Analyse Mathématique - SEG - S1

Chapitre 1 : Fonctions d'une seule variable

Pr. Hamza El Mahjour

Faculté
Polydisciplinaire
Larache
Université Abdelmalek Essaâdi

Théorie des ensembles

Logique

Opérateurs $\longrightarrow$ " $\overline{et}$, $\overline{ou}$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\iff$ "

Quantificateurs $\longrightarrow$ $\forall, \exists$ et $\exists!$

Négation de $\forall$ $\longrightarrow\!\longleftarrow$ $\exists$

Négation de $\overline{et}$ $\longrightarrow\!\longleftarrow$ $\overline{ou}$

Raisonnements

On utilise dans les preuves

1. Contraposée : $P \implies Q \iff \neg Q \implies \neg P$.
2. Absurde : $P(vraie) \implies Q(fausse)$ (contradiction)
3. Récurrence : $P(0), P(1)$ vraies $\overline{et} P(n) \implies P(n+1)$.
4. Contre-exemple : $\exists x, P(x)$ (vraie) $\implies \forall x, \neg P(x)$ (fausse)

Ensemble $\longrightarrow$ collection d'objets

$$\Lambda = \{a, b, c, \ldots, y, z\}.$$

Appartenance : $a \in \Lambda$

Sous-ensemble : $\{b, x, d\} \subset \Lambda$

Soit E et F sont des sous-ensembles de Λ

$$\text{Intersection} : E \bigcap F = \left\{x \in E \ \overline{et} \ x \in F\right\}.$$

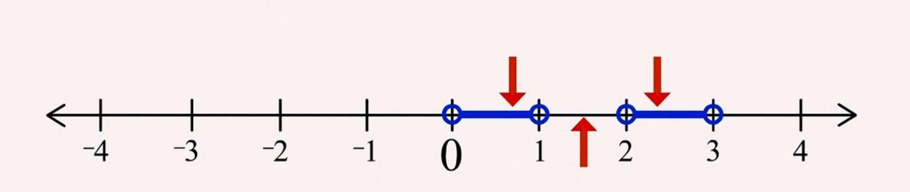
$$\text{Union} : E \bigcup F = \{x \in E \ \overline{ou} \ x \in F\}.$$

$$\text{Difference} : E \setminus F = \{x \in E, \quad x \notin F\}.$$

La droite réelle est composée d'intervalles :

$$[a, b], \quad [a, +\infty[, \quad]a, b] \quad \ldots$$

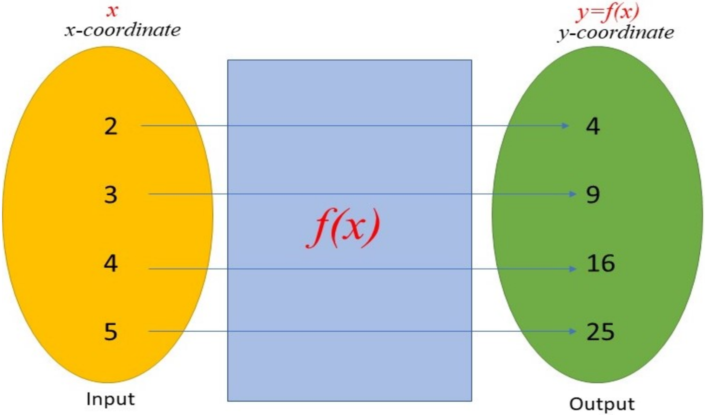
ou bien d'unions de ces ensembles



$$I = [0, 1] \bigcup [2, 3]$$

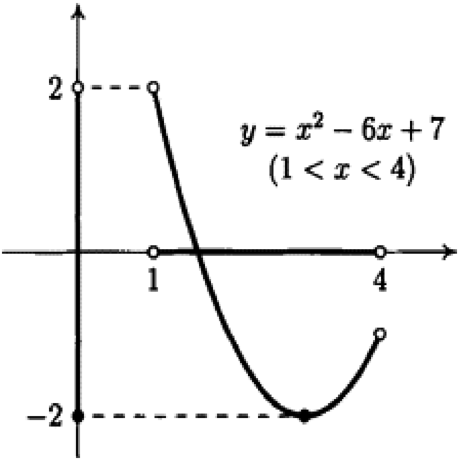
Définition d'une fonction

Une fonction est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'ensemble de départ de la fonction s'appelle **domaine de définition** (noté D_f).



On a le graphe d'une fonction qui est le produit cartésien

$$\{(x, f(x)); \qquad x \in D_f\}.$$



Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction est soit imposé

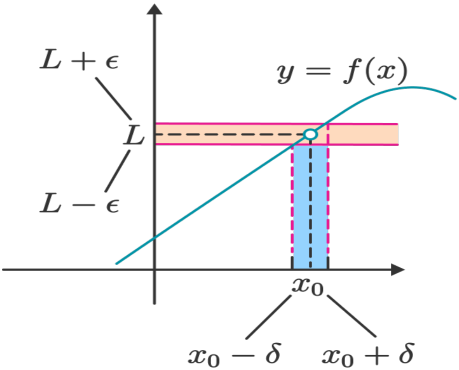
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1, \\ \exp(x) & \text{si} \quad 1 < x < 3. \end{cases}$$

Dans l'exemple précédent, RIEN n'empêche d'étendre f sur tout $\mathbb{R}$.

Que peut restreindre le domaine de définition d'une fonction à partir de son expression algébrique ?

1. $f(x) = \ldots.\sqrt[n]{\ldots x \ldots\ldots\ldots}$, (racine n-ème)
2. $f(x) = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots.x\ldots..}$, (dénominateur)
3. $f(x) = \log(\ldots x \ldots.)$ (logarithme)

Limites



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad | x - x_0 | < \delta \implies | f(x) - L | < \varepsilon.$$

On peut avoir des problèmes à gauche ou à droite !

Opérations sur les limites :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x), \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \\
\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} f\circ g(x) &= \lim_{x\to x_0} f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \\
\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} f(x)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}
\end{aligned}
$$

Formes indéterminées $\bar{\infty} - \bar{\infty}, \bar{\infty}^{\bar{0}}, \bar{0}^{\bar{0}}, \bar{\infty} \times \bar{0}, \frac{\bar{\infty}}{\bar{\infty}}, \frac{\bar{0}}{\bar{0}}$ et $\bar{1}^{\bar{\infty}}$.

Autres limites

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ c'est à dire

$$\forall A > 0, \exists \eta, \quad | x - x_0 | < \alpha \implies f(x) > A$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \quad x > B \implies | f(x) - f(x_0) | < \epsilon.$$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ c'est à dire

$$\forall A > 0, \exists B > 0, x > B \implies f(x) > A.$$

Continuité

On dit qu'une fonction est continue en x_0 ssi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
En pratique, la continuité permet de remplacer par la valeur de $f(x_0)$ lors d'un calcul.
Les fonctions suivantes sont toutes continues sur leur domaines de définition

1. Polynômes : $3x^4 + 5x^2 \ldots$
2. Logarithme et exponentielle : $e^x, \log(x)$
3. Trigos : $\sin(x), \cos(x), \tan x, \ldots$
4. Fractions : $\frac{1}{\text{polynome}}$

Dérivabilité et monotonie

La dérivée d'une fonction au point x_0 est la limite

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si L existe et est finie alors f est dérivable en x_0. On écrit $L = f'(x_0)$.

Proposition

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Le contraire n'est pas juste !

Opérations usuelles sur les dérivées

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}$,
5. $(f(x)^n)' = nf'(x)f(x)^{n-1}$,

Se référer au polycopié pour une liste exhaustive des dérivées de fonctions usuelles (chapitre 1, section).

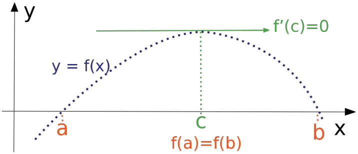
Théorèmes importants

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors f est continue.

Théorème (Rolle)

Si f est dérivable sur $I = [a, b]$ et $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

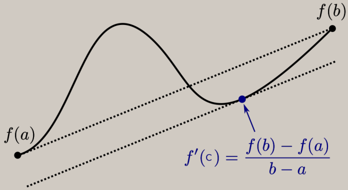


Théorèmes importants

Théorème (Accroissements finis)

Soit f une fonction dérivable sur $I = [a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Pentes et dérivées