2020-2021 YM2

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 2h 00 min

Calculatrices interdites

Exercice 1 1. Soient A, B, C trois événements. Montrer que :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit
   (a) si les composants sont disposés en série.
   (b) si les composants sont disposés en parallèle.
   (c) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

■

Exercice 2 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :

1. $\dfrac{3n+2}{n^3}$
2. $\dfrac{n!}{n^n}$
3. $\dfrac{2^n}{1+n!}$
4. $\dfrac{1}{n^2\log(n)}$

■

Exercice 3 Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\log(x)}{x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\log(x)}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^2e^x+1}dx$

■

Exercice 4 On note, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n existe.
2. A l'aide d'une intégration par parties sur un segment puis d'un passage à la limite, montrer:

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad I_{n+2}=(n+1)I_n.$$

3. Admettant que

$$I_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

calculer I_1

4. Démontrer, par récurrence sur p, que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = 2^p p!.$$

5. Existence et calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de : $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

■