Théorie des ensembles
Petit rappel

Hamza El Mahjour

1$^{\text{ère}}$ année : SMI/SMA/SMPC/CP

Table des matières

2. Rappels

> Les générations suivantes considéreront Mengenlehre (théorie des ensembles) comme une maladie dont on s'est remis..
>
> — Henri Poincaré

2.1 Ensembles, sous-ensembles et parties

Une **collection d'objets** en mathématique est un **ensemble**. Généralement on note les ensembles par des lettres majuscules. Par exemple, on peut prendre l'ensemble des lettres de l'alphabet français, on écrit

$$E = \{a, b, c, \ldots, y, z\} .$$

Dans l'**écriture ensembliste** l'ordre des objets n'est pas important. Autrement dit,

$$\{a, c, b, f, e\} = \{c, b, f, e, a\}.$$

On dit que $a, b, c \ldots$ sont des éléments de E. On peut écrire alors $a \in E$, $b \in E$, $c \in E$, ... et on lit "a appartient à E","a est un élément de E" ou bien "c est dans E". Quand un élément n'appartient pas à un ensemble on écrit par exemple $12 \notin E$ car 12 n'est pas une lettre de l'alphabet. Les ensembles peuvent être contenus dans d'autres ensembles, on parle de **sous-ensembles**. Par exemple, si on prend l'ensemble $H = \{a, b, c, d\}$ qui ne contient que les toutes première lettre de l'alphabet, on constate que H est un sous-ensemble de E et on peut écrire $H \subset E$ et on lit "F est inclus dans E" ou bien "E contient F". Quand un ensemble quelconque G est composé d'un nombre d'éléments finis on dit que G est **fini**. Imaginons que G est fini contenant cinq éléments alors on dit que "le **cardinal** de G est cinq" et on écrit card $G = 5$. Si G n'est pas fini comme l'ensemble des nombres entiers ou réels alors le cardinal de G est infini. L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'ensemble **vide** noté

$\emptyset$. L'ensemble vide est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble. En fait, on peut créer l'ensemble des parties de G qui est composé de tous les sous-ensembles possibles de G. On note $\mathcal{P}(G)$ l'**ensemble des parties** de G. Il est facile d'énumérer explicitement $\mathcal{P}(G)$ quand G est fini. Par exemple, prenons $G = \{a, b, c\}$ alors les sous ensembles de G sont $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, G\} = \mathcal{P}(G)$. Pour tout ensemble G constitué de n éléments, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(G)$ est de cardinal 2^n. Soient E et F deux sous-ensembles d'une ensemble G.

Définition 2.1.

1. *L'**intersection** de E et F est*

$$E \cap F = \{x \in G, \quad x \in E \text{ et } x \in F\} .$$

2. *L'**union** de E et F est*

$$E \cup F = \{x \in G, \quad x \in E \text{ ou } x \in F\} .$$

3. *Le **complémentaire** de E dans G est*

$$C_G^E = \overline{E} = \{x \in G, x \notin E\} .$$

Exemple 2.1.

1. *Si $E = \{1, -1, 0, 2, 13\}$ et $F = \{11, -1, 1, 3\}$. Alors, $E \cap F = \{-1, 1\}$, $E \cup F = \{-1, 0, 1, 2, 3, 11, 13\}$, $C_{E\cup F}^E = \{3, 11\}$.*
2. *Soit $E = [-2, 5]$ et $F = [2, 7]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $E \cap F = [2, 5]$, $E \cup F = [-2, 7]$ et le complémentaire de F dans $\mathbb{R}$ c'est $\overline{F} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.*

Pour visualiser les intersections, unions et complémentaires des ensembles, on peut utiliser dans certains cas le **diagramme de Venn** comme dans la figure 2.1.

Remarques 2.1.

— *Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **disjoints**.*
— *Si $E \subset F$ alors $E \cap F = E$ et $E \cup F = F$.*

2.2 Applications : surjection, injection et bijection

On peut définir des relations entre deux ensembles en mettant en liaison les éléments de ces ensembles. Pour clarifier cette idée, on sollicite le graphe 2.2. L'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ s'appelle un ensemble de **départ** et $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

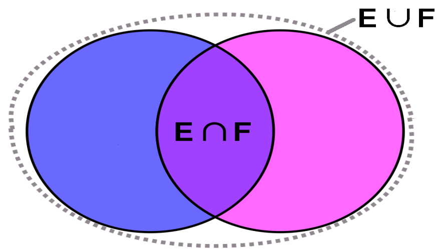

Figure 2.1 – Diagramme de Venn illustrant les intersection et l'union de deux ensembles.

s'appelle un ensemble d'**arrivé**. On remarque que les liaisons entre les éléments de E et F sont : $a \to 1$, $b \to 2$, $a \to 4$, $a \to 1$, $d \to 2$ et $e \to 4$. On écrit formellement

$$f(a) = 1, f(c) = 4, \dots,$$

et on dit l'**image** de a par f est 1. On voit que des éléments différents de E peuvent avoir des images identiques. On dit que les **antécédents** de 4 sont b et d et on écrit

$$f^{-1}(2) = \{b, d\}.$$

1. Chaque élément de E doit avoir une unique image.
2. La notation f^{-1} est à ne pas confondre avec la notion de fonction inverse.

Définition 2.2. *Soit E un ensemble non vide. L'application de E vers E qui à x associe x se note Id_E et s'appelle l'identité de E. Ainsi, $Id_E(x) = x$ pour tout x dans E.*

Définition 2.3 (Injection)**.** *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. f est **injective** ssi*

$$\forall x, y \in E, \qquad x \neq y \implies f(x) \neq f(y),$$

ou bien

$$\forall x, y \in E, \qquad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Autrement dit, deux éléments différents de E ne peuvent pas avoir la même image dans F.

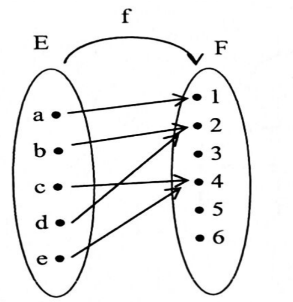

FIGURE 2.2 – Application de E dans F.

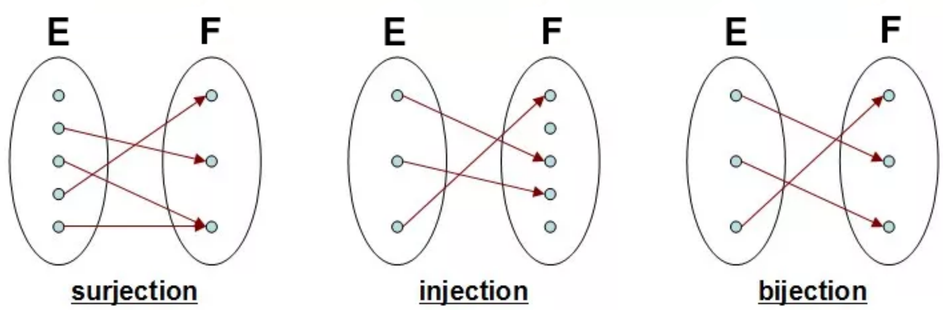

FIGURE 2.3 – Les trois types d'applications : surjective, injective et bijective.

Définition 2.4 (Surjection). *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. f est **surjective** ssi*

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \qquad y = f(x).$$

C'est à dire, chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Définition 2.5 (bijection). *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application surjective et injective alors elle est **bijective**.*

Les graphes de la figure 2.3 résument les trois cas de figures quand E et F sont finis. Si nous avons deux applications définis $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$, on peut en extraire une nouvelle application en combinant les deux. Considérons l'exemple suivant qui est représenté graphiquement dans la figure 2.4. Quelle est l'image par g de l'image par f de l'élément 1 ? Cette question demande de savoir $g\,(f(1))$. Tout d'abord on doit impérativement se rappeler que pour la **composition des fonctions on commence de droite à gauche** ! C'est à dire que nous calculons $f(1) = 1 \rightarrow g(f(1)) = g(1) = 2 \rightarrow g\,(f(1) = 2)$. On peut alors entièrement définir toutes les autres images des autres éléments par la fonction "$g(f)$" qui est plutôt notée $g \circ f$.

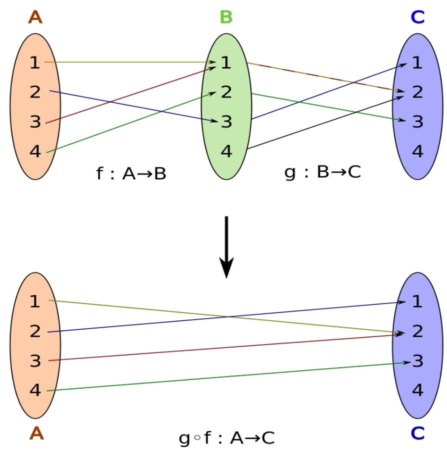

FIGURE 2.4 – f est composée avec g ce qui donne $f \circ g$.

Définition 2.6 (Composée de fonctions)**.** *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $f : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit la* ***composée*** *de f et g telle que*

$$\begin{array}{rrcl} g \circ f : & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g\left(f(x)\right), \end{array}$$

pour tout x dans E.

Le théorème suivant est très important et concerne la composition des fonctions aussi.

Proposition 2.1

Soit X, Y, et Z des ensembles, et soit $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications.

(a) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

(b) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

En particulier, si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est aussi bijective.

Preuve. (a) Soient x et y dans E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Puisque g est injective alors $f(x) = f(y)$. Et puisque f est injective alors $x = y$. Donc $g \circ f$ est injective.

(b) Soit $z \in Z$. Puisque g est surjective il existe $y_z \in Y$ tel que $g(y_z) = z$. De plus y_z est dans Y et f est surjective donc il existe $x_{yz} \in X$ tel que $f(x_{yz}) = y_z$. En remplaçant dans g on obtient $g(f(x_{yz}) = z$ c'est à dire $z = g\ (x_{yz})$ donc $g \circ f$ est bijective.

□

Pour alléger les notations et quand toute ambiguïté est absente, on remplacera $g \circ f$ par une notation multiplicative $g \circ f$. L'opération $\underbrace{f \circ f \circ \ldots f \circ}_{nfois}$ sera noté f^n.

Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, il existe alors une bijection inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$ telle que $ff^{-1}(x_F) = x$ et $f^{-1}f(x_E)$ pour tout $x_E \in E$ et tout $x_F \in F$.

2.3 Produit Cartésien

On prend deux ensembles $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. On représente les deux ensembles sur deux axes perpendiculaires (voir figure 2.5). Le point rose est

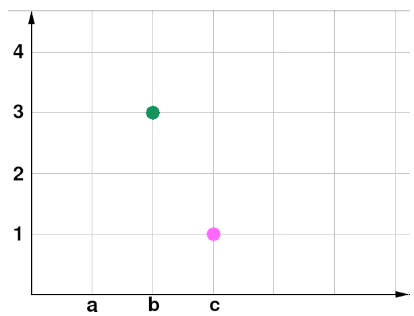

FIGURE 2.5 – Coordonnées des points suivant les axes E et F.

de coordonnées $(c, 1)$ et le point vert $(b, 3)$. Si on énumère toutes les coordonnées possibles où les éléments de E sont des abscisses et F sont des ordonnées on retrouve l'ensemble

$$\{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (b, 1); (b, 2); (b, 3); (b, 4); (c, 1); (c, 2); (c, 3); (c, 4)\}.$$

on appelle l'ensemble précédent le **produit cartésien** de E et F qu'on note $E \times F$. Plus généralement on a la définition suivante

Définition 2.7 (Produit Cartésien). *Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles quelconques. On définit le produit cartésien $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \ldots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \ldots$, $x_{n-1} \in E_{n-1}$ et $x_n \in E_n$.*

Remarques 2.2.

1. *On note $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}} := E^n$.*

2. *On appelle (a, b) un couple, et on appelle (a, b, c) un triplet, etc.*
3. card $(E \times F) =$ card $(E) \times$ card (F).

Définition 2.8. *On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle satisfait les propriétés suivantes*

1. $x\mathcal{R}x$ *(Réflexive)*
2. $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ *(Symétrique)*
3. *Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$ (Transitive)*

Définition 2.9.
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalance sur un ensemble E. On appelle classe d'équivalence $\overline{a}$ l'ensemble

$$\overline{a} = \{x \in E, \qquad a \sim x\},$$

a est un représentant de la classe d'équivalence $\overline{a}$.
On appelle ***ensemble quotient*** *de E par $\mathcal{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence*

$$E/\mathcal{R} = \{\overline{a}| \quad a \in E\}.$$

La relation d'équivalence permet de décomposer un ensemble en une union disjointe d'éléments.

Notons que $E/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$.

Exemple 2.2.

1. *Dans l'ensemble des droites du plan affine, la relation "parallèle à" est une relation d'équivalence. Par contre la relation "perpendiculaire à" ne l'est pas.*
2. *Soit n un entier naturel non-nul et p, q deux éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que p congrue à q modulo n si $p - q$ est divisible par n c'est à dire*

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad q - p = k \cdot n,$$

et on écrit $p \equiv q[n]$. Par exemple $27 \equiv 1\ [13]$ et $21 \equiv 5\ [4]$. La relation. La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence. Si on étudie les entiers relatifs par rapport à la divisibilité par 2, on peut dire qu'il y a deux catégories, soit les nombres pairs (de reste 0) soit les nombres impairs (de reste 1). Donc les deux *classes d'équivalences qu'on peut extraire sont* $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z}, \qquad x \equiv 0\ [2]\}$ *et* $\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z}, \qquad x \equiv 1\ [2]\}$. *L'ensemble quotient et donc*

$$\mathbb{Z}/\equiv = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots\right\}$$

Mais à vrai dire $\overline{0} = \overline{2} = \overline{4} = \dots$ *et* $\overline{1} = \overline{3} = \overline{5} = \dots$ *donc* $\mathbb{Z}/\equiv$ *ne contient que deux éléments* $\left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$. *On note cet ensemble plutôt* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *On peut définir la même relation d'équivalence sur* $\mathbb{Z}$ *par rapport aux à la divisibilité sur un autre nombre et obtenir par conséquent d'autres ensemble quotients :* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dots$

Bibliographie

[1] M. Artin. *Algebra*. Pearson Modern Classics for Advanced Mathematics Series. Pearson, 2017.

[2] Thomas Scott Blyth, Thomas Scott Blyth, and EF Robertson. *Algebra Through Practice : Volume 5, Groups : A Collection of Problems in Algebra with Solutions*. CUP Archive, 1985.

[3] Thomas Scott Blyth, Thomas Scott Blyth, and EF Robertson. *Algebra Through Practice : Volume 6, Rings, fields and modules : A Collection of Problems in Algebra with Solutions*. CUP Archive, 1985.

[4] Shahriar Shahriar. *Algebra in Action : A Course in Groups, Rings, and Fields*, volume 27. American Mathematical Soc., 2017.

[5] John B Fraleigh. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.

[6] Jean-Pierre Escofier. *Toute l'algèbre de la Licence-4e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2016.