Solution: Propagation Avant et Rétropropagation dans un MLP Binaire

4 mai 2025

1 Propagation Avant (Forward Pass)

Données :

— Entrée $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

— Poids couche 1 : $\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$

— Biais couche 1 : $\mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$

— Poids couche 2 : $\mathbf{W}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}$

— Biais couche 2 : $b^{(2)} = -0.1$

1.1 Calcul de la sortie de la couche cachée :

$\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{W}^{(1)}\mathbf{X} + \mathbf{b}^{(1)}$

$\mathbf{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}$

$z_1^{(1)} = 0.2 \times 0.7 + (-0.3) \times (-0.5) + 0.1 = 0.14 + 0.15 + 0.1 = 0.39$

$z_2^{(1)} = 0.4 \times 0.7 + 0.1 \times (-0.5) + (-0.2) = 0.28 - 0.05 - 0.2 = 0.03$

Donc $\mathbf{z}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.39 \\ 0.03 \end{bmatrix}$

Appliquons la fonction d'activation sigmoïde : $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$

$\mathbf{a}^{(1)} = \sigma(\mathbf{z}^{(1)})$

$a_1^{(1)} = \sigma(0.39) = \frac{1}{1+e^{-0.39}} = \frac{1}{1+0.677} = \frac{1}{1.677} \approx 0.596$

$a_2^{(1)} = \sigma(0.03) = \frac{1}{1+e^{-0.03}} = \frac{1}{1+0.97} = \frac{1}{1.97} \approx 0.507$

Donc $\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.596 \\ 0.507 \end{bmatrix}$

1.2 Calcul de la sortie finale :

$z^{(2)} = \mathbf{W}^{(2)}\mathbf{a}^{(1)} + b^{(2)}$

$z^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.596 \\ 0.507 \end{bmatrix} + (-0.1)$

$z^{(2)} = 0.5 \times 0.596 + (-0.6) \times 0.507 + (-0.1)$

$z^{(2)} = 0.298 - 0.304 - 0.1 = -0.106$

Appliquons la fonction d'activation sigmoïde :
$a^{(2)} = \sigma(z^{(2)}) = \sigma(-0.106) = \frac{1}{1+e^{0.106}} = \frac{1}{1.112} \approx 0.474$
La sortie finale du réseau est donc $\hat{y} = 0.474$

2 Calcul de la Fonction de Perte (Entropie croisée binaire)

L'entropie croisée binaire est donnée par : $L = -[y\log(\hat{y}) + (1-y)\log(1-\hat{y})]$
Avec $y = 1$ et $\hat{y} = 0.474$:
$L = -[1 \times \log(0.474) + (1-1) \times \log(1-0.474)]$
$L = -[\log(0.474) + 0]$
$L = -\log(0.474) = -(-0.747) = 0.747$
La valeur de la perte est donc $L = 0.747$

3 Rétropropagation (Backward Pass)

3.1 Gradient de la couche de sortie :

$\frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} = a^{(2)} - y = 0.474 - 1 = -0.526$

3.2 Gradients des poids et biais de la couche 2 :

$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(2)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} \cdot (\mathbf{a}^{(1)})^T$
$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(2)}} = -0.526 \times \begin{bmatrix} 0.596 & 0.507 \end{bmatrix}$
$\frac{\partial L}{\partial W_1^{(2)}} = -0.526 \times 0.596 = -0.313$
$\frac{\partial L}{\partial W_2^{(2)}} = -0.526 \times 0.507 = -0.267$
$\frac{\partial L}{\partial b^{(2)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} = -0.526$

3.3 Gradient de la sortie de la couche cachée :

$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{(1)}} = (\mathbf{W}^{(2)})^T \cdot \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}}$
$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.6 \end{bmatrix} \times (-0.526)$
$\frac{\partial L}{\partial a_1^{(1)}} = 0.5 \times (-0.526) = -0.263$
$\frac{\partial L}{\partial a_2^{(1)}} = -0.6 \times (-0.526) = 0.316$

3.4 Gradient de l'entrée de la couche cachée :

La dérivée de la fonction sigmoïde est $\sigma'(z) = \sigma(z) \times (1 - \sigma(z))$
$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{(1)}} \odot \sigma'(\mathbf{z}^{(1)})$
$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}^{(1)}} \odot (\mathbf{a}^{(1)} \odot (1 - \mathbf{a}^{(1)}))$
$\frac{\partial L}{\partial z_1^{(1)}} = -0.263 \times 0.596 \times (1 - 0.596) = -0.263 \times 0.596 \times 0.404 = -0.063$
$\frac{\partial L}{\partial z_2^{(1)}} = 0.316 \times 0.507 \times (1 - 0.507) = 0.316 \times 0.507 \times 0.493 = 0.079$

3.5 Gradients des poids et biais de la couche 1 :

$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{(1)}} \cdot \mathbf{X}^T$
$\frac{\partial L}{\partial W_{11}^{(1)}} = -0.063 \times 0.7 = -0.044$
$\frac{\partial L}{\partial W_{12}^{(1)}} = -0.063 \times (-0.5) = 0.032$
$\frac{\partial L}{\partial W_{21}^{(1)}} = 0.079 \times 0.7 = 0.055$
$\frac{\partial L}{\partial W_{22}^{(1)}} = 0.079 \times (-0.5) = -0.040$
$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}^{(1)}}$
$\frac{\partial L}{\partial b_1^{(1)}} = -0.063$
$\frac{\partial L}{\partial b_2^{(1)}} = 0.079$

4 Mise à jour des poids et biais ($\alpha = 0.01$)

4.1 Mise à jour des poids et biais de la couche 2 :

$\mathbf{W}^{(2)}_{new} = \mathbf{W}^{(2)} - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(2)}}$
$W_{1\ new}^{(2)} = 0.5 - 0.01 \times (-0.313) = 0.5 + 0.00313 = 0.503$
$W_{2\ new}^{(2)} = -0.6 - 0.01 \times (-0.267) = -0.6 + 0.00267 = -0.597$
$b^{(2)}_{new} = b^{(2)} - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial b^{(2)}}$
$b^{(2)}_{new} = -0.1 - 0.01 \times (-0.526) = -0.1 + 0.00526 = -0.095$

4.2 Mise à jour des poids et biais de la couche 1 :

$\mathbf{W}^{(1)}_{new} = \mathbf{W}^{(1)} - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(1)}}$
$W_{11\ new}^{(1)} = 0.2 - 0.01 \times (-0.044) = 0.2 + 0.00044 = 0.200$
$W_{12\ new}^{(1)} = -0.3 - 0.01 \times 0.032 = -0.3 - 0.00032 = -0.300$
$W_{21\ new}^{(1)} = 0.4 - 0.01 \times 0.055 = 0.4 - 0.00055 = 0.399$
$W_{22\ new}^{(1)} = 0.1 - 0.01 \times (-0.040) = 0.1 + 0.00040 = 0.100$
$\mathbf{b}^{(1)}_{new} = \mathbf{b}^{(1)} - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}^{(1)}}$
$b_{1\ new}^{(1)} = 0.1 - 0.01 \times (-0.063) = 0.1 + 0.00063 = 0.101$
$b_{2\ new}^{(1)} = -0.2 - 0.01 \times 0.079 = -0.2 - 0.00079 = -0.201$

5 Résumé des résultats

5.1 Propagation avant :

- Sortie de la couche cachée : $\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.596 \\ 0.507 \end{bmatrix}$
- Sortie finale : $\hat{y} = 0.474$

5.2 Fonction de perte :

- $L = 0.747$

5.3 Gradients :

- $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(2)}} = \begin{bmatrix} -0.313 & -0.267 \end{bmatrix}$
- $\frac{\partial L}{\partial b^{(2)}} = -0.526$
- $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.044 & 0.032 \\ 0.055 & -0.040 \end{bmatrix}$
- $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.063 \\ 0.079 \end{bmatrix}$

5.4 Poids et biais mis à jour :

- $\mathbf{W}_{new}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.503 & -0.597 \end{bmatrix}$
- $b_{new}^{(2)} = -0.095$
- $\mathbf{W}_{new}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.200 & -0.300 \\ 0.399 & 0.100 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{b}_{new}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.101 \\ -0.201 \end{bmatrix}$