Université Mohammed V
Faculté des Sciences. Rabat
Département de Mathématiques.

Année 2019-2020
Filière SMI, Module 18
Probabilité & Statistique

Rattrapage Janvier 2020
(Durée 1H 30)

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Aucun document n'est autorisé. Il est strictement interdit d'emprunter ou de prêter une calculatrice. Justifier les réponses.

Statistique (9 points)

Exercice : 1 D'un échantillon de N étudiants, on a mesuré le poids en kg. Les données ont été groupées en 7 classes.

Poids	[40.5, 45.5[	[45.5, 50.5[	[50.5, 55.5[	[55.5, 60.5[	[60.5, 65.5[	[65.5, 70.5[	[70.5, 75.5[
Fréquences cumulées	0.033	0.133	0.366	0.699	0.866	0.973	1

On prendra 4 chiffres après la virgule et on précisera les formules utilisées.

1) Dresser le tableau de distribution des fréquences.
2) Calculer l'étendue de cette série.
3) Calculer le mode de cette série.
4) Calculer le poids médian.
5) Calculer le poids moyen et la variance.
6) Sachant que $\sum_{k=1}^{7} n_k c_k^2 = 505140$, calculer l'effectif total des étudiants.

Exercice : 2 La moyenne et la variance d'âge de N femmes est $\overline{x}$ et $V(x)$, celle de N hommes est $\overline{y}$ et $V(y)$.

1) Montrer que la moyenne d'âge de ces hommes et femmes est $\dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$.
2) Montrer que la variance de ces hommes et femmes est $\dfrac{V(x)+V(y)}{2} + \dfrac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{4}$.

Probabilité (11 points)

Exercice : 1

On considère un examen de note moyenne 8 et d'écart-type 4. On note X une variable aléatoire distribuée selon une loi Gaussienne utilisant comme moyenne et écart-type les valeurs observées sur les notes d'examen.

1) Calculer la probabilité d'être ajourné, c'est-à-dire que X $<$ 10.
2) Calculer la probabilité que X soit plus grande que 15.
3) Calculer la probabilité que X soit inférieure à 5.
4) En déduire la probabilité de l'événement $(5 \leq X \leq 15)$.

Exercice : 2

Une grande mutuelle d'assurances envisage d'éventuels changements de tarifs. Pour cela, elle a étudié le risque d'accident automobile de ses assurés en fonction de l'ancienneté de leur permis. Parmi ses assurés, il y a 20% qui ont leur permis depuis moins de 5 ans et le risque d'accident de ces conducteurs est de 0.4, tandis que ce risque pour les assurés ayant leur permis depuis plus de 5 ans est de 0.125. On considère les événements :

J : "Assurés ayant leurs permis depuis moins de 5 ans"
A : " Avoir un accident"

On prendra 3 chiffres après la virgule.

1) Faire un arbre de probabilité.

2) Calculer la probabilité qu'un assuré choisi au hasard ait un accident.

3) Un assuré a eu un accident. Calculer la probabilité que son permis a plus de 5 ans.

4) On choisit au hasard 10 conducteurs ayant leur permis depuis moins de 5 ans. Soit X la variable aléatoire "nombre d'assurés ayant eu un accident parmi les 10".

a) Quelle est la loi de probabilité de la v.a X ?

b) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun accident dans l'année ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu ayant un accident dans l'année ?

5) On choisit au hasard 10 assurés ayant leur permis depuis plus de 5 ans. Soit Y la variable aléatoire "nombre d'assurés ayant eu un accident parmi les 10".

a) Quelle est la loi de probabilité de la v.a Y ?

b) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun accident dans l'année ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu ayant un accident dans l'année ?

6) On prend au hasard n assurés. Soit Z la variable aléatoire "nombre d'assurés ayant eu un accident parmi les n".

a) Quelle est la loi de probabilité de la v.a Z ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu ayant un accident dans l'année ?

c) Quelle doit être le nombre maximum n des assurés choisies pour que la probabilité qu'aucune personne n'ait un accident soit supérieure ou égale à 10^{-5} ?

Table de la loi normale centrée réduite

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
$0,0$	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
$0,1$	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
$0,2$	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
$0,3$	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
$0,4$	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
$0,5$	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
$0,6$	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
$0,7$	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
$0,8$	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
$0,9$	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
$1,0$	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
$1,1$	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
$1,2$	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
$1,3$	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
$1,4$	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
$1,5$	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
$1,6$	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
$1,7$	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327

Correction Rattrapage Janvier 2020

Statistique (9 points)

Exercice : 1 **1)** Le tableau de distribution des fréquences.

Poids	[40.5, 45.5[	[45.5, 50.5[	[50.5, 55.5[	[55.5, 60.5[	[60.5, 65.5[	[65.5, 70.5[	[70.5, 75.5[
Fréquences cumulées	0.033	$0,133$	$0,366$	$0,699$	0.866	0.973	1
Fréquences	0.033	0.1	0.233	0.333	0.167	0.107	0.027
c_k	43	48	53	58	63	68	73

2) L'étendue $e = x_{max} - x_{min} = 75.5 - 40.5 = 35$.

3) La classe modale est [55.5, 60.5[car la plus grande fréquence est 0.333 et on a,

$$a = 5, f_i = 0.233,\ f_{i+1} = 0.333 \text{ et } f_{i+2} = 0.167$$

$$\begin{aligned} m_d &= x_{i+1} - a \times \frac{(f_{i+1} - f_{i+2})}{(f_{i+1} - f_{i+2}) + (f_{i+1} - f_i)} \\ &= 60.5 - 5 \times \frac{0.333 - 0.167}{(0.333 - 0.167) + (0.333 - 0,233)} \\ &= 60.5 - 5 \times \frac{0,166}{0.166 + 0.1} \\ &= 60.5 - \frac{0.830}{0.266} = 60.5 - 3.12 = 57.3797 \end{aligned}$$

.

4) Le poids médian est

La classe médiane est[55.5, 60.5[car la $1^{ère}$ fréquence cumulée supérieure à 0,5 est 0,699 et on a

$$x_i = 55.5,\ x_{i+1} = 60.5,\ F_i = 0.366 \text{ et } F_{i+1} = 0.699$$

$$\begin{aligned} m_e &= x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0.5 - F_i}{F_{i+1} - F_i} \\ &= 55.5 + (60.5 - 55.5)\frac{0.5 - 0.366}{0,699 - 0.366} \\ &= 55.5 + 5 \times \frac{0.134}{0.333} = 55.5 + 2.012 = 57.512 \end{aligned}$$

5) Le poids moyen est

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \sum_{k=1}^{n} c_k\, f_k \\ &= 0.033 \times 43 + 0.1 \times 48 + 0.233 \times 53 + 0.333 \times 58 + 0.167 \times 63 + 0.107 \times 68 + 0.027 \times 73 \\ &= 57,65 \end{aligned}$$

La variance est

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_k^2\, f_k - \overline{x}^2 \\ &= 0.033 \times 43^2 + 0.1 \times 48^2 + 0.233 \times 53^2 + 0.333 \times 58^2 + 0.167 \times 63^2 + 0.107 \times 68^2 + 0.027 \times 73^2 - 57,65^2 \\ &= 3367.6 - 3323.5225 = 44.0775 \end{aligned}$$

6) $\sum_{k=1}^{7} n_k c_k^2 = 505140$ et $V(x) = 44.0775$.

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{7} n_k c_k^2 - \overline{x}^2 \Longrightarrow N = \frac{\sum_{k=1}^{7} n_k c_k^2}{V(x) + \overline{x}^2} = \frac{505140}{44.0775 + 57.65^2} = 150$$

Exercice : 2) $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k\, x_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} n_k\, x_k = N\,\overline{x}$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k\, y_k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} n_k\, y_k = N\,\overline{y}$.

$\overline{z} = \dfrac{1}{2\,N}\sum_{k=1}^{2\,N} n_k\, z_k = \dfrac{1}{2\,N}\left(\sum_{k=1}^{N} n_k\, x_k + \sum_{k=1}^{N} n_k\, y_k\right) = \dfrac{1}{2\,N}\,(N\,\overline{x} + N\,\overline{y}) = \dfrac{N\,\overline{x} + N\,\overline{y}}{2\,N} = \dfrac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$.

$V(x) = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k\, x_k^2 - \overline{x}^2$ et $V(y) = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k\, y_k^2 - \overline{y}^2$.

$$\begin{aligned}
V(z) &= \frac{1}{2\,N}\sum_{k=1}^{2\,N} n_k\, z_k^2 - \overline{z}^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k\, x_k^2 - \overline{x}^2 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k\, y_k^2 - \overline{y}^2\right) + \frac{1}{2}\overline{x}^2 + \frac{1}{2}\overline{y}^2 - \frac{(\overline{x}+\overline{y})^2}{4}\\
&= \frac{V(x)+V(y)}{2} + \frac{2\,\overline{x}^2 + 2\,\overline{y}^2 - \overline{x}^2 - \overline{y}^2 - 2\,\overline{x}\times\overline{y}}{4}\\
&= \frac{V(x)+V(y)}{2} + \frac{\left(\overline{x}^2 - \overline{y}\right)^2}{4}
\end{aligned}$$

Probabilité (11 points)

Exercice : 1 On pose $Y = \dfrac{X-8}{4}$ qui suit donc une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

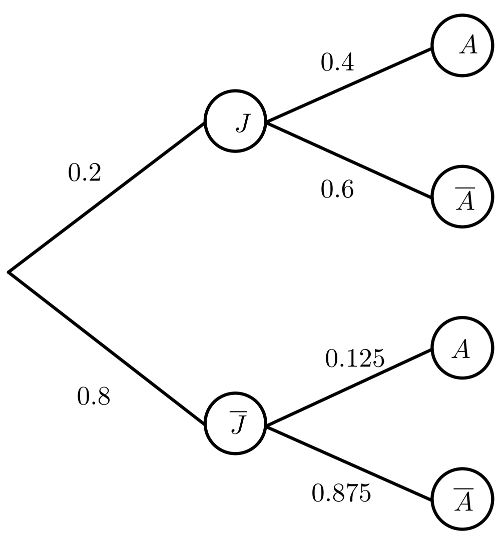
1) $P(X < 10) = P(\dfrac{X-8}{4} < \dfrac{10-8}{4}) = P(Y < 0,5) = 0,69146$ d'après la table.

2) $P(X > 15) = P(\dfrac{X-8}{4} > \dfrac{15-8}{4}) = P(Y > 1,75) = 1 - P(Y \leq 1,75) = 1 - 0.95994 = 0.04006$.

$P(X < 5) = P(\dfrac{X-8}{4} < \dfrac{(5-8}{4}) = P(Y < -0.75) = 1 - P(Y < 0.75) = 1 - 0.77337 = 0.22663$.

$P(5 \leq X \leq 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 5) = 1 - P(X > 15) - P(X \leq 5) = 0.95994 - 0.22663 = 0.73331$

Exercice : 2 1) arbre de probabilité



2) On a $\{J, \overline{J}\}$ forment un S.C.E. ou une partition, d'où d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(A) = P(A\setminus J)\times P(J) + P(A\setminus \overline{J})\times P(\overline{J}) = 0.4\times 0.2 + 0.125\times 0.8 = 0.08 + 0.1 = 0.18$$

3) D'après la formule de Bayes, on a : $P(\overline{J}/A) = \dfrac{P(A/\overline{J})P(\overline{J})}{P(A)} = \dfrac{(0.125 \times 0.8)}{0.18} = \dfrac{0.1}{0.18} = 0.556.$

4) a) X suit la loi binomiale de paramètre 10 et $p = P(A/J) = 0.4.$

b) $P(X = 0) = C_{10}^{0}\ (0.4)^{0}\ (1 - 0.4)^{10} = (0.6)^{10} = 0.006.$

c) $P(X \geq 1) = (1 - P(X = 0)) = 1 - (0.6)^{10} = 0.994.$

5) a) Y suit la loi binomiale de paramètre 10 et $p = P(A/\overline{J}) = 0.125.$

b) $P(Y = 0) = C_{10}^{0}\ (0.125)^{0}\ (1 - 0.125)^{10} = (0.875)^{10} = 0.263.$

c) $P(Y \geq 1) = (1 - P(Y = 0)) = 1 - (0.875)^{10} = 0.737.$

6) a) Z suit la loi binomiale de paramètre n et $p = P(A) = 0.18.$

b) $P(Z = 0) = C_{n}^{0}\ (0.18)^{0}\ (1 - 0.18)^{n} = (0.82)^{n}$. $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (0.82)^{n}.$

c) $P(Z = 0) = 0.82^{n} \geq 10^{-5} \Longleftrightarrow \ln(0.82^{n}) \geq \ln\left(10^{-5}\right) \Longleftrightarrow n \ln(0.82) \geq -5\ln(10) \Longleftrightarrow$
$n \leq -5\dfrac{\ln(10)}{\ln(0.82)} = 58.014$. D'où $n = 58$.