

CALCULATRICE NON AUTORISÉE



Samedi 23 décembre 2023

1. (8 points) Soit $f(x) = x^2 e^{-x} - \frac{e^{-1}}{2}$.

(a) Les limites au voisinage de $\pm\infty$ sont :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots = \dots$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots = \dots$

(b) On déduit de la question précédente que :

- f admet
au voisinage de $+\infty$ d'équation

(c) Montrer qu'il existe x_0 dans $]0, 1]$ tel que $f(x_0) = 0$

.....
.....
.....

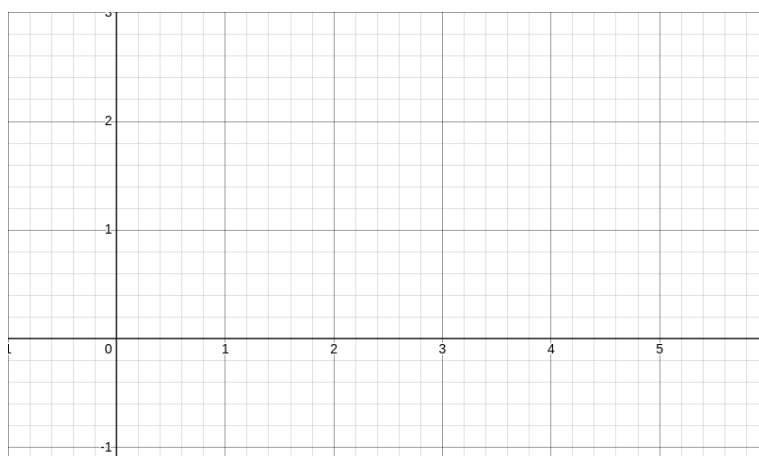
(d) Calculer la dérivée f' et déduire que son signe dépend uniquement du signe de : $2x - x^2$.

.....
.....
.....
.....
.....

(e) Construire le tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$				

(f) Tracez un croquis approximatif du graphe de f :
(Prenez $\frac{e^{-1}}{2} \approx 0.2$)



2. (2 points) Calculez les intégrales suivantes

- $\int_0^1 3x^2 - 1 dx = \dots = \dots$
- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^4 \sin(x) dx = \dots = \dots$

.....
.....
.....

3. ($1\frac{1}{2}$ points) Soit la fonction à deux variables :

$$g(x, y) = \sqrt{x+2} \cdot \ln(y-1).$$

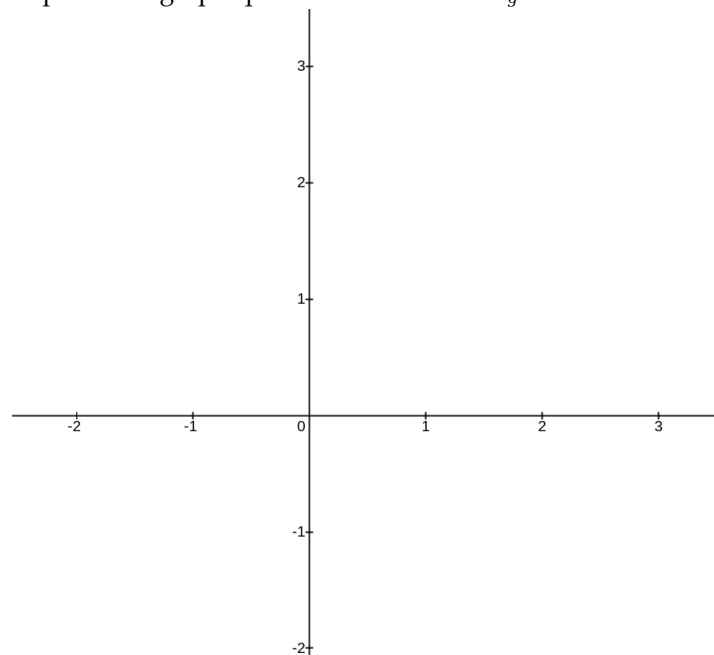
(a) Explicitez le domaine de définition de la fonction g :

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \dots\}$$

$$=$$

$$=$$

(b) Représenter graphiquement le domaine D_g :



4. (4½ points) Soit une autre fonction à deux variables :

$$h(x, y) = x^3 - y^3 + 2x^2 + y^2$$

- Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction h (gradient et hessienne) et montrer que le point critique $(0, 0)$ est un point de minimum local en utilisant les calculs nécessaires.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\nabla_h = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \quad Hess_h = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. (4 points) Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Calculer le déterminant de B par la méthode usuelle

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) En employant la règle de Sarrus, calculer le déterminant de B .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) Donner l'inverse de la matrice B .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....