Mathématiques :
Notes de cours : Chapitre I

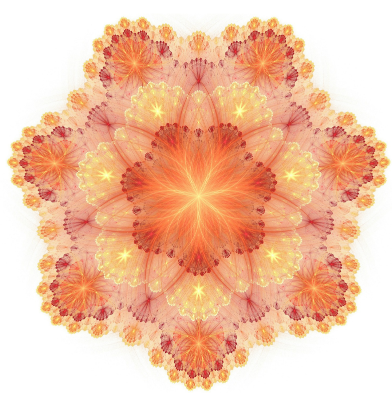
Hamza El Mahjour - 2023/2024

1$^{\text{ère}}$ année de Licence : SEG

Mathématiques :
Notes de cours : Chapitre I

Hamza El Mahjour - 2023/2024

1ère année de Licence : SEG



Les mathématiques pures sont, à leur manière, la poésie des idées logiques.

Albert Einstein

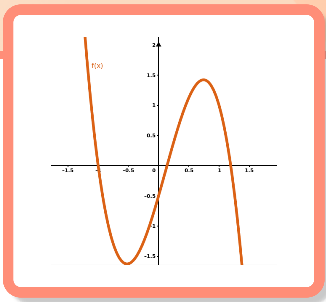
Préface

Chers étudiants, ces notes de cours ont été conçues spécialement pour mieux accompagner les étudiants de première année en économie et en gestion afin de leur fournir le matériel nécessaire dont ils auront besoin pour ce module. Il est important de savoir qu'il existe d'autres sources qui sont riches en exemples et en exercices qui peuvent aussi vous aider à mieux assimiler les notions que nous allons voir ensemble. Avec le pacte ESRI l'intitulé et le descriptif de ce module ont changé. Désormais, son appellation est : Mathématiques et les chapitres traités sont : Les fonctions réelles à une seule variable pour le premier chapitre. Les fonctions à plusieurs variable pour le deuxième. Au troisième chapitre on traitera l'optimisation continue et finalement on aboutit au calcul matriciel dans le dernier chapitre. Les outils que vous allez voir dans ce cours seront utilisés dans d'autres modules, non forcément mathématiques, comme celui de la micro-économie par exemple. Je vous souhaite une très bonne lecture et je vous incite à signaler toute anomalie détectée dans ces notes de cours. Je vous conseille vivement de consulter, si possible, les références citées dans la partie bibliographie, vous allez certainement profiter et mieux aborder les exemples et les détails qui ne sont pas présents dans ces notes de cours.

1 Les fonctions numériques réels 1

1.1 Introduction aux fonctions 2
1.2 Limites et continuité 5
1.3 Dérivée d'une fonction 12
1.4 Fonctions usuelles et règles de dérivation 12
1.5 Rappels sur les fonctions logarithmes, exponentielles et trigonométriques 14

1. Les fonctions numériques réels



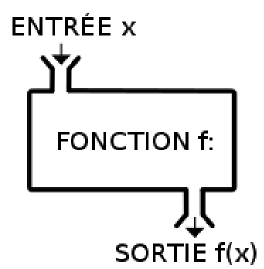
Essayer de faire du infinitésimal sans utiliser de fonctions serait l'une des choses les plus inutiles que vous puissiez faire. Si le calcul infinitésimal était une recette, les fonctions seraient le premier ingrédient.

— Adrian Banner

1.1 Introduction aux fonctions

On a déjà vu la définition d'une application de E dans F. Une fonction réelle est un cas particulier d'applications. Une fonction f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On appelle D_f le domaine de définition de la fonction f. Pour abrévier on note

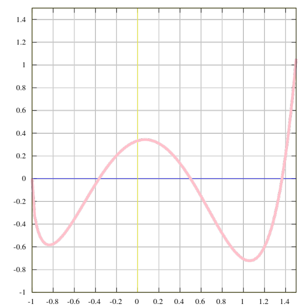
$$\begin{array}{llll} f: D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$



Il est utile de voir la fonction f comme une "machine". Si on prend x dans le domaine D_f. Alors x a le droit de rentrer dans cette machine car les autres éléments $\overline{x} \notin D_f$ peuvent "endommager" cette machine s'ils sont utilisés. Dans ce cas x subira des transformations et sortira de la machine sous la forme $f(x)$ (voir figure ??). Considérons $f(x) = \sqrt{x}$. Déjà on peut remarquer que si $x < 0$, on ne pourra pas calculer sa racine carrée, par conséquent $D_f = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 0\}$. Or, cette machine convertit tous les nombres qu'on met dedans en racine carrée de ce nombre $2 \mapsto \sqrt{2}$, $9 \mapsto \sqrt{9} = 3$ etc. Il y a aussi une autre façon de visualiser une fonction f par son graphe. Le graphe d'une fonction f est le produit cartésien C_f où

$$C_f = \{(x; f(x)) ; \qquad x \in D_f\} .$$

Le graphe f nous donne un aperçu de l'historique et le future de f et peut nous aider à les imagine quand x tend vers $\pm\infty$. Pour les domaines de définitions et l'étude des fonctions réels, on préfère utiliser des notations d'**intervalles** plutôt qu'une écriture ensembliste. On donne dans ce qui suit les différents intervalles possibles dans $\mathbb{R}$.



$$\begin{aligned}
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x < b\} ,\\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\} ,\\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\} ,\\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\} ,\\
]a; +\infty[&= \{x \in \mathbb{R}; \quad x > a\} ,\\
[a; +\infty[&= \{x \in \mathbb{R}; \quad x \geq a\} ,\\
]-\infty; b[&= \{x \in \mathbb{R}; \quad x < b\} ,\\
]-\infty; b] &= \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq b\} ,\\
]-\infty; +\infty[&= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Comment trouver en pratique ce domaine de définition.
Quand on étudie une fonction, une des choses primordiales à trouver est son domaine de définition. Comme on l'a déjà aperçu avec la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, elle ne peut être définie sur tout $\mathbb{R}$ car la racine d'un nombre négative n'est pas définie. Bon, on a compris que c'est vilain de prendre des racines négatives mais quoi d'autre pourrait causer des problèmes ? Voici les trois les plus communes qui réduisent le domaine de définition d'une fonction

1. Le dénominateur d'une fraction ne peut être nul.
2. On ne peut pas prendre la racine $n-$ème d'un nombre négatif.
3. On ne peut pas prendre le logarithme népérien d'un nombre négatif ou nul.

Exemple 1.1.
déterminons le domaine de définition de la fonction $h(x) = \frac{\log(x+2)}{\sqrt{x}}$*. D'abord, pour le logarithme on a la condition* $x+2 > 0$*. Pour le dénominateur on a la condition* $\sqrt{x} \neq 0$ *et pour la racine carrée* $x \geq 0$*. Si on combine les trois conditions on trouve que le domaine de définition est* $D_h =]0; +\infty[$.

Fonction	Domaine de définition
constante a	$\mathbb{R}$
$a_n x^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$
$Ln(x)$	$]0; +\infty[$
$\sqrt[n]{x}$	$[0, +\infty[$
$\exp x$	$\mathbb{R}$

Des fois, même si l'expression algébrique de d'une fonction permet de la définir sur tout $\mathbb{R}$ ou un intervalle infini, on peut imposer de se restreindre sur une partie de cet intervalle.

Voici une liste non-exhaustive de certaines fonctions usuelles et leur domaine de définition

Définition 1.1: Parité des fonctions

On dit que f est une fonction **paire** (**impaire**) si pour tout $x \in D_f$ son opposé $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$

D'un point de vue géométrique, une fonction paire a un graphe qui est auto-symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Un fonction impaire a un graphe qui a une symétrie centrale de tout son graphe par rapport à l'origine. On peut consulter la figure 1.1.

Exemple 1.1: (détaillé)

1. La fonction $g(x) = x^2 + 5$ est pair car $g(-x) = (-1)^2 + 5 = x^2 + 5 = g(x)$.
2. La fonction $f(x) = \frac{2x^3+x}{3x^2+5}$, on a

$$f(-x) = \frac{2(-x^2) + (-x)}{3(-x^2) + 5} = \frac{-(2x^3 + x)}{3x^2 + 5} = -f(x).$$

Donc f est une fonction impaire.

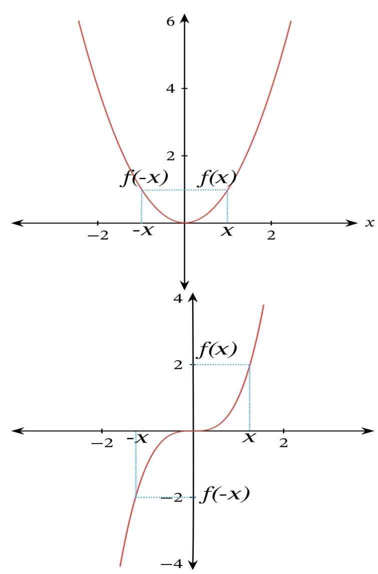


FIGURE 1.1 – Paire (en haut). Impaire (en bas).

Une fonction peut avoir des expressions algébriques différentes sur différents domaines de $\mathbb{R}$. On l'appelle dans ce cas une **fonction par morceaux**. Voici quelques exemples

Exemple 1.2.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ 5x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < -2, \\ 10 & \text{si} \quad x = -2, \\ \exp x & \text{si} \quad x > -2. \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 6x - 3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \log(x+1) - 3 & \text{si} \quad 1 < x \leq 4, \\ \cos x & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$

Définition 1.2

1. Une fonction est croissante (strictement croissante) si $f(x) \leq f(y)$ pour tout $x < y$ ($f(x) < f(y)$).
2. Une fonction est décroissante (strictement décroissante) si $f(x) \geq f(y)$ pour tout $x < y$ ($f(x) > f(y)$).

Exemple 1.3.
La fonction $x \mapsto x^2$ *est strictement croissante sur* $[0, 5]$*. La fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *est décroissante strictement sur* $]0, +\infty[$.

1.2 Limites et continuité

Le calcul infinitésimal n'existerait pas sans le concept des limites. Pour comprendre l'idée de base, on va considérer une fonction f et un point a de l'axe des abscisses. Ce qu'on veut comprendre est le comportement de $f(x)$ quand x est très proche de a mais pas égal à a. Pourquoi on peut s'intéresser à ce comportement ? On supposera que le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que $f(x) = x - 1$. Si on trace la fonction on obtient le graphe montré ci-contre. On a envie de dire que l'image de $a = 2$ par la fonction f est 1, mais on ne peut pas écrire que $f(2) = 1$ car f n'est pas définie en $a = 2$. Par contre on peut s'approcher

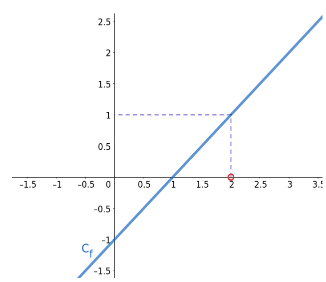


FIGURE 1.2 – $f(x)$ s'approche de 1 quand x s'approche de 2.

autant que veut de $a = 2$ et voir ce qui se passe. $f(1.99) = 0.99, f(2.0001) = 1.0001, f(1.99999) = 0.99999$ etc. Nous pouvons conjecture que quand x est très très proche de $a = 2$ alors $f(x)$ est très très proche de 1. Pour exprimer cette idée mathématiquement on écrit $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ et on dit $f(x)$ **tend vers** 1 quand x **tend vers** 2. On peut dire aussi, la limite de f quand x tend vers 2 est égal à 1. Supposons maintenant que nous définissons presque la même fonction précédente avec un petit changement : $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, \\ 3 & \text{si} \quad x = 2. \end{cases}$ On voit bien que $g(2) = 3$, mais en s'approchant de 2 sans l'attendre, les valeurs de $g(x)$ tendent vers 1 et non pas 3. C'est à dire que la limite reste la même et ne dépend pas de la valeur imposée en 2. C'est à dire que $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 1$. Voici maintenant la définition formelle d'une limite de fonction en un point a.

Remarques 1.1. *Si f est une fonction constante $f(x) = a$ pour tout x. On a $\lim_f(x)x \to x_0 = a$ quelque soit x_0. Cette remarque est presque évidente si on comprend bien le fonctionnement d'une fonction constante qui va tout simplement prendre la même valeur et donc va être toujours égale à cette constante partout dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.3: Limite finie d'une fonction

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

En d'autres termes, quand $f(a)$ est dans l'intervalle $J =]f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon[$, on trouvera certainement un intervalle $I =]f(a)-\alpha_\epsilon, f(a)+\alpha_\epsilon[$ autour de a tel que $f(I) \subset J$ et ceci pour un ϵ infiniment petit comme le montre la figure 1.3.

Les propriétés suivantes sont vraies. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$,
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = L_1 \times L_2$,
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$.

De plus si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = L$.

Dans ce qui suit nous allons définir le concept de continuité d'une fonction.

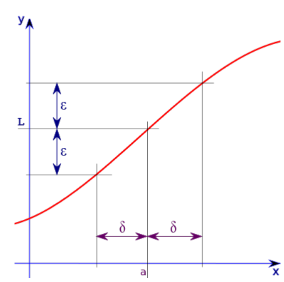


FIGURE 1.3 – $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Définition 1.4

On dit que la fonction f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans l'exemple déjà discuté où $g(x) = x - 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $g(2) = 3$, on peut voir que $lim_{x\to 2} g(x) = 3 \neq g(2)$. Ce qui veut dire que g n'est pas continue en 2. Intuitivement, le graphe d'une fonction continue peut être tracé avec un stylo sans jamais lever le stylo alors que le tracé d'une fonction discontinue est rompu dans certains points.

Définition 1.5

1. Une **fonction polynomiale** est une fonction de la forme
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$
2. Une **fonction rationnelle** est une fonction qui est un quotient de deux polynômes. C'est à dire
$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

Le domaine de définition d'une fonction rationnelle est
$$\mathbb{R} \setminus \{\text{racines réelles du polynôme au dénominateur}\}$$
.

Théoreme 1.1

1. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$
2. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Démonstration. 1. On remarque qu'une fonction f polynomiale est une somme de fonctions de la forme a_ix^i avec un premier terme qui est constant a_0. Soit x_0 un nombre quelconque de $\mathbb{R}$. On sait que $\lim_{x\to x_0} a_0 = a_0$. Pour les autres termes on a $\lim_{x\to x_0} a_ix^i = a_ix_0^i$. Donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_ix_0^i = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0)$.
2. De même si on évite les x_0 qui provoquent le fait que le dénominateur soit nul, alors on aurait la fraction de deux fonctions continues qui est sera continue aussi. □

Il existe une notion en analyse qui permet d'approcher soit à gauche "$^-$" soit à droite "$^+$" n'importe quel point. On dit que x tend vers x_0 **à gauche** si on prend seulement des valeurs de $x < x_0$. On dit que x tend vers x_0 **à droite** si on prend seulement des valeurs de $x < x_0$. On note la limite à gauche $\lim_{x \to x_0^-}$ et à droite $\lim_{x \to x_0^+}$ On a des cas de limites importants qui restent à présenter ici. Ce sont les cas montrés sur la figure 1.4 Sans faire de calcul, on remarque que la droite vertical

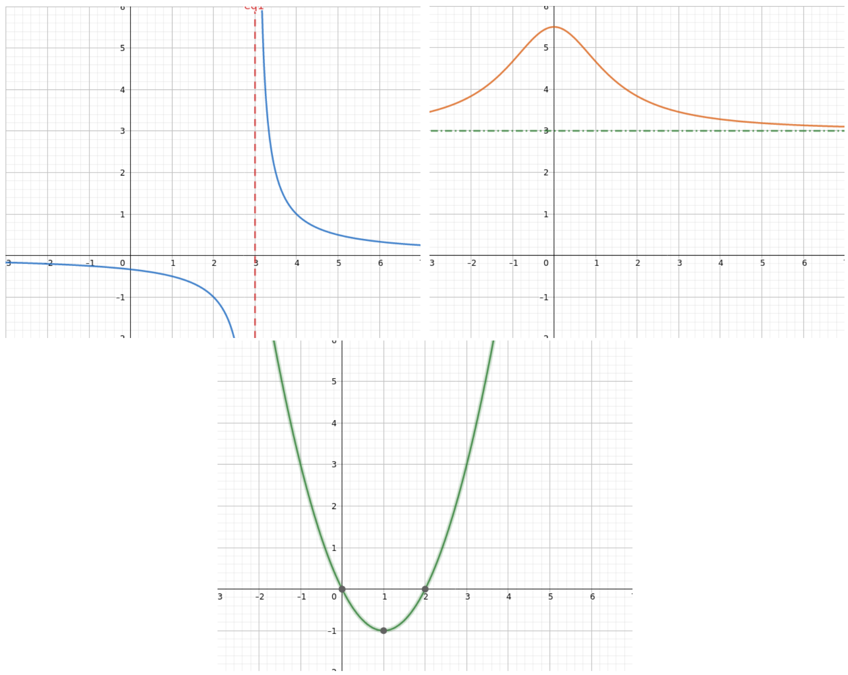


Figure 1.4 – Les deux graphes du haut de gauche à droite représentent consécutivement $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{5}{x^2+2} + 3$ et le graphe d'en bas est celui de $h(x) = x^2 - 2x$.

orange en pointillés n'est jamais atteinte par le graphe en bleu de la fonction f. En fait quand x s'approche de $x_0 = 3$ du côté droit les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grande et tendent vers l'infini. En s'approchant du même point du côté gauche les valeurs de f deviennent de plus en plus petites et convergent vers $-\infty$ (**asymptote verticale**). Pour le graphe orange de g, on remarque que $f(x)$ s'approche de $y = 3$ quand x tend vers l'infini (**asymptote horizontale**). Pour le troisième graphe figure on remarque que h devient grand quand x devient grand aussi. Plus précisément, on écrit : $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 3$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Propriétés 1.1

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.
3. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.
4. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.
5. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^+$ alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
6. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0^+$ alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
7. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$.
8. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^-$.

$$\lim_{x \to 0^-} x^n = \begin{cases} 0^+ & \text{si} \quad n \text{ pair} \\ 0^- & \text{si} \quad n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ impair} \end{cases}$$

Exemple 1.2: Important

— $\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^5} = \frac{3}{\lim_{x \to 0^+} x^5} = \frac{3}{0^+} = +\infty$,

— $\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^5} = \frac{3}{\lim_{x \to 0^-} x^5} = \frac{3}{0^-} = -\infty$,

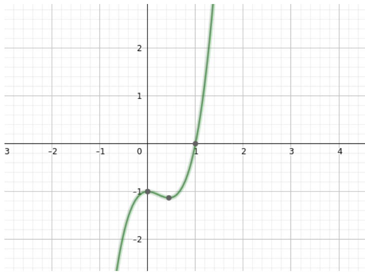
— $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^5} = \frac{3}{\lim_{x \to \infty} x^5} = \frac{3}{+\infty} = 0^+$,

Propriétés 1.2: Limites utiles

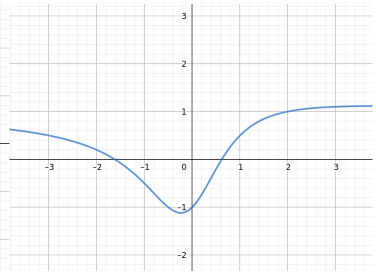
Supposons que $a_m \neq 0$ et $b_n \neq 0$ alors

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_m}{a_n} \lim_{x \to \pm\infty} x^{m-n}.$$

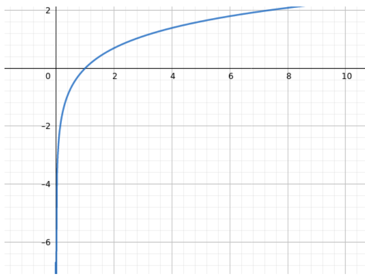
Voici les graphes des fonctions usuelles les plus utilisées



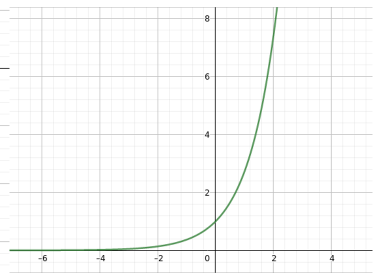
(a) $x \mapsto 3x^3 - 2x^2 - 1$



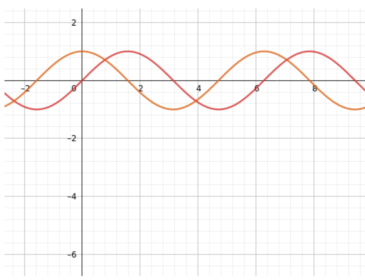
(b) $x \mapsto \frac{x+x^2-1}{x^2 1}$



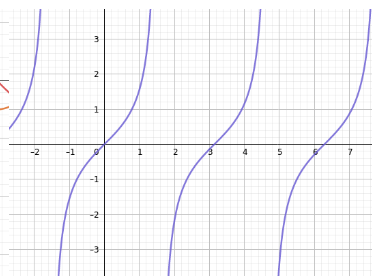
(c) $x \mapsto Ln(x)$



(d) $x \mapsto e^x$



(e) $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$



(f) $x \mapsto \tan(x)$

Définition 1.6

Soit f une fonction bijective (voir annexe) de $I = [a, b]$ vers J alors il existe une bijection inverse de J vers I notée f^{-1} telle que $f \circ f^{-1}(u) = u$ pour tout u dans J, et $f^{-1} \circ f(v) = v$.

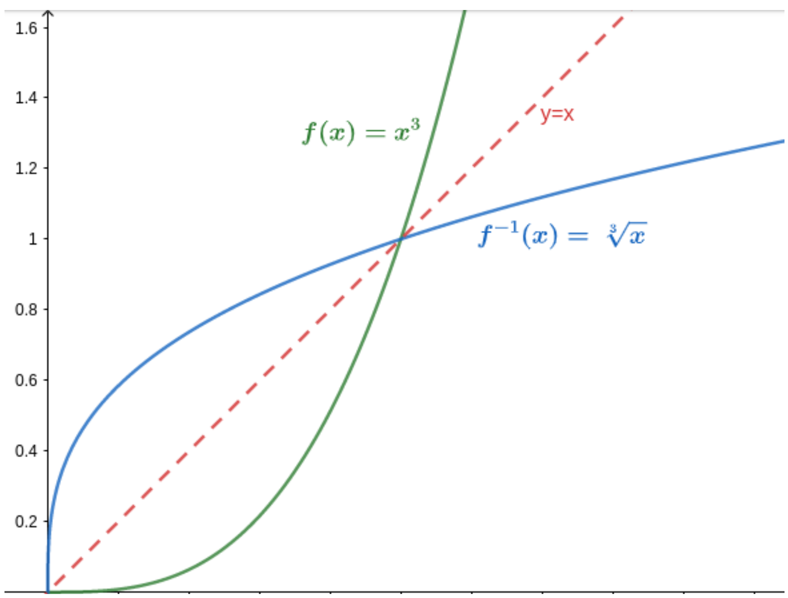
Propriétés 1.3

- Les graphes de f et son inverse f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Si f est croissante ou décroissante alors f^{-1} aussi.

– Si f est continue alors f^{-1} est continue.

Si une fonction f est continue est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur un intervalle alors elle est inversible !

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur et continue sur $[0, +\infty[$. Donc elle admet une bijection inverse f^{-1} vérifiant $f^{-1}(f(x)) = x$. La fonction f^{-1} n'est autre que $x \mapsto \sqrt[3]{x}$.



Théoreme 1.2: des valeurs intermédiaires (simplifié)

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

L'énoncé plus générale est de dire que $f(I)$ est un intervalle si I est un intervalle et f est continue. Il existe aussi une version encore plus générale qui est le théorème de Bolzano.

Exemple 1.3

Soit $g : x \mapsto x^3 + 1$. On a $f(-2) = -7$ et $f(1) = 2$. Donc $f(-2)f(1) < 0$. Et puisque f est continue (car c'est une fonction polynomiale) alors il existe $x_0 \in] - 2, 1[$ tel que $g(c) = 0$.

1.3 Dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction est importante pour connaître son comportement. Elle confère plus précisément comment varie la fonction autour d'un point x_0. Regardons l'exemple suivant sur la relation entre le prix P des voitures de luxe et la demande Q. On définit alors la fonction $g(P)$ qui représente le nombre de voitures de luxe commandées si le prix est P. On est d'accord que plus le prix devient grand moins les clients seront intéressés d'acheter, ce qui peut être écrit autrement en lettres.

$$-\frac{\text{Quantité 1 - Quantité 2}}{\text{Prix1 - Prix2}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P},$$

Si on veut connaître l'influence sur la demande d'une toute petite différence de prix, ΔP doit tendre vers 0. C'est exactement la définition d'une dérivée de fonction.

Définition 1.7

Soit f une fonction réelle. La **dérivée** de $x_0 \in \mathbb{R}$ est

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L,$$

si L existe.

Si $L \neq \infty$ alors on dit que f est **dérivable**. Si $L = \pm\infty$ ou L n'existe pas alors f n'est pas dérivable en x_0.

1.4 Fonctions usuelles et règles de dérivation

Si f et g sont deux fonctions dérivable sur un domaine nous avons les propriétés suivantes

Propriétés 1.4

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
4. $(f(x)^n)' = nf'(x)f(x)^{n-1}$,
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Définition 1.8: Approximation linéaire d'une fonction

Une bonne approximation d'une fonction f dérivable en un point x_0 est par sa **tangente** qui est définie comme suit

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

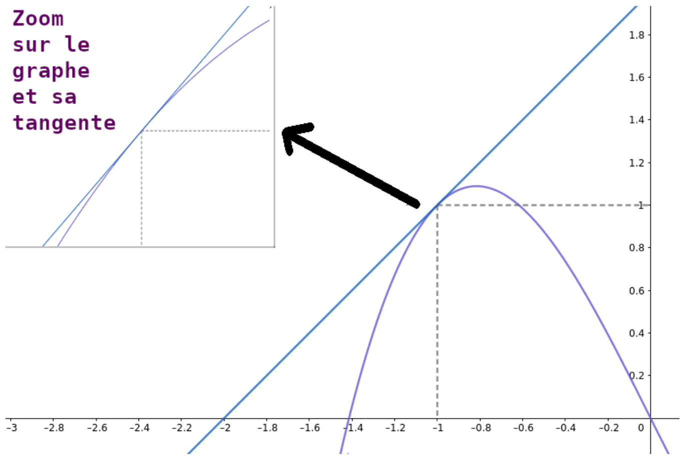


FIGURE 1.5 – A l'oeil nu, on n'arrive pas a distinguer entre la droite tangente bleu d'équation et le graphe de la fonction violet au voisinage du point $(-1, 1)$.

Que peut nous enseigner f' à propos du comportement de f. Vous voyez sur la figure 1.6 que quand la fonction est décroissante sur un intervalle, ses tangentes sur le même intervalle ont une pente négative. Par contre, les pentes des tangentes sont positives si la fonction est croissante.

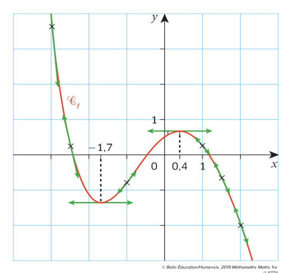


FIGURE 1.6

Proposition 1.1: Croissance/Décroissance

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Si $f'(x) \leq 0$ ($f'(x) < 0$) sur I alors f est décroissante (strictement).
2. Si $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) sur I alors f est croissante (strictement).
3. Si $f'(x_0) = 0$ alors x_0 est un **extremum** [a] de f.

[a] Un extremum est soit un point maximum ou minimum.

Pour prouver la proposition précédente nous avons besoin du théorème suivant qui est essentiel en analyse réelle.

Théoreme 1.3: des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. (Croissance/Décroissance) Soit x_1 et x_2 de l'intervalle I éléments d'un intervalle I avec $x_1 < x_2$. On sait que f est dérivable sur $]x_1, x_2[$ donc il existe $x_{12} \in]x_1, x_2[$ telle que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_{12})$. Donc $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_{12}) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$. On voit bien que si $f'(x_{12}) > 0$ alors $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ (> 0) donc f sera croissante (strictement) sur I. Même discussion si $f'(x_{12})$ est de signe négatif. □

Théoreme 1.4: Rolle

Soit f une fonction réelle sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.5 Rappels sur les fonctions logarithmes, exponentielles et trigonométriques

On rappelle dans cette parties quelques propriétés essentielles concernant les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto Ln(x)$. Plus généralement on a la définition suivante

Définition 1.9

Soit $a > 0$. Les exponentielles de base a sont la famille de fonctions

$$x \longmapsto \exp_a(x) = a^x.$$

Les fonctions logarithmiques de base a sont

$$x \longmapsto \log_a(x) = \frac{Ln(x)}{Ln(a)}.$$

Propriétés 1.5: Logarithme

1. $\lim_{x \to 0^+} Ln(x) = -\infty$

2. $\lim_{x \to +\infty} Ln(x) = +\infty$
3. $Ln(1) = 0$
4. $Ln(e) = 1$
5. $Ln(x \cdot y) = Ln(x) + Ln(y)$
6. $Ln(\frac{x}{y}) = Ln(x) - Ln(y)$
7. $Ln(x^r) = rLn(x)$
8. $\lim_{x \to 1} \frac{Ln(x)}{x-1} = 1$

Propriétés 1.6: Exponentielle

1. $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$
3. $\exp(0) = 1$
4. $\exp(Ln(e)) = e$
5. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
6. $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

On rappelle aussi que la fonction exponentielle est l'inverse de la fonction logarithme. C'est à dire que $\exp(Ln(x)) = Ln(\exp(x)) = x$. Nous avons la liste suivante qui représente la dérivée de chaque fonction usuelle

Propriétés 1.7: Dérivées de fonctions usuelles composées

On suppose que u est une fonction respecte le domaine de définition de chaque fonction avec laquelle elle est composée. Soit a une constante positive.

1. $(Ln\ u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
2. $(\exp\ u(x))' = u'(x) \exp u(x)$
3. $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} Ln(a) u'(x)$
4. $\left(\log_a\ u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{Ln(a)u(x)}$
5. $(\sin\ u(x))' = cos(u(x)) \cdot u'(x)$
6. $(\cos\ u(x))' = -sin(u(x)) \cdot u'(x)$
7. $\tan u(x) = \frac{u'(x)}{(\cos u(x))^2}$
8. $\arcsin u(x)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
9. $(\arccos u(x))' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
10. $(\arctan\ u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$