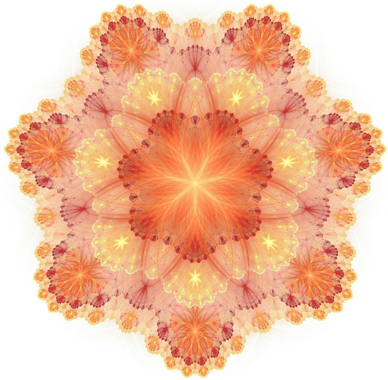
Analyse mathématique :
Notes de cours : Chapitre II

Hamza El Mahjour

Licence 1 : SEG



Analyse mathématique :
Notes de cours : Chapitre II

Hamza El Mahjour

Licence 1 : SEG

Les mathématiques pures sont, à leur manière, la poésie des idées logiques.

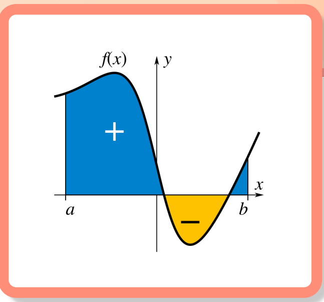
Albert Einstein

Préface

Chers étudiant(e)s, le livre suivant traitera les bases de l'analyse mathématique surtout l'étude des fonctions et leur variations. Plusieurs notions de ce document ont été déjà vu dans le programme de 2ème année de baccalauréat. Quand il s'agit de points techniques qui ne nécessitent pas de compréhension profonde des problèmes il serait bien de jeter un petit coup d'oeil avant d'assister au cours. Dans un premier temps des rappels de cours seront donnés surtout la théorie des ensembles et la logique. Il est primordial de maîtriser ces notions afin de mieux assimiler les démonstrations et les explications données. Le cours couvrira ensuite quatre axes différents et complémentaires aussi. Le premier chapitre concerne les fonctions réelles d'une seule variable, ensuite le deuxième chapitre va traiter les intégrales définies et généralisées. Ensuite, dans le chapitre suivant, un étude des fonctions à plusieurs variables avec des applications surtout sur les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Finalement, l'optimisation des fonctions à travers leurs dérivées partielles sera le dernier point traité dans le quatrième chapitre. Je vous souhaite une bonne lecture.

CE DOCUMENT EST LOIN, TRÈS LOIN D'UNE VERSION FINALE, IL PEUT CONTENIR DES ERREURS ÉVENTUELLEMENT. VEUILLEZ SIGNALER TOUTE ANOMALIE DETECTÉE.

2. Intégrales définies et généralisées



Essayer de faire du calcul intégral et différentiel sans utiliser de fonctions serait l'une des choses les plus inutiles que vous puissiez faire. Si le calcul infinitésimal était une recette, les fonctions seraient le premier ingrédient.

— Adrian Banner

2.1 Introduction : le problème de l'aire

Il est facile de calculer l'aire d'une surface usuelle comme un triangle ou un rectangle. On voit sur la figure 2.1 que la surface verte au-dessous de la courbe de la fonction $f(x) = 3x$ sur l'intervalle $[0, 2]$ est obtenu grâce à la formule $S_1 = \frac{B \times h}{2}$, donc $S_1 = \frac{3 \times 6}{2} = 9$. Et la surface rose est un rectangle, on applique donc la formule $S_2 = L \times l = 4 \times 3 = 12$. Mais imaginez que nous avons envie de calculer l'aire S^*

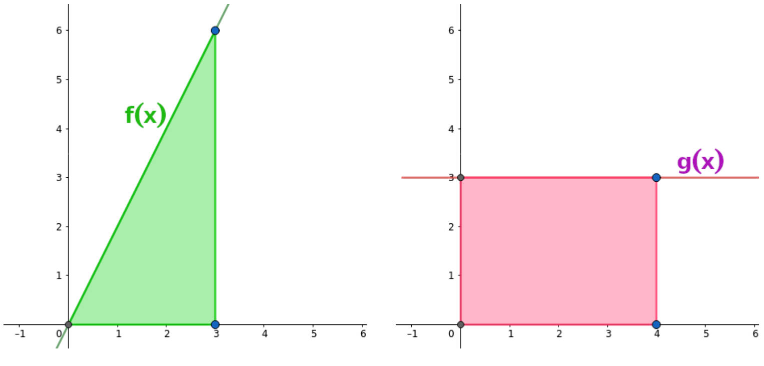


Figure 2.1 – Les courbes successives des fonctions $f(x) = 3x$ et $g(x) = 3$.

au-dessous de la courbe d'une fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Existe-t-il une

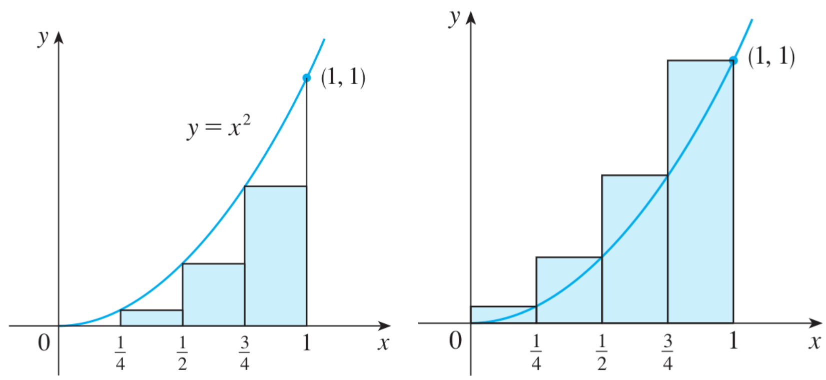


Figure 2.2 – Il y a des rectangles "inférieurs" et d'autres "supérieurs".

formule qu'on peut appliquer ? Eh bien, ce n'est pas tout à fait possible. Néanmoins, on pourrait "approcher" l'aire exacte de cette surface S_* par des aires approximatives. Nous allons effectuer cette approximation en calculant des aires de rectangles d'aire totale majorant et minorant S_* comme il est montré sur la figure 2.2. On commence d'abord par diviser l'intervalle $[0, 1]$ en quatre parties égales $[0, \frac{1}{4}]$, $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ et $]\frac{3}{4}, 1]$. Nous allons nommé S_{M_4} la somme des aires des rectangles dépassant S^*. S_{m_4} sera la somme des aires rectangles inférieur à S^*. On a bien sûr $S_{m_4} \leq S^* \leq S_{M_4}$. En fait, la largeur et la longeur de chaque rectangle est facilement obtenu on multipliant la longueur de chaque sous-intervalles par l'image de f au point d'extrêmité. Plus précisément, nous allons calculer les sommes S_{m_4} et S_{M_4} de la façon suivante

$$
\begin{aligned}
S_{m_4} &= \frac{1}{4} \cdot f(0) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{3}{4}) \\
S_{M_4} &= \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \cdot f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{4} \cdot f(1).
\end{aligned}
$$

Ce qui donne à peu près l'estimation

$$0,21 < S^* < 0,46.$$

On peut penser à raffiner encore l'intervalle $[0, 1]$ en le divisant en $n = 5; 6; 7; \ldots$ sous-intervalles. Pourquoi cette subdivision ? Pour mieux approcher la valeur exacte de S^* par S_{m_n} et S_{M_n}. On remarque que plus le nombre sous-intervalles considérés est grand plus la différence entre la surface exacte S^* et la somme des aires des rectangles diminue. On a éventuellement pour $n = 8$ l'estimation $S_{m_8} \simeq 0,27 \leq S^* \leq 0,39 \simeq S_{M_8}$. Quand $n = 16$, on obtient $S_{m_{16}} \simeq 0,30 \leq S^* \leq 0,36 \simeq S_{M_{16}}$. Et pour $n = 50$, $S_{m_{50}} \simeq 0,32 \leq S^* \leq 0,34 \simeq S_{M_{50}}$. L'idée donc pour trouver la valeur exacte de S^* est de faire tendre n vers l'infini. C'est ainsi que se définit la **somme de Riemann** !

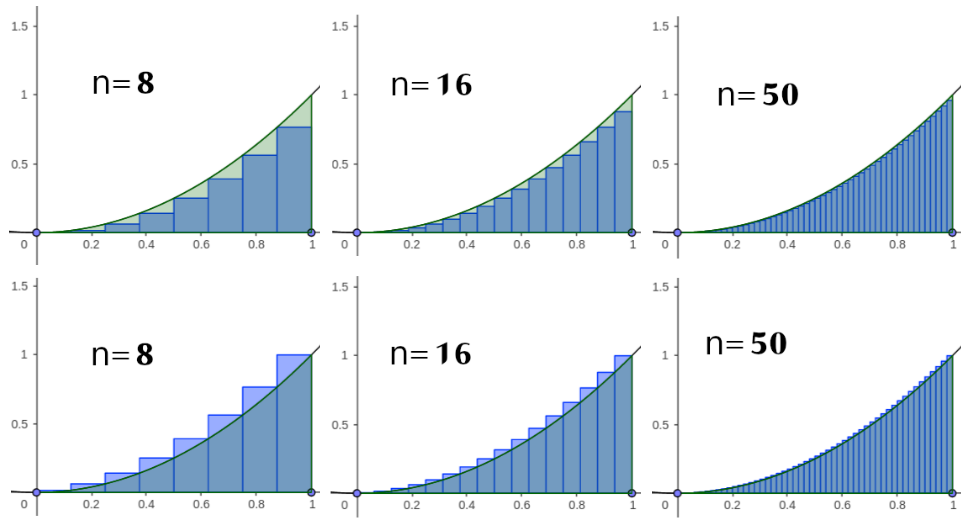


Figure 2.3 – De gauche à droite, le nombre de sous-intervalles augmente. Les sommes inférieurs S_{m_n} (première ligne) et supérieurs S_{M_n} s'approchent de S^*

.

2.2 Intégrale au sens de Riemann

Définition 2.1: Somme de Riemann

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On divise cet intervalle en n sous-intervalles de longeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. On pose $a = x_0; x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ tels que $x_k = a + k\Delta x$. On considère aussi des points $x_1^*, \ldots, x_n^*$ tels que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$. On appelle **l'intégrale au sens de Riemann** de f entre a et b la quantité

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Si cette limite existe et est finie, on dit que f est **Riemann intégrable** ou **intégrable au sens de Riemann**.

Proposition 2.1

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ alors elle est intégrable au sens de Riemann.

Remarques

1. Une fonction peut être continue sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert et pas forcément intégrable. Par exemple, essayez de trouver subdivision et des rectangles avec une somme d'aires finie pour couvrir la surface au-dessous du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$.
2. Une fonction discontinue, peut être intégrable, si les dicosntinuités sont assez "gentils".
3. L'intégrale de Riemann se base sur une limite d'une série numérique, c'est à dire que nous vons besoin d'avoir un bagage fort en séries numériques pour pouvoir calculer l'intégrale. Hors, ceci dépasse les objectifs de ce cours. C'est pourquoi que nous avons besoin d'un autre moyen pour surmonter cette difficulté.

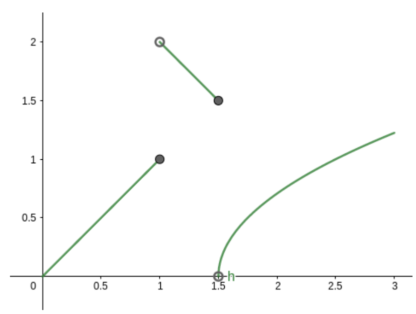
Dans la remarque 2 de la liste des remarques précédentes, il est dit que les discontinuité doivent être "gentils", c'ets une expression qui n'est ni rigoureuse ni mathématique. Mais pour comprendre son sens voici deux exemples.

Exemple 2.1

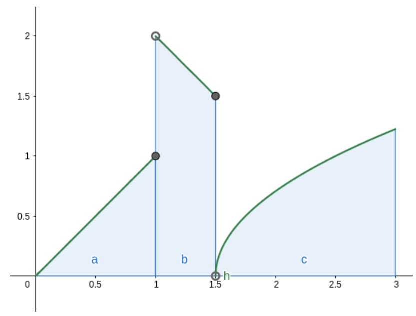
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 3]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ 3 - x & \text{si} \quad x \in]1, \frac{3}{2}], \\ \sqrt{x - \frac{3}{2}} & \text{si} \quad x \in]\frac{3}{2}, 3] \end{cases}$$

La fonction f a deux discontinuités aux points 1 et $\frac{3}{2}$.



Mais ces discontinuités ne présente guère un problème car on obtient facilement l'aire de la surface au- dessous si on la partage en trois parties a,b et c et on traite les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 3 - x$ et $x \mapsto \sqrt{x - \frac{3}{2}}$.



Problème résolu ! Fonction intégrable.

2. Qu'en est-il de la fonction suivante ?

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1], \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \bigcap [0,1]) \,, \end{cases}$$

Comme dit Banner dans [4], je cite : "C'est une fonction assez étrange. Il y a plein de nombres rationnels et irrationnels entre 0 et 1. En fait, entre tous les deux nombres rationnels, il y a un nombre irrationnel, et entre tous les deux nombres irrationnels, il y a un nombre rationnel ! Les valeurs de $g(x)$ sautent entre les hauteurs 1 et 2 plus rapidement que vous ne pouvez l'imaginer. Il n'y a aucune connectivité dans les segments de ligne ci-dessus aux hauteurs 1 et 2 : ils sont pleins de trous. La fonction est en fait discontinue partout." Alors que devrait représenter $\int_0^1 g(x)dx$ au sens de Riemann ? Quand on essaie de couvrir g par des rectangles supérieurs et inférieurs on échoue à trouver une limite commune des deux ! Donc g n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Rassurez-vous, des fonctions "méchantes" comme g ne feront pas l'objet de notre étude dans ce cours. Il est important de noter que l'approche précédentes a été basée sur des exemples où la fonction est positive. Comment alors calculer l'intégrale d'une fonction négative $h(x)$? La question est simple car il suffit de considérer $-h(x)$ qui est positive pour calculer l'intégrale et ensuite multiplier le résultat par -1.

> La variable d'intégration est dite "muette" car $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(u)du \ldots$.

2.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

L'intégrale de Riemann présente des propriétés importantes qu'on peut résumer dans ce qui suit.

Propriétés 2.1

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$ (Chasles)
4. $\displaystyle\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$, où $C \in \mathbb{R}$.
5. $\displaystyle\int_a^b Cdx = C \cdot (b-a).$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
7. $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$
8. Si $f(x) \geq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. En particulier, $f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
9. Soient $m \leq M$ dans $\mathbb{R}$. Si $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$.

Il y a aussi des propriétés spécifiques eux fonctions impaires et paires.

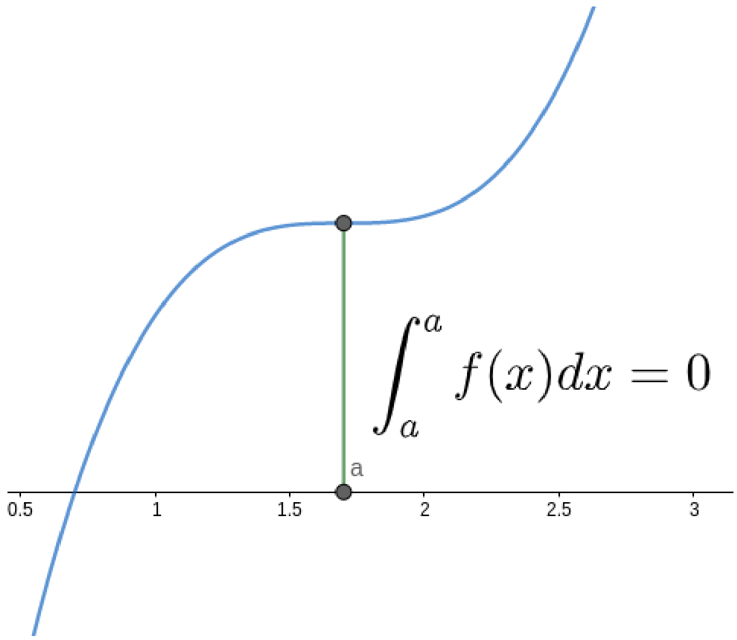
Propriétés 2.2

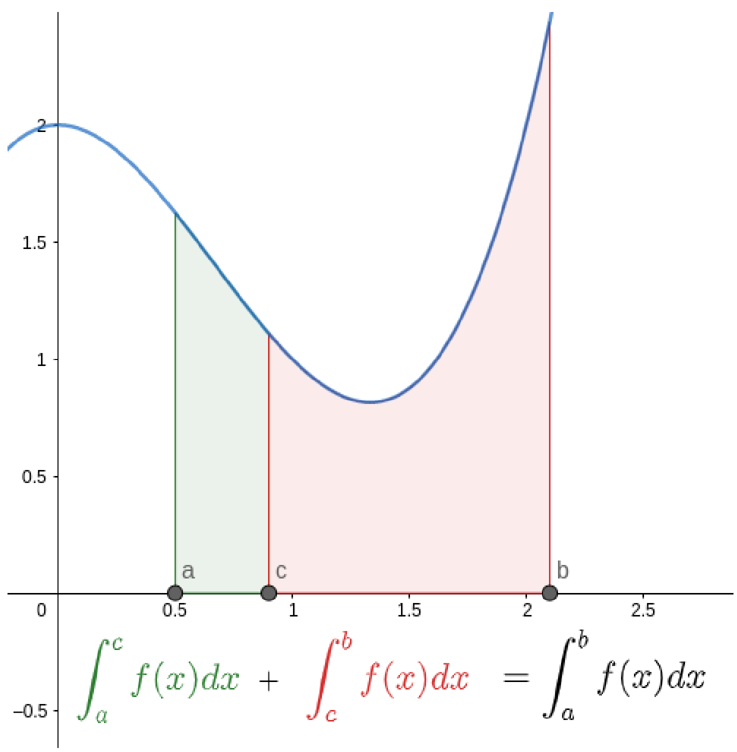
Soit $a > 0$ et f une fonction intégrable sur $I = [-a, a]$.

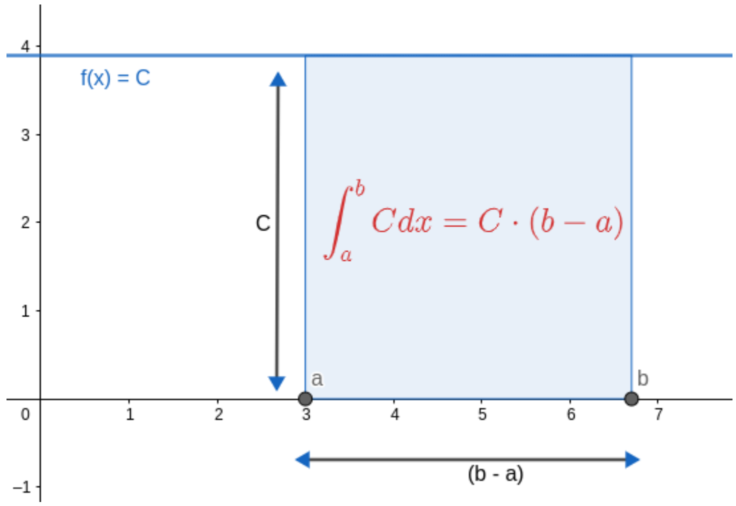
(i) Si f est impaire sur I alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

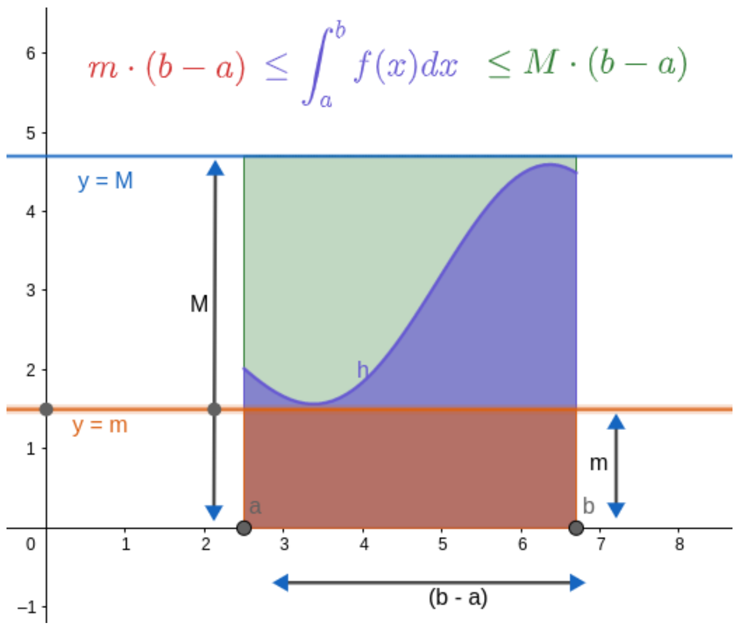
(ii) Si f est paire sur I alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Voici une démonstration graphique de certaines propriétés précédemment données


$\int_a^a f(x)dx = 0$
a
0.5
1
1.5
2
2.5
3


2
1.5
1
0.5
0
−0.5
a
c
b
0.5
1
1.5
2
2.5
$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$





Attention, l'intégrale n'est pas compatible avec la multiplication et la division !

2.4 L'intégrale et la dérivation

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'utilisation des sommes de Riemann nécessite une connaissance des séries entières. Nous avons besoin d'un outil sophistiqué afin de nous aider à calculer les intégrales de façon plus imple et plus directe. Il s'avère qu'en analyse, ce moyen est considéré fondamental car il mettra en relation deux principes, qui jusqu'à l'instant, n'ont rien de commun entre eux.

Théoreme 2.1: Théorème fondamental de l'analyse 1

Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction g définie telle que

$$g(x) = \int_a^x f(u)du, \qquad \forall x \in [a, b]$$

est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est $g'(x) = f(x)$.

On considère donc que l'intégrale et la dérivée sont des opérations inverse, comme si l'intégrale était une "anti-dérivée". C'est ce qui est clairement illustré par le théorème suivant qui n'est autre qu'une reformulation du précédent.

Théoreme 2.2: Théorème fondamental de l'analyse 2

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors f admet une **primitive** F telle que $F'(x) = f$ et on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Alors maintenant, nous n'avons plus besoin de connaître des séries numériques dans ce cours pour pouvoir effectuer du calcul intégral simple. En effet, il suffit de bien connaître les dérivées des fonctions usuelles mais aussi les règles de dérivation du produit de deux fonctions,quotient de deux fonctions,composée de deux fonctions . . ..
Traitons l'exemple vu au début de ce chapitre pour connaître précisément la valeur de $S^* = \int_0^1 x^2 dx$. En effet, nous cherchons une fonction $F(x)$ telle que si on la dérive on trouve $f(x) = x^2$. On peut penser à $F(x) = x^3$. Sa derivée est $F'(x) = 3x^2$, ce qui est presque ce qu'on veut. Or, on sait que les constantes n'ont pas de sérieux problèmes avec l'intégrale, donc on peut légèrement modifier F pour se débarasser du 3 en dérivant ; on prend $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, cette fois-ci $F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$ ce qui est bien ce que nous cherchons. Donc, $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} = 0,3333...$. Maintenant, nous sommes sûrs de la valeur de S^* qui nous était mystérieusement cachée au début de ce chapitre !

2.5 Intégrales indéfinis

Nous avons jusqu'à maintenant utilisé des intégrales entre deux bornes a et b. Le résultat trouvé est une valeur numérique. Mais, comme nous l'avons vu grâce au théorème fondamental de l'analyse, on doit connaître une fonction "anti-dérivée" pour calculer une intégrale. Ceci dit, quand l'intégrale est spécifiée entre deux bornes précises on parle de **l'intégrale définie**. Sinon, si nous cherchons une famille de fonctions **primitives** sans forcément nous intéresser aux bornes, on parle de **l'intégrale indéfinie** qui est notée $\int f(x)dx$ et qui représente la familles des primitives de f. En effet, si on trouve une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$ alors notez que $G(x) = F(x) + C$, où C est une constante, permet d'obtenir la même dérivée. C'est à dire que $G'(x) = F'(x) = f(x)$ car la dérivée d'une constante est nulle. Donc la famille des primitives de f est

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

2.6 Techniques de l'intégration

Intégration par parties

Proposition 2.2

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. On a la relation suivante sur I.

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Démonstration. Puisque u et v sont continuement dérivables. La fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = u(x)v(x)$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. En intégrant les deux membre de l'égalité précédente on obtient $\int f'(x)dx = \int \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\, dx$. Donc $f(x) = u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$. Donc

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

□

Exemple 2.2

Calculons la primitive de $f(x) = x^2 e^x$. Nous allons appliqué l'intégration par parties deux fois. Posons $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$ donc $u'(x) = 2x^2$ et $v(x) = e^x$. Alors

$$\int f(x)dx = \int x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right] - 2\int x e^x dx$$

Posons une deuxième fois $p(x) = x$ et $q'(x) = e^x$ donc $p'(x) = 1$ et $q(x) = e^x$. Alors

$$\int x e^x dx = [x e^x] - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

Finalement,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - e^x\right) = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x.$$

Formules de changement de variables pour une primitive

Proposition 2.3: Première formule de changement de variables

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, ϕ une application de I dans J dérivable et f une application de J dans $\mathbb{R}$ continue. Si F est une primitive de $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ sur I. On note

$$\int f(\phi(x)) \cdot phi'(x) dx = \left[\int f(t) dt\right]_{t=\phi(x)}$$

, et on dit qu'on a effectué le changement de variables $t = \phi(x)$.

Démonstration. La preuve est basée sur la dérivée de la comosée de deux fonctions. C'est à dire si $F' = f$

$$(F \circ \phi)' = \phi' \cdot F' \circ \phi = \phi' \cdot f \circ \phi.$$

□

Exemple 2.3

Calculons la primitive de $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}$. Ce qui nous pousse à choisir le changement de variable $t =$

x^2+1. Alors $\frac{dt}{dx}=2x$ donc $\frac{1}{2}dt = xdx$ et $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{t}$. Ce qui donne

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int (\sqrt{t})'dt = \left[\sqrt{t}\right]_{t=x^2+1} = \sqrt{x^2+1}.$$

Proposition 2.4: Seconde formule de changement de variable

On considère les mêmes hypothèses que la proposition 2.6 et en plus, on suppose que ϕ est une bijection de I dans J telle que ϕ soit dérivable de dérivée non-nulle. Si H est une primitive de $(f\circ\phi)\cdot\phi'$ sur I alors $H\circ\phi$ est une primitive de f sur J. On note

$$\int f(t)dt = \left[\int f\left(\phi(x)\right)\phi'(x)dx\right]_{x=\phi^{-1}(t)}.$$

On dit que l'on a effectué le changement de variable $x=\phi^{-1}(t)$.

Démonstration. La démonstration se base simplement sur la dérivée de la réciproque ϕ^{-1},

$$\forall x\in J, \left(\phi^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\phi'\left(\phi^{-1}(x)\right)}.$$

□

Exemple 2.4

Calculons la primitive de $f: t\mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1,1[$. On considère $\phi(x)=\sin(x)$ pour $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Ainsi, ϕ est dériable et de dérivée $x\mapsto\cos(x)$. On sait que la réciproque de ϕ est $\phi^{-1}(t)=\arcsin(t)$. Ma primitive de f sur $]-1,1[$ est $H\circ\phi^{-1}$ où h est une primitive de $h=(f\circ\phi)\cdot\phi'$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. On a

$$h(x)=\frac{\sin^2(x)cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{|\cos(x)|} = \sin^2(x),$$

car $\cos(x)>0$ pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Finalement on obtient

$$\int f(t)dt = \left[\int f(\phi(x))\phi'(x)dx\right]_{x=\phi^{-1}(x)} = \left[\int \sin^2(x)\right]_{x=\phi^{-1}(x)} = \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_{x=\arcsin(t)}$$

Alors,

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\left(\arcsin(t)-\sqrt{1-t^2}\}\right).$$

2.6.1 Résultat de moyenne

La proposition suivante est la version "intégrale" des accroissements finis

Proposition 2.5

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c).$$

Démonstration. La preuve est basée sur le théorème des accroissements finis. Puisque f est intégrable, elle admet une primitive F dérivable sur $[a, b]$ donc il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c),$$

et on sait que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ et $F'(c) = f(c)$. Donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c).$$

□

Bibliographie

[1] CORE ECON Project. The elasticity of demand. https://www.core-econ.org/the-economy/book/text/leibniz-07-08-01.html/, 2008. [Online ; accessed 10-October,2021].

[2] James Stewart. Calculus 7th edition. *Chapter*, 11 :656–709, 2012.

[3] Frédéric Sturm Stéphane Balac. *Algèbre et analyse : Cours mathématiques de première années avec exercices corrigés*. PPUR, 2e edition, 2009.

[4] Adrian Banner. *The Calculus Lifesaver : All the Tools You Need to Excel at Calculus*. Princeton University Press, 2007.

[5] Alexandre Vidal. *Cours de méthodes mathématique 3 : Licence 2 économie et gestion*. Université d'Evry-Val-d'Essone, 2011.