,9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1,0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1,1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1,2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1,3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1,4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1,5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1,6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1,7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1,8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1,9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2,0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2,1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2,2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2,3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2,4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2,5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2,6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2,7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2,8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2,9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861

Table pour les grandes valeurs de x

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Phi(x)$	0.99865	0.99903	0.99931	0.99952	0.99966	0.99977	0.99984	0.99993	0.99996	0.99999

4.5.3 Couple gaussien

Soit (X, Y) un couple de v.a de \mathbb{R}^2 ayant pour espérance mathématique (m_X, m_Y) et pour matrice de variance-covariance $\Gamma(X, Y) = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$ où σ_X^2, σ_Y^2 sont les variances de X et Y et σ_{XY} la covariance des v.a X et Y . (X, Y) est un couple gaussien, si elle admet pour densité :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp \left[-\frac{1}{2}(x - m_X, y - m_Y)\Gamma^{-1}(X, Y) \begin{pmatrix} x - m_X \\ y - m_Y \end{pmatrix} \right]$$

les lois marginales des v.a X et Y sont :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \exp \left[-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} \right] \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_Y} \exp \left[-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right]$$

Si les v.a X et Y sont indépendantes, $\sigma_{XY} = 0$, alors $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

4.5.4 Lois déduites de la loi Normale

4.5.4.1 Loi du khi-deux

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n v.a normales standards ($X_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \forall i \in \{1, \dots, n\}$) indépendantes. La v.a X définie par

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \text{ suit la loi de khi-deux à } n \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par : $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp[-\frac{x}{2}] & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

et on écrit $X \sim \chi_2(n)$. L'espérance et la variance de X sont : $E(X) = 2$ et $V(X) = 2n$

La loi de probabilité de khi-deux est une loi Gamma de paramètres $a = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

4.5.4.2 Loi de Student

Soient X une v.a normale standard ($X \sim \mathcal{N}(0, 1)$) et Y une v.a indépendantes de X ayant la loi de khi-deux à n degrés de liberté ($Y \sim \chi_2(n)$). La v.a T définie par

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \text{ suit la loi de student à } n \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}$.

et on écrit $T \sim \mathcal{T}(n)$. L'espérance et la variance de T sont : $E(T) = 0$ et $V(T) = \frac{n}{n-2}$.

Elle est symétrique, plus n est grand et plus sa distribution se confond avec celle de la loi normale standard.

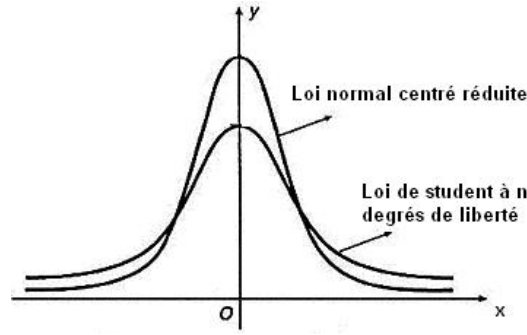


FIGURE 4.3 – Courbe de la densité de la loi de Student

4.5.4.3 Loi de Fisher-Snedecor

Soient X et Y deux v.a indépendantes ayant la loi de khi-deux à respectivement n et m degrés de liberté ($(X \sim \chi_2(n), Y \sim \chi_2(m))$). La v.a F définie par

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \text{ suit la loi de Fisher-Snedecor à } (n, m) \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et on écrit $F \sim \mathcal{F}(n, m)$. L'espérance et la variance de F sont :

$$E(F) = \frac{m}{m-2} \text{ si } m > 2 \quad \text{et} \quad V(F) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \text{ si } m > 4.$$

4.5.5 Tableaux des lois de probabilités continues

Loi	densité de probabilité	Espérance	Variance
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ avec $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$f(x) = \lambda \exp[-\lambda x]$ pour $x \geq 0$ et $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp[-\lambda x]$ pour $x > 0$ et $\lambda > 0, a > 0$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$
Normale	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}]$ pour $x \in \mathbb{R}$	m	σ^2
khi-deux	$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp[-\frac{x}{2}]$, $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$	n	$2n$
Student	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$	0	$\frac{n}{n-2}$
Fisher	$f(x) = n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}}$, $x \in \mathbb{R}$	$\frac{m}{m-2}$ si $m > 2$	$\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ si $m > 4$

4.5.6 Approximation par la loi Normale

4.5.6.1 Approximation de la loi Binomiale par la loi Normale

Soit X une v.a qui suit la loi binomiale, $\mathcal{B}(n, p)$. On a, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
Et soit la v.a $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$. On a $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

La loi $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1 - p))$ si $\begin{cases} n > 30 \\ np > 15 \\ np(1 - p) > 5 \end{cases}$

Remarque : Remplacer la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, np(1 - p))$ revient à considérer

$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}$ comme une loi normale standard qui peut donc prendre toutes les valeurs réelles.

Si $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ l'intervalle $[k - 0.5, k + 0.5]$ est l'ensemble des valeurs qui s'arrondissent à k .

Soit F la f.r de la loi $\mathcal{N}(np, np(1 - p))$, et Φ la f.r de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \\ P(X = k) \approx P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5) &= F(k + 0.5) - F(k - 0.5) \\ &= \Phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \end{aligned}$$

D'autre part pour que la somme des valeurs approchées des $P(X = k)$, k variant de 0 à n fasse 1, c'est à dire pour que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$, on a

$$\begin{aligned} P(X = 0) \approx F(0.5) &= \Phi\left(\frac{0.5 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \text{ et} \\ P(X = n) \approx 1 - F(n - 0.5) &= 1 - \Phi\left(\frac{n - 0.5 - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\right) \end{aligned}$$

Exemple 4.5.1 :

Soit X une v.a qui suit la loi $\mathcal{B}(40, 0.5)$, on a $\begin{cases} n = 40 > 30 \\ np = 40 \times 0.5 = 20 > 15 \\ np(1 - p) = 40 \times 0.5(1 - 0.5) = 10 > 5 \end{cases}$

$\mathcal{B}(40, 0.5)$ peut être approchée par $\mathcal{N}(20, 10)$ et $\frac{X - 20}{\sqrt{10}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$P(X = 20) \approx F(20 + 0.5) - F(20 - 0.5) = \Phi\left(\frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{10}}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right) - 1 \simeq 2\Phi(0.16) - 1 = 2 \times 0.56356 - 1 = 0.1271$$

$$\text{Le calcul direct donne } P(X = 20) = C_{40}^{20} \times 0.5^{20} \times (1 - 0.5)^{20} = \frac{40!}{20! \times 20!} \times 0.5^{40} = 0.1254$$

4.5.6.2 Approximation de la loi de Poisson par la loi Normale

Soit la v.a X qui suit la loi de poisson de paramètre λ , $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. $E(X) = V(X) = \lambda$.

Et soit la v.a $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. On a $E(Z) = 0$ et $V(Z) = 1$.

En pratique, on a : La loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ si $\lambda > 15$.

Soit F la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$, et Φ la fonction de répartition de la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ on a $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$

$$P(X = k) \approx P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5) = F(k + 0.5) - F(k - 0.5) \\ = \Phi\left(\frac{k + 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{k - 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

de même, pour que $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, on a $P(X = 0) \approx \Phi\left(\frac{0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$

Exemple 4.5.2 :

Si $X \sim \mathcal{P}(16)$, les calculs des probabilités concernant X peuvent être effectués en utilisant la loi $\mathcal{N}(16, 16)$ car $16 > 15$. Ainsi

$$P(X = 20) \approx F(20.5) - F(19.5) = \Phi\left(\frac{20.5 - 16}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{19.5 - 16}{\sqrt{16}}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{4.5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{3.5}{4}\right) = \Phi(1.125) - \Phi(0.875) = 0.8697 - 0.8092 = 0.0605$$

Le calcul direct donne $P(X = 20) = \frac{16^{20} \exp[-16]}{20!} = 0.0559$

4.5.6.3 Théorème de la limite centrale

Théorème 4.5.1 : Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de v.a indépendantes et de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 et soit la v.a $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

Pour n assez grand, la loi de $\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$ peut être approchée par la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$P\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \leq x\right) \approx P(\mathcal{N}(0, 1) \leq x)$$

Exemple 4.5.3 :

Chaque année, Mohammed effectue deux fois par jour, cinq fois par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une v.a réelle X qui suit une loi d'espérance 45 minutes et d'écart-type 10 minutes. On suppose que les durées des trajets sont indépendantes. Quelle est la probabilité que Mohammed passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année ?

Mohammed effectue 460 trajets par an ($2 \times 5 \times 46 = 460$).

Soit T_i la durée en minutes du $i^{\text{ème}}$ trajet ($1 \leq i \leq 460$).

le temps T en minutes passé par Mohammed dans sa voiture au cours de l'année est

$$T = \sum_{i=1}^{460} T_i$$

Les v.a $\{T_i\}_{i=1}^{460}$ sont indépendantes et suivent une même loi d'espérance 45 et d'écart-type 10. Soit

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{460}}{460} = \frac{T}{460}$$

Comme 460 est grand, le théorème de la limite centrale permet d'approcher la loi de $\sqrt{460} \frac{\bar{T} - 45}{10}$ par la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$.

350 heures = $350 \times 60 = 21000$ minutes.

$$\begin{aligned}P(T \geq 21000) &= p(\bar{T} \geq \frac{21000}{460}) \\&= P(\sqrt{460} \frac{\bar{T} - 45}{10} \geq \sqrt{460} \frac{\frac{21000}{460} - 45}{10}) \\&\approx P(\mathcal{N}(0, 1) \geq 1.3987)\end{aligned}$$

$$P(\mathcal{N}(0, 1) \geq 1.4) = 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) < 1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0808$$

Donc la probabilité cherchée est très proche de 0.08.

