

CALCULATRICE NON AUTORISÉE  _____ Vendredi 22 décembre 2023

1. ($2\frac{1}{2}$ points) **Questions de cours**

- (a) Donner un exemple d'une tautologie en logique.
- (b) Qu'est ce qu'une application injective de E vers F ?
- (c) Quels polynômes sont irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

2. ($4\frac{1}{2}$ points) Soit f une application de E vers F .

- (a) Montrer que : $\forall A, B \subset E, \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (b) Montrer que : $\forall C, D \subset F, \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
- (c) Construisez un contre-exemple où

$$f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B).$$

3. (5 points) Soit \mathfrak{S}_6 le groupe de permutations sur $\{1, 2, \dots, 6\}$ muni de sa loi de composition usuelle \circ . Voici deux permutations dans ce groupe :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Écrivez σ_1 de façon réduite? Comment appelle-t-on ce type de permutations?
- (b) Décomposez σ_2 en produit d'une transposition et d'un cycle.
- (c) Sans faire de calculs, justifier pourquoi $\sigma_1 \circ \sigma_2 \neq \sigma_2 \circ \sigma_1$.
- (d) Quel est l'ordre de σ_1 ?

4. ($4\frac{1}{2}$ points) Soit $a = 42228$ et $b = 16830$. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$

- (a) Trouver la valeur de d en utilisant l'algorithme d'Euclide.
- (b) Quel est le théorème qui garantit l'existence de deux nombres u et v de \mathbb{Z} tels que $au + bv = d$? Trouver (u, v) .
- (c) Est-ce que $42228^6 - 1$ est divisible par 7? Pourquoi?

5. ($3\frac{1}{2}$ points) (a) Soit $A(X) = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
Montrer que : $D := \text{PGCD}(A, B) = X^2 + 3X + 2$.

- (b) Trouver deux polynômes U, V tels que $AU + BV = D$.
- (c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^3 = 2 + 2\sqrt{3}i.$$