Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе № 2 по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Хамзина Р. Р.

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы)

Преподаватели Власов П. А.

Москва — 2022 г.

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания $\mathrm{M}X$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания $\mathrm{M}X$;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой зависит от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ неизвестных параметров. Будем считать, что $r = 1$, т. е. $\vec{\theta} = (\theta_1) = (\theta)$.

Опр. Интервальной оценкой параметра θ уровня γ (γ-интервальной оценкой) называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma, \gamma \in (0; 1). \tag{2.1}$$

Опр. γ-доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценкой уровня γ для этого параметра, т.е. интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $N(\mu, \sigma^2)$ — общий вид закона распределения генеральной совокупности X. μ, σ^2 — неизвестны.

Границы γ-доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{2.2}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{2.3}$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$; $S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$; $t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы; n — объем выборки.

Границы γ-доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \tag{2.4}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}, \tag{2.5}$$

где n — объем выборки; $S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$; $h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$, $h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения $\chi^2(n-1)$.

3 Практическая часть

3.1 Текст программы

```
function lab_02
    X = [14.90,14.40,13.56,15.55,13.97,16.33,14.37,13.46,15.51,14.69,...
         13.41,14.24,15.65,14.54,13.55,13.15,14.32,15.04,13.27,14.60,...
         13.83,13.93,14.11,14.15,15.48,15.96,14.46,13.87,13.67,15.30,...
         13.95,16.08,18.25,14.93,15.37,14.38,15.56,13.92,14.23,12.80,...
         13.16,13.89,14.24,13.90,12.82,13.20,13.89,13.50,13.44,16.13,...
         14.68,15.27,13.35,13.62,16.16,16.46,13.83,14.13,15.68,15.22,...
         12.59,12.94,13.09,16.54,14.61,14.63,14.17,13.34,16.74,16.30,...
         13.74,15.02,14.96,15.87,16.03,12.87,14.32,14.48,14.57,14.43,...
         12.61,14.52,15.29,12.07,14.58,11.74,14.97,14.31,12.94,12.82,...
         14.13,14.48,12.25,14.39,15.08,12.87,14.25,15.12,15.35,12.27,...
         14.43,13.85,13.16,16.77,14.47,14.89,14.95,14.55,12.80,15.26,...
         13.32,14.92,13.44,13.48,12.81,15.01,13.19,14.68,14.44,14.89];
    n = length(X);

    mu = sum(X) / n;
    S2 = sum((X-mu).^2) / (n - 1);
    fprintf("Выборочное среднее = %.4f\n", mu);
    fprintf("Исправленная выборочная дисперсия = %.4f\n", S2);

    gamma = 0.9;
    mu_bottom = get_mu_bottom(gamma, n, mu, S2);
    mu_top = get_mu_top(gamma, n, mu, S2);
    fprintf("\n%.1f-доверительный интервал для математического ожидания:
      (%.4f, %.4f)\n", gamma, mu_bottom, mu_top);

    S2_bottom = get_S2_bottom(gamma, n, S2);
    S2_top = get_S2_top(gamma, n, S2);
    fprintf("\n%.1f-доверительный интервал для дисперсии: (%.4f,
      %.4f)\n", gamma, S2_bottom, S2_top);

    mu_arr = zeros(1, n);
    S2_arr = zeros(1, n);
    mu_bottom_arr = zeros(1, n);
    mu_top_arr = zeros(1, n);
    S2_bottom_arr = zeros(1, n);
    S2_top_arr = zeros(1, n);

    for i = 1 : n
      mu_arr(i) = sum(X(1:i)) / i;

      if i == 1
```

```
            S2_arr(i) = 0;
        else
            S2_arr(i) = sum((X(1:i)-mu_arr(i)).^2) / (i - 1);
        end

        mu_bottom_arr(i) = get_mu_bottom(gamma, i, mu_arr(i), S2_arr(i));
        mu_top_arr(i) = get_mu_top(gamma, i, mu_arr(i), S2_arr(i));

        S2_bottom_arr(i) = get_S2_bottom(gamma, i, S2_arr(i));
        S2_top_arr(i) = get_S2_top(gamma, i, S2_arr(i));
    end

    clf;
    plot(1:n, zeros(1, n) + mu, "k");
    hold on;
    plot(1:n, mu_arr, "r");
    plot(1:n, mu_bottom_arr, "g");
    plot(1:n, mu_top_arr, "b");
    xlabel("n");
    ylabel("y");
    l = legend('y = \mu^{\^}(x_N)', 'y = \mu^{\^}(x_n)', 'y = \mu_{bottom}(x_n)', 'y = \mu_{top}(x_n)');
    set(l, "interpreter", "tex");
    grid on;
    figure;
    plot(1:n, zeros(1, n) + S2, "k");
    hold on;
    plot(1:n, S2_arr, "r");
    plot(1:n, S2_bottom_arr, "g");
    plot(1:n, S2_top_arr, "b");
    xlabel("n");
    ylabel("z");
    l = legend('z = S^2(x_N)', 'z = S^2(x_n)', 'z = \sigma^2_{bottom}(x_n)', 'z = \sigma^2_{top}(x_n)');
    set(l, "interpreter", "tex");
    grid on;
endfunction

function mu_bottom = get_mu_bottom(gamma, n, mu, S2)
    t = tinv((1 + gamma)/2, n - 1);
    mu_bottom = mu - sqrt(S2) * t / sqrt(n);
end

function mu_top = get_mu_top(gamma, n, mu, S2)
    t = tinv((1 + gamma)/2, n - 1);
    mu_top = mu + sqrt(S2) * t / sqrt(n);
end
```

```
function S2_bottom = get_S2_bottom(gamma, n, S2)
    h_bottom = chi2inv((1 + gamma)/2, n - 1);
    S2_bottom = (n - 1) * S2 / h_bottom;
end

function S2_top = get_S2_top(gamma, n, S2)
    h_top = chi2inv((1 - gamma)/2, n - 1);
    S2_top = (n - 1) * S2 / h_top;
end
```

3.2 Результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта

```
Выборочное среднее = 14.3492
Исправленная выборочная дисперсия = 1.2776

0.9-доверительный интервал для математического ожидания:
(14.1781, 14.5202)

0.9-доверительный интервал для дисперсии: (1.0452, 1.6036)
```

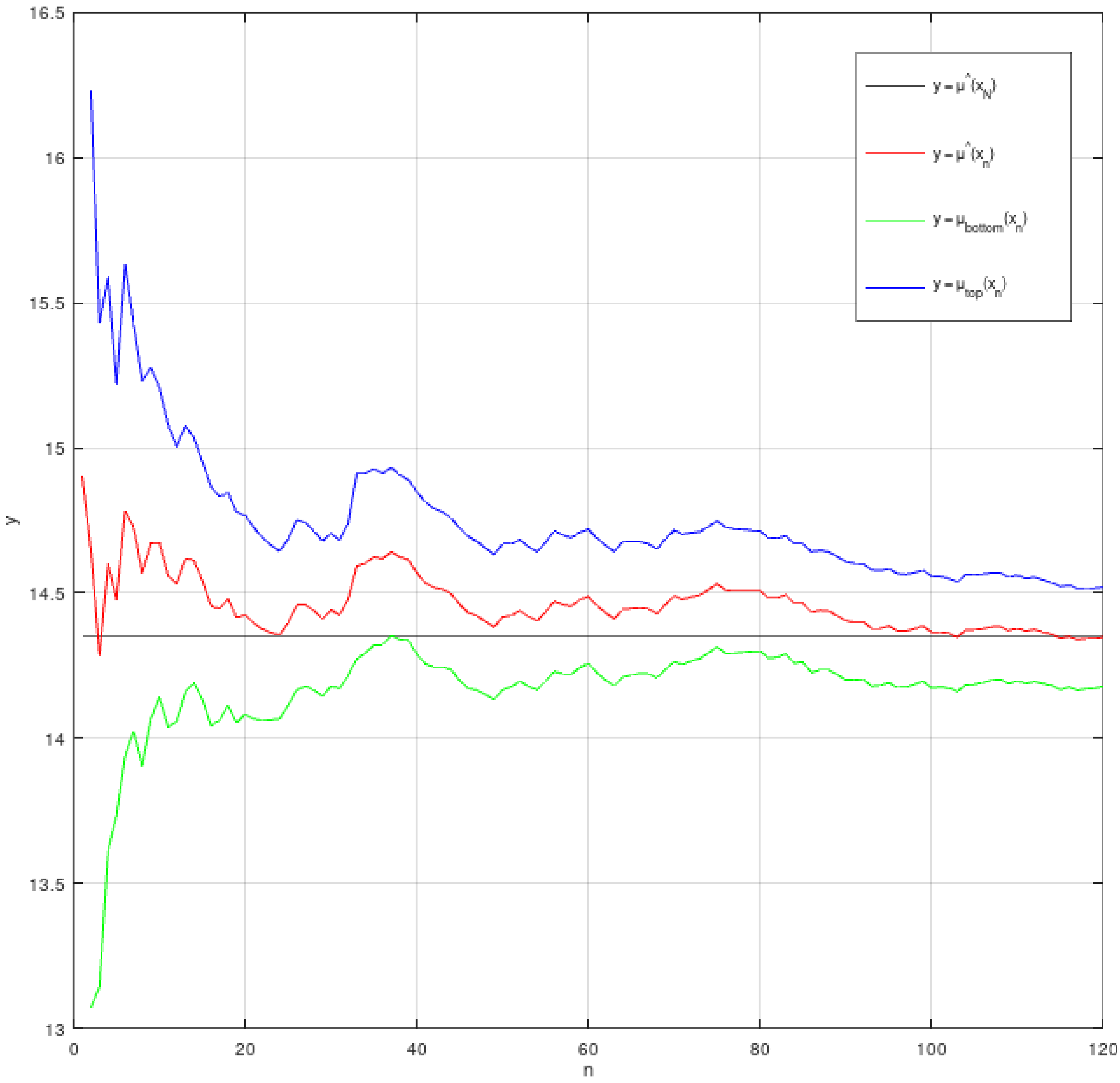

Рисунок 3.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

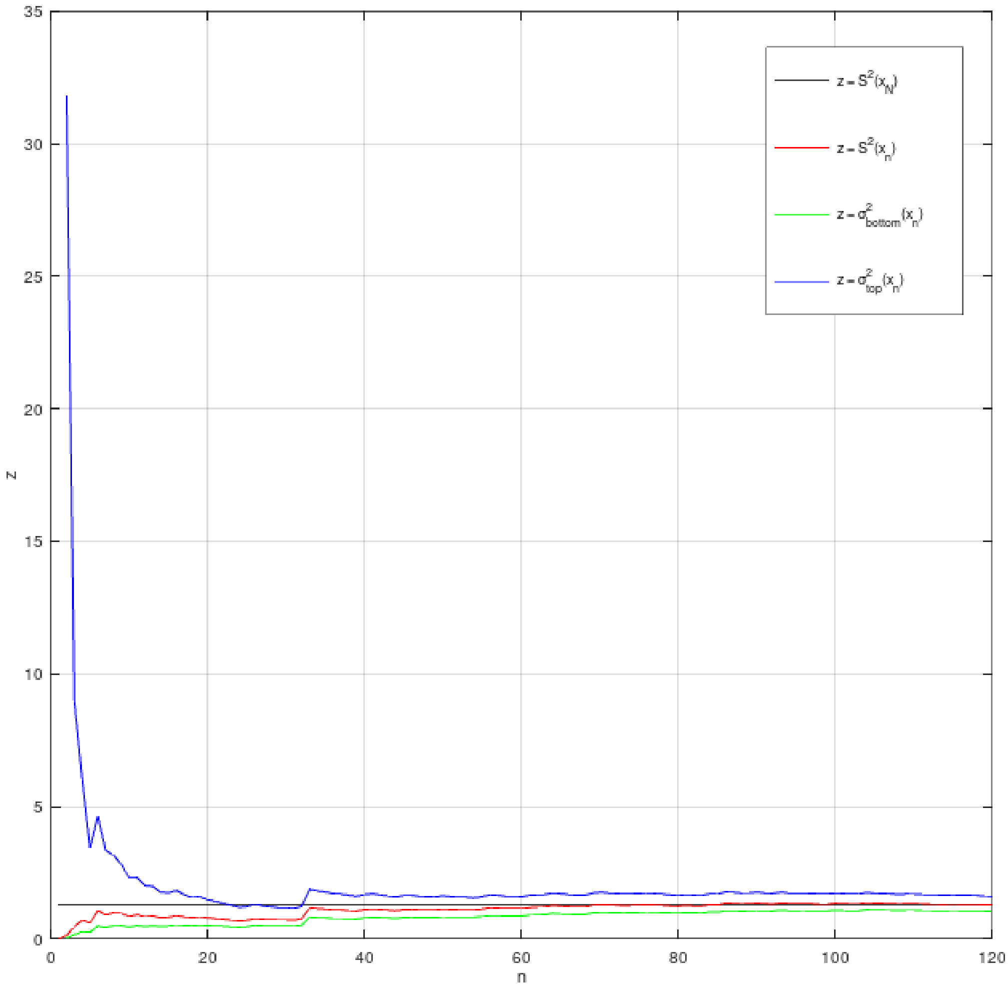

Рисунок 3.2 – Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N