

Calcul Différentiel et intégral dans l'espace

E. H. ZEROUALI, H. MAHZOULI et H. NAQOS



YNCREA MAROC

HTTP ://YNCREAMAROC.COM/

Table des matières

1	Topologie d'un espace vectoriel réel	7
1.1	Espaces métriques, définition de la distance	7
1.2	Boules ouvertes, fermées. Sphères. Parties bornées	8
1.3	Ouverts et Fermés	8
1.4	Normes des espaces vectoriels	9
2	Fonctions de plusieurs variables.	13
2.1	Fonctions de plusieurs variables. Graphes. Lignes de niveau.	13
2.2	Notion de limite	14
2.3	Continuité	15
2.4	Coordonnées polaires	17
2.5	Propriétés des fonctions continues sur un compact	18
2.6	Connexité par arc. Théorème des valeurs intermédiaires	19
3	Calcul Différentiel	21
3.1	Dérivées. Matrice jacobienne. Gradient	21
3.2	Propriétés des dérivées partielles.	22
3.3	Derivées partielles d'ordre supérieur. Fonctions de classe C^k . Théorème de Schwarz	24
3.4	Différentielle	24

4	Propriétés géométriques des fonctions de plusieurs variables	29
4.1	Dérivée directionnelle	29
4.2	Gradient.	30
4.3	Formule de Taylor	31
4.4	Vecteur normal et plan tangent à un graphe d'une fonction de 2 variables	
	33	
5	Extrema	37
5.1	Extrema locaux et globaux. Définition	37
5.2	Théorème des extrema sur un compact	37
5.3	Extrema de fonctions de 2 variables - critère par le déterminant de matrice Hessienne	38
5.4	Extrema liés	40
5.5	Extrema d'une fonction de $n > 2$ variables	42
6	Champs de vecteurs	45
6.1	Definitions	45
6.2	Gradient. Opérateur Nabla	45
6.3	Divergence et Rotationnel	46
6.4	Théorème de Poincaré	48
6.5	Calcul du potentiel	49
7	Formes différentielles	51
7.1	Formes différentielles	51
7.2	n -formes différentielles	52
7.3	Formes exactes. Différentielle de de Rham	54
7.4	La dimension 3 est spéciale.	56
7.5	Formes fermées. Théorème de Poincaré pour les formes différentielles	57
8	Intégrales multiples	59
8.1	Définition. Intégrale double	59
8.2	Aire d'une partie quarable. Théorème de Fubini	60
8.3	Changement de variables dans une intégrale double. Matrice jacobienne	
	62	
8.4	Volume. Intégrales triples.	63

8.5	Coordonnées cylindriques. Coordonnées sphériques	65
9	Courbes et Intégrales curvilignes	67
9.1	Courbes de \mathbb{R}^2 . Théorème des fonctions implicites pour les courbes de \mathbb{R}^2	67
9.2	Droite tangente, plan normal à une courbe paramétrée de \mathbb{R}^3	70
9.3	Longueur d'une courbe. Abscisse curviligne	71
9.4	Intégrale curviligne d'une fonction	72
9.5	Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs = intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle	72
9.6	Théorème de Poincaré et intégrale curviligne	74
10	Théorèmes de Stokes : Green-Riemann, Ostrogradski...	77
10.1	Théorème de Green-Riemann	77
10.2	Applications (calcul d'aire, théorème de Poincaré)	79
10.3	Surfaces. Intégrale de surface de fonctions réelles	80
10.4	Intégrale de surface d'un champ de vecteurs	83
10.5	Formule de Stokes générale : $\int_{\partial(D)} \omega = \int_D d\omega$	84
11	Séries	87
11.1	Définitions – Série géométrique	87
11.1.1	Définitions	87
11.1.2	Série géométrique	88
11.1.3	Séries convergentes	89
11.1.4	Suites et séries	90
11.1.5	Le terme d'une série convergente tend vers 0	90
11.1.6	Linéarité	91
11.1.7	Sommes de séries	92
11.1.8	Critère de Cauchy	93
11.2	Séries à termes positifs	95
11.2.1	Convergence par les sommes partielles	95
11.2.2	Théorème de comparaison	96
11.2.3	Exemples	96
11.2.4	Théorème des équivalents	97
11.2.5	Exemples	98
11.3	Séries alternées	99
11.3.1	Critère de Leibniz	100
11.3.2	Reste	100
11.3.3	Contre-exemple	101

11.4 Séries absolument convergentes – Règle de d'Alembert	102
11.4.1 Séries absolument convergentes	102
11.4.2 Règle du quotient de d'Alembert	103
11.4.3 Règle des racines de Cauchy	105
11.4.4 D'Alembert vs Cauchy	107
11.4.5 Règle de Raabe-Duhamel	108
11.5 Comparaison série/intégrale	109
11.5.1 Théorème de comparaison série/intégrale	109
11.5.2 Preuve	110
11.5.3 Séries de Riemann	110
11.5.4 Séries de Bertrand	111
11.5.5 Applications	111
11.6 Produits de deux séries	113
11.6.1 Motivation	113
11.6.2 Le produit de Cauchy	113
11.6.3 Exemple	115
11.6.4 Contre-exemple	115
11.7 Permutation des termes	116
11.8 Sommation d'Abel	117
11.8.1 Théorème de sommation d'Abel	117
11.8.2 Séries de Fourier	118
11.9 Exercices	120
12 Fonctions Holomorphes	125
12.1 Rappels	125
12.2 Notions de limites	125
12.3 Continuité	126
12.4 Dérivabilité	126
12.5 Exemples de fonctions holomorphes	126
12.6 Propriétés générales	127
12.7 Formules de Cauchy	128
12.8 Harmonicité	128
12.9 Généralisation	129

1. Topologie d'un espace vectoriel réel

1.1 Espaces métriques, définition de la distance

On note $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{p \text{ fois}} = \{X = (x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, \dots, p]\}$ - espace vectoriel réel de dimension p .

On s'intéresse aux fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Il faut d'abord étudier la structure du domaine D car le domaine est aussi important que la fonction. Pour cela on va définir une notion de distance.

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble non-vide. On dit qu'une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $d : (x, y) \mapsto d(x, y)$ est une **distance** sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

D1 (séparation) $\forall (x, y) \in E \times E, \{x = y\} \Leftrightarrow \{d(x, y) = 0\}$;

D2 (symétrie) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$;

D3 (inégalité triangulaire) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 1.1.2 On appelle **espace métrique** tout couple (E, d) où $E \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.

■ **Exemple 1.1** 1. $E = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$

2. $E = \mathbb{R}$. Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction concave définie $\forall x \geq 0$, et t.q. $\{f(x) = 0\} \Leftrightarrow \{x = 0\}$.

Alors $d(x, y) = f(|x - y|)$ est une distance. En effet, les propriétés D1 et D2 sont évidentes et D3 suit de la condition de concavité.

Une fonction est concave sur un intervalle I si $x_0, x_1, x_2, x_3 \in I$ et $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ alors, $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. (Géométriquement, c'est une remarque sur la relation entre les pentes de deux droites qui lient les points de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ et $(x_3, f(x_3))$). Faites un dessin !. Donc si on prend $x_0 = 0, x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a + b$ on a $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} \geq \frac{f(a+b) - f(b)}{a+b-b}$. Mais $f(0) = 0$ alors, si $0 < a < b$ on a $f(a) \geq f(a+b) - f(b)$ et donc $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

On a beaucoup d'exemples de distances différentes sur \mathbb{R} . En particulier, $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ ou $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$. Le dernier exemple définit une distance sur \mathbb{R} qui, pour tout point, est inférieure à 1.

3. Métriques sur $E = \mathbb{R}^p$, soit $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $Y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. On a $d_2(X, Y) = (\sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^2)^{1/2}$ (métrique euclidienne),
ou $d_1(X, Y) = \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$,
ou $d_\infty(X, Y) = \sup_{i=[1, \dots, p]} |x_i - y_i|$

4. Soit E un ensemble quelconque. Pour $x, y \in E$ on définit $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque : dans cet exemple (E, d) n'est pas un espace métrique. ■

1.2 Boules ouvertes, fermées. Sphères. Parties bornées

Définition 1.2.1 Soit a un point de \mathbb{R}^p et $r > 0$ un nombre réel.

1. $\bar{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a, x) \leq r\}$ est appelée **boule fermée** de centre a et de rayon r .
2. Une **boule ouverte** de centre a et de rayon r est $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a, x) < r\}$
3. Une sphère de centre a et de rayon r est $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a, x) = r\}$

On obtient des boules de formes différentes pour des espaces métriques différents. Pour le voir je recommande vivement de dessiner des boules unité dans \mathbb{R}^2 pour les distances d_1, d_2 et d_∞ .

Définition 1.2.2 Une **partie bornée** P de \mathbb{R}^p est une partie de \mathbb{R}^p pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de P .

1.3 Ouverts et Fermés

Définition 1.3.1 Une **partie ouverte** (ou un **ouvert**) de \mathbb{R}^p est une partie U t.q. $\forall u \in U, \exists r > 0$ tel que $B(u, r) \subset U$ i.e tout point de U est le centre d'une boule ouverte, de rayon non-nul, incluse dans U .

Une **partie fermée** (ou un **fermé**) de \mathbb{R}^p est une partie telle que son complémentaire U dans \mathbb{R}^p est un ouvert.

R E et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 1.3.1 Dans un espace métrique (E, d) , (1) une boule ouverte est un ouvert, et (2) une boule fermée est un fermé.

Démonstration. (1) Soit $y \in B(a, r)$. Alors choisissons $\varepsilon > 0$ t.q. $d(a, y) < r - \varepsilon$ (un tel ε existe, car $d(a, y)$ est strictement plus petit que r). Pour tout $z \in B(y, \varepsilon)$, montrons que $z \in B(a, r)$, cela veut dire qu'autour de chaque point y de $B(a, r)$ il existe une boule ouverte entièrement contenue dans $B(a, r)$. Par inégalité triangulaire $d(a, z) \leq d(a, y) + d(z, y) \Rightarrow d(a, z) < r - \varepsilon + \varepsilon = r$. Donc $z \in B(a, r)$, i.e. chaque point de $B(y, \varepsilon)$ appartient à $B(a, r)$ et $B(y, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

(2) Soit $\complement \bar{B}(a, r)$ le complémentaire de $\bar{B}(a, r)$. Il faut montrer que $\complement \bar{B}(a, r)$ est un ouvert. Soit $y \in \complement \bar{B}(a, r)$. Montrons qu'il existe une boule contenant y entièrement contenue dans $\complement \bar{B}(a, r)$. Puisque y est en dehors de $\bar{B}(a, r)$, $d(a, y) > r$. Soit $\varepsilon = d(a, y) - r > 0$.

Pour tout $z \in B(y, \varepsilon)$ montrons que $z \in \overline{CB}(a, r)$. En effet, par inégalité triangulaire $d(a, z) + d(z, y) \geq d(a, y) = r + \varepsilon$. Donc $d(a, z) \geq r + \varepsilon - d(z, y)$. Puisque $z \in B(y, \varepsilon)$ on a $\varepsilon > d(z, y)$ donc $d(a, z) > r + \varepsilon - d(z, y) > r + \varepsilon - \varepsilon = r \Rightarrow z \in \overline{CB}(a, r)$. Donc $\overline{B}(a, r)$ est un complément d'un ouvert, c'est donc un fermé. ■

Définition 1.3.2 Soit E un ensemble non-vide et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. On appelle **topologie induite par distance** (ou **topologie tout court**) l'ensemble des ouverts $\mathcal{T} \subset P(E)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. E et \emptyset sont des éléments de \mathcal{T}
2. Toute intersection finie d'éléments de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T}
3. Toute réunion d'éléments de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

Définition 1.3.3 Position d'un point par rapport à une partie de \mathbb{R}^p .

Soit $A \subset \mathbb{R}^p$.

1. On dit que a est **intérieur** à A si on peut trouver un ouvert $U \in \mathcal{T}$ t.q. $a \in U$ et $U \subset A$. L'**intérieur** de A , noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A .
2. On dit que a est un **point frontière** de A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ contenant a rencontre à la fois A et le complémentaire de A .
3. On dit que a est **adhérent** à A si tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ contenant a rencontre A .
4. L'adhérence de A , notée \overline{A} , est le plus petit fermé qui contient A .

Définition 1.3.4 On dit qu'une partie V de \mathbb{R}^p est un **voisinage** de $x \in \mathbb{R}^p$ si V contient un ouvert contenant x .

Exercice. Démontrer l'équivalence avec la définition suivante : On dit que $V \subset \mathbb{R}^p$ est un voisinage de x ssi $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$.

1.4 Normes des espaces vectoriels

Définition 1.4.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . On appelle **norme** sur E une application de E dans \mathbb{R}_+ qui à $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$, et vérifie

- N1 (séparation) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- N2 (homogénéité positive) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- N3 (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel sur \mathbb{R} muni d'une norme est appellé **espace vectoriel normé** (e.v.n.).

Proposition 1.4.1 Soit E un e.v.n. L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui au couple (x, y) associe $d(x, y) := \|x - y\|$ est une distance sur E .

On l'appelle **distance induite sur E par la norme**. Elle possède les propriétés suivantes :

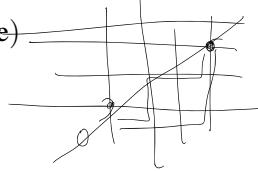
- $\forall x \in E, d(0, x) = \|x\|$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$
- $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x + z, y + z) = d(x, y)$.



Toute norme induit une distance, par contre toutes les distances ne proviennent pas d'une norme. La distance (4) de l'exemple 1.1 n'est induite par aucune norme (quelle propriété de la norme n'est pas forcément satisfaite ?).

Exemple de normes sur \mathbb{R}^p . Soit $x \in \mathbb{R}^p$, $X = (x_1, \dots, x_p)$, $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, \dots, p]$. Alors

$$\begin{aligned}\|X\|_1 &= \sum_1^p |x_i| \text{ (norme de Manhattan)} \\ \|X\|_2 &= (\sum_1^p |x_i|^2)^{1/2} \text{ (norme euclidienne)} \\ \|X\|_n &= (\sum_1^p |x_i|^n)^{1/n} \\ \|X\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|\end{aligned}$$



sont des normes sur \mathbb{R}^p .

Définition 1.4.2 Normes équivalentes. Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur \mathbb{R}^p sont équivalentes s'il existe deux constantes $\lambda > 0, \mu > 0$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^p, \lambda \|X\| \leq \|X\|' \leq \mu \|X\|$. On note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

Proposition 1.4.2 Cette définition induit une relation d'équivalence.

Démonstration. — **réflexivité** : $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$

— **symétrie** : si $\lambda \|X\| \leq \|X\|' \leq \mu \|X\|$ alors $\frac{1}{\mu} \|X\|' \leq \|X\| \leq \frac{1}{\lambda} \|X\|'$.

— **transitivité** : $\lambda \|X\| \leq \|X\|' \leq \mu \|X\|$ et $\beta \|X\|' \leq \|X\|'' \leq \gamma \|X\|'$ implique $\beta \lambda \|X\| \leq \|X\|'' \leq \gamma \mu \|X\|$. ■

■ **Exemple 1.2** Les normes $\|X\|_2 = (\sum_1^p |x_i|^2)^{1/2}$ et $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$ sont équivalentes. En effet, on a $\|X\|_2 \leq (p \cdot \|X\|_\infty^2)^{1/2} = \sqrt{p} \|X\|_\infty$. Soit $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $x_k = \max\{x_1, \dots, x_p\} = \|X\|_\infty$, alors $\|X\|_\infty = (x_k^2)^{1/2} \leq (\sum_1^p |x_i|^2)^{1/2} = \|X\|_2$. Donc $\frac{1}{\sqrt{p}} \|X\|_2 \leq \|X\|_\infty \leq \|X\|_2$. ■

Exercice.

1. Montrer que toutes les normes $\|\cdot\|_n, n \in [1, +\infty]$ sont équivalentes.
2. Si $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ t.q. $\lambda \|X\| \leq \|X\|' \leq \frac{1}{\lambda} \|X\|$ et $\lambda \|X\|' \leq \|X\| \leq \frac{1}{\lambda} \|X\|'$.

Théorème 1.4.3 Deux normes équivalentes induisent la même topologie.

Si les normes sont équivalentes on trouve que deux ensembles

$$\mathcal{T} = \{U \in P(\mathbb{R}^p), U \text{ ouvert pour la norme } \|\cdot\|\}$$

et $\mathcal{T}' = \{U \in P(\mathbb{R}^p), U \text{ ouvert pour la norme } \|\cdot\|'\}$, sont égaux : $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Démonstration. Soit U un élément de \mathcal{T} , il faut montrer que c'est aussi un élément de \mathcal{T}' .

Cela se traduit :

Soit U un ouvert pour la norme $\|\cdot\| \Leftrightarrow \forall X \in U, \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(X, \varepsilon) \subset U$. On va m.d. U est un ouvert pour la norme $\|\cdot\|'$. Pour tout $X \in U$ il faut montrer qu'il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $B'(X, \varepsilon')$, une boule pour la norme $\|\cdot\|'$ est un sous-ensemble de U . Pour cela on va trouver ε' tel que tout point Y de $B'(X, \varepsilon')$ appartienne aussi à $B(X, \varepsilon)$ et donc à U . Par équivalence des normes $\exists \lambda > 0$ tel que $\forall Z \in \mathbb{R}^p \|Z\| \leq \lambda \|Z\|'$. Soit $Y \in B'(X, \frac{\varepsilon}{\lambda})$ on a $\|X - Y\| \leq \lambda \|X - Y\|' < \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$ donc $B'(X, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subset U$.

Donc si U est un ouvert pour $\|\cdot\|$, alors pour tout $X \in U$, il existe $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$ tel que $B'(X, \varepsilon') \subset U$. Donc U est un élément de \mathcal{T}' .

De la même manière on montre que si U est un élément de \mathcal{T}' , c'est aussi un élément de \mathcal{T} . ■

Théorème 1.4.4 (Admis.) Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 1.4.5 On parle de la topologie usuelle sur \mathbb{R}^p sans préciser la norme.

Dans la suite, on notera $\|\cdot\|$ sans préciser de quelle norme il s'agit.

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

2. Fonctions de plusieurs variables.

2.1 Fonctions de plusieurs variables. Graphes. Lignes de niveau.

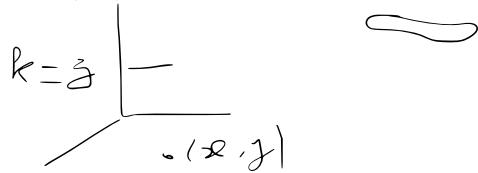
On s'intéresse maintenant aux fonctions $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. On distingue des fonctions scalaires : $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et des fonctions vectorielles $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, q > 1$.

On va commencer par l'étude des fonctions de deux variables. Une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles fait correspondre à tout point $X = (x, y)$ de D , (appelé le domaine de définition de F) un réel unique $f(X)$.

Définition 2.1.1 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

1. L'ensemble des points de \mathbb{R}^3

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$



est appelé la **surface représentative** de f . S est aussi appelé le **graph** de la fonction f .

2. Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de D . Les fonctions $x \mapsto f(x, b)$ et $y \mapsto f(a, y)$ définies sur des intervalles ouverts, contenant respectivement b et a sont appelées les **fonctions partielles** associées à f au point A .
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $L_k = \{(x, y) \in D \text{ tel que } f(x, y) = k\}$ est la **ligne de niveau** k de la fonction f .

R Pour les fonctions de trois variables, la notion analogue à la ligne de niveau est celle de surface de niveau (Formulez-là !)

Les lignes de niveau et les fonctions partielles sont utiles pour dessiner les graphes des fonctions.

■ **Exemple 2.1 A.** $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$. On calcule et représente des lignes de niveau $k = 0, k = 1, k = 2, k = 4, k = -1$. Pour $k = 0$ c'est un seul point $(0, 0)$, avec la valeur de la fonction 0, pour $k = 1, 2, 4$ on obtient des ellipses. Par exemple aux points de l'ellipse

$4x^2 + y^2 = 1$ la fonction a la valeur 1, etc. La ligne de niveau $k = -1$ est l'ensemble vide (la fonction ne prend la valeur -1 en aucun point). Au point $(0,0)$ les fonctions partielles sont $x \mapsto 4x^2$ et $y \mapsto y^2$.

B. Sur $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ et $x \neq 0$ on considère la fonction $f(x,y) = y/x$ avec ses lignes de niveau $k = 0, 1, -1, 2, -2$. Ce sont des intervalles des droites $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, $y = 2x$, $y = -2x$ sans le point $x = y = 0$. La valeur de la fonction sur la droite $y = x$ est égale à 1, sur $y = -x$ est égale à -1 , etc.

■

2.2 Notion de limite

Une fois qu'on a les normes et les voisinages, la définition de limite est la même que dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} :

Définition 2.2.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^p et $A \in \mathbb{R}^p$. On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$ ssi $\forall V$ voisinage de A , $\exists N_V \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_V \Rightarrow X_n \in V$. C'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|X_n - A\| \leq \varepsilon$.

Lien avec les limites dans \mathbb{R} :

Propriété 2.2.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_{n_1}, \dots, x_{n_p}))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^p et $A = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$ ssi $\forall i = 1, \dots, p, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n_i} = a_i$.

Définition 2.2.2 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f a une **limite** $L \in \mathbb{R}^q$ en A ssi $\forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = L$.

Il y a une autre définition de la limite d'une fonction utilisant $\varepsilon - \delta$ qui est équivalente à la définition 2.2.2.

Définition 2.2.3 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R}^p et A un point adhérent à D , L un point de \mathbb{R}^q . On dit que f a pour **limite** L lorsque $X \rightarrow A$ si : $(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 ; \|X - A\| \leq \eta, X \in D) \implies (\|f(X) - L\| \leq \varepsilon)$.

R

1. La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées (pourquoi?).
2. La limite, si elle existe, est **unique** (trivial mais très important).
3. La limite partielle : soit $D_1 \subset D$ un sous-ensemble et A un point adhérent à D_1 . Si $f(X)$ tend vers L lorsque X tend vers A en restant dans D , alors $f(X)$ tend vers la même limite L si X tend vers A en restant dans D_1 . En particulier, si on regarde le comportement des fonctions partielles au même point, elles doivent toutes avoir la même limite (si elle existe, bien sûr).

Nous avons les propriétés suivantes des limites de fonctions :

Proposition 2.2.2 Soient f et g des fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}^p$ à valeur dans \mathbb{R}^q , $X \in D$ et A un point adhérent à D .

1. $\lim_{X \rightarrow A} (f(X) \pm g(X)) = \lim_{X \rightarrow A} f(X) \pm \lim_{X \rightarrow A} g(X)$
2. $\lim_{X \rightarrow A} f(X)g(X) = \lim_{X \rightarrow A} f(X) \cdot \lim_{X \rightarrow A} g(X)$

3. Pour les fonctions à valeurs réelles (i.e. $q = 1$) si $\lim_{X \rightarrow A} f(X) \neq 0$ on a

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{1}{f(X)} = \frac{1}{\lim_{X \rightarrow A} f(X)}.$$

4. **Composition.** Soient les fonctions $g_i : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $i = 1, \dots, p$ et B un point adhérent à E et $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, si $\lim_{Y \rightarrow B} g_i(Y) = a_i$, $A = (a_1, \dots, a_p)$ un point adhérent à D alors

$$\lim_{Y \rightarrow B} f(g_1(Y), \dots, g_p(Y)) = \lim_{X \rightarrow A} f(X).$$

5. **Majoration.** Si $\lim_{X \rightarrow A} g(A) = 0$ et $\|f(X) - C\| \leq g(X)$, $C \in \mathbb{R}^q$ pour tout X au voisinage de A , alors $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = C$.

La preuve de cette proposition répète la preuve d'une proposition analogue pour des fonctions d'une variable - il faut juste utiliser des normes à la place des valeurs absolues.

2.3 Continuité

Définition 2.3.1 Une fonction f est **continue en un point** $A \in D$ si la limite de f en ce point existe et est égale à la valeur de la fonction en A .

La fonction est **continue sur D** si elle est continue en tout point de D .

Ou bien on peut reformuler cette définition à l'aide des suites :

Définition 2.3.2 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. On dit que f est **continue en A** ssi $\forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de D telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = f(A)$.

Propriété 2.3.1 Opérations sur les fonctions continues : suite à la Proposition 2.2.2 la somme, le produit et le quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas) des fonctions continues sont continus. La composée de fonctions continues est continue.

(R)

Toute fonction obtenue à l'aide de fonctions continues élémentaires de variables (x_1, \dots, x_p) en utilisant les opérations algébriques et la composition est continue dans son domaine naturel de définition. Exemples : des polynômes $x^k y^n$, exponentielles e^{2x+xy} , trigonométriques $\sin(xy)$ etc sont continues sur \mathbb{R}^2 .

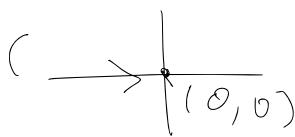
Attention : $\frac{1}{x^n y^m}, n, m > 0$ n'est pas un polynôme (et n'en a jamais été un).

Il peut être pratique de fixer toutes les composantes sauf une :

Définition 2.3.3 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Soit $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p) \in D$. Pour $i = 1, \dots, p$, on appelle **i -ème fonction partielle** de f en X_0 la fonction :

$$f_{X_0, i} : \begin{cases} D_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q \\ x \mapsto f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x, x_0^{i+1}, \dots, x_0^p) \end{cases}$$

où x est à la i -ème place, et D_i est tel que pour $x \in D_i$, $(x_0^1, \dots, x, \dots, x_0^p) \in D$.



Proposition 2.3.2 Si f est continue en $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p)$ alors $\forall i = 1 \dots, p$, la fonction partielle $f_{x_0,i}$ est continue en x_0^i .

R La réciproque est fausse !

■ **Exemple 2.2** On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ses 2 fonctions partielles en $(0, 0)$ sont

$$f_{(0,0),1} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et

$$f_{(0,0),2} : y \mapsto \begin{cases} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Elles sont donc **continues**. Pourtant f **n'est pas continue** en $(0, 0)$:

Soient $x_n = y_n = 1/n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, mais $f(x_n, y_n) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2}$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) \neq 0 = f(0, 0)$$

Une autre démonstration du fait que f n'est pas continue en $(0, 0)$: prenons une restriction de f sur la droite D_1 définie par l'équation $y = x$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(f(x, y) \Big|_{D_1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xx}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc la fonction f restreinte à un sous-ensemble D_1 de \mathbb{R}^2 n'a pas la même limite que la même fonction restreinte à deux autres sous-ensembles de \mathbb{R}^2 . (Les fonctions partielles $f_{(0,0),1}$ et $f_{(0,0),2}$ sont des restrictions de f aux droites $y = 0$ et $x = 0$ respectivement). Or la limite, si elle existe, doit être unique (remarque 2.2), donc la limite n'existe pas. ■

Etude de continuité des fonctions :

■ **Exemple 2.3**

1. On considère $f(x,y) = x^2 + y^2$. On va montrer que pour toutes valeurs $(x,y) = (a,b)$ la limite de $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ existe et est égale à la valeur au point $f(a,b) = a^2 + b^2$. Si $(x,y) \rightarrow (a,b)$ (par exemple dans une norme euclidienne) cela veut dire que

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0$$

donc on a :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-a \rightarrow 0 \\ y-b \rightarrow 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \end{cases}$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, c'est exactement ce qu'on cherche à montrer, et alors la fonction est continue en chaque point.

En général on ne vérifie pas la continuité en chaque point comme dans cet exemple - aux points réguliers on utilise plutôt les propriétés des fonctions continues.

2. Prenons un autre exemple :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 3, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

alors $f(a,b) = \frac{y}{x}$ pour $x \neq 0$ étant une fraction de fonctions continues est continue mais pour $x = 0$ sur les droites $y = kx$ on obtient des limites différentes quand $x \rightarrow 0$. On conclut que la fonction n'est pas continue en $(0,b)$, $\forall b \in \mathbb{R}$. Il y a une droite des points de discontinuité. Cette droite a pour équation $x = 0$.

Définition 2.3.4 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R}^p . Soit A un point adhérent à D n'appartenant pas à D . Si f a une limite L lorsque $X \rightarrow A$ on peut étendre le domaine de définition de f à $D \cup \{A\}$ en posant $f(A) = L$. On dit que l'on a **prolongé f par continuité au point A** .

Théorème 2.3.3 (Admis) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R}^p . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

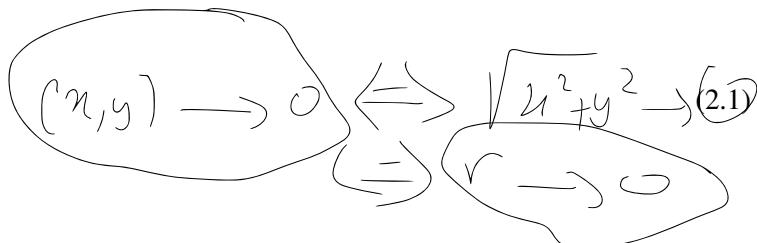
1. f est continue
2. Pour tout ouvert U de \mathbb{R}^q , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^p
3. Pour tout fermé F de \mathbb{R}^q , $f^{-1}(F)$ est un fermé de \mathbb{R}^p
4. Pour toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D \subset \mathbb{R}^p$ convergeant vers A , la suite $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(A)$ pour tout $A \in D$.

$$f^{-1}(U) = \{x \in D \mid f(x) \in U\}$$

2.4 Coordonnées polaires

Notation : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. On a une application bijective de $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ vers \mathbb{R}^2 donnée par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$



Son application réciproque est l'application de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ suivante :

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ t &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (2.2)$$

Donc en particulier, on a $r^2 = x^2 + y^2$. Dans certains exemples d'étude de continuité des fonctions il est utile de passer aux coordonnées polaires.

Souvent c'est pratique d'utiliser les coordonnées polaires pour étudier la continuité, car la condition sur deux variables $(x, y) \rightarrow 0$ devient une condition sur une seule variable $r \rightarrow 0$.

■ Exemple 2.4

- Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\pi, 0) \rightarrow 1 \\ (0, y) \rightarrow -1 \end{array}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que fraction de fonctions continues. En $(0, 0)$ on a :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t}{r^2} = \cos 2t$$

Cette limite est égale à $\cos^2 t - \sin^2 t$. Le résultat dépend de t , i.e. il n'y a pas de limite unique, donc la limite n'existe pas et f n'est pas continue en $(0, 0)$.

- Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{lim}_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0 \end{array}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant qu'une fraction des fonctions continues. En $(0, 0)$ on a :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 t}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3 t$$

Cette limite est égale au produit des limites : $\lim_{r \rightarrow 0} (\cos^3 t) \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$, car $|\cos t| \leq 1$ - une fonction bornée. Finalement, la fonction g est continue en $(0, 0)$ et donc elle est continue sur \mathbb{R}^2 .

2.5 Propriétés des fonctions continues sur un compact

Définition 2.5.1 Une partie compacte (un compact) de \mathbb{R}^p est une partie fermée et bornée.

Il existe au moins deux différentes façons de définir un compact dans un espace normé, mais dans \mathbb{R}^p elles sont équivalentes à celle qu'on donne ici.

■ **Exemple 2.5** Dans \mathbb{R} un intervalle fermé, et dans \mathbb{R}^p les boules fermées sont des exemples de compacts. ■

Théorème 2.5.1 (Admis) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ et K une partie compacte de \mathbb{R}^p contenue dans D . Alors, $f(K)$ est une partie compacte de \mathbb{R}^q .

Corollaire 2.5.2 Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Cela signifie que sur un compact $K \in \mathbb{R}^p$ il existe au moins un point $X_m \in K$ et au moins un point $X_M \in K$ tels que pour tout $X \in K$ on ait

$$\|f(X_m)\| \leq \|f(X)\| \leq \|f(X_M)\|.$$

2.6 Connexité par arc. Théorème des valeurs intermédiaires

Définition 2.6.1 On dit qu'une partie Γ de \mathbb{R}^p est un **arc continu** si on peut trouver une application continue γ d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^p dont l'image soit Γ . γ est appelé un **paramétrage** de Γ . Les points de Γ , $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$ s'appellent les **extrémités** de Γ .

Attention : Γ est un objet géométrique tandis que γ , une fonction continue, est un objet analytique. Un arc continu admet une infinité de paramétrages possibles.

Définition 2.6.2 Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^p . On dit que E est **connexe par arc** si, étant donnés deux points arbitraires A et B de E on peut trouver un arc continu Γ , d'extrémités A, B entièrement contenu dans E .

Théorème 2.6.1 — des valeurs intermédiaires. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ connexe par arc. Soit A, B deux points de D . Pour tout nombre réel r compris entre $f(A)$ et $f(B)$ il existe un point C de D tel que $f(C) = r$.

Démonstration. Ici on utilise le théorème des valeurs intermédiaires des fonctions d'une variable. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un paramétrage d'un arc continu tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. La fonction d'une variable $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue étant une composition de fonctions continues donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$, tel que $f \circ \gamma(c) = r$. Soit $C = \gamma(c)$, alors $C \in D$ et $f(C) = r$. ■

$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

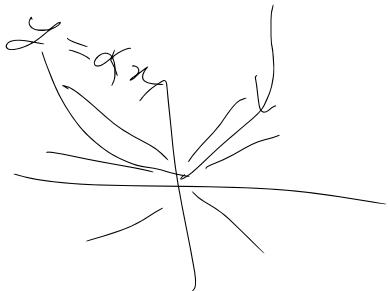
$$(x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{r}(\cos \theta \sin \theta)}$
 $\xrightarrow{x^2 + r^2 y^4}$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) ? \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + x^4} = 0$$

$\frac{1}{\epsilon} \neq 0 \Rightarrow \text{pas de limite}$



3. Calcul Différentiel

3.1 Dérivées. Matrice jacobienne. Gradient

$$f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q ?$$

Rappel. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$. La dérivée de f au point $a \in I$ est :

$$\cancel{f'(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\in \mathbb{R}^p \quad (3.1)$$

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. Une expression du type " $\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - f(A)}{X - A}$ " n'est pas bien définie parce que diviser par $X - A$, qui est un vecteur de \mathbb{R}^p , n'a aucun sens ! Néanmoins, si on fixe toutes les composantes de X sauf une, on peut définir des **dérivées partielles**.

Définition 3.1.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $A \in D$. Pour $i = 1, \dots, p$, on appelle **dérivée partielle** par rapport à x_i de f en $A = (a_1, \dots, a_p)$, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, ou bien $f'_{x_i}(A)$, la dérivée de la fonction partielle $f_{A,i}$ prise en a_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = f'_{A,i}(a_i) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, \cancel{x_i}, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{x_i - a_i}.$$

une flèche

$$f(x) = f(a_1, \dots, \cancel{x}, \dots, a_p)$$

$$f'(x)$$

Pour une fonction de deux variables $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en point $A = (a, b) \in D$ les dérivées partielles de $f(x, y)$ en (a, b) sont les dérivées des fonctions partielles $f(x, b)$ et $f(a, y)$ qui se calculent alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Parfois, on les note aussi $f'_x(a, b)$ et $f'_y(a, b)$.

$$g(x) = f(x, b),$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}}(a, b) = g'(a)$$

$$h(y) = f(a, y)$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial y}}(a, b) = h'(b)$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de $f(x, y) = e^{xy}$ et en $(0, 0)$

■ **Exemple 3.1** Soit $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$. Calculer les dérivées partielles au point $(1, 2)$. En considérant y constant et en dérivant par rapport à x on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(1,2)} = (4x - 3y) \Big|_{(x,y)=(1,2)} = -2$$

En considérant x constant et en dérivant par rapport à y on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x,y)=(1,2)} = (-3x + 8y) \Big|_{(x,y)=(1,2)} = 13$$

$$\text{Soit } f(x, y, z) = (ny)yz$$

$$\text{Calcule } f(x, y, z) \quad (y \neq 0)$$

■ **Définition 3.1.2** La matrice des dérivées partielles de $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ s'appelle la **matrice jacobienne** ou la **Jacobienne** de f .

La matrice jacobienne $Jac(f)(X_0)$ fait passer de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q : elle a p colonnes et q lignes.

$$Jac(f)(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix} \quad f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

Autrement dit, pour une fonction vectorielle $f(x_1, \dots, x_p)$ à valeurs dans \mathbb{R}^q la matrice jacobienne a pour colonnes les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En particulier, pour une fonction de p variables à valeurs réelles, la matrice jacobienne est simplement une matrice-ligne :

$$Jac(f)(x_1, \dots, x_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right).$$

Sa matrice transposée - la matrice-colonne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \dots, x_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)^T$$

s'appelle le **gradient** de f .

3.2 Propriétés des dérivées partielles.

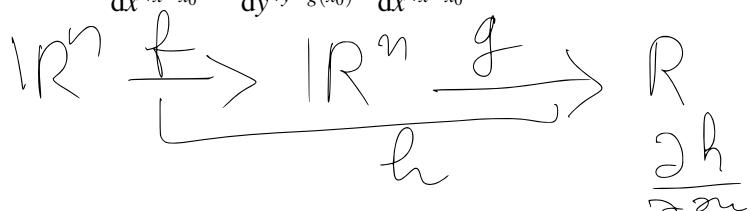
Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des opérations algébriques sur d'autres fonctions (somme, produit, fraction) suivent les mêmes règles.

Si une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est obtenue par des opérations algébriques (somme, produit, fraction) sur les fonctions $g, h : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, ses dérivées partielles peuvent être obtenues à partir des dérivées partielles de g et h par les formules de dérivée de somme, produit, fraction habituelles $((u+v)' = u' + v'$, etc.)

Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées.

Rappel : règle de chaîne. Soit $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J \subset \mathbb{R}$, $g : x \mapsto g(x)$, $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : y \mapsto h(y)$ et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : x \mapsto h(g(x))$. On a :

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{dh}{dy} \Big|_{y=g(x_0)} \cdot \frac{dg}{dx} \Big|_{x=x_0}$$



$$(g \circ f)(x_1, \dots, x_n) = g(f(x_1, \dots, x_n))$$

(, ,)

$$\mathcal{J}_h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) = \mathcal{J}_g(f) \circ h$$

3.2 Propriétés des dérivées partielles.

23

Proposition 3.2.1 Soient

$$\begin{aligned} g &: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m, g : X \mapsto g(X) = (g_1(X), \dots, g_m(X)), \\ h &: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q, h : Y \mapsto h(Y) = (h_1(Y), \dots, h_q(Y)), \\ f &: D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q, f : X \mapsto h(g(X)) = f(X) = (f_1(X), \dots, f_q(X)) \end{aligned}$$

des fonctions telles que g en $X_0 \in D$ et h en $g(X_0) \in E$ sont des fonctions continument dérивables (i.e. les dérivées partielles existent et sont continues) alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X_0) &= \frac{\partial(h \circ g)_j}{\partial x_i}(X_0) \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial y_1}(g(X_0)) \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(X_0) + \dots + \frac{\partial h_j}{\partial y_m}(g(X_0)) \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(X_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ce qui nous donne les entrées d'une matrice jacobienne de f qui est un produit des matrices jacobiniennes de h et g .

En particulier, si

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto h(y_1, y_2) \text{ et } g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^2, X \mapsto (g_1(X), g_2(X))$$

pour $f = h \circ g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial(f)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial(h \circ g)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(g(X_0)) \frac{\partial(g_1)}{\partial x_i}(X_0) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(g(X_0)) \frac{\partial(g_2)}{\partial x_i}(X_0)$$

Exemple 3.2 1. Soit $f(x) = e^x \sin^2 x$. On peut voir f comme une composition de deux fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = (e^x, \sin x)$ et $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(y_1, y_2) = y_1 \cdot (y_2)^2$.
On a deux façons de calculer la dérivée de f - directement ou en utilisant la Proposition (3.2.1) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial(y_1 \cdot (y_2)^2)}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(y_1)}{\partial x} + \frac{\partial(y_1 \cdot (y_2)^2)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial(y_2)}{\partial x} \\ &= (y_2)^2 e^x + 2y_1 y_2 \cos x = \sin^2 x \cdot e^x + 2e^x \sin x \cos x. \end{aligned}$$

2. On peut aussi résoudre des problèmes comme celui-là :
Soient $f(x) = F(x, \phi(x)) = 0$, où $f(x)$ et $\phi(x)$ sont des fonctions d'une variable et $F(y_1, y_2)$ est une fonction de deux variables. Calculer $\phi'(x)$ en fonction des dérivées de F .
On considère $f(x)$ en tant qu'une fonction composée :

$$f'(x) = \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{d\phi(x)}{dx} = F'_1(x, \phi(x)) + F'_2(x, \phi(x))\phi'(x) = 0.$$

$$\text{D'où } \phi'(x) = -\frac{F'_1}{F'_2}(x, \phi(x)).$$

3.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur. Fonctions de classe C^k . Théorème de Schwarz

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Les dérivées partielles définissent p nouvelles fonctions

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p). \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

On peut regarder les dérivées partielles de chacune de ces nouvelles fonctions. Cela nous donne les dérivées partielles d'ordre 2 (aussi appellées les dérivées partielles secondes) et à leur tour on peut regarder les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre 2, etc. Cela s'écrit par exemple :

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

Définition 3.3.1 Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de **classe C^k** est une fonction dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues. Une fonction est dite de **classe C^∞** si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.3.1 (Schwarz) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur D . Les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2, $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ sont égales en tout point de D .



Le théorème de Schwarz implique que les dérivées partielles d'ordre k , $k \geq 2$, d'une fonction de classe C^k , $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles sont prises. Par exemple, pour une fonction de deux variables $f(x,y)$ de classe C^3 , on a :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}.$$

3.4 Différentielle

Lors de l'équation (3.1), en essayant de généraliser l'expression pour la dérivée d'une fonction d'une variable aux fonctions de plusieurs variables, nous avons introduit les fonctions de dérivées partielles, qui sont utiles et révèlent certaines informations sur le comportement de la fonction mais n'apportent pas toute l'information.

■ **Exemple 3.3** On considère à nouveau l'exemple 2.2. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On calcule sa dérivée partielle par rapport à x :

$$-\forall (x_0, y_0) \neq (0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{xy_0}{x^2+y_0^2} \right)' \Big|_{x=x_0} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \Big|_{x=x_0} = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

— $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée de $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$
donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$

On voit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0, et pourtant f n'est même pas continue en $(0,0)$. Donc les dérivées partielles ne suffisent pas à décrire la régularité de la fonction.

■

Nous allons réécrire l'équation (3.1) sans division et la généraliser aux fonctions de plusieurs variables.

Définition 3.4.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $A \in D$. La **différentielle** $df(A)$ de f au point A est **une application linéaire** de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q telle que au voisinage de A on a :

$$f(A + H) - f(A) = (df(A))(H) + r(H), \text{ où } r(H) = o(\|H\|). \quad (3.4)$$

Ici, $H \in \mathbb{R}^p$, tel que $A + H$ est au voisinage de A . La fonction f est dite **différentiable au point A** si elle possède une différentielle en ce point. La fonction f est dite **différentiable** dans un domaine D si elle est différentiable en tout point de D .

Cette application agit sur les vecteurs de \mathbb{R}^p et les envoie vers \mathbb{R}^q , en particulier $(df(A))(H) \in \mathbb{R}^q$. Le reste, $r(H) = o(\|H\|)$, dit “petit o ” de $\|H\|$, est une fonction $r : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, négligeable devant $\|H\|$. On peut comparer leurs normes :

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{\|r(H)\|_{\mathbb{R}^q}}{\|H\|_{\mathbb{R}^p}} = 0.$$

On peut réécrire la condition de différentiabilité

$$\lim_{\|H\| \rightarrow 0} \frac{f(A + H) - f(A) - (df(A))(H)}{\|H\|} = 0$$

Si elle existe, la différentielle $df(A)$ est **unique**. On la note selon les auteurs ou les circonstances :

$$L = Df(A) \text{ ou } df(A) \text{ ou } D_A f \text{ ou } d_A f.$$

La différentielle $df(A)$, si elle existe, est donnée par une matrice de taille $p \times q$ (une application linéaire de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^q écrite dans des bases des espaces vectoriels \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q). Cette matrice est appellée la **matrice jacobienne**.

La différentiabilité entraîne l'existence des dérivées partielles. On peut le voir sur un exemple d'une fonction f à p variables à valeurs réelles ($q = 1$). Par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{h_i}.$$

Par définition de la différentielle on a aussi

$$\frac{f(a_1, \dots, a_i + h_i, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{h_i} = \frac{df(A)(H) + r(H)}{h_i}$$

Ici H est le vecteur transposé de $(0, \dots, h_i, \dots, 0)$. Donc $r(H) = o(\|H\|) = o(h_i)$ et

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{df(A)(H) + r(H)}{h_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{df(A)(H)}{h_i}.$$

Donc ici

$$df(A)^{\dagger}(0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \cdot h_i$$

et par linéarité

$$df(A)^{\dagger}(h_1, \dots, h_i, \dots, h_p) = \sum_{i=0}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \cdot h_i$$

Finalement, on remarque que

$$df(A)(H) = \text{Jac}(f)(A)H \text{ et } df(A) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \boxed{dx_i}$$

car les différentielles de fonctions x_i , notées dx_i , satisfont $dx_i(H) = h_i$.

Dans les exercices de nature théorique, la différentiabilité est souvent établie en montrant directement par des majorations que le reste $r(H)$ est un $o(\|H\|)$. Mais si f est donnée explicitement au moyen des fonctions usuelles, on va plus vite en constatant simplement l'existence et la **continuité** de ses dérivées partielles. Si une fonction est de classe C^1 elle est différentiable.

Propriété 3.4.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $X_0 \in D$. Si $\forall i = 1, \dots, p$, $\forall j = 1, \dots, q$, $X \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)$ existe au voisinage de X_0 et est continue en X_0 , alors f est différentiable en X_0 .

En termes moins précis, que j'ai prise dans le livre [?] et que je pense essentielle pour la compréhension du cours, la GRANDE IDÉE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL :

$$\left(\begin{array}{l} \text{accroissement} \\ \text{de la fonction} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{terme linéaire par rapport à} \\ \text{l'accroissement de la variable} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{petit terme} \\ \text{correctif} \end{array} \right) \quad (3.5)$$

Proposition 3.4.2 Propriétés de la différentielle.

1. **Continuité.** Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.
2. **Linéarité.** Soient $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions définies sur une partie D de \mathbb{R}^p . Si f et g sont différentiables en $A \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $d(f+g)(A) = df(A) + dg(A)$ et $d(\lambda f)(A) = \lambda df(A)$.
3. **Composition.** Soient $g : D \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$ définie sur une partie D de \mathbb{R}^p et différentiable en $A \in D$, et $h : E \rightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en $g(A)$, alors $h \circ g$ est différentiable en A et la différentielle

La composition suit de la formule (3.4) :

$$\begin{aligned} h(g(A+H)) - h(g(A)) &= dh(g(A))(g(A+H) - g(A)) + \text{petit reste} \\ &= dh(g(A))dg(A)(H) + \text{un autre petit reste} \end{aligned}$$

En pratique c'est donné par le produit des matrices jacobienes (comparer avec l'équation (3.3)).

Regardons maintenant une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in D$. On remarque que la différentielle d'une fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ au point (x, y) est égale à :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

$$A = (0,0) \quad H = (h,h) \quad f(h,k) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot k$$

3.4 Différentielle

27

■ **Exemple 3.4** 1. On reprend : soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la façon suivante

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On sait que f n'est pas différentiable en $(0,0)$ parce qu'elle n'est même pas continue.
Comment se comportent ses dérivées partielles au voisinage de $(0,0)$?

On a vu que si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0(y_0^2 - x_0^2)}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$ et que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est bien définie au voisinage de $(0,0)$, mais elle n'est pas continue : si $x_n = 1/n$ et

$y_n = 2/n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{2/n^2}{(1/n^2 + 4/n^2)^2} = \frac{2/n^2}{25/n^4} = \frac{2}{25}$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \neq 0$.

2. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2y^2, x+y) \end{cases}$$

Est-elle différentiable en $(2,3)$?

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f^1}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0y_0^2$, $\frac{\partial f^1}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0x_0^2$, $\frac{\partial f^2}{\partial x}(x_0, y_0) = 1$, $\frac{\partial f^2}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$.

Toutes ces dérivées partielles sont continues en $(2,3)$ donc f est différentiable en $(2,3)$.

$$\text{On a } \text{Jac}(f)(2,3) = \begin{pmatrix} 36 & 24 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

est-elle différentiable en 2 ? Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 2x_0$. Elle est continue en 2 donc f est différentiable en 2 et $\text{Jac}(f)(2) = \frac{\partial f}{\partial x}(2) = f'(2) = 4$.

■

4. Propriétés géométriques des fonctions de plusieurs variables

4.1 Dérivée directionnelle

Définition 4.1.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $A \in D$ et \vec{V} un vecteur de \mathbb{R}^p . On dit que f a une dérivée au point A en suivant le vecteur \vec{V} si l'expression :

$$D_{\vec{V}} f(A) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t \vec{V}) - f(A)}{t}$$

existe. $D_{\vec{V}} f(A)$ s'appelle la **dérivée directionnelle** de f en A en direction de vecteur \vec{V} .

R Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des dérivées directionnelles de f en A en direction de vecteurs de base $e_i = {}^t(0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0)$.

Proposition 4.1.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 , en $A \in D$ et \vec{V} un vecteur de \mathbb{R}^p . Alors, la dérivée directionnelle de f en A en direction de vecteur \vec{V} est égale au produit scalaire du gradient de f au point A et du vecteur \vec{V} :

$$D_{\vec{V}} f(A) = \overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \vec{V} \quad (4.1)$$

Démonstration. On va démontrer cette proposition pour le cas $p=2$. La généralisation au cas $p > 2$ est assez directe. Soit $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormale de \mathbb{R}^2 et $\vec{V} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$ et $A = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Soit une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u(t) = (x_0, y_0) + t \vec{V} = (x_0 + \lambda \vec{i}, y_0 + \mu \vec{j}) := (x(t), y(t))$. On considère une fonction d'une variable à valeurs réelles : $F(t) = f(u(t))$. C'est une fonction

composée. Sa dérivée en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(0) &= \frac{d(f \circ u)}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t}(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \lambda + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \cdot \mu = \vec{\text{grad}}f \cdot \vec{V} \\ \text{car } \frac{dx(t)}{dt}|_{t=0} &= \frac{d(x_0 + \lambda t)}{dt}|_{t=0} = \lambda \text{ et } \frac{dy(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{d(y_0 + \mu t)}{dt}|_{t=0} = \mu. \text{ De l'autre coté} \\ \frac{dF}{dt}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u(t)) - f(u(0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda t, y_0 + \mu t) - f(x_0, y_0)}{t} := D_{\vec{V}}f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

D'où la relation (4.1). ■

4.2 Gradient.

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Son gradient, pris en tout point de D définit une fonction à valeurs vectorielles $\vec{\text{grad}}f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, noté aussi :

$$\vec{\nabla}f(x, y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y).$$

Propriété (a) : Le gradient est perpendiculaire à la ligne de niveau

Définition 4.2.1 Soit X un point d'une courbe $\Gamma \in \mathbb{R}^p$ et T une droite tangente à Γ au point X . On dit qu'un vecteur \vec{V} est **perpendiculaire à la courbe** Γ au point X si \vec{V} est perpendiculaire à T . Dans ce cas on dit aussi que \vec{V} est **normal à la courbe** Γ au point X .

En particulier, cela signifie que le produit scalaire de V et du vecteur directeur de T est égal à 0.

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x, y) \in D$, alors si $f(x, y) = a$, (x, y) appartient à la ligne de niveau $L_a(f)$.

Théorème 4.2.1 Le vecteur gradient $\vec{\nabla}f(x, y)$ est normal à la courbe $L_a(f)$ au point (x, y) .

Démonstration. Soit $(x+h, y+k) \in L_a(f)$ un point au voisinage de (x, y) , qui appartient à la même courbe de niveau que (x, y) .

Alors, $f(x+h, y+k) - f(x, y) = 0$ car les valeurs de f en ces deux points sont égales. De la grande idée du calcul différentiel (3.5) on a :

$$\begin{aligned}f(x+h, y+k) - f(x, y) &= df(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h, k)\|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k + o(\|(h, k)\|).\end{aligned}$$

On a $\lim_{(h,k) \rightarrow 0} o(\|(h, k)\|) = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot k \rightarrow 0$ quand $(x+h, y+k) \rightarrow (x, y)$. Quand $(x+h, y+k) \rightarrow (x, y)$ tout en restant sur $L_a(f)$, le vecteur (h, k) est un vecteur tangent à $L_a(f)$. On a alors trouvé que le produit scalaire de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ et (h, k) égale 0, on en déduit que ces deux vecteurs sont orthogonaux. ■

■ **Exemple 4.1** A. $f(x, y) = x^2 + y^2$. $L_a(f) = C((0, 0), \sqrt{a})$ - cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon \sqrt{a} . $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$. On remarque que $(2x, 2y) = 2(x, y)$ est 2 fois le vecteur radial qui est en effet orthogonal au cercle.

B. Soit la courbe d'équation $x^2 - y = 0$. Pour calculer la normale en chaque point de cette courbe, on la voit comme une ligne de niveau 0 de la fonction $f(x, y) = x^2 - y$. La normale est donc donnée par son gradient : $\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriété (b) : Le gradient indique la ligne de plus grande pente

Sur le graphe de la fonction f on prend un point $(x, y, f(x, y))$, alors (x, y) est sur la ligne de niveau $a = f(x, y)$.

Théorème 4.2.2 Le gradient en (x, y) indique la direction de plus grande pente ≥ 0 sur Γ_f à partir d'un point en question.

Démonstration.

$$f((x, y) + \vec{v}) - f(x, y) = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{v} + o(\|\vec{v}\|)$$

Le produit scalaire $\vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{v}$ vaut $\|\vec{\nabla} f(x, y)\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs. L'accroissement de la fonction atteint le maximum quand $\cos \theta = 1$, alors \vec{v} doit être parallèle à $\vec{\nabla} f(x, y)$.

R

En suivant la ligne de plus grande pente dans D on a, sur le graphe, le chemin le plus court à parcourir pour obtenir une variation donnée de f . Autrement dit, si on veut passer le plus vite possible du niveau a au niveau b à partir d'un point (x, y) donné de niveau $a = f(x, y)$, il faut suivre le gradient.

4.3 Formule de Taylor

Rappel : petit o. Soient f et g deux fonctions d'une variable à valeurs réelles. On dit que $g = o(f)$ au point a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

Exemple : $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2 + 2x$. En $a = 0$ on a $u(x) = o(v(x))$ et en $a = +\infty$ on a $v(x) = o(u(x))$.

Rappel : La formule de Taylor avec le reste en forme de Lagrange. Si f est $n+1$ fois différentiable en a , on a une approximation de f par un polynôme :

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n + r_n(a, t)$$

où il existe $\theta \in [a, a+t]$ tel que $r_n(a, t) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1}$. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : si f est continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$ alors $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $f(b) = f(a) + f'(x_0)(b-a)$.

Finalement, on a aussi la **formule de Taylor-Young** avec $r_n(a, t) = o(t^n)$:

$$f(a+t) - f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + o(t^n)$$

C'est cette formule qu'on va généraliser au cas de plusieurs variables.

Théorème 4.3.1 (Formule de Taylor) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n au voisinage du point $A(a_1, a_2, \dots, a_p) \in D$. Soient $H(h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ et l'intervalle $[A, A+H] \subset D$. Alors,

$$f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left((h_1 \partial_1 + \dots + h_p \partial_p)^k (f) \right) (A) + o(\|H\|^n)$$

Démonstration. Ici $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit $F(t) = f(A+tH)$ une fonction composée d'une variable à valeurs réelles. On va utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour cette fonction. Pour cela on remarque que :

$$F'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f(A+tH)}{\partial x_i} \cdot \frac{d(a_i + th_i)}{dt}.$$

Pour la k -ème dérivée de la fonction composée $F(t)$ on a :

$$F^{(k)}(t) = \sum (\underbrace{\partial_{i_1} \cdots (\partial_{i_1} f(A+tH)) \cdots}_{k \text{ fois}}) \frac{d(a_{i_1} + th_{i_1})}{dt} \cdots \frac{d(a_{i_k} + th_{i_k})}{dt}$$

où on prend la somme sur tout $i_1 \in \{1, \dots, p\}, \dots, i_k \in \{1, \dots, p\}$. On remarque que

$$\frac{d(a_{i_k} + th_{i_k})}{dt} = h_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

Par le binôme de Newton cette formule se réécrit :

$$F^{(k)}(t) = (h_1 \partial_1 + \dots + h_p \partial_p)^k f(A+tH)$$

On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $F(0+t)$ au voisinage de 0 :

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta)t^{n+1}, \theta \in [0, t].$$

Pour $t = 1$ on a :

$$F(1) = F(0) + F'(0)t + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta), \theta \in [0, 1]$$

D'où :

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_p + h_p) = f(a_1, \dots, a_p) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (h_1 \partial_1 + \dots + h_p \partial_p)^k f(A) + r_n(A, H)$$

Le dernier terme est le reste :

$$r_n(A, H) = \frac{1}{(n+1)!} (h_1 \partial_1 + \dots + h_p \partial_p)^{n+1} f(A + \theta H) \equiv o(\|H\|^n).$$



En particulier, la formule de Taylor à l'ordre 2 est la suivante :

$$f(A + H) = f(A) + \sum_{i=1}^p \partial_i f(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \partial_i \partial_j f(a) h_i h_j + o(\|H\|^2) \quad (4.2)$$

La matrice-colonne des entrées $\partial_i f$ est la matrice Jacobienne. La matrice $p \times p$ des dérivées seconde

$$Hess_f(A) := [\alpha_{ij}] = [\partial_i \partial_j f(A)]$$

s'appelle la **matrice Hessienne** de f en A . Par le théorème de Schwarz cette matrice est symétrique si f est de classe C^2 . La forme quadratique $\alpha(u) = \sum_{i,j=1}^p \alpha_{ij} u_i u_j$ s'appelle la **forme hessienne** de f en A .

R L'idée de la formule de Taylor c'est de trouver une approximation de la fonction par un polynôme dans un voisinage d'un point donné.

En particulier, pour $p = 2$, $A = (a, b)$, $H = (h, k)$, $(A + H) = (a + h, b + k)$ on a les formules de Taylor suivantes :

— $n = 0$

$$f(A + H) - f(A) = o((\sqrt{h^2 + k^2})^0) \Leftrightarrow \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(A + H) - f(A)}{1} = 0$$

- continuité

— $n = 1$

$$f(A + H) - f(A) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

- différentiabilité.

— $n = 2$

$$\begin{aligned} f(A + H) - f(A) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) + o(h^2 + k^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.4 Vecteur normal et plan tangent à un graphe d'une fonction de 2 variables

A. Surfaces et coordonnées curvilignes

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur une partie D de \mathbb{R}^2 . L'ensemble des points de \mathbb{R}^3 :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

est le graphe de la fonction f sur D (définition 2.1.1). Il est évident que l'application :

$$F : D \rightarrow S, F(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

est une bijection. Puisque les points de S sont donnés par des paires de nombres (x, y) , l'ensemble S est une **surface de dimension 2** dans \mathbb{R}^3 .

Si on a un chemin $\Gamma : I \rightarrow D$, alors automatiquement on a un chemin $F \circ \Gamma : I \rightarrow S$ sur la surface S . Si

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de Γ alors le chemin $F \circ \Gamma$ sur S est donné par les trois fonctions :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Soit $(x_0, y_0) \in D$. On peut trouver un chemin :

$$x = x_0 + t, y = y_0, z = f(x_0 + t, y_0)$$

sur la surface S pour lequel la coordonnée $y = y_0$ ne change pas et un autre chemin :

$$x = x_0, y = y_0 + t, z = f(x_0, y_0 + t)$$

pour lequel la coordonnée $x = x_0$ ne change pas. Ces chemins partant de points différents de la surface S tracent des lignes de coordonnées sur S . Pour cette raison on appelle (x, y) les **coordonnées curvilignes** sur S .

B. Plan tangent

Si la fonction $z = f(x, y)$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in D$, alors, quand $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ on a :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right) \quad (4.4)$$

où α et β sont des constantes égales aux dérivées partielles au point (x_0, y_0) .

Considérons un plan dans \mathbb{R}^3 donné par une équation

$$z = z_0 + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \quad (4.5)$$

où $z_0 = f(x_0, y_0)$. On voit que le graphe (4.4) de la fonction f autour du point (x_0, y_0) est éloigné du plan (4.5) d'une valeur négligeable devant $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Définition 4.4.1 Le plan

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \quad (4.6)$$

avec $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est appellé le **plan tangent au graphe de la fonction** $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

C. Vecteur normal

Soit $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ et $F(x, y, z) = 0$ l'équation implicite d'une surface S (précédemment on avait une surface : $z = f(x, y)$ pour laquelle $F(x, y, z) = f(x, y) - z$). Soit

$$t \in I \subset \mathbb{R}, \gamma : t \mapsto \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

l'équation paramétrique d'une courbe de la surface passant par le point $P_0(x_0, y_0, z_0)$, c'est-à-dire qu'il existe

$$t_0 \in I, \text{ tel que } (x_0, y_0, z_0) = (f(t_0), g(t_0), h(t_0)) \text{ et } (x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$$

qui satisfont l'équation $F(x, y, z) = 0$ pour tout $t \in I$. Soit $u(t) = F(f(t), g(t), h(t))$ une fonction composée de $I \rightarrow \mathbb{R}$, qui est identiquement nulle sur I . Donc au point $t = t_0$ on a

$$0 = \frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dh}{dt} \quad (4.7)$$

De l'équation (4.7) suit que le vecteur $\left. {}^t \left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt} \right) \right|_{t=t_0}$ est orthogonal au vecteur $\left. {}^t \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right|_{t=t_0} \equiv \overrightarrow{\text{grad}}F(P_0)$.

Le vecteur $\left. {}^t \left(\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt} \right) \right|_{t=t_0}$ est un vecteur quelconque dans l'espace tangent à S au point P_0 .

Donc le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(P_0) = \left. {}^t \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right|_{t=t_0} (P_0)$$

est orthogonal à tout vecteur tangent à la surface S passant par P_0 . Cela signifie exactement que le vecteur gradient est normal à la surface S .

L'équation du plan tangent à la surface donnée par l'équation $F(x, y, z) = 0$ est facile à établir : c'est le plan passant par P_0 tel que tout vecteur de ce plan est orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}F(P_0)$. Les coordonnées d'un point $M(x, y, z)$ du plan vérifient : $\overrightarrow{P_0M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}F(P_0) = 0$. Ce produit scalaire donne l'équation du plan tangent :

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) (P_0) = 0.$$

De façon plus explicite :

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} (P_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y} (P_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z} (P_0) = 0.$$

On peut comparer cette formule à la formule (4.6).

5. Extrema

5.1 Extrema locaux et globaux. Définition

On étudie le comportement d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles. Une telle fonction peut avoir des valeurs extrémales : des minima (des valeurs les plus petites) ou des maxima (des valeurs les plus grandes) sur tout le domaine de définition ou bien sur une certaine partie. On les appelle des **extrema**.

Définition 5.1.1

1. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$. On dit que f admet un **maximum (resp. minimum) global** au point $A \in D$ si pour tout $X \in D$ on a $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$). Le maximum (resp. minimum) est appelé **strict** si $f(X) < f(A)$ (resp. $f(X) > f(A)$).
2. On dit que f admet un **maximum (resp. minimum) local** au point $A \in D$ si on peut trouver un nombre $r > 0$ tel que $X \in D$ et $\|X - A\| < r$ entraîne $f(X) \leq f(A)$ (resp. $f(X) \geq f(A)$).

Les extrema globaux sont appelés aussi **extrema absolus**.

5.2 Théorème des extrema sur un compact

Théorème 5.2.1 Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^p$. Alors f admet un maximum et un minimum sur K .



En dimension $p = 1$ la fonction a des points extrémaux sur un intervalle. Soit ils sont à l'intérieur de l'intervalle, auquel cas ils vérifient $f'(x) = 0$, soit ils sont au bord de l'intervalle (sur le bord, la condition $f'(x) = 0$ n'est pas forcément satisfaite). Donc pour trouver les extrema on cherche d'abord des points critiques (où la dérivée s'annule), puis on compare la valeur des points critiques avec les valeurs sur le bord de l'intervalle. Les valeurs max et min se trouvent parmi ces valeurs-là.

Définition 5.2.1 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur une partie D de \mathbb{R}^p . On dit que $A \in D$ est un **point critique** de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en A (équivalent à dire que le gradient de f est nul en A , équivalent à dire aussi que la différentielle de f est nulle en A).

Théorème 5.2.2 — Condition nécessaire d'extremum local. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ admettant un maximum ou un minimum local au point $A \in U$. Alors A est un point critique de f .

Démonstration. Reprenons la formule de Taylor (4.3) à l'ordre 2 en dimension 2. La preuve se généralise sans problème aux dimensions supérieures.

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &+ \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) + o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

Si on a un maximum local en A , alors $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$ pour tout (h, k) suffisamment petit. La valeur de la fonction linéaire de deux variables $h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, si elle n'est pas 0, est grande par rapport aux termes suivants. Donc cette valeur, si elle n'est pas égale à 0, doit être négative. Pourtant pour h, k positifs il faut que les constantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) \leq 0$, $i = 1, 2$ et pour h, k négatifs il faut que les mêmes valeurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) \geq 0$, $i = 1, 2$, d'où $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$, $i = 1, 2$. On peut refaire le même raisonnement pour un min local. ■

5.3 Extrema de fonctions de 2 variables - critère par le déterminant de matrice Hessianne

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$. Quand $p = 1$, pour savoir si un point critique X_0 est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si $f''(X_0) > 0$, alors $f(X_0)$ est un minimum local,
- si $f''(X_0) < 0$, alors $f(X_0)$ est un maximum local,
- si $f''(X_0) = 0$, il faut faire des calculs supplémentaires de dérivées supérieures - ce peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum.

Dans le cas de plusieurs variables à la place de f'' , on étudie la Hessienne.

Propriété 5.3.1 Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in D$ un point critique de f . On suppose que la Hessienne $Hf(X_0)$ existe. Alors

- si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement positives, $f(X_0)$ est un minimum local,
- si toutes les valeurs propres de $Hf(X_0)$ sont strictement négatives, $f(X_0)$ est un maximum local,
- sinon, et si toutes les valeurs propres ne sont pas 0, il n'y a pas d'extrema. Si toutes les valeurs propres sont 0, il faut étudier des termes d'ordre supérieur dans la décomposition de Taylor en X_0 .

Pour $p = 2$ on fait le calcul de la formule de Taylor. Au point critique $X_0(a, b)$ on a

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) + o(\|(h, k)\|^2)$$

Donc le signe de la forme quadratique (la forme hessienne)

$$\frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right)$$

va déterminer si on a un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre. Pour avoir un maximum (resp. minimum) il faut que la forme soit négative (resp. positive) pour tout (h, k) au voisinage de $(0, 0)$. Si la forme hessienne n'est pas de signe défini on a des couples (h, k) pour lesquelles la valeur de $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ est positive et d'autres pour lesquelles cette valeur est négative. Donc on a des directions (h, k) dans lesquelles la fonction a un maximum au point (a, b) et d'autres où la fonction a un minimum au même point. Ce type de point critique s'appelle un **point selle** (comme une selle de cheval) ou bien **point col** (comme dans les montagnes).

On étudie alors la forme hessienne. On choisit des notations standard :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

On suppose que $R \neq 0$ et on réécrit la forme hessienne :

$$\begin{aligned} Rh^2 + 2Shk + Tk^2 &= R \left(h^2 + 2 \frac{S}{R} hk + \frac{T}{R} k^2 \right) \\ &= R \left(h^2 + 2 \frac{S}{R} hk + \left(\frac{S}{R} \right)^2 k^2 - \left(\frac{S}{R} \right)^2 k^2 + \frac{T}{R} k^2 \right) \\ &= R \left(\left(h + \frac{S}{R} k \right)^2 + \left(\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R^2} \right) k^2 \right) \end{aligned}$$

Puisque le premier terme $\left(h + \frac{S}{R} k \right)^2 \geq 0$, c'est le deuxième terme qui définit si la forme est de signe défini. Alors,

- Si $\frac{T}{R} - \frac{S^2}{R^2} > 0$ ($\Leftrightarrow RT - S^2 > 0$) on a un maximum si $R < 0$ et minimum si $R > 0$.
- Si $RT - S^2 < 0$ on a un point selle.

R Si $RT - S^2 > 0$ la condition $R > 0$ ($R < 0$) est équivalente à la condition $R + T > 0$ ($R + T < 0$) i.e. la condition sur la trace de la matrice hessienne.

Recherche des extrema :

- Déterminer des points où f n'est pas de classe C^1 et regarder les valeurs de f en ces points. Par exemple, la fonction $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ admet un maximum à l'origine mais on ne le trouve pas parmi les points critiques.
- Rechercher les points critiques.
- Etudier les points critiques.

■ **Exemple 5.1** Extrema locaux et globaux de $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur \mathbb{R}^2 . Points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0,0)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$.

pt critique	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$R = 4y + 4$	4	0	0
$S = 4x$	0	-4	4
$T = 2$	2	2	2
$RT - S^2$	8	-16	-16
Signe de R	> 0		
Nature du pt critique :	min	pt selle	pt selle

Les extrema globaux : on voit que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x,-2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty$$

Ici on a utilisé un critère par le signe du déterminant (et de la trace) de la matrice hessienne pour déterminer la nature du point critique. Si le déterminant est 0 on doit regarder la formule de Taylor à l'ordre supérieur (à l'ordre 3 et parfois plus).

■ **Exemple 5.2** On cherche des extrema locaux de $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ sur \mathbb{R}^2 .

On trouve 3 points critiques $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ pour lesquels on ne peut pas utiliser le critère car $RT - S^2 = 0$ mais $g(x,y) = (x^2 - 1)^2 + y^4 - 1$ donc en $(\pm 1,0)$ il y a un minimum local. En $(0,0)$ on a $g(0,0) = 0$ et au voisinage de $(0,0)$ on a des valeurs positives et négatives $g(0,y) = y^4 > 0$ et $g(y,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ pour x suffisamment petit. Donc $(0,0)$ n'est pas un max ni un min, c'est un point-selle.

5.4 Extrema liés

Soit K un compact de \mathbb{R}^2 . Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Soit $g(x,y) = 0$ l'équation de la courbe $C \subset K$. Si C est le bord de K , on a une notation $C = \partial K$. On regarde la restriction de f sur la courbe C . Si la courbe C a pour équation $g(x,y) = 0$, tous les points de la courbe satisfont

cette équation. Quand on cherche les extrema de la fonction f sur C on dit qu'on étudie les extrema de f assujettie à la contrainte $g(x, y) = 0$. Ce sont des **extrema liés**.

■ **Exemple 5.3 Exemple A.** Voici un exemple de problème de recherche d'extrema liés : parmi des rectangles avec la somme de cotés $2p$ (où p est un nombre positif donné), trouver un rectangle à l'aire maximale. Soient x, y les cotés du rectangle. Alors on a $\sigma(x, y) = xy$ l'aire, qui doit être maximale tandis que (x, y) sont soumis à la condition $x + y = p$. Ici, il est facile d'exprimer y par x et trouver un maximum d'une fonction d'une variable ainsi obtenue.

Il est rare que l'on puisse exprimer y directement comme une fonction de x en utilisant la contrainte.

Exemple B. Regardons un exemple de la page 362 [?] : la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ et la contrainte, la courbe C , définie par une équation $g(x, y) = 0$. Il s'agit de trouver un minimum de f , lié par cette relation $g(x, y) = 0$. C'est un minimum de f sur la courbe C . Géométriquement on peut résoudre le problème en traçant des lignes de niveau de f . Les lignes de niveau de f sont des cercles concentriques du centre $(0, 0)$. Si on trace des cercles de rayons croissants, jusqu'à leur rencontre avec la courbe C , la valeur critique est sur le cercle qui touche la courbe. Faites un dessin - c'est instructif (dessinez une courbe quelconque et tracez les cercles). ■

La méthode générale utilise la considération suivante. Soit $P(a, b)$ un point extremum de f restreint à la courbe C . Le vecteur tangent à la courbe au point P doit être aussi tangent à la ligne de niveau $f(a, b)$ (on le voit clairement dans l'exemple B). Mais les lignes de niveau sont normales au gradient de f , de l'autre côté le vecteur tangent à C est normal au gradient de g . Donc ces deux gradients sont proportionnels. On appelle le coefficient de proportionnalité le **multiplicateur de Lagrange**.

Proposition 5.4.1 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Soit (a, b) un point de U tel que :

1. $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b)$ soumise à la contrainte $g(x, y) = 0$ admet un extremum au point (a, b) .
2. $\overrightarrow{\text{grad}} g(a, b) \neq 0$

Alors il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} g(a, b)$.

Les nombres a, b, λ sont des solutions du système d'équations suivant : les dérivées partielles de $f(x, y) - \lambda g(x, y)$ par rapport à x, y, λ doivent être égales à 0.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0 \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$$

■ **Exemple 5.4** Trouver le point de la courbe $y = x^2$ qui est le plus près du point $(0, h)$. Alors, ici $g(x, y) = y - x^2$, et $f(x, y) = x^2 + (y - h)^2$ - le carré de la distance. Les gradients nous donnent

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2(y - h) - \lambda = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions : soit $x = 0$, et alors $y = 0$ aussi, ou bien $\lambda = -1$ et $y = h - 1/2$, $x = \pm\sqrt{h - 1/2}$. Alors pour $h \geq 1/2$, les points $(\pm\sqrt{h - 1/2}, h - 1/2)$ sont à la distance minimale de $(0, h)$. Si $h < 1/2$ on a $(0, 0)$ comme point le plus proche. ■

Théorème 5.4.2 Soit f une fonction C^2 sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$, alors f atteint un minimum et un maximum globaux sur K . Ces points d'extrema sont

- soit des points intérieurs de K , auquel cas ce sont des points critiques ($\overrightarrow{\text{grad}} f = 0$ en ces points)
- soit ils sont sur le bord ∂K de K auquel cas ils sont donnés par le calcul des extrema liés en utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

■ **Exemple 5.5** Trouver les extrema globaux de $f(x, y) = y + y^2 - x^2 + 3$ sur $B(0, 1)$ disque de centre $(0, 0)$ de rayon 1. On cherche les points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2y = 0 \end{cases}$$

On trouve un seul point critique $(0, -1/2)$. Ce point se trouve dans le disque et sa valeur est $f(0, -1/2) = 11/4$ ■

La matrice hessienne donne :

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow (0, -1/2) \text{ point selle.}$$

Il faut alors chercher les extrema globaux sur le bord $x^2 + y^2 - 1 = 0$. On a :

$$\begin{cases} -2x - 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

On trouve les points $(0, \pm 1)$ et $(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$. Les valeurs : $f(0, 1) = 5$, $f(0, -1) = 3$, $f(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}) = \frac{15}{8}$. On compare ces valeurs et conclut que le max se trouve au point $(0, 1)$ et le min aux points $(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$.

5.5 Extrema d'une fonction de $n > 2$ variables

En dimension n on procède de la même façon qu'en dimension 2. En utilisant la formule de Taylor en dimension n au voisinage d'un extremum on voit que la condition nécessaire est que le gradient s'annule aux points d'extrema locaux. La condition suffisante pour avoir un minimum (resp. maximum) est que la forme hessienne soit positivement (resp. négativement) définie.

Pour les extrema liés on a le théorème suivant ([?]) :

Théorème 5.5.1 Soient f, g_1, \dots, g_n des fonctions réelles de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^p , et E un ensemble défini par les équations :

$$g_1(X) = 0, \dots, g_n(X) = 0, \text{ avec } X \in U.$$

Si la restriction de f à E admet un extremum local en $A \in E$, et si les différentielles

$$Dg_1(A), \dots, Dg_n(A)$$

sont linéairement indépendantes sur \mathbb{R}^p , alors nécessairement les formes linéaires

$$Df(A), Dg_1(A), \dots, Dg_n(A)$$

sont liées. En d'autres termes, il existe des coefficients réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$Df(A) = \lambda_1 Dg_1(A) + \dots + \lambda_n Dg_n(A)$$

6. Champs de vecteurs

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 Un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^p$ est une application qui à tout point M de D associe un vecteur $\vec{V}(M)$ de \mathbb{R}^p . Soit $\{O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , alors un champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ est donné par trois fonctions P, Q et R sur D à valeurs réelles :

$$\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

On dit que le champ de vecteurs \vec{V} est de classe C^k sur D si P, Q, R sont de classe C^k .

Les fonctions à valeurs réelles, on les appelle parfois des champs scalaires, tandis que les champs vectoriels sont des fonctions à valeurs vectorielles. Quand on dessine un champ de vecteurs, on a des vecteurs associés à tout point du domaine de définition. Pour **dessiner un champ de vecteurs**, on prend quelques points sur le plan \mathbb{R}^2 et en chaque point choisi on calcule la valeur du champ ; on fait un dessin du vecteur ainsi obtenu en commençant au point choisi. Voici quelques exemples de champs faciles à dessiner :

■ Exemple 6.1

Champ uniforme : champ constant, par exemple, $\lambda \vec{i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Champ convergent : $-x \vec{i} - y \vec{j}$.

Champ tournant : $-y \vec{i} + x \vec{j}$.

■

6.2 Gradient. Opérateur Nabla

Le gradient est un exemple d'un champ de vecteurs. Le gradient d'une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$ associe à chaque point X de D le vecteur $\vec{\text{grad}} f(X)$. Dans \mathbb{R}^3 en coordonnées

$\{x, y, z\}$ on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(X), \frac{\partial f}{\partial y}(X), \frac{\partial f}{\partial z}(X) \right).$$

Dans \mathbb{R}^3 on regarde un **opérateur** $\vec{\nabla}$ à coordonnées $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Cet opérateur vectoriel

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.1)$$

agissant sur une fonction f est égal au gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$. Cet opérateur $\vec{\nabla}$ est aussi appelé **l'opérateur de Hamilton** (c'est le même Hamilton (1805 - 1865) qui a introduit le mot "vecteur").

Linéarité du gradient : Soient f_1, f_2 des fonctions définies sur une partie de \mathbb{R}^n et λ, μ des nombres réels. Alors $\overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f_1 + \mu \overrightarrow{\text{grad}} f_2$

On peut se poser une question : et si tous les champs de vecteurs sont des gradients de fonctions ? On voit rapidement que c'est une restriction assez forte.

Définition 6.2.1 Soit \vec{V} un champ de vecteurs $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$. S'il existe $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ on dit que le champ \vec{V} **dérive du potentiel scalaire** f sur D et \vec{V} est un **champ de gradient** aussi appelé un **champ potentiel**.

R

1. La condition $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ dans certains livres de physique est donnée avec un signe : $\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$ pour des raisons de convention dans certaines équations.
2. Si la fonction f existe, elle est unique à une constante près.

6.3 Divergence et Rotationnel

A l'aide de l'opérateur $\vec{\nabla}$ on peut définir des opérations sur des champs - la divergence et le rotationnel.

Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 . Le produit scalaire de l'opérateur $\vec{\nabla}$ avec le champ \vec{V} donne une fonction, qui s'appelle la **divergence** de \vec{V} .

Le produit vectoriel de l'opérateur $\vec{\nabla}$ avec un champ \vec{V} donne un nouveau champ, qui s'appelle le **rotationnel** de \vec{V} .

La divergence agit sur des champs de vecteurs et donne des fonctions.

Définition 6.3.1 Soit $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs, $\vec{V} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$, où P, Q, R sont des fonctions $D \rightarrow \mathbb{R}$. La **divergence** de \vec{V} est

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (6.2)$$

On remarque que la divergence est linéaire :

$$\text{div}(\lambda \vec{V} + \mu \vec{W}) = \lambda \text{div } \vec{V} + \mu \text{div } \vec{W}$$

Le rotationnel agit sur des champs de vecteurs et donne des champs de vecteurs.

Définition 6.3.2 Soit $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs, $\vec{V} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$, où P, Q, R sont des fonctions $D \rightarrow \mathbb{R}$. Le *rotationnel* de \vec{V} est

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}\vec{V} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

On remarque que le rotationnel est linéaire :

$$\vec{\text{rot}}(\lambda \vec{V} + \mu \vec{W}) = \lambda \vec{\text{rot}}\vec{V} + \mu \vec{\text{rot}}\vec{W}$$

■ **Exemple 6.2** Système d'équations de Maxwell pour le champ électromagnétique dans le vide :

$$\begin{array}{ll} 1. \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & 2. \text{div} \vec{B} = 0 \\ 3. \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & 4. \vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

Ici on note :

- $\rho(x, t)$ - la densité volumique de charge électrique au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ à l'instant t ,
- $\vec{j}(x, t)$ - le vecteur densité de courant,
- $\vec{E}(x, t)$ - le vecteur champ électrique,
- $\vec{B}(x, t)$ - le vecteur induction magnétique,
- ϵ_0 - la permittivité diélectrique du vide,
- c - la vitesse de la lumière dans le vide ($= 299792458$ m/s).



Propriétés de l'opérateur $\vec{\nabla}$:

Soit $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 , et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors, on a

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \equiv 0.$$

Formellement on peut le voir comme un produit mixte, qui est identiquement 0 si les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Ici ce ne sont pas des vecteurs mais des opérateurs vectoriels mais le produit mixte de $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}$ et \vec{V} est identiquement 0. On a aussi

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) \equiv 0. \quad (6.4)$$

Définition 6.3.3 L'opérateur

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$$

défini sur les fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^2 à valeurs dans les fonctions est appelé **l'opérateur de Laplace**.

6.4 Théorème de Poincaré

Proposition 6.4.1 Soit $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{V} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$, un champ de vecteurs, P, Q, R des fonctions de D vers \mathbb{R} . Une condition nécessaire pour que le champ \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire sur D est qu'en tout point M de D , $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$.

Démonstration. La relation 6.4 implique que pour qu'il existe $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $\vec{V} = \vec{\text{grad}} f$ on a $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$. Cela se traduit en trois conditions sur les fonctions P, Q et R :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right.$$

■

La condition suffisante pour un champ d'être un champ de gradient est une condition sur le domaine de définition du champ.

Théorème 6.4.2 — Poincaré.

Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 tel que $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$. Alors il existe une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \vec{\text{grad}} f$.

Remarquez ici que le champ V est défini en tout point de \mathbb{R}^3 . On ne donne pas ici de démonstration de ce théorème mais on remarque que le champ de vecteurs en question doit impérativement être de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 . C'est \mathbb{R}^3 , le domaine de définition du champ, qui joue un rôle important ici.

Voici une définition pertinente :

Définition 6.4.1 Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est **simplement connexe** si D est connexe par arc (Définition 2.6.2) et toute courbe fermée de D peut être ramenée à un point par une déformation continue tout en restant dans D .

■ **Exemple 6.3** Un exemple d'un domaine non-simplement connexe : un domaine de \mathbb{R}^2 - un anneau qu'on peut définir pour $r^2 < R^2$ par $D = \{(x,y) | r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On peut voir ce domaine comme un disque de rayon R troué : le petit disque autour du centre est enlevé du grand disque. Il n'est pas simplement connexe. En effet, si on considère une courbe fermée de D (un lacet) qui contourne $(0,0)$ il n'y a pas de façon de l'amener à un point, sans la faire "sauter" par dessus ce disque absent. ■

Le théorème de Poincaré se formule d'une façon plus générale :

Théorème 6.4.3 — Poincaré généralisé.

Soit D un domaine de \mathbb{R}^3 . Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe C^1 et $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$. Alors si D est simplement connexe, il existe une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{V} = \vec{\text{grad}} f$.

6.5 Calcul du potentiel

Si \vec{V} est un champ potentiel, alors on peut trouver le potentiel à une constante près. On va faire un exemple de calcul ici.

Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de composantes P, Q, R :

$$P(x, y, z) = 6x(y + z^2), \quad Q(x, y, z) = 3x^2, \quad R(x, y, z) = 6x^2z$$

Il est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 car les fonctions P, Q, R sont des polynômes. De plus $\vec{\operatorname{rot}} V = 0$:

$$\begin{cases} \partial R / \partial y - \partial Q / \partial z = 0 - 0 = 0 \\ \partial P / \partial z - \partial R / \partial x = 12xz - 12xz = 0 \\ \partial Q / \partial x - \partial P / \partial y = 6x - 6x = 0 \end{cases}$$

Par le théorème de Poincaré (Théorème 6.4.2), \vec{V} dérive d'un potentiel scalaire. Déterminons tous les potentiels scalaires $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ du champ \vec{V} . On a $\vec{\operatorname{grad}} f = \vec{V}$.

$$\begin{cases} \partial f / \partial x = 6x(y + z^2) & (1) \\ \partial f / \partial y = 3x^2 & (2) \\ \partial f / \partial z = 6x^2z & (3) \end{cases}$$

De (2) on a $f(x, y, z) = 3x^2y + \phi(x, z)$, où $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. De (1) on a $\partial f / \partial x = 6x(y + z^2) = \partial(3x^2y + \phi(x, z)) / \partial x = 6xy + \partial\phi(x, z) / \partial x$. Donc

$$\partial\phi(x, z) / \partial x = 6xz^2 \Rightarrow \phi(x, z) = 3x^2z^2 + \psi(z), \text{ où } \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

Il suit

$$f(x, y, z) = 3x^2y + 3x^2z^2 + \psi(z)$$

et avec l'équation (3) on a

$$\partial f / \partial z = 6x^2z = \partial(3x^2y + 3x^2z^2 + \psi(z)) / \partial z = 6x^2z + \psi'(z)$$

ce qui donne $\psi(z) = k$, k - une constante. Finalement

$$f(x, y, z) = 3x^2y + 3x^2z^2 + k$$

est un potentiel scalaire de \vec{V} .

7. Formes différentielles

7.1 Formes différentielles

Définition 7.1.1 On appelle **1-forme différentielle** définie sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ une application α de U dans l'espace dual de \mathbb{R}^p , c'est-à-dire dans $(\mathbb{R}^p)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, l'espace des applications linéaires de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} .

$$\alpha : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$$

Soit $x \in U$, alors $\alpha(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

Soit \vec{V} un champ de vecteurs sur U , cela signifie en particulier $\vec{V}(x) \in \mathbb{R}^p$. Comme on a $\alpha(x)$ application linéaire de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $\vec{V}(x) \in \mathbb{R}^p$ en chaque point x de U on a $\alpha(x)(\vec{V}(x)) \in \mathbb{R}$.

Cela montre qu'en chaque point de U l'espace des 1-formes différentielles est dual à l'espace de champs de vecteurs.

En effet, si un espace E (de dimension finie) est muni d'un produit scalaire, il existe un isomorphisme entre E et son dual. Ici E est l'espace des champs de vecteurs sur un ouvert $E = \text{Vect}(U)$ avec un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle(x)$ défini en chaque point $x \in U$. On peut donc établir une correspondance entre l'espace des champs de vecteurs et son espace dual des 1-formes différentielles, noté $\Omega^1(U)$: si \vec{V} est un champ de vecteurs sur U il existe une unique 1-forme différentielle α sur U telle que $\forall x \in U$ et $\forall \vec{W} \in \text{Vect}(U)$. On a

$$\alpha(\vec{W})(x) = \langle \vec{V} | \vec{W} \rangle(x) \tag{7.1}$$

Nous avons déjà vu un exemple d'une 1-forme différentielle, c'est la différentielle d'une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert U à valeurs dans \mathbb{R} donnée par

$$df : x \in U \mapsto df(x) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

En tant qu'application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, elle s'écrit

$$df = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Ici, nous notons $B^* = \{\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_p\}$ la base duale de la base de l'espace des champs de vecteurs, la base canonique de \mathbb{R}^p . L'application $\mathrm{d}x_i$ est donc la i -ème 1-forme coordonnée :

$$\mathrm{d}x_i : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_i$$

- sur un vecteur de coordonnées (x_1, \dots, x_p) la forme $\mathrm{d}x_i$ a pour valeur x_i (la forme différentielle et le champ de vecteurs considérés au même point de U). Pour tout X de U , $\alpha(X)$ s'écrit dans B^* avec des coefficients a_i qui dépendent du point X :

$$\alpha(X) = \sum_{i=1}^p a_i(X) \mathrm{d}x_i \quad (7.2)$$

Définition 7.1.2 Une 1-forme différentielle α est de classe C^k sur un ouvert U si les fonctions a_i qui interviennent dans (7.2) sont de classe C^k sur U .

7.2 *n*-formes différentielles

Pour définir les 1-formes différentielles nous avons travaillé avec des formes linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ mais nous pouvons définir des formes bilinéaires **alternées (anti-symétriques)** et plus généralement k -linéaires anti-symétriques $\mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$.

Définition 7.2.1 Une application linéaire $L : (\mathbb{R}^p)^k \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une k -forme anti-symétrique (= alternée) si la valeur de L change de signe sous une permutation de deux variables :

$$L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_i, \dots, \vec{V}_j, \dots, \vec{V}_k) = -L(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_j, \dots, \vec{V}_i, \dots, \vec{V}_k)$$

En particulier, si $\vec{V}_i = \vec{V}_j$, et $i \neq j$ la valeur de L est 0.

■ **Exemple 7.1** Le produit vectoriel $\vec{V} \wedge \vec{W}$, où $\vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^3$ est un exemple d'une forme anti-symétrique à valeurs dans \mathbb{R}^3 . ■

Ce qui nous intéresse ici ce sont des formes anti-symétriques à valeurs dans \mathbb{R} . On introduit le produit des formes linéaires de sorte qu'à deux formes $A \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^l, \mathbb{R})$ on associe une forme $A \wedge B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^{k+l}, \mathbb{R})$. Ce produit est appelé le **produit extérieur**. Le produit extérieur, noté \wedge , est

- associatif : $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
- distributif : $(A + B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$
- anti-symétrique : $A \wedge B = (-1)^{kl} B \wedge A$ pour $A \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^l, \mathbb{R})$.

En particulier, si on a deux 1-formes $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ leur produit $A \wedge B \in \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^2, \mathbb{R})$ est anti-symétrique :

$$A \wedge B = -B \wedge A$$

En général, le produit extérieur des formes $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, $A_1 \wedge \dots \wedge A_k$ est une k -forme anti-symétrique qui, évaluée sur k vecteurs de \mathbb{R}^p a pour valeur :

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_k(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k) = \begin{vmatrix} A_1(\vec{V}_1) & \dots & A_k(\vec{V}_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_1(\vec{V}_k) & \dots & A_k(\vec{V}_k) \end{vmatrix} = \det(A_j(\vec{V}_i)) \quad (7.3)$$

Définition 7.2.2 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $k \geq 0$ un entier. On appelle **k -forme différentielle** sur U une application

$$\omega : U \rightarrow \mathcal{L}((\mathbb{R}^p)^k, \mathbb{R})$$

telle que, pour tout x de U , $\omega(x)$ est une k -forme alternée sur \mathbb{R}^p . On note $\Omega^k(U)$ l'espace des k -formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^p$.

Une k -forme différentielle est aussi appelée une forme différentielle de degré k .

On considère les fonctions à valeurs réelles comme des 0-formes différentielles.

Par exemple les 2-formes différentielles sur $U \subset \mathbb{R}^2$ forment l'espace des formes bilinéaires alternées. Donc si on a deux formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$, alors on a un produit $\alpha \wedge \beta \in \Omega^2(U)$ tel que $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. En dimension 2 dans la base (dx, dy) les 1-formes sont $\alpha(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ et les 2-formes $\omega(x, y) = h(x, y) dx \wedge dy$. Il n'y a pas de formes $dx \wedge dx$ ou $dy \wedge dy$ à cause de l'anti-symétrie, et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Une k -forme différentielle dans \mathbb{R}^p peut se décomposer

$$\omega(X) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} f_{i_1 i_2 \dots i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (7.4)$$

où $f_{i_1 i_2 \dots i_k}(X)$ sont des fonctions sur $U \subset \mathbb{R}^p$ et dx_{i_j} sont des éléments de la base de $(\mathbb{R}^p)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

On peut définir la valeur d'une k -forme donnée évaluée sur k champs de vecteurs au point donné. On utilise la dualité entre les formes différentielles et les champs point par point donnée par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

■ Exemple 7.2

1. On peut regarder une 1-forme $z dx$ dans \mathbb{R}^3 au point $(5, -2, 3)$ évaluée sur un champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + xy \vec{j} + 2z \vec{k}$. La forme $z dx$ au point $(5, -2, 3)$ est égale à $3 dx$. La valeur du champ

$$\vec{V}(5, -2, 3) = 5^2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot 2 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}.$$

L'évaluation de la 1-forme $3 dx$ sur $\vec{V}(5, -2, 3)$ est alors

$$\langle 3 dx, 25 \cdot \vec{i} - 10 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k} \rangle = 3 \cdot 25 \langle dx, \vec{i} \rangle = 75.$$

On utilise le fait que $\{dx, dy, dz\}$ forme la base duale de la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et par conséquent $\langle dx, \vec{i} \rangle = 1$, $\langle dx, \vec{j} \rangle = \langle dx, \vec{k} \rangle = 0$.

2. On regarde une 2-forme $\omega = y dx \wedge dy$ dans \mathbb{R}^2 au point $(-3, 2)$ évaluée sur deux champs vectoriels $\vec{W}(x, y) = (2x - y) \vec{i} + xy^2 \vec{j}$ et $\vec{U} = 3y \vec{i} + \vec{j}$. D'abord, $\omega(-3, 2) = 2 dx \wedge dy$. Les valeurs des champs au point donné sont $\vec{W}(-3, 2) = (2 \cdot (-3) - 2) \vec{i} - 3 \cdot 2^2 \cdot \vec{j} = -8 \vec{i} - 12 \vec{j}$ et $\vec{U}(-3, 2) = 6 \vec{i} + \vec{j}$. L'évaluation de la 2-forme ω sur $\vec{W}(-3, 2)$ et $\vec{U}(-3, 2)$

au point $(-3, 2)$ en suivant la formule (7.3) est alors

$$\begin{aligned} <2dx \wedge dy, (-8\vec{i} - 12\vec{j}) \wedge (6\vec{i} + \vec{j})> &= 2 \cdot (-8) \cdot (1) <dx, \vec{i}> <dy, \vec{j}> \\ &+ 2 \cdot (-12) \cdot 6 <dy, \vec{j}> <dx, \vec{i}> = -16 + 144 = 128. \end{aligned}$$

■

7.3 Formes exactes. Différentielle de de Rham

Définition 7.3.1 La 1-forme différentielle α de classe C^0 (ou continue) sur l'ouvert U est **exacte** s'il existe une fonction f de classe C^1 sur l'ouvert U telle que $\alpha = df$. On dit que f est une primitive de α .

Il existe des 1-formes différentielles qui n'ont pas de primitive. Sur un ouvert connexe, lorsqu'une primitive existe, elle est unique à ajout d'une constante près. Reconnaître si une 1-forme différentielle est exacte est un problème analogue à celui de savoir reconnaître si un champ de vecteurs est un champ de gradient (partie 6.5 du cours).

Plaçons-nous par exemple en dimension 2 et considérons un champ de vecteurs défini sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U : \vec{V}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

ainsi qu'une forme différentielle α définie par :

$$\forall (x, y) \in U : \alpha(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Par la dualité (7.1) on a $df(x)((h, k)) = \langle \nabla f(x) | (h, k) \rangle$. Alors les équations $\alpha = df$ et $\vec{V} = \vec{\nabla} f$ sont toutes les deux équivalentes au même système :

$$\begin{cases} P(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ Q(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Comment vérifier si une 1-forme différentielle est exacte ? Pour les champs de vecteurs on avait le théorème de Poincaré général. Pour les 1-formes c'est exactement le même théorème. Pour le formuler en dimension quelconque il faut introduire un opérateur analogue à l'opérateur $\vec{\nabla}$ qui agit sur les formes.

En fait on a déjà cet opérateur - c'est l'opérateur d :

$$d = \sum_{i=1}^p dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Il faut comprendre que sur une forme différentielle ω (7.4) l'opérateur $dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ agit par les dérivées partielles sur les fonctions $f_{i_1 i_2 \dots i_k}(X)$ et par multiplication extérieure de dx_i sur les formes $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$:

$$d\omega = \sum_{i=1}^p dx_i \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} \omega.$$

L'opérateur d est appellé la **différentielle de de Rham**, aussi appelé parfois la **différentielle extérieure**. La différentielle de de Rham agit sur des fonctions de classe C^1 en les envoyant vers les 1-formes différentielles.

On peut définir l'action de d sur les 1-formes aussi bien que sur les fonctions. Par exemple, en dimension 2 :

$$\begin{aligned} d(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) &= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right) (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

On a utilisé dans le calcul $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.

R La différentielle de de Rham est un opérateur qui agit sur les formes différentielles et il augmente leur degré de 1, $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$. Par exemple sur une forme (7.4)

$$\begin{aligned} d\omega(X) &= \sum_{i=1}^p dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} f_{i_1 i_2 \dots i_k}(X) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{i_1 i_2 \dots i_k}(X)) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Lemme 1 La différentielle de de Rham $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^p$ au carré est nul :

$$d^2 = 0.$$

Démonstration. En coordonnées l'opérateur d agissant sur une forme différentielle $\omega \in \Omega^k(U)$ s'écrit : $d\omega = \sum_{i=1}^p dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \omega \in \Omega^{k+1}(U)$.

Son carré est calculé ainsi :

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= (d^2)\omega = \left(\sum_{i=1}^p dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^p dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \omega = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p dx_i \wedge dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\omega) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq p} dx_i \wedge dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\omega) \right) + \sum_{1 \leq j < i \leq p} dx_i \wedge dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\omega) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p dx_i \wedge dx_i \wedge \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\omega) \right). \end{aligned}$$

En changeant les notations $i \leftrightarrow j$ dans la deuxième somme, on voit que la première somme a les termes $dx_i \wedge dx_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\omega) \right)$ et la deuxième $dx_j \wedge dx_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\omega) \right)$ pour les mêmes i et j . En utilisant le lemme de Schwarz, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\omega) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\omega) \right).$$

Puisque $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ les deux premières sommes s'annulent mutuellement et pour la troisième somme on a : $\forall i, dx_i \wedge dx_i = 0$. ■

R La différentielle de de Rham agit sur le produit extérieur de deux formes différentielles α et β de degrés p et q comme suit :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

C'est facile à voir si on écrit α et β explicitement (comme dans (7.2)).

7.4 La dimension 3 est spéciale.

Faisons le calcul d'action d'opérateur de de Rham en dimension 3.

0. Pour une 0-forme différentielle (c'est-à-dire simplement une fonction)

$$f = f(x, y, z)$$

définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$, où f une fonction de classe C^1 sur D , on obtient

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz, \quad (7.5)$$

Dans cette forme on reconnaît une expression pour la différentielle (cela est le cas pour toute dimension).

1. Pour une 1-forme différentielle

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$, où P, Q, R sont des fonctions de classe C^1 sur D , on obtient

$$d\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (7.6)$$

2. Pour une 2-forme différentielle

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$, P, Q, R des fonctions de classe C^1 sur D , on obtient

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \quad (7.7)$$

3. Une forme différentielle de degré 3 sur $D \subset \mathbb{R}^3$ s'écrit

$$v = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$$

avec $f(x, y, z)$ - une fonction sur D . Il n'y a pas de 4-formes différentielles à cause de l'anti-symétrie, donc en particulier, $dv = 0$, $\forall v \in \Omega^3(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$.

On reconnaît ici, au moins formellement, les expressions en coordonnées du gradient d'une fonction (7.5), du rotationnel (7.6) et de la divergence (7.7) du champ de vecteurs correspondant. De cette façon, dans \mathbb{R}^3 les opérateurs de la théorie des champs de vecteurs se révèlent être tous liés à la différentielle de de Rham sur des formes de degrés 0,1,2.

La dimension 3 est spéciale. En plus de la dualité entre les 1-formes et les champs de vecteurs dans la théorie des formes différentielles, il y a une dualité appelée dualité de Poincaré (le même Poincaré que le théorème). Cette dualité de Poincaré sur \mathbb{R}^p est une application entre les k-formes et les $(p-k)$ -formes. Par conséquent en dimension 3 les 1-formes sont duales aux $3-1=2$ -formes. De ce fait, via cette dualité de Poincaré les 2-formes sont aussi liées aux champs de vecteurs.

7.5 Formes fermées. Théorème de Poincaré pour les formes différentielles

Définition 7.5.1 On dit qu'une k-forme différentielle ω est **fermée** si $d\omega = 0$.

Théorème 7.5.1 — Poincaré pour les formes différentielles sur \mathbb{R}^p .

Soit α une k-forme différentielle sur \mathbb{R}^p . Alors α est exacte si et seulement si elle est fermée.

■ **Exemple 7.3** On souhaite savoir si la forme $\alpha = 4xydx + (1 + 2x^2)dy$ est exacte et trouver éventuellement sa primitive. La forme est définie sur \mathbb{R}^2 tout entier qui est simplement connexe. On a ici $P = 4xy$ et $Q = 1 + 2x^2$. On calcule :

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x - 4x = 0$$

La forme est donc exacte et on cherche une primitive f en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2x^2 \end{cases}$$

en intégrant la première de ces équations par rapport à x , il vient :

$$f(x, y) = 2x^2y + \phi(y),$$

où ϕ est une fonction d'une variable, dérivable. On utilise ensuite la deuxième équation :

$$\frac{\partial(2x^2y + \phi(y))}{\partial y} = 1 + 2x^2$$

D'où $\phi'(y) = 1 + 2x^2$, $C \in \mathbb{R}$ et finalement

$$f(x, y) = 2x^2y + y + C$$

Cela correspond au calcul du potentiel du champ correspondant. ■

On utilise cette méthode pour résoudre certaines équations différentielles ordinaires - ici par exemple si on pense à $\frac{dy}{dx}$ comme à y' , la dérivée de y par rapport à x on a intégré une équation différentielle

$$4xy + (1 + 2x^2)y' = 0.$$

Autre exemple : $\alpha = 2y^2(x + y)dx + 2xy(x + 3y)dy$ est une forme fermée et par conséquent exacte, donc sa primitive $f(x, y) = x^2y^2 + 2y^3x + C$ donne la solution $x^2y^2 + 2y^3x + C = 0$ de l'équation différentielle : $2y^2(x + y) + 2xy(x + 3y)y' = 0$.

On peut le voir comme ça : une équation différentielle peut se réécrire de la façon suivante : $\alpha = 0$, où α est une 1-forme différentielle. Alors, si $\alpha = df$, $f = const$ est la solution de l'équation différentielle $\alpha = 0$.

La théorie des formes différentielles est utilisée en intégration. Souvent on dit qu'on intègre des fonctions, en réalité on **intègre des formes différentielles**. Cette ligne de pensée va nous diriger vers l'intégration des fonctions de plusieurs variables.

8. Intégrales multiples

8.1 Définition. Intégrale double

Soit f une fonction continue sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ de \mathbb{R}^2 . On partage ce rectangle en $n \cdot m$ petits rectangles $R_{ij}, i \in [1, m], j \in [1, n]$. R_{ij} a pour cotés le m -ième segment horizontal et le n -ième segment vertical. Son sommet supérieur droit est le point $(x_i, y_j) = (a + i \cdot \frac{b-a}{m}, c + j \cdot \frac{d-c}{n})$. La *somme de Riemann*, S_{mn} , est la somme des volumes des parallélépipèdes de bases sur R_{ij} et de hauteurs donnés par la valeur de f en (x_i, y_j) de R_{ij}

$$S_{mn} = \frac{b-a}{m} \frac{d-c}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j).$$

Définition 8.1.1 L'intégrale double de f sur R est la limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} S_{mn}.$$

Propriété 8.1.1

1. **Linéarité.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R , alors

$$\iint_R (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) dx dy = \lambda \iint_R f(x, y) dx dy + \mu \iint_R g(x, y) dx dy$$

2. **Croissance.** Soient f et g deux fonctions réelles continues sur R , telles que $f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in R$, alors

$$\iint_R f(x, y) dx dy \leq \iint_R g(x, y) dx dy$$

On en déduit que

$$\left| \iint_R f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_R |f(x, y)| dx dy$$

3. **Théorème de Fubini pour un rectangle.** L'intégrale double d'une fonction réelle continue f sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ est égale à deux intégrales simples successives :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b (f(x, y) dx) dy = \int_a^b \int_c^d (f(x, y) dy) dx$$

En particulier, si $f(x, y) = g(x)h(y)$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy$$

8.2 Aire d'une partie夸rable. Théorème de Fubini

Pour définir l'intégrale double sur une partie de \mathbb{R}^2 qui n'est pas un rectangle on introduit la notion d'une partie夸rable du plan.

Soit D une partie bornée de \mathbb{R}^2 et $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle qui la contient.

On appelle **subdivision** σ de R , $m \cdot n$ rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], x_i, y_j \in R$ venant du partage de $[a, b]$ en m segments et de $[c, d]$ en n segments :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b ; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

pour m et n quelconques. Le rectangle R_{ij} , est d'aire $\mu(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$.

A toute subdivision σ de R on associe deux quantités qu'on appelle les sommes de Darboux :

$$s(\sigma) = \sum_{R_{ij} \subset D} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) \text{ et } S(\sigma) = \sum_{R_{ij} \cap D \neq \emptyset} (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j).$$

Définition 8.2.1 On dit que $D \subset R$ est **quarable** si la borne supérieure des sommes $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des sommes $S(\sigma)$. Leur valeur commune donne l'aire de D .



Si D est une partie夸rable du plan alors la frontière de D est夸rable d'aire nulle. Ainsi, un disque ou un polygone sont des exemples de parties夸rables, que l'on prenne ou non leur frontière.

Définition 8.2.2 Une fonction f bornée sur une partie夸rable de \mathbb{R}^2 est **intégrable** si et seulement si la somme (aussi appelée une somme de Riemann)

$$\sum_{R_{ij} \cap D \neq \emptyset} f(u_i, v_j) \text{ Aire}(R_{ij})$$

tend vers une limite finie indépendante du choix de (u_i, v_j) quand $x_{i+1} - x_i$ et $y_{j+1} - y_j$ tendent vers 0. Cette limite est appelée l'intégrale de f sur D :

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Théorème 8.2.1 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue et bornée** sur une partie夸rable du plan. Alors f est intégrable sur D .

R La propriété d'être bornée est importante. C'est la même chose pour les fonctions d'une seule variable comme le montre l'exemple de la fonction $1/x$ qui n'est pas bornée sur l'intervalle $[0, 1]$: elle n'est pas intégrable !

Théorème 8.2.2 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur une partie夸rable du plan. Si l'ensemble des points de discontinuité de f est d'aire nulle alors f est intégrable sur D .

Par ailleurs, l'aire d'une partie夸rable $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être vue comme une intégrale d'une fonction constante égale à 1 sur D :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dx dy$$

Il est facile d'expliquer cela par un raisonnement géométrique - présenter le graphe de la fonction 1 sur D et voir quel volume représente l'intégrale double.

Comment, en pratique, calcule-t-on les intégrales doubles sur une partie夸rable du plan ?

- Soit ϕ et ψ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

(Faire un dessin). Soit f une fonction réelle intégrable sur D . Alors, on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

■ **Exemple 8.1** On calcule

$$I = \iint_D (x+y)^2 dx dy$$

où D est un triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(2, 0)$. Alors ici

$$\phi(x) = 0 \text{ et } \psi(x) = -\frac{x}{2} + 1, x \in [0, 2].$$

Donc

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{-x/2+1} (x+y)^2 dy \right) dx = \int_0^2 [(x+y)^3]_{y=0}^{y=-x/2+1} dx = \frac{7}{6}$$

La variable x ayant exactement le même statut que la variable y donc on peut calculer la même intégrale comme suit :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (x+y)^2 dx \right) dy$$

et obtenir le même résultat. Il faut faire attention aux bornes de l'intégrale. La valeur de l'intégrale est un nombre - on ne peut pas avoir des fonctions pour des bornes pour l'intégrale simple calculée en dernier.

8.3 Changement de variables dans une intégrale double. Matrice jacobienne

Soit f une fonction continue sur un compact quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit une bijection notée $\Delta \rightarrow D$ définie par :

$$(u, v) \mapsto (x = \phi(u, v), y = \psi(u, v)),$$

ϕ et ψ étant de classe C^1 . Alors,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv,$$

où $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (définition 3.1.2) des dérivés premières de l'application $\Delta \rightarrow D$.

On peut le voir en utilisant le calcul des formes différentielles. Si $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ la 2-forme différentielle $dx \wedge dy$ s'exprime en $du \wedge dv$ par le calcul suivant (dans le contexte des intégrales on n'écrira pas de symbole de produit \wedge) :

$$\begin{aligned} dx dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du dv + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} dv du = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du dv \end{aligned}$$

■ **Exemple 8.2** Si on effectue un changement linéaire des variables :

$$\phi(u, v) = au + bv, \quad \psi(u, v) = cu + dv$$

alors, la fonction intégrée n'est modifiée que par le facteur

$$|ad - bc|,$$

(valeur absolue du déterminant). Lorsque ce déterminant est 1 (pour une rotation par exemple), la fonction intégrée reste inchangée. Ce changement de variables linéaire envoie un carré $[0, 1] \times [0, 1]$ vers le parallélogramme P engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Donc en particulier

$$\text{Aire}(P) = \int_P dx dy = \int_{[0,1] \times [0,1]} |ad - bc| du dv = |ad - bc|$$

■ **Exemple 8.3** Changement en coordonnées polaires. Soit $[0, \infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ une bijection entre les coordonées polaires et cartésiennes données par

$$(r, t) \mapsto (x = r \cos t, y = r \sin t).$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = r \cos^2 t + r \sin^2 t = r.$$

Calculer $I = \iint_D y^2 \, dx \, dy$ sur D , disque de centre $(0, 0)$ de rayon R . Le calcul direct est assez long :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \, dy \right) \, dx = \int_{-R}^R 2 \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{-R}^R 2 \left(y^3 / 3 \right)_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \, dx = \frac{4}{3} \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^3 \, dx \\ &= \frac{4}{3} \int_{\pi/2}^0 R^3 \sin^3 \theta (-R \sin \theta) \, d\theta = \frac{4}{3} R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables

$$x = R \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad dx = -R \sin \theta \, d\theta, \quad R^2 - x^2 = R^2(1 - \cos^2 \theta) = R^2 \sin^2 \theta.$$

On utilise aussi la linéarisation de $\sin^4 \theta$:

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

Ce calcul a l'air assez long et fort utile, mais à l'aide d'un changement de variables sous l'intégrale double on arrive au résultat plus rapidement : les coordonnées polaires transforment le rectangle en disque. Ici on a un disque et donc :

$$\Delta = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq R \text{ et } 0 \leq t \leq 2\pi\} \rightarrow D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

D'où

$$I = \iint_{\Delta} r^2 \sin^2 t r \, dt \, dr = \int_0^R r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{R^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{\pi R^4}{4}$$

■

8.4 Volume. Intégrales triples.

Pour certaines parties $E \subset \mathbb{R}^3$ et certaines fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ on définit un nombre réel noté

$$I = \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

et appelé l'intégrale de f sur E .

Définition 8.4.1 Un compact élémentaire Δ de \mathbb{R}^3 est une partie de \mathbb{R}^3 de l'une des formes suivantes :

- (1) $\Delta_{(x,y)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y), \text{ où } (x,y) \in D - \text{partie quarable de } \mathbb{R}^2 \text{ et } \phi_1, \phi_2 - \text{fonctions continues sur } D\}$
- (2) $\Delta_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, \text{ où } (x,y) \in D(z) = \text{la projection sur le plan } xy \text{ de l'intersection de } \Delta \text{ et du plan passant par } (0,0,z) \text{ et parallèle au plan } xy\}$
- (3) $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, dans ce cas on dit aussi que c'est un pavé de \mathbb{R}^3 .

Théorème 8.4.1 (de Fubini) Soit Δ un compact élémentaire de \mathbb{R}^3 et $f(x,y,z)$ une fonction continue sur Δ .

1. Si Δ est de type $\Delta_{(x,y)}$ alors

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy$$

(intégration par "piles")

2. Si Δ est de type Δ_z alors

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D(z)} f(x,y,z) dx dy \right) dz$$

(intégration par "tranches")

3. Si $\Delta = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ alors

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta} f(x,y,z) dx dy dz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z) dx \right) dy \right) dz = \dots \end{aligned}$$

En particulier, le volume de Δ est l'intégrale triple sur Δ de la fonction 1 :

$$\text{Volume de } \Delta = \iiint_{\Delta} dx dy dz$$

Les intégrales triples sont des intégrales de 3-formes différentielles. Pour les 3-formes différentielles on peut calculer ce qui se passe si on change les variables. Supposons que x, y et z soient des fonctions de variables u, v et w telles qu'on a les formules

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Ce sont des formules de changement de variables - c'est-à-dire une transformation qui à un point m de coordonnées u, v et w associe le point de coordonnées x, y et z . Le jacobien du changement de variable est le déterminant

$$\left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Alors, si le domaine Δ est transformé par ce changement de variables en Δ' , la 3-forme différentielle $dx dy dz$ doit être changée à l'aide du Jacobien et on obtient la formule suivante :

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

8.5 Coordonnées cylindriques. Coordonnées sphériques

Prima facie, les **coordonnées cylindriques** sont r, t et z telles que

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = z, \quad \text{avec } r^2 = x^2 + y^2, \quad t \in [0, 2\pi[$$

On obtient

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(r, t, z)} \right| = r$$

■ **Exemple 8.4** Le volume de la partie Δ du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - ax \leq 0$ (où $a > 0$) comprise entre le plan xy et le plan d'équation $z = 1$ s'obtient grâce à la formule de changement de variables : Δ est transformée par les coordonnées cylindriques en

$$\Delta' = \{(r, t, z) \mid t \in [0, 2\pi[, r \in [0, a \cos t], z \in [0, 1]\}$$

Alors,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Delta} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{a \cos t} r dr dt \int_0^1 dz = \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t)^2}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2 \pi}{2} \end{aligned}$$

Les **coordonnées sphériques** sont (θ, ϕ, r) telles que

$$\begin{aligned} g : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \times [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi, r) &\mapsto g(\theta, \phi, r) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \end{aligned} \tag{8.1}$$

9. Courbes et Intégrales curvilignes

9.1 Courbes de \mathbb{R}^2 . Théorème des fonctions implicites pour les courbes de \mathbb{R}^2

Une courbe Γ de \mathbb{R}^2 peut être définie de plusieurs façons différentes.

A) Forme explicite $y = f(x)$ où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$,

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in I \subset \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors Γ possède une tangente au point $m_0 = (x_0, y_0)$, où $y_0 = f(x_0)$. L'équation de cette tangente est

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

B) Forme paramétrique (cf. Définition 2.6.1)

Définition 9.1.1 Une partie de \mathbb{R}^p , Γ est une courbe s'il existe une application continue γ d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$. Si cette application est bijective, γ est appelé un **arc de courbe**. Le couple (Γ, γ) est appelé une **courbe paramétrée**. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ mais $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ pour tous les points $t_1 \neq t_2$ de $[a, b]$ la courbe Γ est appelée **une courbe fermée** ou **un circuit fermé**.

Les **courbes planes** sont des courbes dans \mathbb{R}^2 . Les **courbes gauches** sont des courbes dans \mathbb{R}^3 .

Soit

$$\gamma(t) = \begin{cases} x &= g(t) \\ y &= h(t) \end{cases}$$

où $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors, la fonction $\gamma(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 sur un intervalle $[a, b]$ définit Γ , une courbe paramétrée dans \mathbb{R}^2 :

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x = g(t), y = h(t); t \in [a, b]\}.$$

On dit que $\gamma(t) = (g(t), h(t))$ est une représentation paramétrique de la courbe.

La même courbe peut avoir des représentations différentes, par exemple, les paramétrisations

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in [0, 1]; \quad \gamma(s) = \begin{cases} x = s/2 \\ y = s \end{cases}, s \in [0, 2]$$

définissent le même segment sur la droite $y = 2x$.

Pour une courbe

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} \quad \text{sa dérivée} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$$

définit un vecteur tangent à la courbe Γ au point $(x, y) = (g(t), h(t))$. Pour écrire l'équation de la tangente à Γ au point donné de la courbe $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, on trouve l'équation de la droite passant par (x_0, y_0) et parallèle à $(g'(t_0), h'(t_0))$. On l'écrit sous la forme de déterminant d'une matrice

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & g'(t_0) \\ y - y_0 & h'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne

$$g'(t_0)(x - x_0) - f'(t_0)(y - y_0) = 0.$$

Si $(g'(t_0), h'(t_0)) = (0, 0)$ la tangente peut exister également, sa pente est $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h'(t_0)}{g'(t_0)}$ lorsque cette limite existe.

Définition 9.1.2 On note Γ^+ un arc d'une courbe avec un sens de parcours indiqué. On dit qu'on **choisit l'orientation** de Γ quand on choisit le sens de parcours. On dénote par Γ^- un arc d'une courbe qui est le même que Γ^+ mais avec un sens de parcours opposé. Soit $\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$ une paramétrisation de Γ . On dit que γ est **compatible avec l'orientation** de Γ^+ si le point $\gamma(t)$ se déplace dans le sens de parcours de Γ lorsque le paramètre croît de a à b .

■ **Exemple 9.1** Soit Γ une partie de la droite $y = x$ sur l'intervalle $[0, 2]$ parcourue du point $(2, 2)$ vers le point $(0, 0)$. Deux paramétrisations

$$t \in [0, 2], \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

se distinguent par l'orientation : μ est compatible avec Γ^+ tandis que γ a une orientation opposée.

C) **Forme implicite** : par une équation cartésienne

$$\Gamma = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\} \text{ où } f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2.$$

Dans ce cas, sous certaines conditions, c'est possible de se ramener à la forme explicite. On cherche à exprimer y en fonction de x par $y = \phi(x)$ localement, i.e. au voisinage d'un point de la courbe (x_0, y_0) .

Théorème 9.1.1 (Des fonctions implicites pour les courbes.) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur D . Soit $(x_0, y_0) \in D$ avec

$$f(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de centre x_0 et $J \subset \mathbb{R}$, un intervalle ouvert de centre y_0 , tels que

$\forall x \in I, f(x, y) = 0$ possède une unique solution $y \in J$ notée $y = \phi(x)$ (en particulier $y_0 = \phi(x_0)$).

2. En particulier, $\phi : I \rightarrow J$ est dérivable sur I avec

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$$

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$. Pour le point $(x_0, y_0) = (0, 1)$ de la courbe $f(x, y) = 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$ - le théorème s'applique, d'où l'existence d'une fonction $\phi : I \rightarrow J$. On peut prendre les intervalles $I =]-1, 1[$ et $J =]0, 2[$. Dans ce cas simple on peut expliciter $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Pour la dérivée on vérifie que

$$\phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

L'intérêt du théorème réside dans les cas où on ne peut pas expliciter ϕ , mais où néanmoins on peut construire le graphe en utilisant les valeurs des tangentes.

En utilisant la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) \end{aligned}$$

La ligne de niveau 0 de f définit une courbe implicitement. (x_0, y_0) appartient à cette courbe si $f(x_0, y_0) = 0$. La différentielle en ce point décrit bien le comportement de la courbe :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (9.1)$$

C'est une équation de la droite tangente. Si on peut résoudre cette équation linéaire par rapport à y (i.e. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$) alors la courbe $f(x, y) = 0$ est proche de la droite (9.1) dans un voisinage suffisamment petit. On peut espérer pouvoir résoudre $f(x, y) = 0$ comme une relation explicite entre y et x .

R Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ le théorème des fonctions implicites appliqué en permutant le rôle de x et y donne une application $\psi : J \rightarrow I$ et au voisinage de (x_0, y_0) l'équation de la courbe est $x = \psi(y)$.

9.2 Droite tangente, plan normal à une courbe paramétrée de \mathbb{R}^3

Une courbe paramétrée dans l'espace, appelée aussi "courbe gauche", est donnée par une application vectorielle :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

Le vecteur directeur de la droite tangente au point de la courbe $(x_0, y_0, z_0) = (\gamma(t_0), \gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ est donné par la dérivée de γ :

$$\vec{\gamma}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La droite tangente T passe par (x_0, y_0, z_0) et parallèle au vecteur $\vec{\gamma}'(t_0)$. Cela signifie que chaque vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ passant du point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au point $P = (x, y, z) \in T$ est colinéaire au vecteur $\vec{\gamma}'(t_0)$. En coordonnées cela donne l'équation de la droite :

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & = & kx'(t_0) \\ y - y_0 & = & ky'(t_0) \\ z - z_0 & = & kz'(t_0) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

k est ici un coefficient de proportionnalité entre les vecteurs $\overrightarrow{P_0P}$ et $\vec{\gamma}'(t_0)$. Cette variable k dépend de la position du point P sur la droite et quand k parcourt \mathbb{R} , le point P parcourt la droite tangente. Si toutes les coordonnées de $\vec{\gamma}'(t_0)$ sont non-nulles on peut réécrire l'équation de la droite sans k :

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}. \quad (9.2)$$

Le plan normal, orthogonal à la courbe au point de la courbe (x_0, y_0, z_0) , ce qui en pratique signifie orthogonal à la tangente en ce point, est donné par la relation suivante :

$$x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Ici on utilise le produit scalaire de la tangente et du vecteur $\overrightarrow{P_0Q}$, passant du point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ au point $Q = (x, y, z)$ du plan. Le plan est normal quand le produit scalaire $\vec{\gamma}'(t_0) \cdot \overrightarrow{P_0Q}$ vaut 0.

■ **Exemple 9.2** Cherchons les équations de la tangente et du plan normal à la courbe donnée par les relations paramétrique :

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

au point $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, $t = 1$. On a $x' = 1$, $y' = 2t$, $z' = 3t^2$, donc au point $(1, 1, 1)$, le vecteur directeur de la tangente est égal à $(1, 2, 3)$. L'équation de la tangente est

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{3}$$

et celle du plan normal

$$1 \cdot (x - x_0) + 2 \cdot (y - y_0) + 3 \cdot (z - z_0) = 0.$$

■

Dernière remarque ici à propos de la dimension. La droite est un objet de dimension 1, donc pour écrire une équation d'une droite dans \mathbb{R}^3 il faut deux relations linéaires indépendantes, car $1 = 3 - 2$. Quand on utilise une variable supplémentaire k pour écrire une équation d'une droite, on a 4 variables et 3 relations linéaires : $4 - 3 = 1$.

Un plan dans l'espace \mathbb{R}^3 est donné par une seule équation linéaire, du point de vue de la dimension car la dimension du plan est $2 = 3 - 1$.

9.3 Longueur d'une courbe. Abscisse curviligne

Un arc de courbe est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possible, ce qui revient à distinguer les vecteurs tangents opposés $\pm \vec{\gamma}'(t)$. Pour calculer la longueur d'un arc de la courbe Γ on partage la courbe en n morceaux et on cherche la somme des longueurs. Quand $n \rightarrow \infty$ les morceaux de la courbe deviennent petits et presque des segments donc

$$\sum_{i=1}^n \| \overrightarrow{M_i M_{i+1}} \| = \sum_{i=1}^n \| \vec{\gamma}(t_{i+1}) - \vec{\gamma}(t_i) \| \approx \sum_{i=1}^n \| \vec{\gamma}'(t_i) \| (t_{i+1} - t_i).$$

on peut substituer à la longueur d'un morceau $M_i M_{i+1}$ la longueur du vecteur tangent $\| \vec{\gamma}'(t_i) \|$ au point $M_i = \gamma(t_i)$. En considérant des subdivisions de plus en plus fines et en passant à la limite en $n \rightarrow \infty$ on obtient la sommation continue qui définit la longueur : l'arc de courbe Γ donné par la paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a pour longueur

$$L(\Gamma) = \int_a^b \| \vec{\gamma}(t) \| dt.$$

Théorème 9.3.1 La longueur d'un arc d'une courbe est bien définie - elle ne dépend pas de la paramétrisation.

Soit $p : [u_d, u_f] \rightarrow [a, b]$, $p(u) = t$ une fonction dérivable $p'(u) \neq 0$, pour $u \in [u_d, u_f]$, et $a = p(u_d)$, $b = p(u_f)$. On a le même arc de courbe Γ avec une nouvelle représentation paramétrique $\mu(u) = \gamma(p(u))$. Montrons que $L(\Gamma) = \int_{u_d}^{u_f} |\mu'(u)| du$. En effet,

$$\frac{d\mu}{du} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{du}$$

$$L(\Gamma) = \int_{u_d}^{u_f} \|\mu'(u)\| du = \int_{u_d}^{u_f} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{du} \right\| du = \int_{u_d}^{u_f} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \left(\left\| \frac{dt}{du} \right\| du \right) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt.$$

On pose $ds = |\vec{\gamma}'(t)| dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$. On l'appelle l'**abscisse curviligne** car cette forme différentielle joue le même rôle dans les intégrales sur les courbes que dx sur les intégrales simples sur un intervalle.

R Dans \mathbb{R}^2 une courbe paramétrée est donnée par

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \gamma'(t) = \begin{cases} x' = x'(t) \\ y' = y'(t) \end{cases}, \quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Si la courbe est donnée par l'équation $y = f(x)$, alors

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

9.4 Intégrale curviligne d'une fonction

Définition 9.4.1 Soit f une fonction continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ contenant une courbe Γ , $t \in [a, b]$. L'intégrale curviligne de f sur Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$$

■ **Exemple 9.3** Soit Γ le cercle dans le plan $z = 1$ de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon $R > 0$. On choisit une représentation paramétrique, pour $t \in [0, 2\pi[$

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = R \sin t \\ z(t) = 1 \end{cases} \quad \vec{\gamma}'(t) = \begin{cases} x'(t) = -R \sin t \\ y'(t) = R \cos t \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

On a $|\vec{\gamma}'(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$. La longueur du cercle

$$L(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_0^{2\pi} |\vec{\gamma}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

Soit $f(x, y, z) = x^2 = y^2 + z^2$. Sa restriction sur le cercle est

$$f(x, y, z)|_{\Gamma} = f(R \sin t, R \cos t, 1) = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t + 1 = R^2 + 1$$

et finalement l'intégrale curviligne vaut

$$I = \int_0^{2\pi} (1 + R^2) R dt = 2\pi(1 + R^2)R$$

9.5 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs = intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle

Soit $\vec{V} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs continu sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ contenant une courbe Γ de paramétrisation $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \Gamma$.

Définition 9.5.1 L'intégrale

$$I = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \quad (9.3)$$

du produit scalaire de $\vec{V}(\gamma(t))$ et du vecteur tangent à la courbe Γ au point $\gamma(t)$: $\vec{\gamma}'(t)$ est appelé **l'intégrale curviligne d'un champ de vecteurs \vec{V}** .

L'intégrale (9.3) est indépendante de toute paramétrisation compatible avec l'orientation de Γ^+ . Cette intégrale est souvent notée

$$I = \int_{\Gamma^+} \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

où $\vec{ds} = \vec{\tau} ds$ est le "vecteur de l'abscisse curviligne" - le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ étant le vecteur-directeur de la tangente au point donné de la courbe. Le vecteur $\vec{\tau}$ est orienté dans le sens de parcours de la courbe. En particulier, si $\vec{V} = P(x,y) \vec{i} + Q(x,y) \vec{j}$

$$I = \int_{\Gamma^+} P dx + Q dy \quad (9.4)$$

- c'est une intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle α formellement correspondante au champ de vecteur coordonnée par coordonnée :

$$\vec{V} = P(x,y) \vec{i} + Q(x,y) \vec{j} \iff \alpha = P dx + Q dy$$

■ Exemple 9.4 Soit γ - l'arc de la parabole $y = x^2$ sur un segment $[-2, 2]$ et $\vec{V} = -y \vec{i} + x \vec{j}$. On peut calculer de deux façons différentes l'intégrale $I = \int_{\Gamma^+} \vec{V} \cdot \vec{ds}$. **Première façon - via dx et dy**
A la place de champ de vecteur $-y \vec{i} + x \vec{j}$ on écrit une 1-forme différentielle $-y dx + x dy$. Donc l'intégrale curviligne devient

$$I = \int_{\Gamma^+} -y dx + x dy$$

On choisit une représentation $\gamma: [-2, 2] \rightarrow \Gamma$ par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} dx = 1 \cdot dt \\ dy = 2t dt \end{cases}$$

Donc

$$I = \int_{\Gamma^+} -y dx + x dy = \int_{-2}^2 (-t^2) dt + t \cdot 2t dt = \int_{-2}^2 (t^2) dt = 16/3$$

Deuxième façon - directe via dt

On peut directement calculer l'intégrale par la formule (9.3) en réécrivant $V(t) = -t^2 \vec{i} + t \vec{j}$ et $\vec{\gamma}'(t) = 1 \vec{i} + 2t \vec{j}$:

$$I = \int_{-2}^2 \vec{V}(t) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt = \int_{-2}^2 (-t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t) dt = 16/3.$$

■

Propriété 9.5.1 Propriétés de l'intégrale curviligne

- Si Γ^- est un chemin avec une orientation opposée à Γ^+

$$\int_{\Gamma^-} \vec{V} \cdot \vec{ds} = - \int_{\Gamma^+} \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

- Soit $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ la réunion de deux arcs de classe C^1 . Le choix d'orientations pour Γ_1 et Γ_2 fournit l'orientation pour leur réunion. On définit alors

$$\int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \int_{\Gamma_1^+} \vec{V} \cdot \vec{ds} + \int_{\Gamma_2^+} \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

(R)

Sens physique d'une intégrale curviligne : si $\vec{V}(M)$ représente une force variable appliquée au point M du chemin Γ^+ , l'intégrale I est le travail de la force V nécessaire pour déplacer une particule unitaire le long du chemin Γ^+ . L'intégrale curviligne du champ V sur Γ^+ est aussi appelé la **circulation** du champ V sur Γ^+ .

9.6 Théorème de Poincaré et intégrale curviligne

Le théorème de Poincaré parle des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de gradient (Théorème 6.4.3) ou pour qu'une forme fermée soit exacte (Théorème 7.5.1). L'intégrale curviligne d'un champ de gradient a des propriétés particulières, à savoir :

Proposition 9.6.1 L'intégrale curviligne de champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ le long d'un arc de courbe d'extrémités A et B est égale à $f(B) - f(A)$.

Démonstration. Montrons la proposition dans \mathbb{R}^2 . Le champ

$$\vec{V}(x, y) = \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

définit l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{ds} = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ une paramétrisation compatible de Γ^+ . En particulier $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. La restriction de la forme $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ sur Γ^+ nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \frac{df(x(t), y(t))}{dt} dt = df \end{aligned}$$

Donc,

$$\int_{\Gamma^+} \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{ds} = \int_a^b df = [f(x(t), y(t))]_a^b = f(B) - f(A).$$

■

L'intégrale ne dépend donc que des extrémités du chemin d'intégration Γ^+ pas du chemin lui-même.

Proposition 9.6.2 Les propriétés suivantes d'un champ \vec{V} de vecteurs sont équivalentes :

- Il existe une fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$
- Il existe une fonction f telle que $\vec{V} \cdot ds = df$
- La circulation de \vec{V} d'un point A au point B est indépendante du chemin. Elle ne dépend que de A et de B .
- La circulation du champ \vec{V} le long de tout chemin fermé est nulle.

■ **Exemple 9.5** Soit \vec{V} le champ de vecteurs défini sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\vec{V}(x,y) = P(x,y) \vec{i} + Q(x,y) \vec{j}, \text{ où } P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \text{ et } Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

On vérifie que \vec{V} satisfait la condition nécessaire pour être un champ de gradient :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

On calcule la circulation de \vec{V} sur le cercle unité C^+ paramétré comme suit :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi], x(t) = \cos t, y(t) = \sin t.$$

Dans cette paramétrisation les différentielles sont $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$ et les coordonnées du champ \vec{V}

$$P(x(t), y(t)) = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin t}{1}, \quad Q(x(t), y(t)) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos t}{1}$$

Finalement, l'intégrale curviligne $\int_{C^+} P dx + Q dy$ se calcule

$$\int_0^{2\pi} -\sin t (-\sin t) dt + \cos t \cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

et s'avère ne pas être nulle. Par la Proposition 9.6.2, cela implique que ce champ \vec{V} n'est pas un champ de gradient car la circulation le long du chemin fermé (le cercle C^+) n'est pas nulle !

Par le théorème de Poincaré on aurait pu anticiper cela car Ω , le domaine de définition de champ \vec{V} n'est pas simplement connexe (Définition 6.4.1). En effet, le cercle C^+ est un chemin autour du point $(0,0)$. Ce point étant exclu du domaine Ω , on ne peut pas ramener C^+ à un point tout en restant dans Ω .

■

10. Théorèmes de Stokes : Green-Riemann, Ostrogradski...

10.1 Théorème de Green-Riemann

Parfois on utilise la notation \oint pour une intégrale sur une courbe fermée pour souligner que le circuit est fermé.

Théorème 10.1.1 — Green-Riemann. Soit D un compact de \mathbb{R}^2 limité par un bord $C = \partial(D)$ de classe C^1 par morceaux et $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1 . On a

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (10.1)$$

où C^+ désigne le bord C , orienté de sorte qu'un mobile parcourant C a toujours D à sa gauche.

Démonstration. D'abord on donne ici une démonstration dans le cas le plus simple. Soit D un carré R de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$ et supposons $Q = 0$. On cherche à démontrer

$$\oint_{\partial R} P dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Côté gauche de l'égalité Pour calculer l'intégrale curviligne $\int_{\partial R} P dx$ on oriente le bord du carré ∂R contre l'aiguille du montre. On note le côté de R allant du sommet $(0,0)$ vers $(1,0)\Gamma_1$, de $(1,0)$ vers $(1,1)-\Gamma_2$, etc. Le bord du carré $\partial R = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. On peut paramétriser les côtés Γ_i de la façon suivante :

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Gamma_1, \quad t \mapsto (t, 0) \quad dx = 1 \cdot dt, \quad dy = 0 \cdot dt$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \Gamma_2, \quad t \mapsto (1, t) \quad dx = 0 \cdot dt, \quad dy = 1 \cdot dt$$

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \Gamma_3, \quad t \mapsto (1-t, 1) \quad dx = 1 \cdot dt, \quad dy = 0 \cdot dt$$

$$\gamma_4 : [0, 1] \rightarrow \Gamma_4, \quad t \mapsto (0, 1-t) \quad dx = 0 \cdot dt, \quad dy = 1 \cdot dt$$

$$\oint_{\partial R} P dx = \int_{\Gamma_1} P dx + \int_{\Gamma_2} P dx + \int_{\Gamma_3} P dx + \int_{\Gamma_4} P dx$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} P(x,y) dx &= \int_0^1 P(t,0) dt, \\ \int_{\Gamma_2} P(x,y) dx &= \int_0^1 P(1,t) 0 \cdot dt = 0, \\ \int_{\Gamma_3} P(x,y) dx &= \int_0^1 P(1-t,1) dt = - \int_0^1 P(t,1) dt, \\ \int_{\Gamma_4} P(x,y) dx &= \int_0^1 P(0,1-t) 0 \cdot dt = 0\end{aligned}$$

Finalement le côté gauche est égal à

$$\int_0^1 P(t,0) dt - \int_0^1 P(t,1) dt$$

Côté droit de l'égalité

On calcule l'intégrale double par Fubini :

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = - \int_0^1 (P(x,1) - P(x,0)) dx$$

ce qui est exactement le côté gauche obtenu précédemment !

Il est clair qu'on démontre de la même façon que

$$\oint_{\partial R} Q(x,y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

La démonstration se généralise facilement sur n'importe quelle partie夸rable de \mathbb{R}^2 . ■

R L'intégrale curviligne du champ $\vec{V}(x,y) = P(x,y) \vec{i} + Q(x,y) \vec{j}$ est l'intégrale de la 1-forme différentielle correspondante

$$\alpha = P(x,y) dx + Q(x,y) dy.$$

On remarque que la 2-forme

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

est égale à $d\alpha$. La formule de Green-Riemann dans cette écriture devient

$$\oint_{\partial(D)} \alpha = \iint_D d\alpha. \quad (10.2)$$

■ **Exemple 10.1** Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct avec

$$I = \int_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann. ■

Important ! La formule de Green-Riemann marche seulement dans des domaines fermés et bornés par une courbe fermée - on n'a pas de formule reliant les intégrales doubles aux intégrales curvilignes sur un chemin quelconque. La formule de Green-Riemann est vraie seulement pour des chemins fermés.

10.2 Applications (calcul d'aire, théorème de Poincaré)

L'aire d'un domaine de \mathbb{R}^2 grâce au théorème de Green-Riemann s'exprime par une intégrale curviligne

$$\text{Aire}_D = \int_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial(D)} -y dx + x dy = - \oint_{\partial(D)} y dx = \oint_{\partial(D)} x dy$$

Exemple 10.2 Soit D le domaine défini entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 4$. On cherche l'aire de D . On peut la trouver en calculant l'intégrale curviligne de champ de vecteurs $\vec{V} = -y \vec{i} + x \vec{j}$. Le bord est une réunion de Γ et Γ_1 où Γ est la parabole de paramétrisation $(t, t^2), t \in [-2, 2]$ et Γ_1 la droite de paramétrisation $(2-t, 4)$. De l'exemple 9.4 on a

$$I = \oint_{\Gamma^+} -y dx + x dy = \int_{-2}^2 (-t^2) dt + t \cdot 2t dt = \int_{-2}^2 (t^2) dt = 16/3$$

et sur la droite Γ_1 on a $x = 2-t$, $y = 4$, donc $dx = -dt$, $dy = 0 \cdot dt$ et

$$I = \int_{\Gamma_1^+} -y dx + x dy = \int_{-2}^2 (-4)(-dt) + (2-t)(0 \cdot dt) = \int_{-2}^2 4 dt = 16$$

Le résultat pour l'intégrale curviligne sur le chemin fermé est

$$\int_{\Gamma \cup \Gamma_1} -y dx + x dy = \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3}.$$

On vérifie que

$$\oint_{\Gamma \cup \Gamma_1} -y dx + x dy = 2 \iint_D dx dy.$$

On a

$$\iint_D dx dy = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 dy dx = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

ce qui est exactement la moitié de l'intégrale curviligne. ■

Soit la forme différentielle $\alpha = P dx + Q dy$ sur $D \subset \mathbb{R}^2$ fermée. C'est-à-dire que

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Par la formule de Green-Riemann (10.1) on voit que cela implique que

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

et cela sur n'importe quel chemin fermé C^+ . La seule condition sur C^+ est que le chemin C^+ doit être le bord d'un domaine quelconque D !

La formule de Green-Riemann éclaire un autre côté du théorème de Poincaré - une 1-forme fermée sur un domaine D a son intégrale sur toute courbe fermée contenue dans D égale à zero. Par conséquent elle est exacte (cf. 9.5.1). Par exemple, pour la forme

$$\omega = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

on arrive en changeant des variables en coordonnées polaires $(x, y) \rightarrow (r, t)$:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

à obtenir

$$dx = dr \cos t - r \sin t \, dt, \quad dy = dr \sin t + r \cos t \, dt \text{ et par conséquent } \omega = dt.$$

Il apparaît que ω est exacte par cette formule ! Or si on calcule son intégrale sur un circuit fermé autour de l'origine comme on a fait dans l'exemple 9.5 on voit que l'intégrale n'est pas nulle et par conséquent la forme n'est pas exacte. Ce qui est correct c'est que ω est exacte localement, mais pas globalement, partout dans $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Le plus grand ouvert sur lequel on peut obtenir le changement de variables continu $(x, y) \rightarrow (r, t)$ est le complémentaire dans le plan \mathbb{R}^2 d'une demi-droite issue de l'origine, mais pas le plan entier ni le plan privé de l'origine.

10.3 Surfaces. Intégrale de surface de fonctions réelles

L'idée de base est la même que pour les intégrales curvilignes, mais au lieu d'intégrer sur un arc de courbe on intègre sur une surface. C'est par une intégrale de surface qu'on calcule

- l'aire d'une surface (l'aire d'une sphère, par exemple)
- le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

Une surface S de \mathbb{R}^3 peut être définie de différentes façons :

- a) **Forme explicite** par une équation de la forme $z = f(x, y)$ où $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}.$$

Une paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$ en est un exemple.

- b) **Forme implicite** par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$ où $F : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) \in E \subset \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

La sphère de \mathbb{R}^3 de centre l'origine et de rayon R en est un exemple :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

- c) **Forme paramétrique** par une représentation paramétrique

$$\begin{aligned} g : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \\ (u, v) &\mapsto g(u, v) = (x, y, z) \end{aligned}$$

■ **Exemple 10.3** S - une sphère de centre l'origine et de rayon R

$$\begin{aligned} g : [0, \pi] \times [0, 2\pi] &\rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto g(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Soit m le point de S de paramètres θ et ϕ .

- (a) Lorsque ϕ est fixé et que θ varie dans $[0, \pi]$, m décrit un demi-cercle. Un vecteur-tangent à ce demi-cercle au point m est

$$\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \theta}} = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta)$$

- (b) Lorsque θ est fixé et que ϕ varie dans $[0, 2\pi]$, m décrit un cercle. Un vecteur-tangent à ce cercle au point m est

$$\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \phi}} = (-R \sin \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \phi, 0)$$

On note

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \theta}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial \phi}},$$

ce vecteur s'il est non nul est normal à la sphère au point m . Le point $m \in S$ est appelé un **point régulier** de la surface si ce vecteur est non nul en m . ■

On a une situation analogue pour une surface quelconque paramétrée par

$$\begin{aligned} g : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S, \text{ de classe } C^1 \\ (u, v) &\mapsto g(u, v) = (x, y, z) \end{aligned}$$

On considère D une partie quarable de \mathbb{R}^2 et g de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant D . On note

$$\vec{N}(u, v) = \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial u}} \wedge \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial v}},$$

ce vecteur s'il est non nul est normal à la surface S au point (u, v) .

La notion d'aire de la surface paramétrée par $\vec{g}(u, v)$ avec $(u, v) \in D$ vient de la considération suivante. La surface peut être fractionnée en un nombre fini de parties associées à des rectangles $R_{ij} = [u_i, u_i + \Delta_i u] \times [v_j, v_j + \Delta_j v]$ du plan de paramètres (u, v) . L'aire de la portion de surface correspondant à R_{ij} sera approchée par l'aire d'un rectangle de cotés

$$\vec{g}(u_i, v_j + \Delta_j v) - \vec{g}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \Delta_j v \quad \text{et} \quad \vec{g}(u_i + \Delta_i u, v_j) - \vec{g}(u_i, v_j) \approx \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \Delta_i u.$$

Il en résulte :

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| \Delta_i u \Delta_j v.$$

Ce qui, après des fractionnements de plus en plus fins, aboutit à la définition précise de l'aire avec une intégrale double. On note

$$dA = \left\| \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} \right\| du dv$$

et on l'appelle **l'élément d'aire**.

Voici un cas particulier : quand la surface est le graphe d'une fonction d'équation $z = h(x, y)$, on a :

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ et $S \subset U$. On a

$$\begin{aligned} f \circ g : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \subset U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\mapsto f(g(u, v)). \end{aligned}$$

On peut considérer l'intégrale double

$$I = \iint_D f(g(u, v)) \|\vec{N}(u, v)\| du dv$$

et démontrer que I est indépendante du choix de la représentation paramétrique g . Pour calculer l'intégrale d'une fonction sur une surface on note

$$I = \iint_S f dA$$

et on l'appelle **intégrale de f sur la surface S** .

En particulier, lorsqu'on prend pour f la fonction constante égale à 1 on obtient par définition **l'aire de S** notée

$$\mathcal{A}(S) = \iint_S dA$$

Après le choix d'une représentation paramétrique de S on calcule $\mathcal{A}(S)$ par

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \|\vec{N}(u, v)\| du dv$$

■ **Exemple 10.4** Sur la sphère de rayon R , la calotte sphérique S est l'ensemble des points de coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) tels que $0 \leq \theta \leq \alpha$. Si la représentation paramétrique donnée par l'équation (10.3) de l'exemple 10.3. Le vecteur normal est

$$\vec{N}(\theta, \phi) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial \phi} = (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \theta), \quad (10.4)$$

et

$$\|\vec{N}(\theta, \phi)\| = R^2 \sin \theta.$$

L'aire de la calotte vaut donc

$$\mathcal{A}(S) = \iint_{0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \phi \leq 2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = R^2 \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

En particulier, pour $\alpha = \pi$, S est la sphère et son aire est $4\pi R^2$. ■

R On remarque que si on change des variables par exemple, $\{x, y\}$ en $\{u, v\}$ c'est exactement comme dans la section 8.3, la 2-forme :

$$dx \wedge dy = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du \wedge dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv$$

et on a le même type de formule pour $dy \wedge dz$ et $dz \wedge dx$. Le produit vectoriel :

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

Finalement,

$$dA = \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} du dv = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx \quad (10.5)$$

10.4 Intégrale de surface d'un champ de vecteurs

Soit S une surface comportant deux faces distinctes. Elle est dite **orientable**.

En chaque point régulier, il existe deux vecteurs unitaires normaux opposés. Le choix d'un de ces vecteurs \vec{n}^+ **oriente la surface** S .

Soit \vec{V} un champ de vecteurs continu sur S . Le flux d'un champ \vec{V} à travers S est l'intégrale de surface

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}^+ dA$$

On peut noter $\vec{n}^+ dA = \vec{dA}$. De (10.5) on a

$$\vec{dA} = \vec{k} dx \wedge dy + \vec{i} dy \wedge dz + \vec{j} dz \wedge dx$$

Pour un champ de vecteurs $\vec{V} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$ et une surface S définie par $g(u, v) = (x, y, z)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{dA} = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (10.6)$$

Formule de la divergence - relie le flux de champ à travers une surface fermée à l'intégrale triple de divergence de ce champ sur le domaine de \mathbb{R}^3 limité par cette surface. Soit E un domaine de \mathbb{R}^3 et $S = \partial(E)$ la surface qui est le bord de E . Alors, la formule de la divergence (aussi appelée Ostrogradski et dans le contexte électromagnétique - Gauss) est la suivante

$$\iint_{\partial E} \vec{V} \cdot \vec{dA} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz \quad (10.7)$$

■ **Exemple 10.5** Vérifions la formule d'Ostrogradski avec E - boule de \mathbb{R}^3 de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon R et $\vec{V} = P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}$ champ de vecteurs de composantes $P = x$, $Q = y$, $R = 2z$. La frontière de E est la sphère S de centre O et de rayon R . On peut prendre la paramétrisation paramétrique de sphère (10.3) avec le vecteur normal $\vec{N}(\theta, \phi)$ (10.4). Ce vecteur est dirigé vers l'extérieur, donc on note S^+ la sphère orientée ainsi.

$$I = \iint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{N}(\theta, \phi) \, d\theta \, d\phi$$

On a

$$\vec{V}(g(\theta, \phi)) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, 2R \cos \theta),$$

son produit scalaire avec

$$\vec{N}(\theta, \phi) = (R^2 \sin^2 \theta \cos \phi, R^2 \sin^2 \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \theta)$$

est égal à $R^3 (\sin \theta + \cos^2 \theta \sin \theta)$. Finalement, l'intégrale recherchée est :

$$I = R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (\sin \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta = \frac{16\pi R^3}{3}$$

D'autre part $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 4$. L'intégrale triple

$$\iiint_E \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz = 4 \iiint_E \, dx \, dy \, dz = 4 \operatorname{Volume}(E) = 4 \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16\pi R^3}{3}.$$

■

Formule du rotationnel relie l'intégrale curviligne du champ de vecteur sur un circuit fermé avec le flux de rotationnel du même champ à travers une surface dont le circuit est le bord. La formule du rotationnel (aussi appelée formule de Stokes) est la suivante

$$\oint_{\partial S=C^+} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \iint_{S^+} \vec{\operatorname{rot}} \vec{V} \cdot \vec{dA} \quad (10.8)$$

Autrement dit, la circulation du champ \vec{V} le long de la courbe fermé C^+ est égale au flux de rotationnel de \vec{V} à travers une surface limitée par C^+ (avec l'orientation compatible). Cette formule est une reformulation de la formule de Green-Riemann pour une courbe fermée dans \mathbb{R}^3 .

■ **Exemple 10.6** Ca serait bien de faire encore un exemple de calcul par la formule du rotationnel.

■

10.5 Formule de Stokes générale : $\int_{\partial(D)} \omega = \int_D d\omega$

L'intégration est une opération qui à un domaine de dimension k et à une k -forme différentielle associe un nombre. Des exemples sont

— l'intégrale simple

$$\int_I f(x) dx$$

- associe un nombre à une 1-forme différentielle $f(x) dx$ sur un segment $I = [a, b]$ de dimension 1.

— l'intégrale double

$$\iint_D g(x, y) dx dy$$

- associe un nombre à une 2-forme différentielle $g(x, y) dx dy$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$

— l'intégrale triple

$$\iiint_E h(x, y, z) dx dy dz$$

associe un nombre à une 3-forme différentielle $h(x, y, z) dx dy dz$ sur un domaine $E \subset \mathbb{R}^3$

— l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

associe un nombre à une 1-forme différentielle $p(x, y) dx + q(x, y) dy$ sur une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ou bien

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

associe un nombre à une 1-forme différentielle $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ sur une courbe $C \subset \mathbb{R}^3$. Une courbe étant un objet de dimension 1 cela est possible.

— l'intégrale de surface

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

associe un nombre à une 2-forme $P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$ dans \mathbb{R}^3 sur une surface $S \in \mathbb{R}^3$, objet de dimension 2.

Soit D un domaine fermé et borné de dimension q dans \mathbb{R}^p , on note $\partial(D)$ son bord (qui est de dimension $q - 1$.) Soit ω une $(q - 1)$ -forme dans \mathbb{R}^p (Définition 7.2.2). Alors, la **formule de Stokes générale** est satisfaite :

$$\int_{\partial(D)} \omega = \int_D d\omega \tag{10.9}$$

Les cas spéciaux de cette formule sont :

— $q = 1, p = 1$ - c'est le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b df = f(b) - f(a)$$

— $q = 2, p = 2$ - théorème de Green-Riemann

- $q = 2, q = 3$ - théorème de Stokes (du rotationnel)
- $q = 3, q = 3$ - théorème d'Ostrogradski (de la divergence)

La formule (10.9) donne une formulation élégante de plusieurs théorèmes.

Elle présente une connection entre l'opération géométrique ∂ qui à un domaine D associe son bord $\partial(D)$ et l'opération algébrique $-d$ qui à une forme différentielle ω associe une forme différentielle $d\omega$. Selon la formule (10.9) ces deux opérations sont en dualité !

Il faut remarquer que ∂ , l'opération de prendre le bord, est différente de la notion topologique de prendre la frontière. La notion de l'intérieur change avec la dimension, à savoir, si on regarde un segment $[a, b]$ dans \mathbb{R} son intérieur est un segment ouvert $]a, b[$ et sa frontière est deux points $\{a, b\}$. Le même segment dans \mathbb{R}^2 n'a pas de points d'intérieur ! Tous les points de $[a, b]$ sont des points frontière.

Ici, soit D un **domaine de dimension** k de \mathbb{R}^p . Si D est donné par sa forme paramétrique avec m équations paramétriques avec n variables, sa dimension est $k = p + n - m$.

Par exemple, pour une courbe de \mathbb{R}^3 , $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ il y a $m = 3$ équations

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

sur $p = 3$ variables de \mathbb{R}^3 , (x, y, z) qui dépendent d'une variable t , en tout $p + n = 4$ variables, dont une, t , qu'on appelle libre. Donc dans \mathbb{R}^3 la dimension d'une courbe est $p + n - m = 1$.

Un autre exemple, une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 est donnée par 3 équations sur 5 variables (u, v, x, y, z) , dont u, v sont des variables libres et x, y, z s'expriment à partir de u, v . Cela donne que la dimension d'une surface dans \mathbb{R}^3 est égale à $2 = 5 - 3$.

Souvent un domaine de dimension $p - 1$ dans \mathbb{R}^p est appelé une **hypersurface**. Pour définir une hypersurface dans \mathbb{R}^p il faut une équation reliant p variables. Ou bien on peut introduire $p - 1$ variables libres et avec p équations définir une hypersurface. Une surface de \mathbb{R}^3 en est un exemple.

On peut resumer comme suit : la dimension d'un domaine est le nombre minimal de variables indépendantes qui le définissent.

Ce qui suit ces considérations de dimension, c'est qu'un voisinage Ω d'un point X de D de dimension k dans \mathbb{R}^p peut être de deux types :

$$(1) \Omega \simeq U \subset \mathbb{R}^k \text{ ou } (2) \Omega \simeq V \subset \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}.$$

Les points de D avec le voisinge de type (1) sont des points intérieurs. Les points de D avec le voisinge de type (2) sont des points du bord. (L'opération de prendre le bord peut aussi être définie à l'aide des simplexes et des chaînes (cf. Chapitre 9 de [?]), ce qui dépasse le programme de ce cours.)

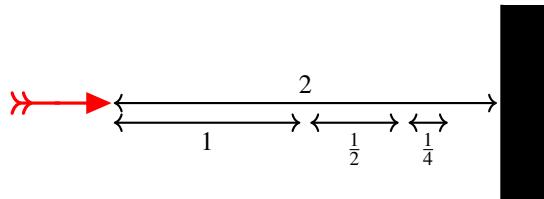
On remarque que $\partial(\partial(D)) = \emptyset$ pour tout domaine D . Cette propriété est en correspondance avec la relation $d(d\omega) = 0$ pour toute forme différentielle ω (Lemme 1). Le théorème de Stokes général dit qu'on peut "échanger" une opération avec l'autre.

C'est un résultat très profond qui relie l'analyse des objets géométriques par des méthodes algébriques. C'est une pierre angulaire de l'analyse moderne.

11. Séries

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des sommes ayant une infinité de termes. Par exemple que peut bien valoir la somme infinie suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$



Cette question a été popularisée sous le nom du **paradoxe de Zénon**. On tire une flèche à 2 mètres d'une cible. Elle met un certain laps de temps pour parcourir la moitié de la distance, à savoir un mètre. Puis il lui faut encore du temps pour parcourir la moitié de la distance restante, et de nouveau un certain temps pour la moitié de la distance encore restante. On ajoute ainsi une infinité de durées non nulles, et Zénon en conclut que la flèche n'atteint jamais sa cible ! Zénon ne concevait pas qu'une infinité de distances finies puisse être parcourue en un temps fini. Et pourtant nous allons voir dans ce chapitre que la somme d'une infinité de termes peut être une valeur finie.

11.1 Définitions – Série géométrique

11.1.1 Définitions

Définition 11.1.1 Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres réels (ou de nombres complexes). On pose

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ s'appelle la **série** de terme général u_k .

Cette série est notée par la somme infinie $\sum_{k \geq 0} u_k$. La suite (S_n) s'appelle aussi la **suite des sommes partielles**.

■ **Exemple 11.1** Fixons $q \in \mathbb{C}$. Définissons la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ par $u_k = q^k$; c'est une suite géométrique. La **série géométrique** $\sum_{k \geq 0} q^k$ est la suite des sommes partielles :

$$S_0 = 1 \quad S_1 = 1 + q \quad S_2 = 1 + q + q^2 \quad \dots \quad S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad \dots$$

Définition 11.1.2 Si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ admet une limite finie dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}), on note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

On appelle alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la **somme** de la série $\sum_{k \geq 0} u_k$, et on dit que la série est **convergente**. Sinon, on dit qu'elle est **divergente**.

Notations. On peut noter une série de différentes façons, et bien sûr avec différents symboles pour l'indice :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \quad \sum_{k \geq 0} u_k \quad \sum_{k \geq 0} u_k.$$

Pour notre part, on fera la distinction entre une série quelconque $\sum_{k \geq 0} u_k$, et on réservera la notation

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à une série convergente ou à sa somme.

11.1.2 Série géométrique

Proposition 11.1.1 Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_{k \geq 0} q^k$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Considérons

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n.$$

- Écartons tout de suite le cas $q = 1$, pour lequel $S_n = n + 1$. Dans ce cas $S_n \rightarrow +\infty$, et la série diverge.
- Soit $q \neq 1$ et multiplions S_n par $1 - q$:

$$(1 - q)S_n = (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

Donc

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $|q| < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$, donc $q^{n+1} \rightarrow 0$ et ainsi $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$. Dans ce cas la série $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge.

Si $|q| \geq 1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite finie (elle peut tendre vers $+\infty$, par exemple si $q = 2$; ou bien être divergente, par exemple si $q = -1$). Donc si $|q| \geq 1$, (S_n) n'a pas de limite finie, donc la série $\sum_{k \geq 0} q^k$ diverge. ■

■ **Exemple 11.2** 1. Série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Cela résout

le paradoxe de Zénon : la flèche arrive bien jusqu'au mur !

2. Série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, avec premier terme $\frac{1}{3^3}$. On se ramène à la série géométrique commençant à $k = 0$ en ajoutant et retranchant les premiers termes : $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{13}{9} = \frac{3}{2} - \frac{13}{9} = \frac{1}{18}$.

3. Le fait de calculer la somme d'une série à partir de $k = 0$ est purement conventionnel. On peut toujours effectuer un changement d'indice pour se ramener à une somme à partir de 0. Une autre façon pour calculer la même série $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$ que précédemment est de faire le changement d'indice $n = k - 3$ (et donc $k = n + 3$) :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^3} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{27} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$$

$$4. \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}. ■$$

11.1.3 Séries convergentes

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : changer un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature, convergente ou divergente. Par contre, si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée.

Une façon pratique d'étudier la convergence d'une série est d'étudier son reste : le **reste d'ordre n** d'une série convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 11.1.2 Si une série est convergente, alors $S = S_n + R_n$ (pour tout $n \geq 0$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

Démonstration. — $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.

— Donc $R_n = S - S_n \rightarrow S - S = 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. ■

11.1.4 Suites et séries

Il n'y a pas de différence entre l'étude des suites et des séries. On passe de l'une à l'autre très facilement.

Tout d'abord rappelons qu'à une série $\sum_{k \geq 0} u_k$, on associe la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et que par définition la série est convergente si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge.

Réiproquement si on veut étudier une suite $(a_k)_{k \geq 0}$ on peut utiliser le résultat suivant :

Proposition 11.1.3 Une somme télescopique est une série de la forme

$$\sum_{k \geq 0} (a_{k+1} - a_k).$$

Cette série est convergente si et seulement si $\ell := \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$ existe et dans ce cas on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \ell - a_0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= -a_0 + a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n + a_{n+1} \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$
■

Voici un exemple très important pour la suite.

■ **Exemple 11.3** La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

est convergente et a la valeur 1. En effet, elle peut être écrite comme somme télescopique, et plus précisément la somme partielle vérifie :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Par changement d'indice, on a aussi que les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ sont convergentes et de même somme 1. ■

11.1.5 Le terme d'une série convergente tend vers 0

Théorème 11.1.4 Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_k)_{k \geq 0}$ tend vers 0.

Le point clé est que l'on retrouve le terme général à partir des sommes partielles par la formule

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge vers la somme S de la série. Il en est de même de la suite $(S_{n-1})_{n \geq 1}$. Par linéarité de la limite, la suite (u_n) tend vers $S - S = 0$. ■

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.

Par exemple les séries $\sum_{k \geq 1} (1 + \frac{1}{k})$ et $\sum_{k \geq 1} k^2$ sont divergentes.

Plus intéressant, la série $\sum u_k$ de terme général

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2^\ell \quad \text{pour un certain } \ell \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

diverge. En effet, même si les termes valant 1 sont très rares, il y en a quand même une infinité !

11.1.6 Linéarité

Proposition 11.1.5 Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B , et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ est convergente et de somme $\lambda A + \mu B$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Démonstration. $A_n = \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow A \in \mathbb{C}, B_n = \sum_{k=0}^n b_k \rightarrow B \in \mathbb{C}$. Donc $\sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^n a_k + \mu \sum_{k=0}^n b_k = \lambda A_n + \mu B_n \rightarrow \lambda A + \mu B$. ■

Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{5}{3^k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + 5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 5 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + 5 \frac{3}{2} = \frac{19}{2}.$$

Comme application pour les séries à termes complexes, la convergence équivaut à celle des parties réelle et imaginaire :

Proposition 11.1.6 Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout k , notons $u_k = a_k + i b_k$, avec a_k la partie réelle de u_k et b_k la partie imaginaire. La série $\sum u_k$ converge si et seulement si les deux séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ convergent. Si c'est le cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

■ **Exemple 11.4** Considérons par exemple la série géométrique $\sum_{k \geq 0} r^k$, où $r = \rho e^{i\theta}$ est un complexe de module $\rho < 1$ et d'argument θ .

Comme le module de r est strictement inférieur à 1, alors la série converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

D'autre part, $r^k = \rho^k e^{ik\theta}$ par la formule de Moivre. Les parties réelle et imaginaire de r^k sont

$$a_k = \rho^k \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad b_k = \rho^k \sin(k\theta).$$

On déduit de la proposition précédente que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \Re \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \right) = \Re \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = \Im \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \right) = \Im \left(\frac{1}{1-r} \right).$$

Le calcul donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \cos(k\theta) = \frac{1 - \rho \cos \theta}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(k\theta) = \frac{\rho \sin \theta}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta}.$$

■

11.1.7 Sommes de séries

Pour l'instant, il n'y a pas beaucoup de séries dont vous connaissez la somme, à part les séries géométriques. Il faudra attendre d'autres chapitres et d'autres techniques pour calculer des sommes de séries. Dans ce chapitre on s'intéressera essentiellement à savoir si une série converge ou diverge.

Voici cependant une exception !

■ **Exemple 11.5** Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Que vaut la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k \quad ?$$

Admettons un moment que cette série converge et notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k$.

Écrivons :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = q \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\
 &= q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)q^{k-1} \\
 &= q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q \sum_{k'=0}^{+\infty} k'q^{k'} \quad \text{en posant } k' = k-1 \\
 &= q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q \cdot S
 \end{aligned}$$

En résolvant cette équation en S , on trouve que

$$(1-q)S = q \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}.$$

Cette dernière série est une série géométrique de raison q avec $|q| < 1$ donc converge. Cela justifie la convergence de S .

Ainsi

$$(1-q)S = q \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Conclusion :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

■

11.1.8 Critère de Cauchy

Attention ! Il existe des séries $\sum_{k \geq 0} u_k$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$, mais $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge. L'exemple le plus classique est la **série harmonique** : La série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

diverge

Plus précisément, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. Cependant on a $u_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ (lorsque $k \rightarrow +\infty$).

Pour montrer que la série diverge nous allons utiliser le critère de Cauchy.

Rappel. Une suite (s_n) de nombres réels (ou complexes) converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Pour les séries cela nous donne :

Théorème 11.1.7 — Critère de Cauchy. Une série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad |u_n + \cdots + u_m| < \varepsilon .$$

On le formule aussi de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \quad \left| \sum_{k=n}^m u_k \right| < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |u_n + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

Démonstration. La preuve est simplement de dire que la suite (S_n) des sommes partielles converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. Ensuite il suffit de remarquer que

$$|S_m - S_{n-1}| = |u_n + \cdots + u_m|.$$

■

Revenons à la série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$. La somme partielle est $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Calculons la différence de deux sommes partielles, afin de conserver les termes entre $n+1$ (qui joue le rôle de n) et $2n$ (qui joue le rôle de m) :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy (car $\frac{1}{2}$ n'est pas inférieur à $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple), donc la série ne converge pas.

Si on souhaite terminer la démonstration sans utiliser directement le critère de Cauchy alors on raisonne par l'absurde. Supposons que $S_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ (lorsque $n \rightarrow +\infty$). Alors on a aussi $S_{2n} \rightarrow \ell$ (lorsque $n \rightarrow +\infty$) et donc $S_{2n} - S_n \rightarrow \ell - \ell = 0$. Ce qui entre en contradiction avec l'inégalité $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

On termine par une étude plus poussée de la série harmonique.

Proposition 11.1.8 Pour la série harmonique $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ et sa somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Démonstration. Soit $M > 0$. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2M$. Alors pour $n \geq 2^m$ on a :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} \\ &= 1 + m\frac{1}{2} \geq M \end{aligned}$$

L'astuce consiste à regrouper les termes. Entre chaque parenthèses il y a successivement 2, 4, 8, ... termes jusqu'à

$$2^m - (2^{m-1} + 1) + 1 = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1} \text{ termes.}$$

Ainsi pour tout $M > 0$ il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $S_n \geq M$; ainsi (S_n) tend vers $+\infty$. Cela reprouve bien sûr que la série harmonique diverge. ■

- Exercice 11.1**
1. Calculer les sommes partielles S_n de la série dont le terme général est $\frac{1}{4^k}$, commençant à $k = 1$. Cette série est-elle convergente ? Si c'est possible, calculer la somme S et les restes R_n .
 2. Mêmes questions avec $\sum_{k \geq 0} (-1)^k$, $\sum_{k \geq 0} 3^k$, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{10^k}$, $\sum_{k \geq 2} \exp(-k)$.
 3. Pourquoi les séries suivantes sont-elles divergentes ? $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} + (-1)^k\right)$; $\sum_{k \geq 0} \frac{k}{k+1}$; $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k}$; $\sum_{k \geq 1} k \cos(k)$; $\sum_{k \geq 1} \exp(\frac{1}{k})$.
 4. Calculer les sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$. Cette série est-elle convergente ?
 5. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k = \frac{q^2 + q}{(1-q)^3}$.

11.2 Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs ou nuls se comportent comme les suites croissantes et sont donc plus faciles à étudier.

11.2.1 Convergence par les sommes partielles

Rappels. Soit $(s_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de nombres réels.

- Si la suite est majorée, alors la suite (s_n) converge, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie.
- Sinon la suite (s_n) tend vers $+\infty$.

Appliquons ceci aux séries $\sum u_k$ à **termes positifs**, c'est-à-dire $u_k \geq 0$ pour tout k . Dans ce cas la suite (S_n) des sommes partielles, définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, est une suite croissante. En effet

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0.$$

Par les rappels sur les suites, nous avons donc :

Proposition 11.2.1 Une série à termes positifs est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Autrement dit, si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $S_n \leq M$.

De plus, dans le cas de convergence, la somme de la série S vérifie bien sûr $\lim S_n = S$, mais aussi $S_n \leq S$, pour tout n . Les deux situations convergence/divergence sont possibles : $\sum_{k \geq 0} q^k$ converge si $0 < q < 1$, et diverge si $q \geq 1$.

11.2.2 Théorème de comparaison

Quelle est la méthode générale pour trouver la nature d'une série à termes positifs ? On la compare avec des séries classiques simples au moyen du théorème de comparaison suivant.

Théorème 11.2.2 — Théorème de comparaison. Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $k_0 \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $u_k \leq v_k$.

- Si $\sum v_k$ converge alors $\sum u_k$ converge.
- Si $\sum u_k$ diverge alors $\sum v_k$ diverge.

Démonstration. Comme nous l'avons observé, la convergence ne dépend pas des premiers termes. Sans perte de généralité on peut donc supposer $k_0 = 0$. Notons $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $S'_n = v_0 + \dots + v_n$. Les suites (S_n) et (S'_n) sont croissantes, et de plus, pour tout $n \geq 0$, $S_n \leq S'_n$. Si la série $\sum v_k$ converge, alors la suite (S'_n) converge. Soit S' sa limite. La suite (S_n) est croissante et majorée par S' , donc elle converge, et ainsi la série $\sum u_k$ converge aussi. Inversement, si la série $\sum u_k$ diverge, alors la suite (S_n) tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la suite (S'_n) et ainsi la série $\sum v_k$ diverge. ■

11.2.3 Exemples

■ **Exemple 11.6** Nous avons déjà vu dans l'exemple 11.3 que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad \text{converge.}$$

Nous allons en déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{converge.}$$

En effet, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$:

$$\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

En fait c'est vrai pour $k \geq 4$, mais il est inutile de calculer une valeur précise de k_0 . On en déduit que la série de terme général $\frac{1}{2k^2}$ converge, d'où le résultat par linéarité. ■

■ **Exemple 11.7** Voici un exemple fondamental, la **série exponentielle**.

La série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge.

Notons que $0! = 1$ et que pour $k \geq 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$.

En effet $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ pour $k \geq 2$, mais $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (par changement d'indice) est une série convergente. Donc la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ converge.

En fait, par définition, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ vaut le nombre d'Euler $e = \exp(1)$. ■

■ **Exemple 11.8** Inversement, nous avons vu que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. On en déduit facilement que les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent également. ■

Terminons avec une application intéressante : le développement décimal d'un réel.

■ **Exemple 11.9** Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite d'entiers tous compris entre 0 et 9. La série

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ converge.

En effet, son terme général $u_k = \frac{a_k}{10^k}$ est majoré par $\frac{9}{10^k}$. Mais la série géométrique $\sum \frac{1}{10^k}$ converge, car $\frac{1}{10} < 1$. La série $\sum \frac{9}{10^k}$ converge aussi par linéarité, d'où le résultat.

Une telle somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est une écriture décimale d'un réel x , avec ici $0 \leq x \leq 1$.

Par exemple, si $a_k = 3$ pour tout k :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots = 0,333\ldots = \frac{1}{3}$$

On retrouve bien sûr le même résultat à l'aide de la série géométrique :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

11.2.4 Théorème des équivalents

Nous allons améliorer le théorème de comparaison avec la notion de suites équivalentes.

Soient (u_k) et (v_k) deux suites **strictement positives**. Alors les suites (u_k) et (v_k) sont **équivalentes** si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1.$$

On note alors

$$u_k \sim v_k.$$

Théorème 11.2.3 — Théorème des équivalents. Soient (u_k) et (v_k) deux suites à termes strictement positifs. Si $u_k \sim v_k$ alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Autrement dit, si les suites sont équivalentes alors elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Bien sûr, en cas de convergence, il n'y a aucune raison que les sommes soient égales. Enfin, si les suites sont toutes les deux strictement négatives, la conclusion reste valable.

Revenons sur un exemple qui montre que ce théorème est très pratique : les suites $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k^2+3k+2}$ sont équivalentes. Comme la série $\sum \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ converge (exemple 11.3), alors cela implique que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left| \frac{u_k}{v_k} - 1 \right| < \varepsilon,$$

ou autrement dit

$$(1 - \varepsilon)v_k < u_k < (1 + \varepsilon)v_k.$$

Fixons un $\varepsilon < 1$. Si $\sum u_k$ converge, alors par le théorème 11.2.2 de comparaison, $\sum (1 - \varepsilon)v_k$ converge, donc $\sum v_k$ également. Réciproquement, si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum (1 + \varepsilon)v_k$ diverge, et $\sum v_k$ aussi. ■

11.2.5 Exemples

■ **Exemple 11.10** Les deux séries

$$\sum \frac{k^2 + 3k + 1}{k^4 + 2k^3 + 4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{k + \ln(k)}{k^3} \quad \text{convergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$, et nous savons que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge. ■

■ **Exemple 11.11** Par contre

$$\sum \frac{k^2 + 3k + 1}{k^3 + 2k^2 + 4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{k + \ln(k)}{k^2} \quad \text{divergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k}$, et nous avons vu que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge. ■

Voyons un exemple plus sophistiqué.

■ **Exemple 11.12** Est-ce que la série

$$\sum_{k \geq 1} \ln(\operatorname{th} k) \quad \text{converge ?}$$

La méthode est de chercher un équivalent simple du terme général.

— Remarquons tout d'abord que, pour $k > 0$, $0 < \operatorname{th} k < 1$.

— Puis évaluons $\operatorname{th} k$:

$$\operatorname{th} k = \frac{\operatorname{sh} k}{\operatorname{ch} k} = \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = 1 + \frac{-2e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = 1 + \frac{-2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}}$$

— Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, alors, si $u_k \rightarrow 0$, $\ln(1+u_k) \sim u_k$. Ainsi

$$\ln(\operatorname{th} k) = \ln \left(1 + \frac{-2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}} \right) \sim \frac{-2e^{-2k}}{1 + e^{-2k}} \sim -2e^{-2k}$$

- La série $\sum e^{-2k} = \sum (e^{-2})^k$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{e^2} < 1$.
- Les suites $\ln(\operatorname{th} k)$ et $-2e^{-2k}$ sont deux suites strictement négatives et on a vu que $\ln(\operatorname{th} k) \sim -2e^{-2k}$. Par le théorème 11.2.3 des équivalents, comme la série $\sum -2e^{-2k}$ converge, alors la série $\sum \ln(\operatorname{th} k)$ converge également. (Si vous préférez, vous pouvez appliquer le théorème aux suites strictement positives $-\ln(\operatorname{th} k)$ et $2e^{-2k}$.)

Exercice 11.2

1. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln k)^\alpha}{k^3}$ converge, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que, si la série à termes positifs $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2$ converge aussi.
3. Soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries vérifiant $u_k > 0$, $v_k > 0$ et pour tout $k \geq 0$: $0 < m \leq \frac{u_k}{v_k} \leq M$. Montrer que les deux séries sont de même nature.
4. Par comparaison ou recherche d'équivalent, déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln k}{k}$.
Même question avec les séries de terme général $\sin \left(\frac{1}{(k-1)(k+1)} \right)$; $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$; $\ln \left(\sqrt{1 - \frac{1}{3k^2}} \right)$.
5. Écrire la série associée au développement décimal $0,99999\dots$. Notons S la somme de cette série. Calculer la série correspondant à $10 \cdot S$. Simplifier $10 \cdot S - S$. En déduire S . Retrouver cette valeur S à l'aide d'une série géométrique.
6. Justifier que la série $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1}$ est convergente. Décomposer $\frac{1}{k^2-1}$ en éléments simples. Déterminer une expression des sommes partielles S_n . En déduire que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.
7. Nous admettons ici que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$. Sans calculs, déterminer les sommes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{k!}$$

11.3 Séries alternées

Il existe un autre type de série facile à étudier : les séries alternées. Ce sont celles où le signe du terme général change à chaque rang.

11.3.1 Critère de Leibniz

Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite qui vérifie $u_k \geq 0$. La série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ s'appelle une **série alternée**. On a le critère de convergence suivant, extrêmement facile à vérifier :

Théorème 11.3.1 — Critère de Leibniz. Supposons que $(u_k)_{k \geq 0}$ soit une suite qui vérifie :

1. $u_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$,
2. la suite (u_k) est une suite décroissante,
3. et $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

Alors la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ converge.

Démonstration. Nous allons nous ramener à deux suites adjacentes.

- La suite (S_{2n+1}) est croissante car $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0$.
- La suite (S_{2n}) est décroissante car $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n-1} \leq 0$.
- $S_{2n} \geq S_{2n+1}$ car $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \leq 0$.
- Enfin $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 car $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \rightarrow 0$ (lorsque $n \rightarrow +\infty$).

En conséquence (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent et en plus convergent vers la même limite S . On conclut que (S_n) converge vers S .

En plus on a montré que $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n .

Enfin on a aussi

$$0 \geq R_{2n} = S - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$$

et

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}.$$

Ainsi, quelle que soit la parité de n , on a $|R_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}$. ■

■ Exemple 11.13 La série harmonique alternée

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge. En effet, en posant $u_k = \frac{1}{k+1}$, alors

1. $u_k \geq 0$,
2. (u_k) est une suite décroissante,
3. la suite (u_k) tend vers 0.

Par le critère de Leibniz (théorème 11.3.1), la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ converge. ■

11.3.2 Reste

Non seulement le critère de Leibniz prouve la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$, mais la preuve nous fournit deux résultats importants supplémentaires : un encadrement de la somme et une majoration du reste.

Corollaire 11.3.2 Soit une série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifiant les hypothèses du théorème 11.3.1.

Soit S la somme de cette série et soit (S_n) la suite des sommes partielles.

- La somme S vérifie les encadrements :

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0.$$

- En plus, si $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est le reste d'ordre n , alors on a

$$|R_n| \leq u_{n+1}.$$

Pour une série alternée, la vitesse de convergence est donc dictée par la décroissance vers 0 de la suite (u_k) . Celle-ci peut être assez lente.

■ **Exemple 11.14** Par exemple, on a vu que la série harmonique alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge ; notons S sa somme. Les sommes partielles sont $S_0 = 1$, $S_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \dots$. L'encadrement du corollaire s'écrit

$$1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq 1$$

On en déduit

$$S_3 = \frac{35}{60} \simeq 0,58333 \dots \leq S \leq S_4 = \frac{47}{60} \simeq 0,78333 \dots$$

Si on pousse les calculs plus loin, alors pour $n = 200$ on obtient

$$S_{201} \simeq 0,69067 \dots \leq S \leq S_{200} \simeq 0,69562 \dots$$

Ce qui nous donne les deux premières décimales de $S \simeq 0,69 \dots$

En plus nous avons une majoration de l'erreur commise, en utilisant l'inégalité $|R_n| \leq u_{n+1}$. On trouve que l'erreur commise en approchant S par S_{200} est : $|S - S_{200}| = |R_{200}| \leq u_{201} = \frac{1}{202} < 5 \cdot 10^{-3}$.

En fait, vous verrez plus tard que $S = \ln 2 \simeq 0,69314 \dots$ ■

11.3.3 Contre-exemple

Terminons par deux mises en garde :

- On ne peut pas laisser tomber la condition de décroissance de la suite (u_k) dans le critère de Leibniz.
- Il n'est pas possible de remplacer u_k par un équivalent à l'infini dans le théorème 11.3.1, car la décroissance n'est pas conservée par équivalence.

■ **Exemple 11.15** Voici deux séries alternées :

$$\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \quad \text{converge,} \quad \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} \quad \text{diverge.}$$

Le critère de Leibniz (théorème 11.3.1) s'applique à la première : la suite $u_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une suite

positive, décroissante, qui tend vers 0. Conséquence, la série alternée $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

Par contre le critère de Leibniz ne s'applique pas à la seconde, car si la suite $v_k = \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ est bien positive (pour $k \geq 2$) et tend vers 0, elle n'est pas décroissante.

Cependant, on a bien :

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k} \sim \frac{1}{\sqrt{k}} = u_k$$

Pour montrer que $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ diverge, calculons la différence :

$$(-1)^k u_k - (-1)^k v_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} = (-1)^k \frac{\sqrt{k} + (-1)^k - \sqrt{k}}{k + (-1)^k \sqrt{k}} = \frac{1}{k + (-1)^k \sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$$

Ainsi la série de terme général $w_k = (-1)^k u_k - (-1)^k v_k$ diverge, car son terme général est équivalent à celui de la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ qui diverge.

Supposons maintenant par l'absurde que la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k v_k$ soit convergente. On sait aussi que la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k u_k$ est convergente. Donc par linéarité la série $\sum_{k \geq 2} w_k = \sum_{k \geq 2} (-1)^k u_k - \sum_{k \geq 2} (-1)^k v_k$ serait convergente. Ce qui est une contradiction.

Conclusion : la série $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ diverge. ■

Exercice 11.3 1. Est-ce que le critère de Leibniz s'applique aux séries suivantes ?

$$\begin{array}{lll} \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \ln k} & \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{\frac{k+1}{k}} & \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(-1)^{k+1}(\sqrt{k} - \ln k)} \\ \sum_{k \geq 2} (-1)^k (\ln(k+1) - \ln(k)) & \sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k \ln k} & \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^k}{3k + (-1)^k} \end{array}$$

2. À partir de quel rang la somme partielle S_n de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est-elle une approximation à 0,1 près de sa somme S ? Et à 0,001 près? À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer deux décimales exactes après la virgule de S . Mêmes questions avec $\frac{(-1)^k}{2^k}$; $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$; $\frac{(-1)^k}{k!}$. ■

11.4 Séries absolument convergentes – Règle de d'Alembert

11.4.1 Séries absolument convergentes

Définition 11.4.1 On dit qu'une série $\sum_{k \geq 0} u_k$ de nombres réels (ou complexes) est **absolument convergente** si la série $\sum_{k \geq 0} |u_k|$ est convergente.

■ **Exemple 11.16** 1. Par exemple la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos k}{k^2}$ est absolument convergente. Car pour $u_k = \frac{\cos k}{k^2}$ on a $|u_k| \leq \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge alors $\sum_{k \geq 1} |u_k|$ converge aussi.

2. La série harmonique alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ n'est pas absolument convergente. Car pour $v_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$, la série $\sum_{k \geq 0} |v_k| = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1}$ diverge. ■

Une série, telle que la série harmonique alternée, qui est convergente, mais pas absolument convergente, s'appelle une série **semi-convergente**.

Être absolument convergent est plus fort qu'être convergent :

Théorème 11.4.1 Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Utilisons le critère de Cauchy. Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente. La série $\sum |u_k|$ est convergente, donc la suite des restes (R'_n) avec $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$ est une suite qui tend vers 0, donc en particulier c'est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Par suite, pour $n \geq n_0$ et $p \geq 0$ on a :

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Donc, d'après le critère de Cauchy (théorème 11.1.7), $\sum u_k$ est convergente. ■

11.4.2 Règle du quotient de d'Alembert

La règle du quotient de d'Alembert est un moyen efficace de montrer si une série de nombres réels ou complexes converge ou pas.

Théorème 11.4.2 — Règle du quotient de d'Alembert. Soit $\sum u_k$ une série dont les termes généraux sont des nombres réels (ou complexes) non nuls.

1. S'il existe une constante $0 < q < 1$ et un entier k_0 tels que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{converge.}$$

La série est même absolument convergente.

2. S'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{diverge.}$$

Le plus souvent, la situation que l'on étudie est lorsque la suite $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge ; la position de la limite par rapport à 1 détermine alors la nature de la série.

Voici une application directe et la plus utilisée, pour les séries de nombres réels, strictement positifs :

Corollaire 11.4.3 — Règle du quotient de d'Alembert. Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs, telle que $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge vers ℓ .

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_k$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_k$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure en général.

Démonstration. Rappelons tout d'abord que la série géométrique $\sum q^k$ converge si $|q| < 1$, diverge sinon.

Dans le premier cas du théorème, l'hypothèse $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q$ implique $|u_{k_0+1}| \leq |u_{k_0}|q$, puis $|u_{k_0+2}| \leq |u_{k_0}|q^2$. On vérifie par récurrence que, pour tout $k \geq k_0$:

$$|u_k| \leq |u_{k_0}|q^{-k_0} \cdot q^k = c \cdot q^k,$$

où c est une constante. Comme $0 < q < 1$, alors la série $\sum q^k$ converge, d'où le résultat par le théorème 11.2.2 de comparaison : la série $\sum |u_k|$ converge.

Si $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq 1$, la suite $(|u_k|)$ est croissante : elle ne peut donc pas tendre vers 0 et la série diverge. ■

■ **Exemple 11.17** 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la **série exponentielle**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

En effet pour $u_k = \frac{x^k}{k!}$ on a

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{x^k}{k!} \right|} = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

La limite étant $\ell = 0 < 1$ alors par la règle du quotient de d'Alembert, la série est absolument convergente, donc convergente. Par définition la somme est $\exp(x)$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. $\sum_{k \geq 0} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}$ converge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{2k+1}$ tend vers $\frac{1}{2} < 1$.
3. $\sum_{k \geq 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ diverge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ tend vers $4 > 1$.



- Le théorème ne peut s'appliquer si certains u_k sont nuls, contrairement à la règle des racines de Cauchy que l'on verra après.
- Notez bien que le théorème ne permet pas toujours de conclure. Faites aussi bien attention que l'hypothèse est $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q < 1$, ce qui est plus fort que $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| < 1$.
- De même le corollaire ne permet pas de conclure lorsque $\frac{u_{k+1}}{u_k} \rightarrow 1$. Par exemple pour les séries $\sum u_k = \sum \frac{1}{k}$ et $\sum v_k = \sum \frac{1}{k^2}$ nous avons $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1$, de même que $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \rightarrow 1$. Cependant la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge alors que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Terminons par un exemple plus compliqué.

■ **Exemple 11.18** Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k \geq 0} \binom{k}{3} z^k$ soit absolument convergente.

Soit $u_k = \binom{k}{3} z^k$. Alors, pour $z \neq 0$,

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{\binom{k+1}{3} |z|^{k+1}}{\binom{k}{3} |z|^k} = \frac{(k+1)k(k-1)}{3!} |z| = \frac{k+1}{k-2} |z| \rightarrow |z| \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

Si $|z| < 1$ alors pour k assez grand $\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} < q < 1$ donc la série $\sum u_k$ est absolument convergente.

Si $|z| \geq 1$ alors $\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{k+1}{k-2} |z| \geq \frac{k+1}{k-2} > 1$ pour tout k . Donc la série $\sum u_k$ diverge. ■

11.4.3 Règle des racines de Cauchy

Théorème 11.4.4 — Règle des racines de Cauchy. Soit $\sum u_k$ une série de nombres réels ou complexes.

1. S'il existe une constante $0 < q < 1$ et un entier k_0 tels que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\sqrt[k]{|u_k|} \leq q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{converge.}$$

La série est même absolument convergente.

2. S'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\sqrt[k]{|u_k|} \geq 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{diverge.}$$

Le plus souvent vous l'appliquerez avec un terme général strictement positif.

Corollaire 11.4.5 — Règle des racines de Cauchy. Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs, telle que $\sqrt[k]{u_k}$ converge vers ℓ .

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_k$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_k$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure en général.

Dans la pratique, il faut savoir bien manipuler les racines k -ème :

$$\sqrt[k]{u_k} = (u_k)^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{1}{k} \ln u_k\right)$$

Démonstration. Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. Dans le premier cas du théorème, $\sqrt[k]{|u_k|} \leq q$ implique $|u_k| \leq q^k$. Comme $0 < q < 1$, alors la série $\sum q^k$ converge, d'où le résultat par le théorème 11.2.2 de comparaison.

Dans le second cas, $\sqrt[k]{|u_k|} \geq 1$, donc $|u_k| \geq 1$. Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Enfin pour le dernier point du corollaire, on pose $u_k = \frac{1}{k}$, $v_k = \frac{1}{k^2}$. On a $\sqrt[k]{u_k} \rightarrow 1$ de même que $\sqrt[k]{v_k} \rightarrow 1$. Mais $\sum u_k$ diverge alors que $\sum v_k$ converge. ■

■ **Exemple 11.19** 1. Par exemple,

$$\sum \left(\frac{2k+1}{3k+4} \right)^k \text{ converge,}$$

car $\sqrt[k]{u_k} = \frac{2k+1}{3k+4}$ tend vers $\frac{2}{3} < 1$.

2. Par contre

$$\sum \frac{2^k}{k^\alpha} \text{ diverge,}$$

quel que soit $\alpha > 0$. En effet,

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(\exp\left(\frac{1}{k} \ln k\right)\right)^\alpha} \rightarrow 2 > 1.$$

■

■ **Exemple 11.20** Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k \geq 1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$ soit absolument convergente.

Notons $u_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$. On a

$$\sqrt[k]{|u_k|} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k |z| \rightarrow e|z|.$$

Cette limite vérifie $e|z| < 1$ si et seulement si $|z| < \frac{1}{e}$.

- Si $|z| < \frac{1}{e}$ alors la série $\sum u_k$ est absolument convergente.
- Si $|z| > \frac{1}{e}$, on a pour k assez grand $\sqrt[k]{|u_k|} > 1$, donc la série $\sum u_k$ diverge.
- Si $|z| = \frac{1}{e}$ la règle des racines de Cauchy ne permet pas de conclure. On étudie le terme général à la main. On obtient :

$$|u_k| = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

Donc

$$\begin{aligned} \ln |u_k| &= k^2 \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) + k \ln \frac{1}{e} \\ &= k \left[k \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 \right] \\ &= k \left[k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) - 1 \right] \\ &= k \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $|u_k| \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Ainsi $\sum |u_k|$ diverge.

■

11.4.4 D'Alembert vs Cauchy

Cette section peut être passée lors d'une première lecture.

Nous allons comparer la règle du quotient de d'Alembert avec la règle des racines de Cauchy. Nous allons voir que la règle des racines de Cauchy est plus puissante que la règle du quotient de d'Alembert. Cependant dans la pratique la règle du quotient de d'Alembert reste la plus utilisée.

Proposition 11.4.6 Soit (u_k) une suite à termes strictement positifs.

$$\text{Si } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_k} = \ell .$$

Autrement dit, si on peut appliquer la règle du quotient de d'Alembert, alors on peut aussi appliquer la règle des racines de Cauchy.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\ell - \varepsilon < \frac{u_{k+1}}{u_k} < \ell + \varepsilon .$$

Par récurrence, on en déduit :

$$u_{k_0}(\ell - \varepsilon)^{k-k_0} \leq u_k \leq u_{k_0}(\ell + \varepsilon)^{k-k_0} .$$

Or :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_{k_0}(\ell - \varepsilon)^{k-k_0}} = \ell - \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{u_{k_0}(\ell + \varepsilon)^{k-k_0}} = \ell + \varepsilon .$$

Donc il existe $k_1 > k_0$ tel que, pour $k > k_1$,

$$\ell - 2\varepsilon < \sqrt[k]{u_k} < \ell + 2\varepsilon ,$$

d'où le résultat. ■

Terminons par un exemple où la règle des racines de Cauchy permet de conclure, mais pas la règle du quotient de d'Alembert.

■ **Exemple 11.21** Définissons la suite u_k par :

$$u_k = \begin{cases} \frac{2^n}{3^n} & \text{si } k = 2n \\ \frac{2^n}{3^{n+1}} & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

Le rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ vaut $\frac{1}{3}$ si k est pair, 2 si k est impair. La règle du quotient de d'Alembert ne s'applique donc pas. Pourtant, $\sqrt[k]{u_k}$ converge vers $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, donc la règle des racines de Cauchy s'applique et la série $\sum u_k$ converge. ■

11.4.5 Règle de Raabe-Duhamel

Cette section peut être passée lors d'une première lecture.

La règle du quotient de d'Alembert et la règle des racines de Cauchy ne s'appliquent pas aux séries de Riemann

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

car $\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \rightarrow 1$ et $\sqrt[k]{u_k} \rightarrow 1$.

Il nous faut raffiner la règle de d'Alembert pour pouvoir conclure. Cependant nous reviendrons sur la convergence des séries de Riemann par d'autres techniques.

Théorème 11.4.7 — Règle de Raabe-Duhamel. Soit (u_k) une suite de nombres réels (ou complexes) non nuls.

1. Si $\forall k \geq k_0$ on a $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq 1 - \frac{\beta}{k}$, avec $\beta > 1$, alors la série $\sum u_k$ est absolument convergente.
2. Si $\forall k \geq k_0$ on a $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq 1 - \frac{1}{k}$, alors la série $\sum u_k$ n'est pas absolument convergente.

Attention ! Il existe des séries convergentes, quoique $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq 1 - \frac{1}{k}$. Par le deuxième point une telle série ne peut pas être absolument convergente.

En effet, prenons $u_k = (-1)^k \frac{1}{k}$. Alors :

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Démonstration.

1. L'hypothèse implique $k|u_{k+1}| \leq k|u_k| - \beta|u_k|$ (pour tout $k \geq k_0$).

Ainsi

$$(\beta - 1)|u_k| \leq (k-1)|u_k| - k|u_{k+1}|.$$

Comme $\beta > 1$ alors l'inégalité ci-dessus implique $(k-1)|u_k| - k|u_{k+1}| > 0$ et ainsi $(k-1)|u_k| > k|u_{k+1}|$. La suite $(k|u_{k+1}|)_{k \geq k_0}$ est décroissante et minorée par 0 ; cette suite admet donc une limite. Ainsi la série télescopique $\sum [(k-1)|u_k| - k|u_{k+1}|]$ converge. Comme

$$(\beta - 1)|u_k| \leq (k-1)|u_k| - k|u_{k+1}|,$$

la série $\sum (\beta - 1)|u_k|$ converge et donc aussi $\sum |u_k|$.

2. L'hypothèse implique $k|u_{k+1}| \geq (k-1)|u_k| > 0$ (pour tout $k \geq k_0$). Donc la suite $(k|u_{k+1}|)_{k \geq k_0}$ est croissante, ainsi $k|u_{k+1}| \geq \varepsilon > 0$. Donc pour tout $k \geq k_0$, on a $|u_{k+1}| \geq \frac{\varepsilon}{k}$. Donc $\sum |u_k|$ diverge, car $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

■

Nous pouvons maintenant savoir quelles sont les séries de Riemann qui convergent.

Proposition 11.4.8 — Séries de Riemann. Soit $\alpha > 0$. Alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Supposons $\alpha > 1$. Définissons $\Delta(k) = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha}$. Montrons qu'il existe $\beta > 1$ et k_0 tels que

$$\Delta(k) \leq 1 - \frac{\beta}{k} \quad \forall k \geq k_0.$$

Choisissons β quelconque vérifiant $1 < \beta < \alpha$. Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} + \beta x$.

La fonction f est \mathcal{C}^∞ sur $[0, \infty[$ et $f(0) = 1$. Comme $f'(0) = \beta - \alpha < 0$, on voit que f est décroissante sur $[0, x_0]$ pour un certain x_0 avec $0 < x_0 < 1$. Ainsi $f(x) \leq 1$ sur $[0, x_0]$ ce qui entraîne que $\Delta(k) + \frac{\beta}{k} = f(\frac{1}{k}) \leq 1$ pour $k \geq k_0$ avec k_0 entier tel que $\frac{1}{k_0} \leq x_0$. Donc $\Delta(k) \leq 1 - \frac{\beta}{k}$ et on peut appliquer la règle de Raabe-Duhamel pour déduire que $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

Si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. Or la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge donc la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge aussi. ■

Exercice 11.4

1. Est-ce que les séries suivantes sont convergentes ? Absolument convergentes ?

$$\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k^3} e^{ik}}{k^2 + k} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}} \quad \sum_{k \geq 1} \frac{\sqrt{k}}{(-1)^k \ln k}$$

2. Étudier les séries dont voici le terme général, par la règle du quotient de d'Alembert ou des racines de Cauchy :

$$\begin{aligned} \frac{k^{100}}{k!} &\quad \frac{k!}{(2k)!} & \frac{\ln k}{2^k + 1} &\quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{k^k} \\ \left(\sin \frac{1}{k}\right)^k &\quad \left(\frac{7k-2}{3k+1}\right)^k & \frac{2^k}{e^k - 1} \end{aligned}$$

3. Appliquer la règle du quotient de d'Alembert pour $u_k = \frac{k!}{k^k}$. En déduire la limite de $\sqrt[k]{u_k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Étudier les séries dont voici le terme général en fonction du paramètre $\alpha > 0$:

$$\frac{k}{k^\alpha + 1} \quad \frac{\ln k}{k^\alpha} \quad \sqrt{k} \alpha^k \quad \frac{\alpha^k}{k^2} \quad \ln(1 + k^\alpha) \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}$$

11.5 Comparaison série/intégrale

Cette section fait la jonction entre les séries et les intégrales improches. C'est un lien essentiel entre deux objets mathématiques qui sont au final assez proches. Pour cette partie il faut connaître les intégrales improches $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

11.5.1 Théorème de comparaison série/intégrale

Théorème 11.5.1 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction décroissante. Alors la série $\sum_{k \geq 0} f(k)$ (dont le terme général est $u_k = f(k)$) et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

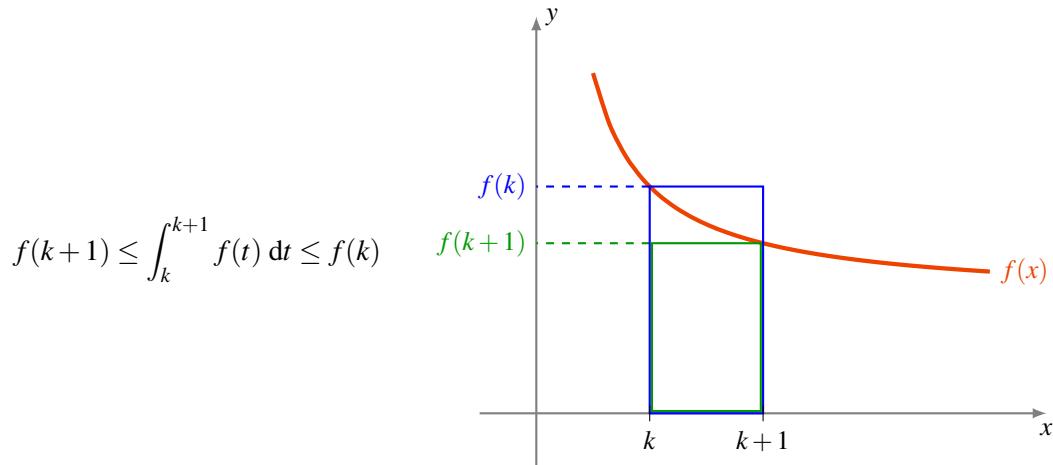
« De même nature » signifie que la série et l'intégrale du théorème sont soit convergentes en même temps, soit divergentes en même temps.

Attention ! Il est important que f soit positive et décroissante.

11.5.2 Preuve

Le plus simple est de bien comprendre le dessin et de refaire la démonstration chaque fois que l'on en a besoin.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme f est décroissante, pour $k \leq t \leq k+1$, on a $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$ (attention à l'ordre). En intégrant sur l'intervalle $[k, k+1]$ de longueur 1, on obtient :



Sur le dessin cette inégalité signifie que l'aire sous la courbe, entre les abscisses k et $k+1$, est comprise entre l'aire du rectangle vert de hauteur $f(k+1)$ et de base 1 et l'aire du rectangle bleu de hauteur $f(k)$ et de même base 1.

On somme ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Soit :

$$u_1 + \cdots + u_n \leq \int_0^n f(t) dt \leq u_0 + \cdots + u_{n-1}.$$

La série $\sum u_k$ converge et a pour somme S si et seulement si la suite des sommes partielles converge vers S . Si c'est le cas $\int_0^n f(t) dt$ est majorée par S , et comme $\int_0^x f(t) dt$ est une fonction croissante de x (par positivité de f), l'intégrale converge. Réciproquement, si l'intégrale converge, alors $\int_0^n f(t) dt$ est majorée, la suite des sommes partielles aussi, et la série converge. ■

11.5.3 Séries de Riemann

Le théorème de comparaison (théorème 11.2.2) et le théorème des équivalents (théorème 11.2.3) permettent de ramener l'étude des séries à termes positifs à un catalogue de séries dont la convergence est connue. Dans ce catalogue, on trouve les séries de Riemann et les séries de Bertrand.

Commençons par les **séries de Riemann** $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$, pour $\alpha > 0$ un réel.

Proposition 11.5.2 Si $\alpha > 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge

Si $0 < \alpha \leq 1$ alors

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

diverge

Démonstration. Dans le théorème 11.5.1, rien n'oblige à démarrer de 0 : pour $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq m} f(k)$ et l'intégrale impropre $\int_m^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Nous l'appliquons à $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Pour $\alpha > 0$, c'est une fonction décroissante et positive. On peut appliquer le théorème 11.5.1.

On sait que :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente, donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. ■

11.5.4 Séries de Bertrand

Une famille de séries plus sophistiquées sont les **séries de Bertrand** : $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ où $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 11.5.3 Soit la série de Bertrand

$$\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}.$$

Si $\alpha > 1$ alors elle converge. Si $0 < \alpha < 1$ alors elle diverge.

Si $\alpha = 1$ et $\begin{cases} \beta > 1 & \text{alors elle converge.} \\ \beta \leq 1 & \text{alors elle diverge.} \end{cases}$

Démonstration. La démonstration est la même que pour les séries de Riemann. Par exemple pour le cas $\alpha = 1$:

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} ((\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

■

11.5.5 Applications

Nous retrouvons en particulier le fait que :

1. $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (prendre $\alpha = 2$),
2. alors que $\sum \frac{1}{k}$ diverge (prendre $\alpha = 1$).

Terminons avec deux exemples d'utilisation des équivalents avec les séries de Riemann et de Bertrand.

■ **Exemple 11.22** 1. La série

$$\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}} \right)$$

est-elle convergente ?

Comme

$$\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge (car $\frac{3}{2} > 1$) alors par le théorème des équivalents la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}} \right)$ converge également.

2. La série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1 - \cos \left(\frac{1}{k \sqrt{\ln k}} \right)}{\sin \left(\frac{1}{k} \right)}$$

est-elle convergente ?

On cherche un équivalent du terme général (qui est positif) :

$$\frac{1 - \cos \left(\frac{1}{k \sqrt{\ln k}} \right)}{\sin \left(\frac{1}{k} \right)} \sim \frac{1}{2k \ln k}$$

Or la série de Bertrand $\sum \frac{1}{k \ln k}$ diverge, donc notre série diverge aussi.

■

Exercice 11.5 1. Notons $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique. Et soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$.

(a) Donner un encadrement simple de $\int_k^{k+1} f(t) dt$.

(b) Faire la somme de ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, puis k variant de 1 à n , pour obtenir :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

(c) En déduire $H_n \sim \ln n$.

(d) La série harmonique converge-t-elle ?

2. Reprendre le schéma d'étude précédent pour montrer que, pour la série de Riemann et $0 \leq \alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Reprendre le schéma d'étude précédent, mais cette fois pour le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, afin de montrer que

$$R_n \sim \frac{1}{n}.$$

Calculer R_{100} . Quelle approximation cela fournit-il de la somme de la série ?

4. Étudier la convergence des séries suivantes en fonction des paramètres $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum \sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha} \quad \sum \sin\left(\frac{k^\alpha}{\ln k}\right) \quad \sum \ln\left(1 + \frac{1}{k(\ln k)^\beta}\right)$$

■

11.6 Produits de deux séries

Cette section consacrée au produit de deux séries peut être passée lors d'une première lecture.

11.6.1 Motivation

Pour un produit de sommes, il y a plusieurs façons d'ordonner les termes une fois le produit développé. Dans le cas d'une somme finie l'ordre des termes n'a pas d'importance, mais dans le cas d'une série c'est essentiel. On choisit de regrouper les termes en fonction des indices, de la façon suivante :

$$(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme des indices}=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme des indices}=1} + \underbrace{a_1 b_1}_{\text{somme des indices}=2}$$

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) &= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme des indices}=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme des indices}=1} \\ &\quad + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{\text{somme des indices}=2} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{\text{somme des indices}=3} + \underbrace{a_2 b_2}_{\text{somme des indices}=4} \end{aligned}$$

Plus généralement, voici différentes façons d'écrire un produit de deux sommes :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i\right) \left(\sum_{j=0}^n b_j\right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j = \sum_{0 \leq k \leq 2n} \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{0 \leq k \leq 2n} \sum_{0 \leq i \leq k} a_i b_{k-i}.$$

Les deux dernières formes correspondent à notre décomposition en fonction de la somme des indices.

11.6.2 Le produit de Cauchy

Définition 11.6.1 Soient $\sum_{i \geq 0} a_i$ et $\sum_{j \geq 0} b_j$ deux séries. On appelle **série produit** ou **produit de Cauchy** la série $\sum_{k \geq 0} c_k$ où

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Une autre façon d'écrire le coefficient c_k est :

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Théorème 11.6.1 Si les séries $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ de nombres réels (ou complexes) sont absolu-

ment convergentes, alors la série produit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right)$$

est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

Démonstration. Notations.

- $S_n = a_0 + \cdots + a_n$, $S_n \rightarrow S$,
- $T_n = b_0 + \cdots + b_n$, $T_n \rightarrow T$,
- $P_n = c_0 + \cdots + c_n$.

On doit montrer que $P_n \rightarrow S \cdot T$.

Premier cas. $a_k \geq 0, b_k \geq 0 (\forall k)$.

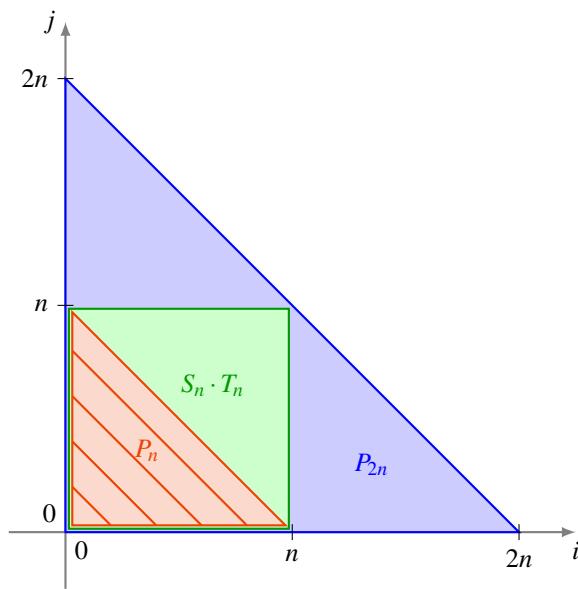
Dans ce cas $c_k \geq 0$ et on a

$$P_n \leq S_n \cdot T_n \leq S \cdot T.$$

La suite (P_n) est croissante et majorée, donc convergente : $P_n \rightarrow P$.

Or on a aussi

$$P_n \leq S_n \cdot T_n \leq P_{2n}.$$



Le dessin représente le point correspondant aux indices (i, j) . Le triangle rouge représente P_n (avec le regroupement des termes correspondant aux diagonales), le carré vert correspond au produit $S_n \cdot T_n$, le triangle bleu représente P_{2n} . Le fait que le carré soit compris entre les deux triangles traduit la double inégalité $P_n \leq S_n \cdot T_n \leq P_{2n}$.

Donc en faisant $n \rightarrow +\infty$, on a : $P \leq S \cdot T \leq P$. Donc $P_n \rightarrow S \cdot T$.

Second cas. $a_k \in \mathbb{C}, b_k \in \mathbb{C} (\forall k)$.

On pose :

- $S'_n = |a_0| + \dots + |a_n|, S'_n \rightarrow S'$,
- $T'_n = |b_0| + \dots + |b_n|, T'_n \rightarrow T'$,
- $P'_n = c'_0 + \dots + c'_n$ où $c'_k = \sum_{i=0}^k |a_i b_{k-i}|$.

D'après le premier cas, $P'_n \rightarrow P'$ avec $P' = S' \cdot T'$. Ainsi

$$|S_n \cdot T_n - P_n| = \left| \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j > n}} a_i b_j \right| \leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j > n}} |a_i b_j| = S'_n \cdot T'_n - P'_n \rightarrow S' \cdot T' - P' = 0.$$

Ainsi $P_n = S_n \cdot T_n - (S_n \cdot T_n - P_n) \rightarrow S \cdot T - 0 = S \cdot T$.

Donc la série $\sum c_k$ est convergente et sa somme est $S \cdot T$. De plus, $|c_k| \leq c'_k$. La convergence de $\sum c'_k$ implique donc la convergence absolue de $\sum c_k$. ■

11.6.3 Exemple

■ **Exemple 11.23** Soit $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ une série absolument convergente et soit $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ la série définie par $b_j = \frac{1}{2^j}$. La série $\sum b_j$ est absolument convergente.

Notons

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^k a_i \times \frac{1}{2^{k-i}}.$$

Alors la série $\sum c_k$ converge absolument et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) = 2 \sum_{i=0}^{+\infty} a_i.$$

■

11.6.4 Contre-exemple

Si les séries $\sum a_i$ et $\sum b_j$ ne sont pas absolument convergentes, mais seulement convergentes, alors la série de Cauchy peut être divergente.

■ **Exemple 11.24** Soient $a_i = b_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}, i \geq 0$. Alors $\sum a_i$ et $\sum b_j$ sont convergentes par le critère de Leibniz, mais ne sont pas absolument convergentes. On a

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{k-i+1}} = (-1)^k \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}}$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)(k-x+1) = -x^2 + kx + (k+1) \leq \frac{(k+2)^2}{4}$ (valeur au sommet de la

parabole). D'où $\sqrt{(i+1)(k-i+1)} \leq \frac{(k+2)}{2}$. Ainsi

$$|c_k| = \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}} \geq \sum_{i=0}^k \frac{2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} \rightarrow 2.$$

Donc le terme général c_k ne peut pas tendre 0, donc la série $\sum c_k$ diverge. ■

Exercice 11.6

1. Trouver une expression simple du terme général de la série produit

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^j}.$$

Calculer la somme de cette série produit.

2. On admet ici que, pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge et vaut $\exp(x)$. Que vaut la série produit associée à $\exp(a) \times \exp(b)$? (Vous utiliserez la formule du binôme de Newton.) ■

11.7 Permutation des termes

Cette section consacrée à la permutation de termes peut être passée lors d'une première lecture.

Théorème 11.7.1 Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ une série absolument convergente et soit S sa somme. Soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection de l'ensemble des indices. Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = S.$$

Remarque : la condition de convergence absolue est indispensable. Il se trouve que, pour une série convergente, mais pas absolument convergente, on peut permuter les termes pour obtenir n'importe quelle valeur !

Comme exemple de permutation, on peut réordonner les termes $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ en prenant deux termes de rang pair puis un terme de rang impair, ce qui donne :

$$u_0, u_2, u_1, u_4, u_6, u_3, u_8, u_{10}, u_5, \dots$$

Par contre il n'est pas autorisé de regrouper tous les termes pairs d'abord et les termes impairs ensuite :

$$u_0, u_2, u_4, \dots, u_{2k}, \dots, u_1, u_3, \dots, u_{2k+1}, \dots$$

Démonstration. Par hypothèse $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ converge. D'après le critère de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_k| < \varepsilon.$$

Soit $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Fixons $\varepsilon > 0$. Choisissons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1, 2, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(k_0)\}$. Pour $n \geq k_0$ on a :

$$\left| S - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right| \leq \left| S - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right|$$

Pour le premier terme on a

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon.$$

Pour le second terme :

$$\left| \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| = \left| \sum_{k \in \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \dots, n_0\}} u_k \right| \leq \sum_{k \in \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \dots, n_0\}} |u_k| \leq \sum_{k > n_0} |u_k| = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon.$$

Ce qui prouve $|S - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)}| \leq 2\varepsilon$ et donne le résultat. ■

Exercice 11.7 Le but de cet exercice est de comprendre que si la série n'est pas absolument convergente, des phénomènes étranges apparaissent. Souvenez-vous que la série harmonique alternée converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Notons S sa somme. (En fait $S = \ln 2$.)

Si on regroupe les termes de cette série par paquets de 3, et si l'on simplifie, alors on trouve la moitié de la somme !

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

Surprenant, non ? ■

11.8 Sommation d'Abel

Cette section consacrée à la sommation d'Abel peut être passée lors d'une première lecture.

11.8.1 Théorème de sommation d'Abel

Le théorème de sommation d'Abel s'applique à certaines séries convergentes mais qui ne sont pas absolument convergentes. C'est un théorème qui s'applique aux séries de la forme $\sum a_k b_k$ et est plus fort que le critère de Leibniz pour les séries alternées, mais il est aussi plus difficile à mettre en œuvre.

Théorème 11.8.1 — Théorème de sommation d'Abel. Soient $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ deux suites telles que :

1. La suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0.
2. Les sommes partielles de la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ sont bornées :

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_0 + \cdots + b_n| \leq M.$$

Alors la série $\sum_{k \geq 0} a_k b_k$ converge.

Le critère de Leibniz concernant les séries alternées est un cas spécial : en effet, si $b_k = (-1)^k$ alors $|\sum_{k=0}^n b_k| \leq 1$. Donc si (a_k) est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0, alors $\sum a_k b_k$ converge.

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'effectuer un changement dans la sommation, qui s'apparente à une intégration par parties. Pour tout $n \geq 0$, posons $B_n = b_0 + \cdots + b_n$. Par hypothèse, la suite (B_n) est bornée. Nous écrivons les sommes partielles de la série $\sum a_k b_k$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\ &= a_0 B_0 + a_1 (B_1 - B_0) + \cdots + a_{n-1} (B_{n-1} - B_{n-2}) + a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0 (a_0 - a_1) + B_1 (a_1 - a_2) + \cdots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + B_n a_n. \end{aligned}$$

Comme (B_n) est bornée, et a_n tend vers 0, le dernier terme $B_n a_n$ tend vers 0. Nous allons montrer que la série $\sum B_k (a_k - a_{k+1})$ est absolument convergente. En effet,

$$|B_k (a_k - a_{k+1})| = |B_k| (a_k - a_{k+1}) \leq M (a_k - a_{k+1}),$$

car la suite (a_k) est une suite de réels positifs, décroissante, et $|B_k|$ est borné par M . Or

$$M(a_0 - a_1) + \cdots + M(a_n - a_{n+1}) = M(a_0 - a_{n+1}),$$

qui tend vers $M a_0$ puisque (a_k) tend vers 0. La série $\sum M(a_k - a_{k+1})$ converge, donc la série $\sum |B_k (a_k - a_{k+1})|$ aussi, par le théorème 11.2.2 de comparaison. Donc la série $\sum B_k (a_k - a_{k+1})$ est convergente, donc la suite (S_n) est convergente, ce qui prouve que la série $\sum a_k b_k$ converge. ■

11.8.2 Séries de Fourier

Le cas d'application le plus fréquent est celui où $b_k = e^{ik\theta}$.

Corollaire 11.8.2 Soit θ un réel, tel que $\theta \neq 2n\pi$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$). Soit (a_k) une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0. Alors les **séries de Fourier** :

$$\sum a_k e^{ik\theta} \quad \sum a_k \cos(k\theta) \quad \sum a_k \sin(k\theta) \quad \text{convergent}$$

Démonstration. Pour appliquer le théorème de sommation d'Abel (théorème 11.8.1) avec $b_k = e^{ik\theta}$, nous devons vérifier que les sommes partielles de la suite $(e^{ik\theta})$ sont bornées. Or $e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k$, et par hypothèse $e^{i\theta}$ est différent de 1. On a donc la somme d'une suite géométrique :

$$|1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{ik\theta}| = \left| \frac{1 - e^{i(k+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \left| \frac{2}{1 - e^{i\theta}} \right|.$$

D'où le résultat.

Comme $\sum a_k e^{ik\theta} = \sum a_k \cos(k\theta) + i \sum a_k \sin(k\theta)$, la convergence des séries $\sum a_k \cos(k\theta)$ et $\sum a_k \sin(k\theta)$ est une conséquence directe de la proposition 11.1.6. ■

Exercice 11.8 1. Justifier que les sommes $\sum_{k=0}^n (-1)^k$, $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ sont bornées, pour $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.

2. Montrer que les séries suivantes convergent par le critère de sommation d'Abel :

$$\sum \frac{(-1)^k \cos k}{k} \quad \sum \frac{\sqrt{k+1}}{k} \sin(k\theta) \quad \frac{1}{e^{ik\theta} \ln k}$$

pour $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. ■

11.9 Exercices

Exercise 11.9 Soient, pour $n > 0$, $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1. Etudier la série de terme général w_n où, pour $n \geq 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n , que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.

Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.

Exercise 11.10 Etudier la série de terme général

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \text{ où } a > 0, b > 0.$$

Indication : Chercher un équivalent suivant les valeurs de b .

Exercise 11.11 Etudier les séries de termes généraux

1.

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}\right) \text{ avec } a > 0$$

2.

$$v_n = e^{-\sqrt{n}}$$

3.

$$w_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Exercise 11.12 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \text{ où } \alpha > 0, \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Etudier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer que (v_n) a une limite finie. Application : Etudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!} \sin 1 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 11.13 Déterminer la nature des séries de terme général :

$$1. \frac{n!}{n^n} \quad 2. (\operatorname{ch} \sqrt{\ln n})^{-2} \quad 3. n^{-(1+(1/n))}$$

$$4. \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad 5. \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \quad 6. n^{\ln n} e^{-\sqrt{n}}$$

Exercice 11.14 Etudier les séries de termes généraux

$$1. u_n = \sqrt{n!} \sin x \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cdots \sin \frac{x}{\sqrt{n}} \text{ avec } x > 0.$$

$$2. v_n = e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^{n^3}$$

Exercice 11.15 Etudier les séries de termes généraux

$$1. u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$

$$2. v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$

$$3. w_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \text{ où } \alpha > 0$$

Indication : Des calculs de D.L. peuvent étre fructueux ...

Exercice 11.16 En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories

- GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum |u_n|$ diverge.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right); \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right); \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1000}{3^n + 1}; \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n}); \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n) \sin(\frac{\pi}{n}); \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \frac{1}{3^{n-k}} \right).$$

Exercice 11.17 Déterminer, en fonction des paramètres réels α, β , la nature des séries de termes généraux ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} & (-1)^n n^\alpha, \quad n^\beta (1 - (-1)^n n^\alpha), \\ & \frac{(-1)^n}{n - \ln n}, \quad \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{n}} - 1\right), \\ & \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right), \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \\ & \sin\left(2\pi \frac{n!}{e}\right) \quad (\text{on pourra utiliser que } : 1/e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}). \end{aligned}$$

Exercice 11.18 Étudier, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}.$$

Exercice 11.19 Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1. $\sum_{n \geq 0} (n+1) 3^{-n}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$
3. $\sum_{n \geq 3} \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$

Exercice 11.20 Soit (u_n) une suite réelle positive et $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$. Comparer la nature des séries $(\sum u_n)$ et $(\sum \frac{u_n}{S_n})$.

Exercice 11.21 Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3} .

Exercice 11.22 1. On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3-x}$.
3. Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3-k}$ et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.
4. L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3-x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

Exercice 11.23 Pour tout entier $n > 0$, soit $u(n) = (-1)^n/n$. Soit σ une permutation des entiers > 0 et soit τ la permutation réciproque. On suppose de plus que

(1) pour tout entier $p > 0$ on a $\tau(2p-1) < \tau(2p+1)$ et $\tau(2p) < \tau(2p+2)$.

(2) Notant par $p(n)$ le nombre d'entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ et $\sigma(k)$ est pair, alors $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/n$ existe et est dans $]0, 1[$.

1. Dans le cas particulier où σ est définie par

$$\sigma(3p) = 2p, \sigma(3p+1) = 4p+1, \sigma(3p+2) = 4p+3$$

pour tout entier $p > 0$, calculer explicitement τ , et vérifier que σ satisfait (1) et (2), en calculant $p(n)$ pour tout n ainsi que α .

2. On note $f(n) = \sum_{k=1}^n 1/k - \log n$, et on rappelle le fait, vu en cours, que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \gamma$ existe (Constante d'Euler). On revient au cas général pour σ , on considère la série de terme général $v_n = u(\sigma(n))$ et on note $s_n = v_1 + \dots + v_n$.
3. Montrer par récurrence que $s_n = \sum_{k=1}^{p(n)} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n-p(n)} \frac{1}{2k-1}$ et que

$$s_n = \frac{1}{2}f(p(n)) + \frac{1}{2}f(n-p(n)) - f(2n-2p(n)) + \frac{1}{2} \log \frac{p(n)}{n-p(n)} - \log 2.$$

En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converge et calculer sa somme en fonction de α .

Exercice 11.24 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

12. Fonctions Holomorphes

12.1 Rappels

On identifiera \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 .

Définition 12.1.1 Un disque ouvert (resp. fermé) de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble :

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad (\text{resp. } \overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}).$$

Définition 12.1.2 Soit U une partie non vide de \mathbb{C} . On dit que U est un **ouvert** de \mathbb{C} si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } D(a, r) \subset U.$$

■ Exemple 12.1 .

1. Un disque ouvert est ouvert.
2. Un disque fermé n'est pas ouvert.

12.2 Notions de limites

Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $z_0 \in U$. Soit

$$\begin{array}{ccc} f: & U & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto f(z), \end{array}$$

une application.

Définition 12.2.1 On suppose f définie sur U sauf peut-être en z_0 . On dit que f tend vers $l \in \mathbb{C}$ quand z tend vers z_0 et on écrit

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } 0 < |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$



Tous les théorèmes généraux sur les limites sont applicables (Somme, Produit, unicité de la limite, ...).

12.3 Continuité

Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $z_0 \in U$. Soit f définie sur U (même en z_0). On dit que f est continue en z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Définition 12.3.1 On dit que f est **continue** sur un ouvert U si elle est continue en tout point de U .

12.4 Dérivabilité

Soit f définie sur un ouvert U contenant z_0 . On dit que f **dérivable** en z_0 si :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = l \text{ (existe).}$$

l est noté $f'(z)$.

Définition 12.4.1 On dit que f est **holomorphe** sur U si f est dérivable en tout point de U .

12.5 Exemples de fonctions holomorphes

■ **Exemple 12.2** Toute fonction constante est holomorphe et sa dérivée est nulle

■ **Exemple 12.3** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f(z) = z^n$ est holomorphe sur \mathbb{C} et

$$f'(z) = nz^{n-1}$$

En effet : pour $z \neq z_0$

$$H(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$$

On utilisera la formule :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

Donc

$$H(z) = z^{n-1} + z_0z^{n-2} + z_0^2z^{n-3} + \cdots + z_0^{n-2}z + z_0^{n-1}.$$

n termes qui tend chacun vers z_0^{n-1} d'où

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} H(z) = nz_0^{n-1}.$$

■

■ **Exemple 12.4 — séries entières.** .

Rappels :

1. Une **série entière** est de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.
2. **Rayon de convergence** : 3 cas peuvent se produire :
 - (a) La série ne converge que pour $z = 0$. On dit que $R = 0$
 - (b) La série converge $\forall z \in \mathbb{C}$. On dit que $R = +\infty$.
 - (c) Il existe R ($0 < R < +\infty$) tel que :
 - i. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge pour $|z| < R$.
 - ii. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge pour $|z| > R$.

Ce nombre R est alors **unique** et s'appelle le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

 Le disque de convergence est l'ensemble :

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

Proposition 12.5.1 La somme $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ d'une série entière est holomorphe sur son disque de convergence et :

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \forall z \in D.$$

- $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est holomorphe sur \mathbb{C} et $(e^z)' = e^z$
- $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\sin(z)$ et $\cos(z)$ sont holomorphes sur \mathbb{C} et

$$(\sin(z))' = \cos(z) \quad \text{et} \quad (\cos(z))' = -\sin(z).$$

■

12.6 Propriétés générales

- Soient f et g holomorphes sur U , alors $f + g$ et fg sont holomorphes sur U et

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (fg)' = f'g + fg'$$

- Soient f holomorphe sur U , g holomorphe sur V avec $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est holomorphe sur U et :

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

- Si f et g sont holomorphes sur U avec $g(z) \neq 0, \forall z \in U$ alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe sur U et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

12.7 Formules de Cauchy

Soit U un ouvert de \mathbb{C} (ou \mathbb{R}^2)

$$\begin{array}{ccc} f : & U & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z = x + iy & \longmapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \end{array}$$

P est la partie réelle de f et Q sa partie imaginaire.

Théorème 12.7.1 f est holomorphe sur U si et seulement si P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1(U)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x}P(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}P(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y), \quad \text{sur } U$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial}{\partial x}P(x, y) + i\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) \\ f'(z) &= \frac{\partial}{\partial x}P(x, y) - i\frac{\partial}{\partial y}P(x, y) \end{aligned}$$

Conséquence :

$$f(z) = \bar{z}$$

n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} .

$$P(x, y) = x \quad \text{et} \quad Q(x, y) = -y$$

12.8 Harmonicité

Définition 12.8.1 Soit $P : U \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U . On dit que P est harmonique si :

$$\Delta P(x, y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Théorème 12.8.1 Soit $f : U : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$,

$$f(z) = f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

1. Si f est holomorphe sur U , alors P et Q sont harmoniques sur U .
2. Réciproquement : Si P est une fonction harmonique sur U (Simplement connexe), alors il

existe une fonction $Q(x, y)$ définie sur U telle que :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

soit holomorphe sur U . (On dira que donc que toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe).

■ **Exemple 12.5**

$$P(x, y) = xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = y = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \implies Q(x, y) = \frac{y}{2} + h(x),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -h'(x) = x \implies h(x) = -\frac{x^2}{2} + K, (K \in \mathbb{C}).$$

Alors

$$Q(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + K$$

Donc,

$$f(z) = xy + i \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right) + K$$

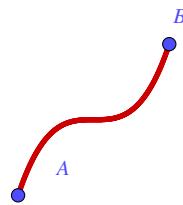
Ainsi

$$f(z) = -i \frac{z^2}{2}.$$

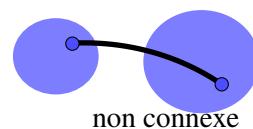
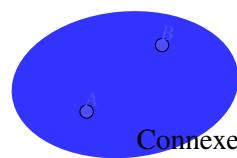
■

12.9 Généralisation

Définition 12.9.1 Un **chemin** est une application $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.



Définition 12.9.2 Un ouvert U est dit **connexe** si deux points quelconques de U peuvent être joints par un chemin continu dans U .



Définition 12.9.3 Un ouvert est dit simplement connexe s'il est connexe (sans trous).

Théorème 12.9.1 Soit U un ouvert simplement connexe et $P : U \mapsto \mathbb{R}$ harmonique sur U . Alors il existe une fonction Q sur U telle que

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

soit holomorphe sur U .