YM2 2019/2020

Contrôle N 3
1h 45 min

Exercice .1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 \tag{1}$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. ∎

Exercice .2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

∎

Exercice .3 Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

∎

Exercice .4 Calculer l'intégrale double

$$\int\int_{\Delta} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$. ∎

Exercice .5 Soit ω la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$. Montrer que ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$. En déduire l'intégrale curviligne le long du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$ de $A(1,2)$ vers $B(3,4)$. ∎