YM2 2019/2020

PARTIEL: MATHÉMATIQUES

3 heures

Exercice .1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $\nabla f(0,0)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?
5. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(3,4)$ selon la direction $V = (2,1)$.
6. Donner l'équation du plan tangent de f en $(1,1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

■

Exercice .2 Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1. Déterminer les extrémaux locaux de f et donner leurs natures.

■

Exercice .3 Soit $D = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2-2y \geqslant 0, x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$. Calculer :

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

■

Exercice .4 Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Vérifiez que les fonctions suivantes sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$:

1. $e^x \cos y$;
2. $x^3 - 3xy^2$;
3. pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $f(x,y) = r^k \cos(k\theta)$, où r et θ sont les coordonnées polaires de (x,y).

■

Exercice .5 Soit $\omega = y^2 dx + x^2 dy$ Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. ■

Exercice .6 Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$
2. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

■

Exercice .7 Sans les calculer, dire si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes:

1.
$$\int_0^{\infty} \frac{t^3 - 5t^2 + 1}{2t^5 - 2t^3 + t^2 + 1}\, dt$$
2.
$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\, dt$$

■