Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2016-2017

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 5

Calcul différentiel

I. Dérivées directionnelles et classe $\mathcal{C}^1$:

Exercice 1. Étudier l'existence de la dérivée de la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy^2$ suivant le vecteur $v = (1, -2)$ au point $a = (2, 1)$. Déterminer sa valeur si elle existe.

Exercice 2. Soit $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $G(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Justifier l'existence et calculer $\text{div}(G)$, $\text{rot}(G)$ et $\text{grad} \circ \text{div}(G)$.

Exercice 3. Justifier que les fonctions de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer leur matrices Jacobiennes en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) :

$$f : (x, y) \longmapsto e^{xy}(x + y), \quad g : (x, y, z) \longmapsto xy + yz + zx, \quad h : (x, y) \longmapsto (y \sin x, \cos x)$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 5. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 3 + \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9}$.

1. Justifier l'existence et donner le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(-4, 3)$.
2. Donner une valeur approchée de $f(-4.01, 3.01)$.

Exercice 7. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{y} + \sqrt{x})$. Déterminer l'ensemble des points où

1. f est continue,
2. f admet des dérivées partielles,
3. f est de classe C^1,
4. f admet des dérivées directionnelles.

II. Fonctions composées

Exercice 8. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $g(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$.

1. Expliciter $h = f \circ g$.
2. Justifier que les fonctions f, g et h sont de classe C^1 et écrire leurs matrices Jacobiennes (en un point de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement).
3. Vérifier l'égalité $J_h(x,y,z) = J_f(g(x,y,z)) \times J_g(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Écrire le développement limité de f, g et h à l'ordre 1 à l'origine.

Exercice 9. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[\setminus\{\pm\pi/2, \pi\}$. Notons $g : (r,\theta) \in]0; +\infty[\times(]0; 2\pi[\setminus\{\pm\pi/2,\pi\}) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Justifier l'existence et donner l'expression de $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice 10. Soit $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ (une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1,2)$, et $\gamma'(0) = (3,4)$. Justifier la dérivabilité de $f \circ \gamma$ et trouver la valeur de $(f \circ \gamma)'(0)$.

Exercice 11. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Calculer pour $(x,y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ la quantité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en justifiant son existence.

III. $\mathcal{C}^1$-difféomorphimes :

Exercice 12. Soit $k \in \mathbb{R}^\star$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x,y) = (x, x+ky)$. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 13. Soit $k \in \mathbb{R}^\star$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions du système (S) :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, & k\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, & f(0,y) & = & \sin y \end{cases}$$

Pour cela, on substitue à cette relation une relation plus simple portant sur une application F, déduite de f par le changement de variable φ de l'exercice 12. Autrement dit, on considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f = F \circ \varphi$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de celles de F.

3. Vérifier que f est solution de (S) si et seulement si F vérifie (S') :

$$\begin{cases} \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, & \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0 \\ \forall v \in \mathbb{R}, & F(0,v) = \sin\left(\dfrac{v}{k}\right) \end{cases}$$

4. Déterminer les solutions de (S').

5. Conclure.

Exercice 14. Soient $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0,\ v > 0\}$ et l'application $\varphi : D \longrightarrow D$ définie par $\varphi(u,v) = (\sqrt[3]{uv}, v)$.

1. Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de D dans D.
3. À l'aide du changement de variables $(x,y) = \varphi(u,v)$, résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in D,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4\frac{y^2}{x^2},$$

d'inconnue $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image $f(\mathbb{R}^3)$, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

IV. Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent à l'origine et les calculer.
5. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(0,0)$?