TD n°1 : Analyse Mathématique

SEG - S1 - 2022/2023 - Pr. Hamza El Mahjour

Fonctions réelles : Limites, dérivées , Rolle et TAF

Exercice 1

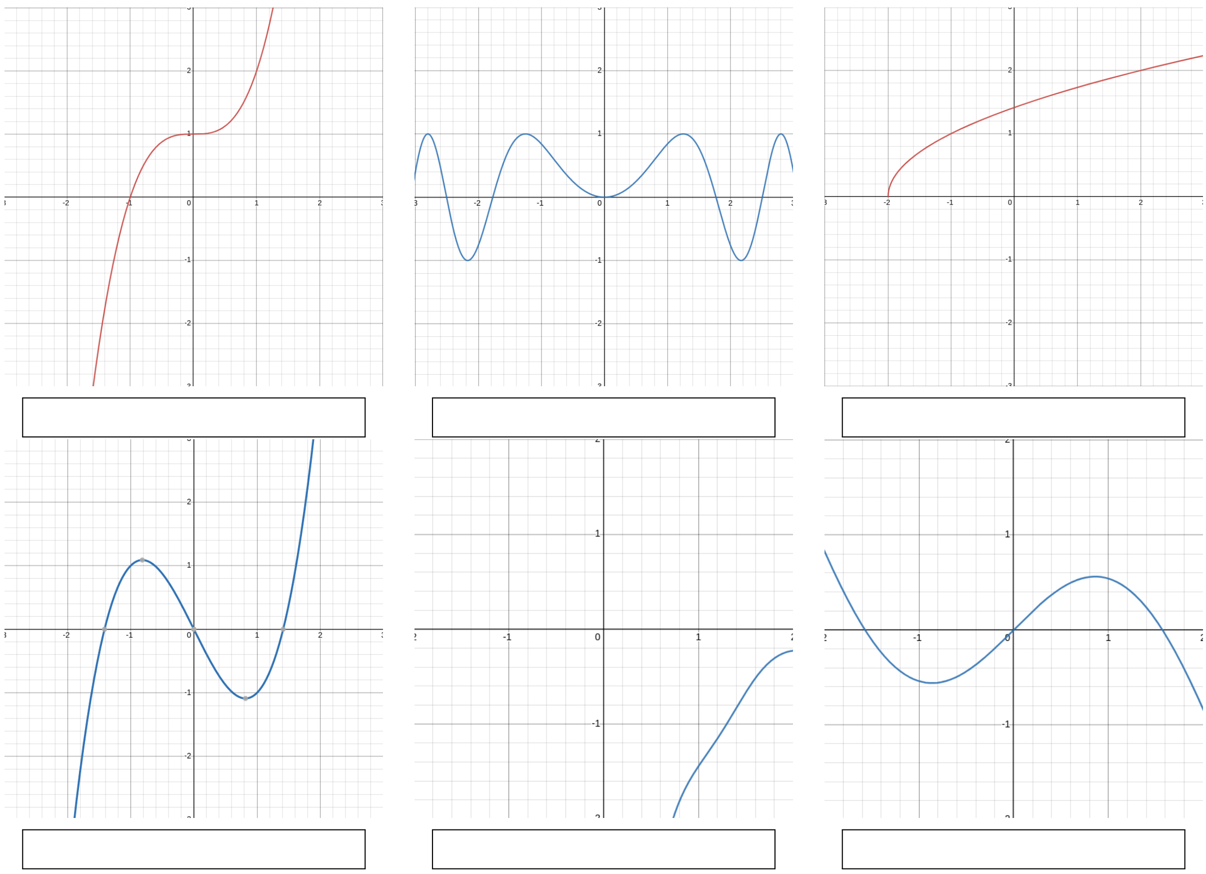
Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = Ln(x+1)$, 2. $f_2(x) = \sqrt{x-3}$,
3. $f_3(x) = (x-2)^2(x+\sqrt{2})$, 4. $f_4(x) = \sqrt{-x^2+3x+1}$,
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin(x)}{(1+x)(x-\sqrt{3})}$, 6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2-4x-1}$,
7. $f_7(x) = \frac{x}{\cos(x)}$.

[01]

Exercice 2

Dites, à partir de chaque graphe $\mathscr{C}_f$, si les fonctions qui sont inversibles et dessiner ensuite le graphe de leurs fonctions inverses $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.



Correction ▼ [03]

Exercice 3

Soit f la fonction

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-\sqrt{3})^2} + 2.$$

(a) Calculez les limites $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Interprétez les limites précédentes et tracez (approximativement) le graphe de la fonction au voisinage de $\sqrt{3}$, $-\infty$ et $+\infty$.

Correction ▼ [03]

Exercice 4

Dérivez les fonctions suivantes :

$h_1(x) = 3x^2 + 2x$	$h_2(x) = x^4\sin(x) + 1$	$h_3(x) = \cos(4x^2) - x$
$h_4(x) = x\log(x) + \exp(-3x+1)$	$h_5(x) = \frac{1}{\arctan(x-1)}$	$h_6(x) = \frac{-1}{x+1} + 8x + 2$

Correction ▼ [04]

Exercice 5

Soit la fonction $f(x) = \sin(x)e^x$.

1. Justifier pourquoi f est continue.
2. Donner le signe des deux valeurs $f(-\pi/4)$ et $f(\pi/2)$ (sans calculer de façon précise).
3. En déduire que f admet un zéro sur l'intervalle $]-\pi/4, \pi/2[$.

En utilisant les techniques précédentes, l'étude des limites en $\pm\infty$ et de la monotonie, étudier la fonction $p : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles.

Correction ▼ [05]

Exercice 6

Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Correction ▼ [06]

Exercice 7

On veut montrer, grâce au théorème des accroissements finis, que :

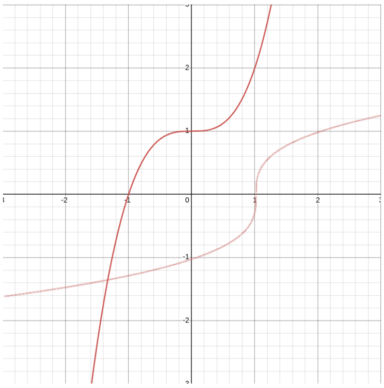
$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x+1} < ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Pour celà on passera par les étapes suivantes.

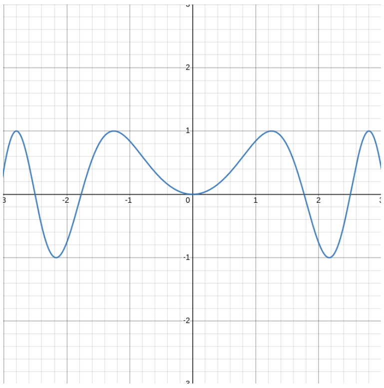
1. Appliquer le T.A.F sur la fonction $x \mapsto ln(x)$ sur l'intervalle $]x, x+1[$ pour $x > 0$.
2. Utiliser le résultat précédent et le fait que $c \in]x, x+1[\implies \frac{1}{c} \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ pour en déduire le résultat demandé.

Correction ▼ [07]

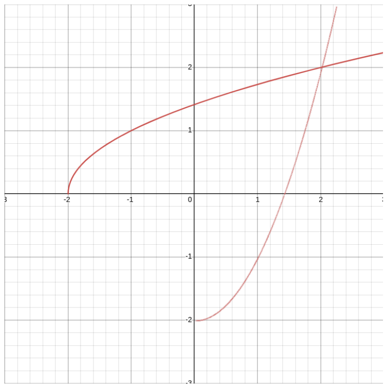
Correction de l'exercice 2 ▲



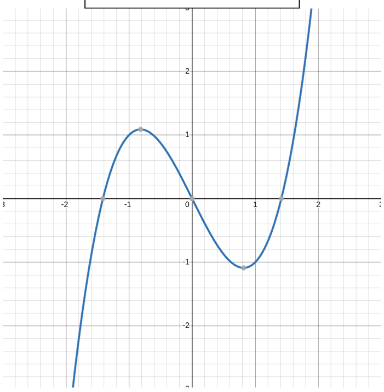
f *est inversible*



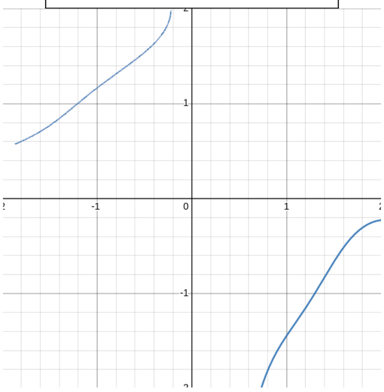
f *n'est pas inversible*



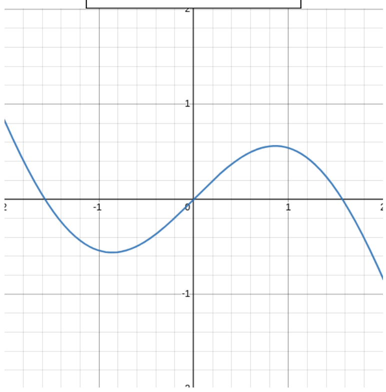
f *est inversible*



f *n'est pas inversible*



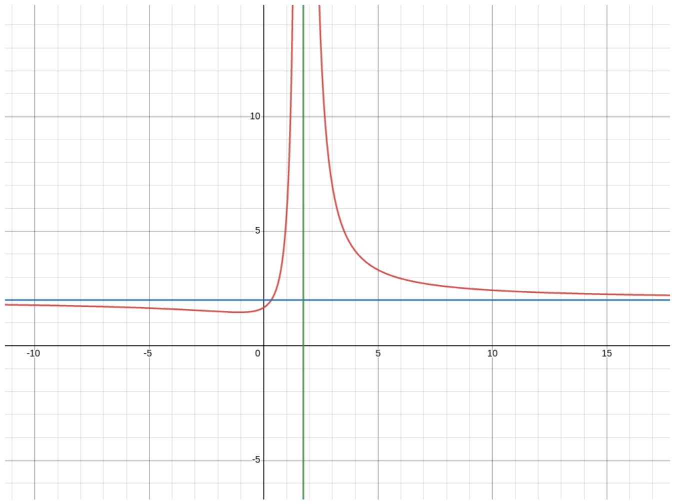
f *est inversible*



f *n'est pas inversible*

Correction de l'exercice 3 ▲

- $\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{3x-1}{(x-\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}-1}{0^+} + 2 = \frac{\text{positif}}{0^+} = +\infty = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{x^2-2\sqrt{3}x+3} + 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{x^2} + 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x} + 2 = \dfrac{3}{-\infty} + 2 = 0+2 = 2$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
- On a $\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty$, donc f admet une asymptote verticale d'équation de $x = \sqrt{3}$ vers $+\infty$. On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- Notons que $f(0) \simeq 1.6 < 2$, donc l'asymptote vers $y = 2$ vers $-\infty$ doit être placée au-dessus du graphe.



Correction de l'exercice 4 ▲

- $h_1'(x) = 6x + 2$.
- $h_2'(x) = (x^4)'sin(x) + x^4(sin(x))' + 1' = 4x^3\sin(x) + x^4\cos(x) + 0$.
- $h_3'(x) = (4x^2)' \cdot \cos'(4x^2) - x' = 8x \cdot (-\sin(4x^2)) - 1 = -8x\sin(4x^2) - 1$.
- $h_4'(x) = x'\log(x) + xlog'(x) + (-3x+1)\exp'(-3x+1) = \log(x) + x/x - 3\exp(-3x+1) = \log(x) + 1 - 3\exp(-3x+1)$.
- $(1/f)' = -f'/f^2$. Donc, $h_5'(x) = \frac{-\arctan'(x)}{\arctan(x)^2} = \frac{1/(x^2+1)}{\arctan(x)^2} = \frac{1}{(x^2+1)\arctan(x)^2}$.
- $h_6'(x) = 1/(x+1)^2 + 8$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. f est continue car c'est un produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \exp(x)$.
2. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ donc le signe de f est le signe de $\sin(x)$. On a $f(-\pi/4) < 0$ car $\sin(-\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$. Et $f(\pi/2) > 0$ car $\sin(\pi/2) = 1 > 0$.
3. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue sur $[-\pi/4, \pi/2]$ et $f(-\pi/4) \cdot f(\pi/2) > 0$ alors il existe un $c \in]-\pi/4, \pi/2[$ tel que $f(c) = 0$.

On a $\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ et $p'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4-1) = 5(x^2+1)(x^2-1) = \underbrace{5(x^2+1)}_{>0}(x-1)(x+1)$. Pour déterminer le signe de p' il suffit donc d'étudier le signe de $(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Donc en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et la monotonie de p on en déduit que :

- Sur $]-\infty, -1]$, p est strictement croissante et continue et $p(-\infty) < 0$ et $p(-1) > 0$ donc p admet une unique racine $p(x_1) = 0$ avec $x_1 \in]-\infty, -1[$.

- Sur $[-1,1]$, p est strictement décroissante et continue et $p(-1) > 0$ et $p(1) < 0$ donc p admet une unique racine $p(x_2) = 0$ avec $x_2 \in]-1,1[$.
- Sur $[1,+\infty[$, p est strictement croissante et continue et $p(1) < 0$ et $p(+\infty) > 0$ donc p admet une unique racine $p(x_3) = 0$ avec $x_3 \in]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Puisque f est dérivable n fois donc toutes ses fonctions dérivées jusqu'à $f^{(n-1)}$ sont continues. De plus, f s'annule $n+1$ fois donc il existe $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{n+1}) = 0$. On a $f(x_1) = f(x_2)$ alors par le théorème de Rolle $\exists c_{1,1} \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c_{1,1}) = 0$. On répète le même processus pour trouver que $f'(c_{1,2}) = 0$, $f'(c_{1,3}) = 0 \ldots f'(c_{1,n}) = 0$. Alors de la même façon nous allons appliquer le théorème de Rolle avec la dérivée de f' c'est à dire $f^{(2)}$. On donne un exemple de la procédure; on a $f'(c_{1,1}) = f'(c_{1,2})$ donc par le théorème de Rolle, il existe $c_{2,1} \in [c_{1,1}, c_{1,2}]$ tel que $(f'(c_{2,1}))' = f^{(2)}(c_{2,1}) = 0$. Comme ça, en répétant, on trouvera $f^{(2)}(c_{2,1}) = f^{(2)}(c_{2,2}) = f^{(2)}(c_{2,3}) = \ldots = f^{(2)}(c_{n-1,2}) = 0$. On reprenant la même idée pour les dérivées supérieur on aboutira à la fin à un nombre $c_{1,n} \in [c_{1,n}, c_{2,n}]$ tel que $f^{(n)}(c_{1,n}) = 0$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. posons $g(t) = ln(t)$. Et soit $x > 0$, la fonction g est dérivable sur $[x, x+1]$ pour tout choix de x. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x, x+1]$, on obtient, qu'il existe un c_x dans $]x, x+1[$ tel que : $\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x} = g'(c_x) = ln(x+1) - ln(x)$. Rappelons que $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$. C'est à dire, $g'(c_x) = ln(\frac{x+1}{x} = ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{c_x}$, car $g'(t) = \frac{1}{t}$.
2. On a $c_x \in]x, x+1[$ donc $\frac{1}{c_x} \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ et $\frac{1}{c_x} = ln(1+\frac{1}{x})$ donc
$$\frac{1}{x+1} < ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$
pour tout $x > 0$.
