# “板凳龙”运动路径及行进速度优化模型研究


## 摘　要

“板凳龙”的设计和使用展示了地方的工艺传统和民俗文化，在节日、庆典、庙会等场合举行，极具地方特色及历史意义。本文主要探究板凳龙的行进路线及行进速度，合理的规划和管理有助于确保活动的成功和参与者的安全。

针对**问题一**，螺距为55cm的**等距螺线**，龙头行进速度为$1m/s$，求解$300s$之前的位置及速度。我们基于几何分析及行进时的**物理原理**，列出前后板凳位置及速度的递推关系式，建立**轨迹模型**。在求解位置时，建立极坐标系，求解螺线的表达方程。接着通过物理公式与**曲线积分**建立等式，给出在极坐标系下相邻把手位置的递推关系式。然后求解速度，考虑到龙头板凳长度的特殊性，单独进行微分法求解，其余板凳由**刚体运动定律**建立速度递推关系式，求出每个时刻各个把手处的速度，最终求出速度从约$1.0025m/s$逐渐减小至$1.0005m/s$左右，“板凳龙”的位置及速度见附件 `result1.xlsx`。

针对**问题二**，本题在问题一的基础上，行进到恰好发生碰撞，确定盘入终止时间，并给出舞龙队的位置及速度，我们建立了**碰撞模型**。证明若龙头不发生碰撞，龙身必定不会碰撞，由此只需考虑龙头处的碰撞情况。接着根据几何关系求得龙头外侧端点处坐标到所处螺线的最短距离在发生碰撞的最大间距之间。同时初步确定发生碰撞的最大间距为40cm，该情况下，确定最终盘入时间的最大值，缩短间距，依次进行**迭代计算**，同问题一求解出该时刻舞龙队的位置、速度，直至该最大距离恰好在逐步缩减的范围之内，最终求出盘入时间为409s，此时龙的位置及速度见附件 `result2.xlsx`。

**问题三**给出一个调头空间，需要确定最小螺距，要求完成调头。建立在调头空间内恰好不发生碰撞的最大螺距为目标函数的**优化模型**，以龙头端点到原点的距离小于掉头空间半径作为约束条件，此时的螺距为满足条件的最小螺距。不断减小螺距，重复问题二的操作。最终求解出最小螺距为42cm。

**问题四**在问题三中的调头空间内，在满足相关位置相切的条件下，要减小调头曲线的长度。首先说明弧长与两相切圆弧半径比例、盘入角度的关系，并证出当螺线方程的**常数项为**0时，螺线与调头空间边界圆的交点处切线的夹角有最大值，此时调头曲线最短。所以能够调整圆弧仍保持各部分相切，使得调头曲线最短，调整后弧长为$14.13m$。同问题一、二列出舞龙队位置及速度递推关系式，舞龙队的位置及速度见附件 `result4.xlsx`。

**问题五**中舞龙队沿问题四所确定的行进路线行走，在保证龙身龙尾的速度不超过$2m/s$的情况下，确定龙头的最大行进速度。龙头行进速度逐渐由$1m/s$增加，相应地求解出剔除异常数据后龙身龙尾的速度与2m/s进行比较，最终求出龙头的最大速度为$1.269m/s$，此时所有板凳的最大速度为：$1.9930m/s$。



**关键词：** 等距螺线　轨迹模型　刚体运动定律　碰撞模型　优化模型

# 目　录

# 一、 问题重述

## 1.1 问题背景

“板凳龙”是流行于浙江、福建地区的传统民俗活动，具有深厚的历史意义和丰富的文化价值。板凳龙非物质文化遗产的生存和发展正处于明显的瓶颈期[1]，本文从展示平台受限的角度出发，探讨最优的盘龙面积及行进速度以提升“板凳龙”民俗活动的观赏性，从而助力非物质文化遗产的传承。

## 1.2 问题提出

本文中的“板凳龙”由1节龙头、220节龙身和1节龙尾组成，长为341、220cm，宽度均为30cm的两种板凳分别构成龙头，龙身、龙尾。每个板凳有两个直径为5.5cm的孔径，其孔径中心距最近的板头27.5cm，相邻板凳由把手连接，舞龙队按照螺线进行盘绕。

### 1.2.1 问题一

假设舞龙队龙头的速度恒为$1m/s$，沿螺距为55cm的等距螺线，龙头从螺线第16圈$A$点处顺时针盘入，同时把手中心位于螺线上。需要求解出舞龙队前300s，每秒的位置和速度，并将结果保存到`result1.xlsx`，同时本文将分别给出$0s$、$60s$、$120s$、$180s$、$240s$、$300s$时，龙头前把手、龙头后面第1、51、101、151、201节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度。

### 1.2.2 问题二

在问题一的情况下，同时保证盘入时板凳之间不发生碰撞，需要确定舞龙队盘入的终止时刻，求解出该时刻舞龙队的位置和速度，并将结果保存到`result2.xlsx`，同时本文须给出龙头前把手、龙头后面第1、51、101、151、201节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度。

### 1.2.3 问题三

本题给出一个以螺线中心为圆心，直径为9米的圆形掉头空间，在该空间内完成调头使得舞龙队能够逆时针盘出，要求盘入时须保证龙头前把手能够沿着相应的螺线盘入到调头空间的边界，需要建立螺线模型，求解出最小螺距。

### 1.2.4 问题四

现规定舞龙队龙头速度恒为$1m/s$，沿螺距为$1.7m$，关于螺线中心呈中心对称的盘入、盘出螺线行进，在问题三中给出的掉头空间内，以开始掉头为零时刻，需要确定最短S形调头曲线，且由前一段圆弧的圆弧半径是后一段圆弧半径的2倍的两相切圆弧组成，同时保证该调头曲线与盘入、盘出螺线相切。需要给出从$-100s$，到$100s$，每秒舞龙队的位置和速度，将结果保存到`result4.xlsx`，同时本文须给出$-100s$、$-50s$、$0s$、$50s$、$100s$时，龙头前把手、龙头后面第1、51、101、151、201节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度。

#### 1.2.5 问题五

在问题四的前提条件下，本题舞龙队需要沿着问题四修正后的中的螺线曲线行进，在龙头速度恒定，舞龙队各把手的速度均不超过$2m/s$的约束条件下，确定龙头的最大行进速度。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一分析

问题一中舞龙队沿螺距为55cm的等距螺线盘入，需要求解前$300s$每秒舞龙队的位置和速度。已知龙头从$A$点盘入，且速度恒为$1m/s$，为求解每个时刻舞龙队的位置，需要建立极坐标系从而建立轨迹模型。我们首先假设，零时刻舞龙队每个板凳沿螺线形状排列。由于龙头处板凳的长度与龙身龙尾的长度不同，故须单独求解，接着建立递推关系式依次求解零时刻每个板凳的位置。盘入时，为求解舞龙队每秒的位置，需根据曲线积分求解出龙头的位置对应的极坐标位置，再根据零时刻建立的递推关系式依次求解出每秒舞龙队的位置。为求解舞龙队每秒的速度，需要根据单个板凳运动的物理原理，建立每个把手处的速度递推关系式求解。

### 2.2 问题二分析

问题二中，在问题一的设定下，$300s$之后，继续盘入，直至板凳之间不发生碰撞，为满足该条件，首先，证明了当龙头不发生碰撞时，龙身也不会发生碰撞，接着确定某时刻龙头处板凳上的点距所处螺线最远距离的最大值作为判断发生碰撞最小间距的最大值，该时刻$\theta_{0,t}$有最大值，逐步减小$\theta_{0,t}$,同时逐步减小最小间距，与龙头处板凳上的点距所处螺线的最大距离相比较，直至舞龙队的龙头恰好不发生碰撞，即求解出舞龙队盘入的最终时间。

### 2.3 问题三分析

问题三中，给出一个调头空间，完成调头使舞龙队逆时针盘出，确定最小螺距，该最小螺距为在调头空间内不发生碰撞的最大螺距。所以可以建立优化模型，以在调头空间内不发生碰撞的最大螺距为目标函数，同理问题二中不发生碰撞的判断条件和龙头前把手到原点的距离小于该调头空间的半径为约束条件，通过第二问的条件逐步减小螺距，依次迭代即可求出最大螺距。

### 2.4 问题四分析

在问题三中，舞龙队须在问题三中设定的调头空间内完成调头，在保证圆弧与盘入盘出螺线相切且两条弧线相切的情况下，寻找调整方案使之变短。我们考虑调整圆弧比例或调整龙头进入调头空间的速度方向两个方面来确定调整方案。

### 2.5 问题五分析

问题五在问题四的路径下，要求舞龙队各把手的速度不超过$2m/s$，确定龙头行进的最大速度。同理问题四中速度求解递推方程组，将龙头速度从$1m/s$开始逐步增大，依次

求解出每个把手的速度，当所有的把手速度出现恰好不大于$2m/s$时，即为龙头最大行进速度。

## 三、 模型假设

1. 假设舞龙队员操作的所有板凳时，没有意外的操作失误，且所有队员的操作保持同步，板凳龙的每个部分严格按照规定的路径运动；
2. 假设板凳之间的连接点（把手）之间的摩擦力和阻力可以忽略不计，即各节板凳在舞龙过程中不会因摩擦或连接松弛导致运动受阻或不均匀；
3. 假设整个舞龙过程仅在水平面上进行，忽略舞龙过程中可能的高度变化所带来的板凳碰撞以及路径的变化；
4. 假设舞龙过程中，龙头的路径能决定整个板凳龙的运动轨迹，龙身和龙尾只是跟随龙头的轨迹运动，不会自行偏离路径；
5. 假设龙头带动的整体舞龙过程保持流畅，任何时刻螺线上的速度和方向变化都连续性，且在进入调头区域时立刻进行调头。

## 四、 符号说明

| 序号 | 符号 | 说明 |
|---|---|---|
| 1 | $d_0$ | 龙头处板凳两把手之间的距离 |
| 2 | $d$ | 龙身龙尾处板凳两把手之间的距离 |
| 3 | $D_{0,t}$ | t 时刻龙头出板凳上的点距所处螺线的最远距离 |
| 4 | $d_{m,t}$ | $t$时刻$D_{0,t}$取值的最大范围 |
| 5 | $s_t$ | 龙头在$t$时刻所走的路程 |
| 6 | $v_0$ | 龙头速度 |
| 7 | $v_{i,t}$ | $t$时刻$i$节板凳后把手的速度 |
| 8 | $\beta_{i,t}$ | $t$时刻第$i$节板凳前把手的速度方向与$x$轴的夹角 |
| 9 | $\alpha_{i,t}$ | $t$时刻第$i$节板凳所在直线与$x$轴的夹角 |
| 10 | $(x_t, y_t)$ | 龙头处板凳上距所处螺线的距离最远的点的位置坐标 |
| 11 | $p_t$ | 螺距 |
| 12 | $r_1$ | 调头曲线第一个弧段的半径 |
| 13 | $r_2$ | 调头曲线第二个弧段的半径 |
| 14 | $S$ | 调头曲线长 |
| 15 | $R$ | 调头空间的边界圆的半径 |
| 16 | $\varphi$ | 速度方向与两交点连线所在直线的夹角 |
| 17 | $\gamma$ | 速度方向与边界圆在交点处的切线方向的夹角 |
| 18 | $\varphi_r$ | 边界圆在交点处的切线方向与$x$轴的夹角 |
| 19 | $\varphi_s$ | 螺线在交点处的切线方向与$x$轴的夹角 |
| 20 | $(A, B)$ | 调头曲线弧段的圆心坐标 |

| 序号 | 符号 | 说明 |
| --- | --- | --- |
| 21 | $t'=0$ | 龙头进入调头空间的时刻 |
| 22 | $k_1$ | 调头曲线第一个弧段各个点的斜率 |
| 23 | $k_2$ | 调头曲线第二个弧段各个点的斜率 |

# 五、 模型的建立与求解

## 5.1 问题一轨迹模型的建立与求解

### 5.1.1 轨迹模型的建立

根据问题一的分析，在题目中直角坐标系的基础上建立极坐标系，建立轨迹模型求解盘入时每秒舞龙队的位置和速度。已知把手通过5.5cm的中心孔径连接两个相邻的板凳，各把手中心均位于螺线上，孔径中心即把手中心距最近的板凳头为22.5cm，所以在求解舞龙队的位置和速度时只需考虑两把手中心的距离，即龙头处长$341-55=286$cm，龙身及龙尾处长$220-55=165$cm。

已知本题螺线是螺距为55cm 的等距螺线[2]，所以在极坐标系内设$\rho=a\theta$，所以螺线方程为：

$$\rho=\frac{55}{2\pi}\theta \tag{1}$$

下图以本题螺线中心为原点，建立极坐标系，使用 GeoGebra 软件绘制阿基米德螺线的图像[3]（图1），其中方程为式(1)，$A$点处的极坐标为$(880,32\pi)$。

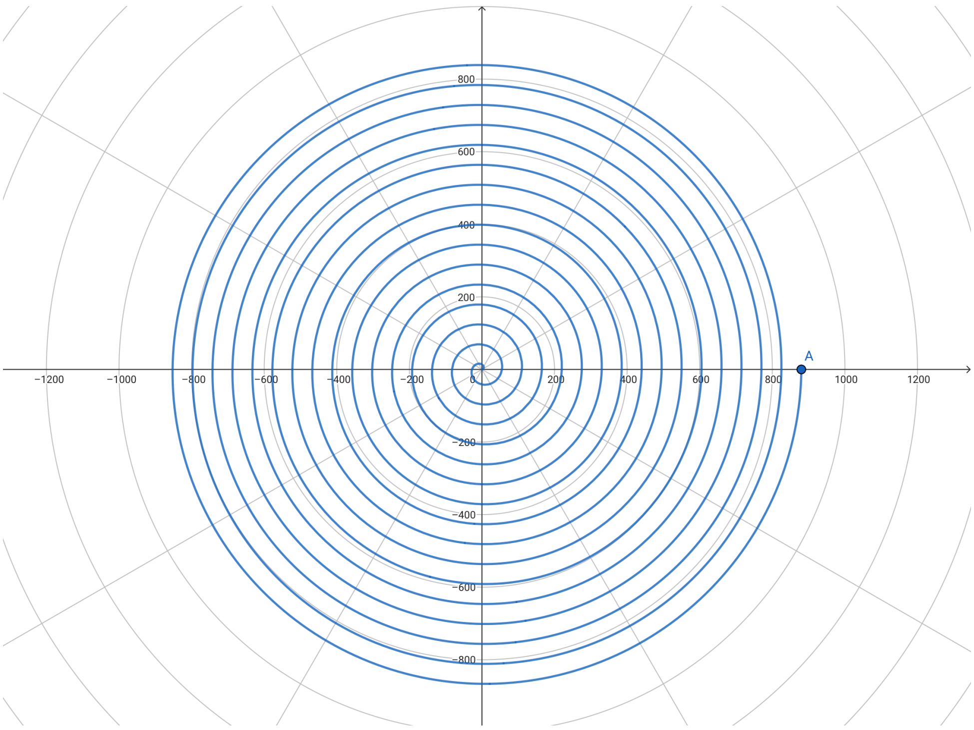


图 1　问题一螺线图

**Step1**：零时刻舞龙队位置的求解方程模型

本题在零时刻盘入之前，舞龙队龙头在$A$点处，即该处板凳的前孔径中心的位置在直角坐标系中的坐标为$(880,0)$，我们假设舞龙队按本题螺线形状排列。由于龙头处板凳长度与龙身龙尾处板凳长度不同，所以须单独求出第1节板凳处两个把手中心处的位置。

龙头两把手之间的距离为286cm，其余板凳两把手之间的距离为165cm，设第$i$节板凳的后把手在直角坐标系中的坐标为$(x_i,y_i)$,所以该坐标用$\rho,\theta$表示为：

$$\begin{cases} y_i=\rho_i\sin\theta_i \\ x_i=\rho_i\cos\theta_i \end{cases} \tag{2}$$

根据两点间的距离公式：

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

第2节前把手的位置坐标求解方程为：

$$d_0=286=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \tag{3}$$

第$i$节前把手的位置坐标求解方程为：

$$d=165=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}, i=2...223 \tag{4}$$

综上所述，零时刻求解舞龙队排列位置的递推方程组为：

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{55}{2\pi}\theta \\ y_i=\rho_i\sin\theta_i \\ x_i=\rho_i\cos\theta_i \\ d_0=286=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \\ d=165=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})2}, i=2...223 \end{cases} \tag{5}$$

**Step2**：盘入时舞龙队位置递推方程模型

由 **Step1** 可知只需求解出在盘入时每秒龙头的位置坐标，同理，根据递推方程组(5)即可求解出每秒舞龙队的位置。已知龙头速度为$v_0=1m/s$，不妨设$t$时刻，龙头所走路程为$s_t$，所以龙头行进的路程公式为：

$$s_t=v_0t \tag{6}$$

在极坐标系中，根据曲线积分，求解出龙头的在极坐标系中的$\theta_{0,t}$为：

$$s_t=\int_L\sqrt{\rho_{0,t}'^2+\rho_{0,t}^2}d\theta_{0,t} \tag{7}$$

方程(6)、(7)联立得到$\theta_0$与$t$的关系：

$$v_0t=\int_L\frac{1}{2}a\left[\theta_{0,t}\sqrt{1+\theta_{0,t}^2}+\ln\left(\theta_{0,t}+\sqrt{1+\theta_{0,t}^2}\right)\right]d\theta_{0,t} \tag{8}$$

同理根据递推方程组(5)，舞龙队$t$时刻的位置求解方程组为：

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{55}{2\pi}\theta \\ v_0 t = \displaystyle\int_L \frac{1}{2}a\left[\theta_{0,t}\sqrt{1+\theta_{0,t}^2} + \ln\left(\theta_{0,t} + \sqrt{1+\theta_{0,t}^2}\right)\right] d\theta_{0,t} \\ d_{0,t} = 286 = \sqrt{\left(x_{1,t} - x_{0,t}\right)^2 + \left(y_{1,t} - y_{0,t}\right)^2} \\ d_t = 165 = \sqrt{\left(x_{i,t} - x_{i-1,t}\right)^2 + \left(y_{i,t} - y_{i-1,t}\right)^2}, i = 2, 3, ..., 223 \\ y_{i,t} = \rho_{i,t}\sin\theta_{i,t} \\ x_{i,t} = \rho_{i,t}\cos\theta_{i,t} \end{cases} \tag{9}$$

**Step3**：舞龙队速度求解方程模型

考虑龙头板凳长度的特殊性，龙头处的板凳的第二个把手处的速度将单独求解，将点1处的速度向$x$、$y$轴分解，如图2所示，即可以得到速度关系式(10)：

$$v_{1,t} = \sqrt{v_{x,t}^2 + y_{y,t}^2} \tag{10}$$

根据 **Step2** 中方程组(9)能够求出$\left(x_{1,t}, y_{1,t}\right)$，不难得出，该位置坐标与时间有关，所以速度求解方程组为：

$$\begin{cases} v_{x,t} = \dfrac{dx_{1,t}}{dt} \\ v_{y,t} = \dfrac{dy_{1,t}}{d_t} \end{cases} \tag{11}$$

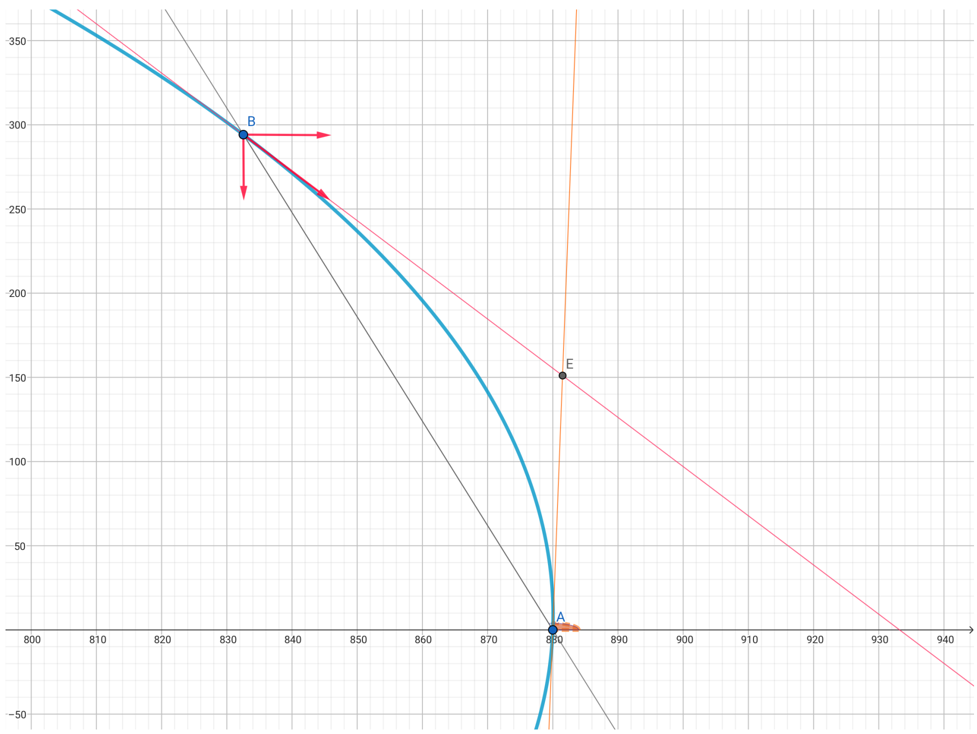


图 2　龙头第二个把手的速度求解示意图

图3为舞龙队的速度求解示意图，设在$t$时刻第$i$节板凳的前把手的速度方向与$x$轴的夹角为$\beta_{i,t}$，第$i$节板凳所在直线与$x$轴的夹角为$\alpha_{i,t}$。根据刚体运动定律可知，同一板凳上两把手处对板凳中点处的力矩相同，即两把手处的速度在该板凳方向的速度分量相等，即得到速度关系：

$$v_{i,t}\cos(\beta_{i,t}-\alpha_{i,t})=v_{i-1,t}\cos(\alpha_{i,t}-\beta_{i-1,t}),i=2,3,\ldots,223$$

则可以进一步给出板凳速度的递推关系式(12)：

$$v_{i,t}=\frac{v_{i-1,t}\cos(\alpha_{i,t}-\beta_{i-1,t})}{\cos(\beta_{i,t}-\alpha_{i,t})},i=2,3,\ldots,223 \tag{12}$$

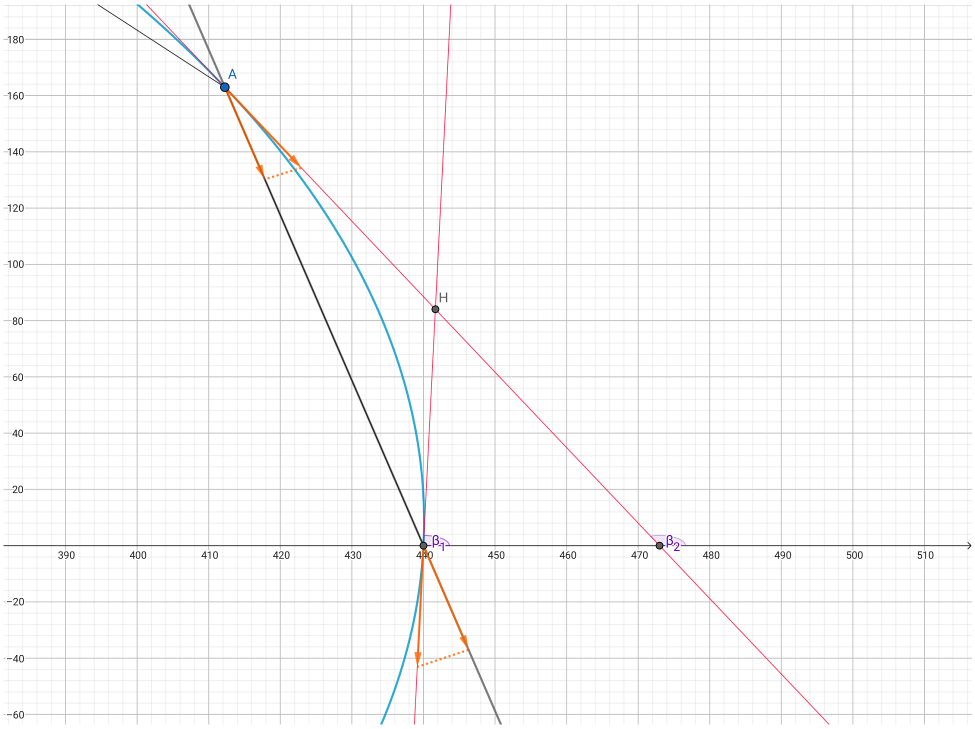


**图 3　速度求解**

为求解上述递推方程，需要求解出$\alpha_{i,t}$及$\beta_{i,t}$ 根据方程组(9)能够求解出每一点$t$时刻的位置坐标，所以速度方向与$x$轴的夹角求解递推方程组为：

$$\begin{cases}\tan\beta_{i,t}=\dfrac{dy_{i,t}}{dx_{i,t}}=\dfrac{dy_{i,t}}{d\theta_{i,t}}\cdot\dfrac{d\theta_{i,t}}{dx_{i,t}}\\ \dfrac{dy_{i,t}}{d\theta_{i,t}}=a(\sin\theta_{i,t}+\theta_{i,t}\cos\theta_{i,t})\\ \dfrac{dx_{i,t}}{d\theta_{i,t}}=a(\cos\theta_{i,t}-\theta_{i,t}\sin\theta_{i,t})\end{cases} \tag{13}$$

板凳所在直线与$x$轴的夹角求解递推方程为：

$$\tan\alpha_{i,t}=\frac{y_{i,t}-y_{i-1,t}}{x_{i,t}-x_{i-1,t}} \tag{14}$$

综上所述，舞龙队盘入时每秒速度求解递推方程组为：

$$
\begin{cases}
v_{1,t} = \sqrt{v_{x,t}^2 + y_{y,t}^2} \\
v_{x,t} = \dfrac{dx_{1,t}}{dt} \\
v_{y,t} = \dfrac{dy_{1,t}}{d_t} \\
\dfrac{dy_{i,t}}{d\theta_{i,t}} = a\left(\sin\theta_{i,t} + \theta_{i,t}\cos\theta_{i,t}\right) \\
\dfrac{dx_{i,t}}{d\theta_{i,t}} = a\left(\cos\theta_{i,t} - \theta_{i,t}\sin\theta_{i,t}\right) \\
\tan\beta_{i,t} = \dfrac{dy_{i,t}}{dx_{i,t}} = \dfrac{dy_{i,t}}{d\theta_{i,t}} \cdot \dfrac{d\theta_{i,t}}{dx_{i,t}} \\
\tan\alpha_{i,t} = \dfrac{y_{i,t} - y_{i-1,t}}{x_{i,t} - x_{i-1,t}} \\
v_{i,t}\cos\left(\beta_{i,t} - \alpha_{i,t}\right) = v_{i-1,t}\cos\left(\alpha_{i,t} - \beta_{i-1,t}\right), i = 2 \ldots 223
\end{cases}
\tag{15}
$$

**5.1.2 轨迹模型的求解**

首先在 `MATLAB` 中调用 `vpasolve` 函数求解对龙头所走路程在坐标系中的弧段进行曲线积分，考虑到`MATLAB`中直接求解积分形式的微分方程需要考虑初始值，故将该方程转换成一元非线性方程便于求解，可以求解出龙头坐标与时间的关系，并以1$s$为时间间隔，求解出每个时刻龙头所处的的位置，接着对$\theta$进行微元，满足公式(4)中两把手之间的距离为165cm，从而依次确定每个把手的中心位置坐标。然后求解每时刻每个把手的速度，对位置坐标进行求导，求出相邻把手的速度方向与$x$轴的夹角，同时根据位置坐标求解出板凳所在直线的方向与$x$轴的夹角。最后根据相邻把手之间的速度关系依次求解出每个把手的速度。

求解盘入时“板凳龙”的位置及速度求解的简要流程图见右侧图4

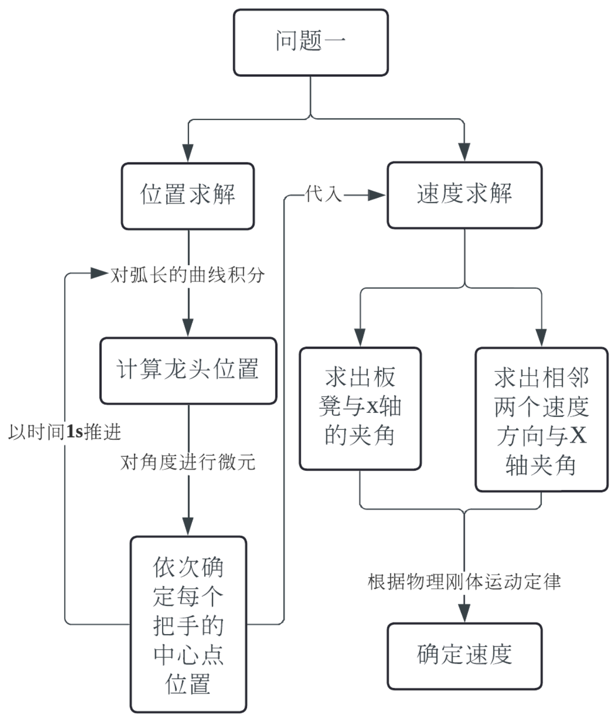


**图 4　求解流程图**

表1为问题一中龙的部分时刻部分结构的坐标，详细数据见附件 `result1.xlsx`。

表 1　问题一的位置计算结果

| | 0s | 60s | 120s | 180s | 240s | 300s |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 龙头 x(m) | 8.819345 | 5.812921 | −4.095407 | −2.972068 | 2.602926 | 4.437403 |
| 龙头 y(m) | 0.000000 | −5.784738 | −6.320714 | 6.112178 | −5.374153 | 2.329420 |
| 第 1 节龙身 x(m) | 8.363546 | 7.457845 | −1.439309 | −5.237159 | 4.823200 | 2.459138 |
| 第 1 节龙身 y(m) | 2.827394 | −3.438105 | −7.407157 | 2.711838 | 6.084143 | −6.312090 |
| 第 51 节龙身 x(m) | −9.549293 | −8.751012 | −5.688551 | 2.711838 | 6.084144 | −6.312090 |
| 第 51 节龙身 y(m) | 1.120244 | 2.316212 | 6.251307 | 7.320280 | 6.084144 | −6.312090 |
| 第 101 节龙身 x(m) | 3.382832 | 6.069856 | 5.694986 | 2.286979 | −4.595130 | 6.762008 |
| 第 101 节龙身 y(m) | −9.772748 | −7.720453 | −7.314887 | −8.379335 | −6.621072 | 3.672600 |
| 第 151 节龙身 x(m) | 10.714532 | 6.098900 | 1.767164 | 0.382446 | 2.390256 | 6.762008 |
| 第 151 节龙身 y(m) | 2.579577 | 8.588185 | 9.864953 | 9.476255 | 8.587280 | 4.820286 |
| 第 201 节龙身 x(m) | 3.576175 | −7.405012 | −10.710639 | −8.905930 | −6.907666 | −7.031139 |
| 第 201 节龙身 y(m) | 11.098278 | 8.403695 | 0.474117 | −5.013012 | −6.799972 | −5.832892 |
| 龙尾（后）x(m) | −4.228752 | 8.210543 | 10.859332 | 6.666213 | 2.350324 | 0.973334 |
| 龙尾（后）y(m) | −11.156222 | −8.026758 | 1.843629 | 8.147967 | 9.737125 | 9.428388 |

表2为问题一舞龙队部分时刻部分结构的速度。

表 2　问题一的速度计算结果

| | 0s | 60s | 120s | 180s | 240s | 300s |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 龙头(m/s) | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 第 1 节龙身(m/s) | 0.000000 | 1.001740 | 1.001834 | 1.001943 | 1.002069 | 1.002195 |
| 第 51 节龙身(m/s) | 0.000000 | 1.001438 | 1.001424 | 1.001352 | 1.001143 | 1.000539 |
| 第 101 节龙身(m/s) | 0.000000 | 1.001227 | 1.001152 | 1.000990 | 1.000633 | 0.999771 |
| 第 151 节龙身(m/s) | 0.000000 | 1.001071 | 1.000959 | 1.000744 | 1.000311 | 0.999327 |
| 第 201 节龙身(m/s) | 0.000000 | 1.000951 | 1.000815 | 1.000567 | 1.000088 | 0.999038 |
| 龙尾（后）(m/s) | 0.000000 | 1.000907 | 1.000762 | 1.000504 | 1.000010 | 0.998941 |

### 5.1.3 结果分析

根据上述表格所呈现的结果可以绘制出$60s$、$120s$、$180s$、$240s$、$300s$时刻每个板凳的速度图像（图5）。根据表2和图5的结果可以看出，在运动轨迹为阿基米德螺线的前提下，板凳龙龙身的速度随着前面龙身数目的增多而逐渐减小，但减小幅度较小，速度大约从$1.0025m/s$降至$1.0005m/s$；而对于每节板凳来说，随着时间的增加，速度逐渐增大，但增大幅度依然不大，且增幅随着板凳数目的增加而逐渐增大。

故可以得出，在行进轨迹为阿基米德螺旋线下，每节板凳的速度近似相等。

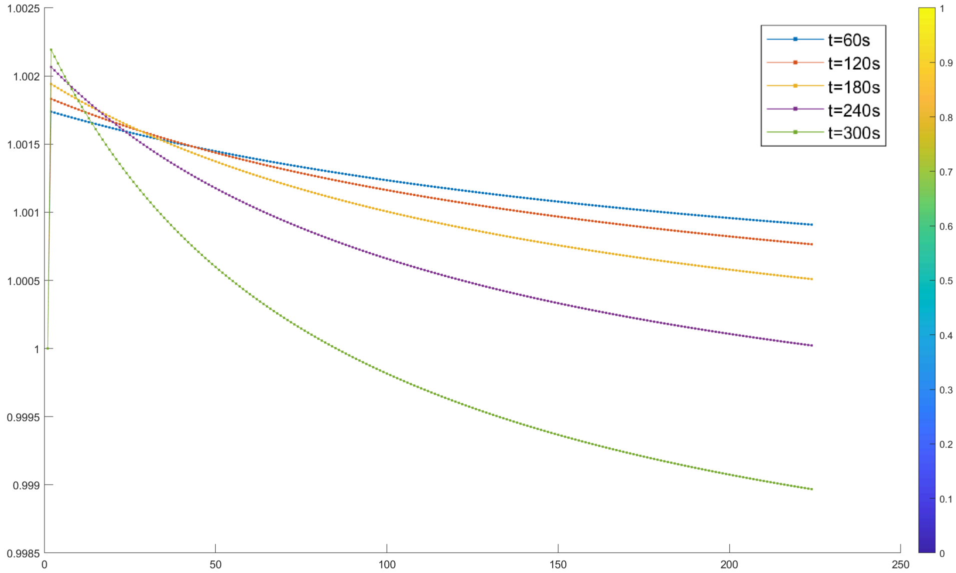


图 5　60s 至 300s 的速度图像

### 5.1.4 模型检验

为检验该模型的建立与求解是否存在误差，由于对于每个板凳速度的求解仅仅与板凳的位置坐标有关，即若龙身位置准确，则求解出的速度也应是准确的。故仅需对板凳龙的位置进行检验即可说明模型的准确度。

根据求解的结果，随机选取2个不同时刻（第4$s$、第109$s$）的板凳龙的位置图像[4]：

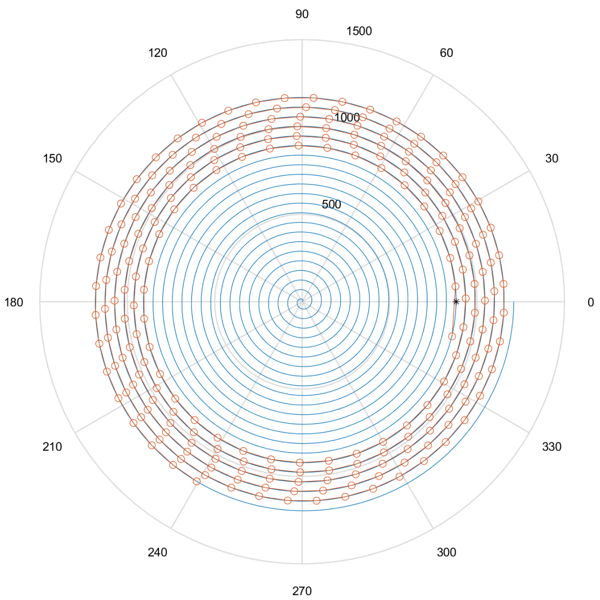


图 6　4s 板凳龙位置

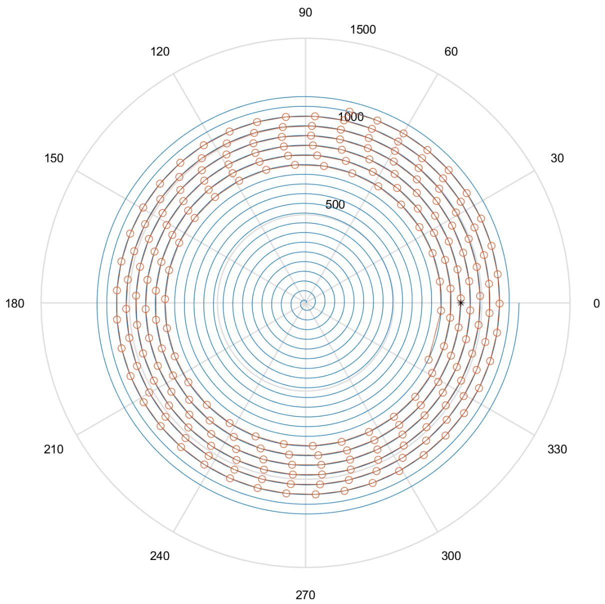


图 7　109s 板凳龙位置

根据图6、图7不难发现，每个板凳间的长度近似相等，且在此时刻龙头的位置与理论近似计算的位置相符，故问题一的模型建立与求解可靠，对这类问题有较好的求解效果与求解能力[5]。

## 5.2 问题二碰撞模型的建立与求解

### 5.2.1 碰撞模型的建立

根据问题二的分析，首先证明在盘入过程中，只要保证龙头不发生碰撞，龙身必定不会发生碰撞。由此在龙头处根据几何关系建立龙头处板凳距所在螺线的最远距离，即$D_{0,t}$，接着确定某时刻$D_{0,t}$取值的最大范围，记为$d_{m,t}$，该时刻一定会发生碰撞，此时刻为最长盘入时间继而$\theta_{0,t}$取得最大值，然后逐步减小$\theta_{0,t}$的值，求出$t$时刻龙头处板凳上的点距所处螺线的最远距离，同时逐步缩小$d_{m,t}$的取值，$D_{0,t}$与$d_{m,t}$相比较。直至龙头恰好不发生碰撞。

**Step1：** 证明龙头不发生碰撞时，龙身必定不发生碰撞

**命题一：** 对于龙头、龙身的前把手位于同一位置时，有：$\alpha_{0,t} > \alpha_{i,t}$恒成立

**证：** 如下图所示，若龙头处的板凳的前一个孔径中心与龙身龙尾处的板凳的前一个孔中心皆位于点$B$，所以有：

$$\Delta BLF \cong \Delta BRS$$

由于龙头处的板凳长度大于龙身处的板凳长度，所以龙头处的板凳所在直线与$x$ 的夹角大于龙身龙尾处的板凳所在直线与$x$轴的夹角，即：

$$\alpha_{0,t} > \alpha_{i,t}$$

显然图中$F$点距外圈的距离小于$S$点距外圈的距离。

所以命题一得证。

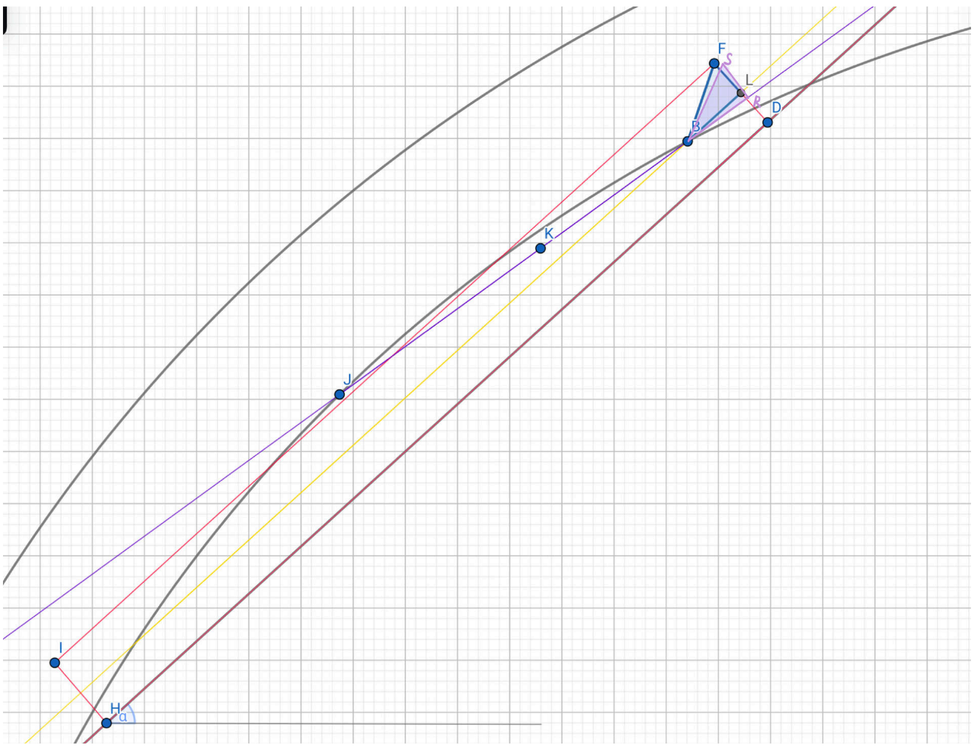


图 8　龙头龙身处板凳的比较

**Step2**：确定$D_{0,t}$的值

由问题一可知，在$t$时刻龙头处板凳的第一个把手中心点的位置坐标求解方程组为：

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{55}{2\pi}\theta \\ v_0 t = \displaystyle\int_L \frac{1}{2} a\left[\theta_{0,t}\sqrt{1+\theta_{0,t}^2} + \ln\left(\theta_{0,t} + \sqrt{1+\theta_{0,t}^2}\right)\right] d\theta_{0,t} \\ y_{0,t} = \rho_{0,t}\sin\theta_{0,t} \\ x_{0,t} = \rho_{0,t}\cos\theta_{0,t} \end{cases} \tag{16}$$

在图9中，在板凳龙盘入的过程中，根据命题一得到：图中的点$F$极有可能是最先与相邻外侧螺线上的板凳发生碰撞的点。因此，我们需要首先确定这个点的坐标，设为$(x_t, y_t)$。根据点$B$的坐标，我们可以推导出该板凳所在直线与$x$轴的夹角：

$$\begin{cases} d_0 = 286 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ \tan\alpha_{1,t} = \dfrac{y_{1,t} - y_{0,t}}{x_{1,t} - x_{0,t}} \end{cases} \tag{17}$$

由图9根据几何关系可得到：$x_t = x_{0,t} + PB$，$PB = BN - QM$，在$\Delta BMN$中有$BN = BM\cos\alpha_{1,t}$，在$\Delta QMF$中有$QM = FM\sin\alpha_{1,t}$。对$y_t$同理，所以 F 点位置坐标求解方程为：

$$\begin{cases} x_t = x_{0,t} + 27.5\cos\alpha_{1,t} - 15\sin\alpha_{1,t} \\ y_t = y_{0,t} + 27.5\sin\alpha_{1,t} + 15\cos\alpha_{1,t} \end{cases} \tag{18}$$

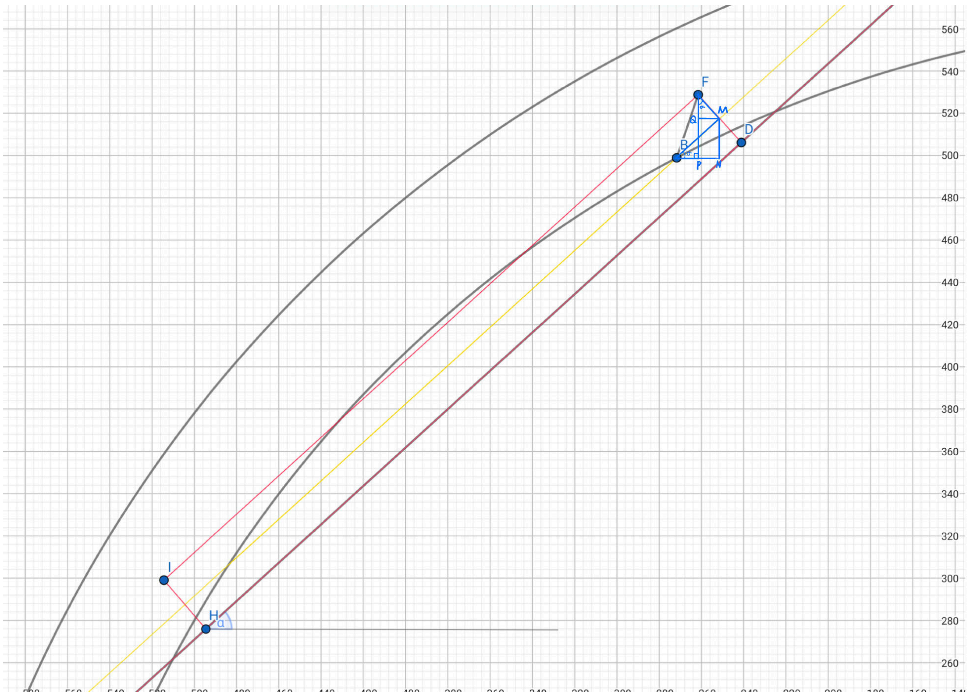

图 9　最远距离示意图

如下图10所示，连接点$F$、$O$，交螺线于点L，所以$D_{0,t}=FL=FO-LO$。由点$F$确定$\theta_{L,t}$，且$\theta_{L,t}$在$\theta_{0B}$附近，所以$\theta_{L,t}$确定方程组为：

$$\begin{cases}\tan\theta_{F,t}=\dfrac{y_t}{x_t}\\ \theta_{L,t}=\theta_{F,t}\pm 2k\pi,k\in\mathbb{N}\\ \theta_{0,t}-\dfrac{\pi}{2}<\theta_{L,t}<\theta_{0,t}+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\tag{19}$$

综上所述，$D_{0,t}$值的求解方程为：

$$\begin{cases}d_0=286=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\\ \tan\alpha_{1,t}=\dfrac{y_{1,t}-y_{0,t}}{x_{1,t}-x_{0,t}}\\ x_t=x_{0,t}+27.5\cos\alpha_{1,t}-15\sin\alpha_{1,t}\\ y_t=y_{0,t}+27.5\sin\alpha_{1,t}+15\cos\alpha_{1,t}\\ \tan\theta_{F,t}=\dfrac{y_t}{x_t}\\ \theta_{L,t}=\theta_{F,t}\pm 2k\pi,k\in\mathbb{N}\\ \theta_{0,t}-\dfrac{\pi}{2}<\theta_{L,t}<\theta_{0,t}+\dfrac{\pi}{2}\\ \rho=\dfrac{55}{2\pi}\theta\\ D_{0,t}=\sqrt{x_t^2+y_t^2}-a\theta_{L,t}\end{cases}\tag{20}$$

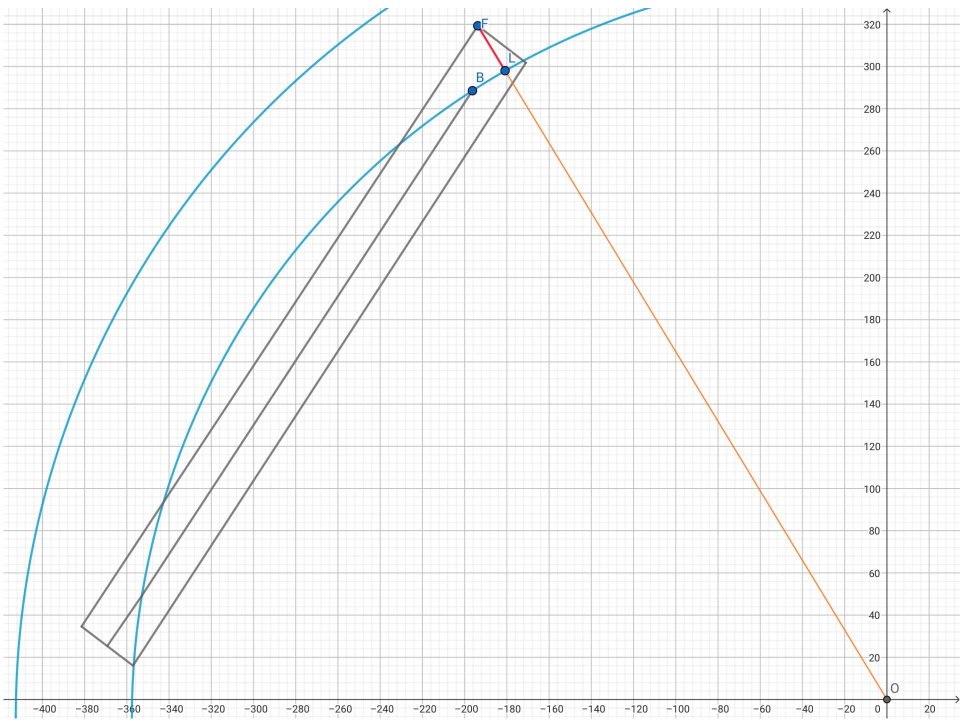


图 10　最远距离示意图 2

**Step3**：确定$d_{m,t}$的最大值

如图11所示，在盘入时，龙头处的板凳上的点距离其所处的螺线的最远距离不能超过一定范围，故现将确定该范围的最大值。

问题二中的螺线是螺距为55cm的等距螺线，板凳的宽度均为30cm，所以板凳中心距离两边的宽为15cm，所以该板凳可以看作一个宽为30cm的弧段，所以初步确定龙头处板凳上的点距所处螺线的最远距离的最大取值范围为40cm。由此值判断一定会发生碰撞，继而确定一个最长盘入时间，$\theta_{0,t}$有最大值，接着逐步回溯时间，缩小$\theta_{0,t}$的取值，同时缩小$d_{m,t}$，直至龙头恰好不发生碰撞。

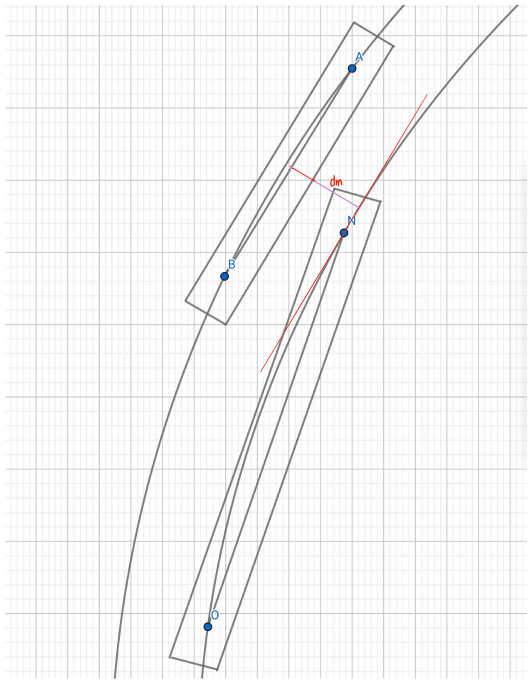


图 11　最小距离的最大值

### 5.2.2 碰撞模型的求解

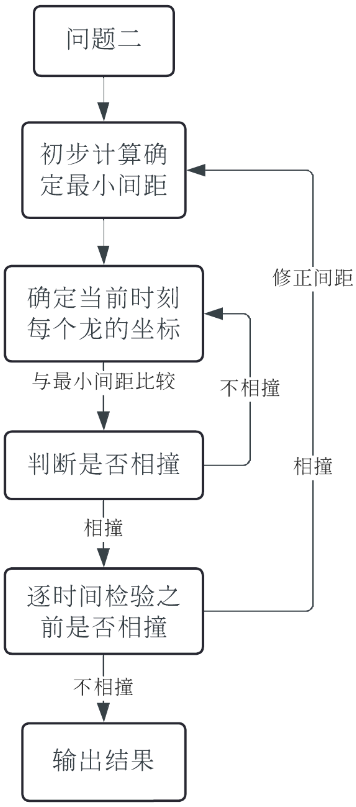


图 12　问题二求解流程图

如左图（图12）碰撞模型的求解流程图所示，根据问题二碰撞模型的建立中，龙头处板凳上的点距所处螺线的最远距离的最大取值范围初步确定为40cm，以此作为判断龙头与龙身一定会发生碰撞，并且在该时刻之前不碰撞的情况才有可能发生，此时可以求得最长的盘入时间为409$s$，且该时刻$\theta_{0,t_m}$为28.4363 rad。

根据第一问的求解，300$s$之前一定不会发生碰撞，所以至多回溯至第一问的300$s$。现将逐步减小时间的同时，修正最小间距，即$d_{m,t}$，同时根据问题一中递推方程组(9)、(15)，求解该时刻舞龙队的位置和速度，求解出该时刻的$D_{0,t}$，与$d_{m,t}$相比较，判断是否发生碰撞，若不碰撞则输出结果，若碰撞则再次进入循环。最终求解出舞龙队盘入的终止时刻，且不发生碰撞。最后求得最大碰撞时间为：409$s$。

表3为盘入终止时刻时，龙头前把手、龙头后面第1、51、101、151、201条龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度的求解结果，详细位置、速度结果见附件 `result2.xlsx`。

表 3　问题二恰好碰撞时位置与速度

| | 横坐标 x(m) | 纵坐标 y(m) | 速度(m/s) |
|---|---|---|---|
| 龙头 | −2.475691 | −0.404528 | 1.000000 |
| 第 1 节龙身 | −0.550405 | −2.534711 | 1.001031 |
| 第 51 节龙身 | −3.648233 | 2.830082 | 0.988905 |
| 第 101 节龙身 | 4.494069 | −3.955426 | 0.986727 |
| 第 151 节龙身 | 5.782992 | −4.112020 | 0.985813 |
| 第 201 节龙身 | −5.043024 | −6.278775 | 0.985310 |
| 龙尾（后） | −4.777701 | 6.957735 | 0.985153 |

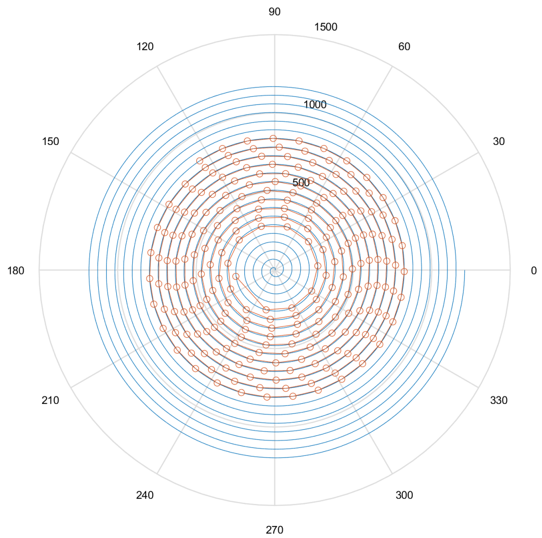


图 13　问题二恰好相撞时位置图像

## 5.3 问题三模型建立与求解

### 5.3.1 螺距优化模型的建立

根据问题三的分析，问题三是一个求解出最小螺距的优化类问题，因此解决本题的关键是寻找出该模型的目标函数以及约束条件。

**Step1：** 确定目标函数

为使得能够在给定的调头空间内完成调头，需要在调头空间内确定不能发生碰撞的最大螺距，此螺距作为为最小螺距，设每次迭代的螺距为$p_t$,：

$$\max p_t \tag{21}$$

**Step2：** 确定约束条件

在迭代过程中不断减小螺距的同时，$d_{m,t}$的最大值也将不断减小，则可以得到初始化的最大距离与螺距的关系：

$$d_{m,t_m} = p_t - 15$$

所以最长盘入时间将不断减小，$\theta_{0,t}$的最大值不断减小，最值不断减小的过程中，在调头空间内，同理问题二判断发生碰撞的条件，求得不发生碰撞的最大螺距，该判断条件为本题约束条件之一。首先，变化的螺距带入问题二中的求解方程组(16)、(20)，列出龙头处板凳上的点距所在螺线的最远距离的求解方程组为：

$$\begin{cases} \rho_{m,t} = \dfrac{p_t}{2\pi}\theta \\ D_{0,t} = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} - \dfrac{p_t}{2\pi}\theta_{L,t} \end{cases} \tag{22}$$

所以约束条件为：

$$D_{0,t} < d_{m,t} \tag{23}$$

为保证能在所给空间内调头，龙头的前把手到原点的距离必须小于给定的调头空间的半径，即：

$$\sqrt{x_{0,t}^2 + y_{0,t}^2} < 450 \tag{24}$$

综上所述，问题三螺距的优化模型为：

$$\max p_t$$
$$s.t.\begin{cases} D_{0,t} < d_{m,t} \\ \sqrt{x_{0,t}^2 + y_{0,t}^2} < 450 \end{cases} \tag{25}$$

### 5.3.2 螺距优化模型求解

同问题二的求解流程，在每次回溯时间之前逐渐减小螺距，每一次根据新的螺距，确定新的$d_{m,t}$的最大值，同时求解出龙头前把手的位置坐标，龙头处板凳上的点距所处螺线的最远距离等相关数据，在保证龙头能够进入调头空间内，判断是否发生碰撞，若不发生碰撞则输出结果，若碰撞则修正$d_{m,t}$，进入迭代。最终求解出在调头空间内不发生碰撞的最大螺距即题目要求的最小螺距为43cm。

上述求解过程的简要流程图见图14：

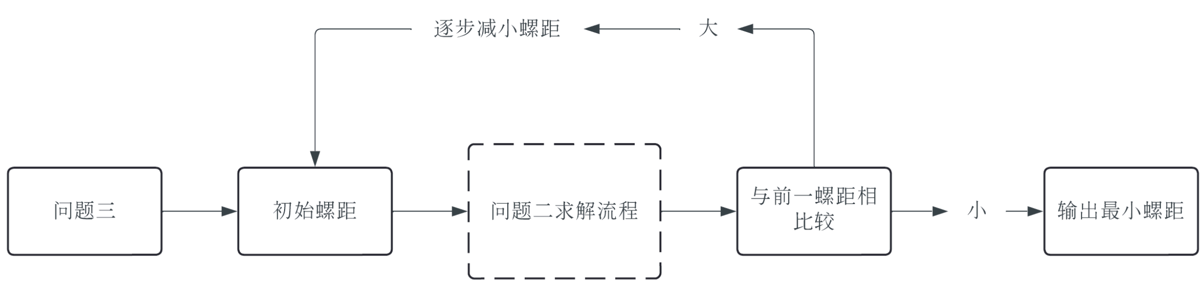


图 14　问题三求解流程图

### 5.3.3 模型检验

由于上述求出最小螺距为43cm，故以下将针对螺距进行模型的检验。现将螺距分别取值为41cm、42cm、43cm、44cm、45cm五个不同的取值，分别编程求出：

- 板凳进入圆形掉头区域的时间；
- 板凳发生碰撞的时间。

表 4 第三问检验结果

| 螺距(cm) | 恰好发生碰撞(s) | 恰好进入调头圆(s) |
|---|---|---|
| **41** | 193 | 205 |
| **42** | 209 | 215 |
| **43** | 224 | 223 |
| **44** | 241 | 231 |
| **45** | 258 | 235 |

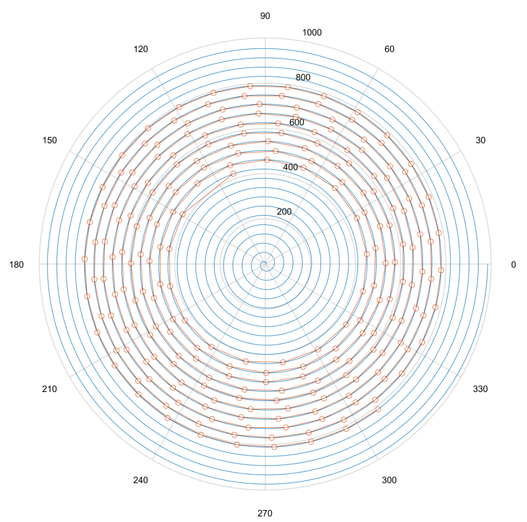


图 15 螺距为 41cm

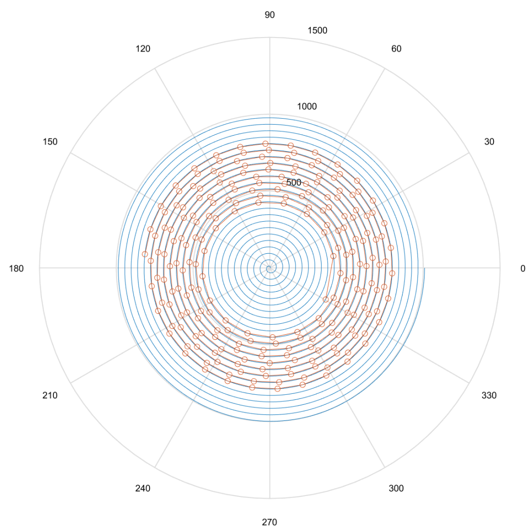


图 16 螺距为 42cm

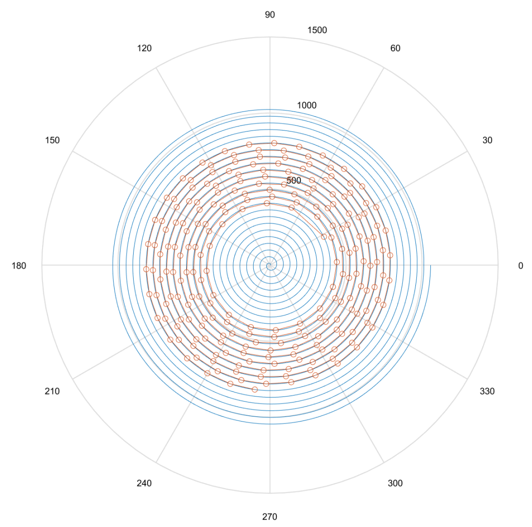


图 17 螺距为 44cm

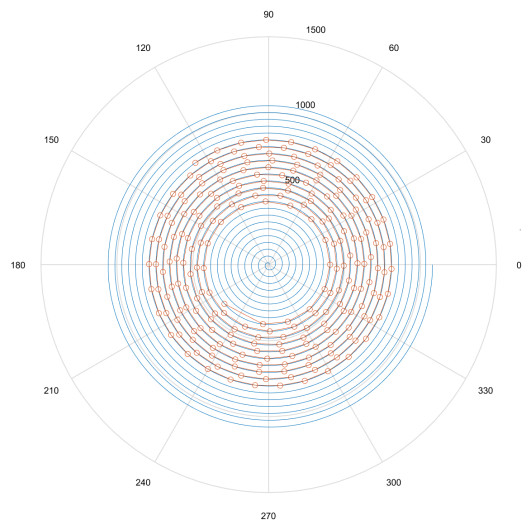


图 18 螺距为 45cm

根据表4不难看出，当螺距小于43cm时，发生碰撞的时间小于进入调头圆的时间，故在螺距小于43cm时，无法进入该调头区域；而当螺距大于43cm时，发生碰撞的时间大于进入调头圆的时间。

接着，进一步绘制螺距分别为41cm、42cm、44cm、45cm时恰好碰撞的“板凳龙”坐标位置图像（图15、图16、图17、图18），从而使得结果更加直观，并从可视化模拟的角度对该模型进行二次验证。

综上所述，通过上述模型的检验，验证得到最小螺距的取值为43cm。

## 5.4 问题四模型建立与求解

### 5.4.1 调头调整模型的建立

根据问题四的分析，已知盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称，且调头圆弧曲线与盘入螺线、盘出螺线均相切，所以龙头进入调头空间的速度方向与龙头盘出调头空间的速度方向相等且盘入盘出的位置关于原点对称，所以曲线圆弧与调头空间相交两点的连线过圆心。本题我们从两方面考虑对曲线圆弧长短的影响[6]。

**Step1**：两段圆弧半径的比例对调头曲线的影响

**命题二：**经过直径的两段圆弧的总长度与两段圆弧半径的比例无关。

**证：**如图19所示，设舞龙队龙头盘入时速度的角度与盘入盘出时与调头空间的两交点连线的夹角设为$\varphi$，所以图中两个扇形的圆心角均为$2\varphi$。

设调头空间的半径为$R$，第一段圆弧的半径为$r_1$，第二段圆弧的半径为$r_2$，调头曲线弧长为$S$。

对$\Delta BC'D$的形状与$\angle C'BD$的大小唯一确定。

$$\because BD \parallel EC$$

$$\therefore \angle BDC' = \angle CEC'$$

设：

$$BC' = n \cdot BC$$

即：

$$r_1 = n \cdot r_2$$

根据弧长公式$s = r \cdot \theta$所以调头曲线的弧长为，并将$r_1$与$r_2$的关系带入得：

$$\begin{aligned} \therefore S &= r_1 \cdot 2\varphi + r_2 \cdot 2\varphi \\ &= (n+1) r_2 \cdot 2\varphi \end{aligned}$$

在$\Delta ECC'$中，由正弦定理得：

$$\frac{r_2}{\sin \angle ECC'} = \frac{CC'}{\sin 2\varphi}$$

将上式关系带入弧长表达式

$$
\begin{aligned}
\therefore S &= (n+1)\frac{CC'\cdot 2\varphi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin 2\varphi}\\
&= 2R\cdot\frac{2\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin 2\varphi}\\
&= \frac{2R\cdot\varphi}{\sin\varphi}
\end{aligned}
$$

综上所述，命题二得证。

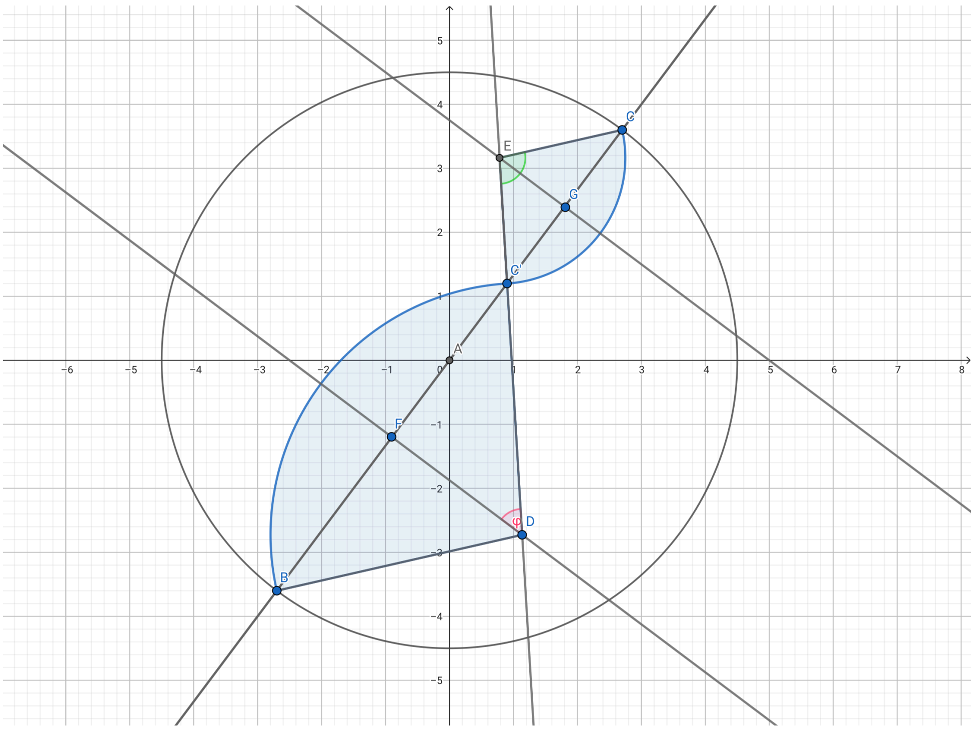

图 19　比例对圆弧的影响示意图

由$S=\dfrac{2R\cdot\varphi}{\sin\varphi}$可知，两端圆弧半径比例的调整，对调头曲线的长短$S$没有影响，但是调头曲线的长度随$\varphi$的增加而增大。

**Step2**：盘入速度方向对调头曲线的影响

由 **Step1** 所给出的公式：

$$
S=\frac{2R\cdot\varphi}{\sin\varphi} \tag{26}
$$

可以得出调头曲线受到龙头盘入速度方向的影响，由于舞龙队沿着螺线行进，所以龙头盘入的速度方向为螺线与调头空间的交点处的切线方向，因而我们考虑调整螺线，对速度方向的影响，进而考虑对调头曲线弧长的影响。首先在极坐标系中设出螺线的一般方程：

$$\rho_1 = r_0 + a\theta \tag{27}$$

调头空间的边界在极坐标系中的方程为：

$$\rho_2 = R \tag{28}$$

**命题三**：当螺线的常数项$r_0$取值为零时，弧长最短。

**证**：设螺线与调头空间边界交点处的切线方向即盘入的速度方向为$\gamma$ 径向速度：

$$v = \frac{d\rho_1}{d\theta} = a$$

螺线的切线方向为：

$$\tan\varphi_s = \frac{\rho_1}{\frac{d\rho_1}{d\theta}} = \frac{r_0 + a\theta}{a}$$

由反三角函数分别求解螺线切向角度和调头空间边界得切线角度：

$$\therefore \varphi_s = \arctan\left(\frac{r_0 + a\theta}{a}\right)$$

$$\varphi_r = \theta + \frac{\pi}{2}$$

调头空间边界曲线与螺线相交，所以在盘入时刻$\rho_r = \rho_s$，

$$\therefore r_0 + a\theta = R$$

$$\therefore \theta = \frac{R - r_0}{a}$$

交点处螺线的切线方向与调头空间边界的切线方向的夹角为：

$$\begin{aligned}\therefore \gamma &= |\varphi_r - \varphi_s| \\ &= |\theta + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{r_0 + a\theta}{a}\right)| \\ &= |\frac{R - r_0}{a} - \arctan\frac{R}{a} + \frac{\pi}{2}|\end{aligned}$$

由图20和命题二可知：

$$\because \gamma + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{2R\cdot\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\therefore S = 2R\cdot\frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\cos\gamma}$$

$S$随$r_0$增大而减小，$\gamma$随$r_0$减小而增大，即$S$在$\mathbb{R}$上单调递减，所以当$r_0=0$时，$S$取得最大值。

综上所述，命题三得证。

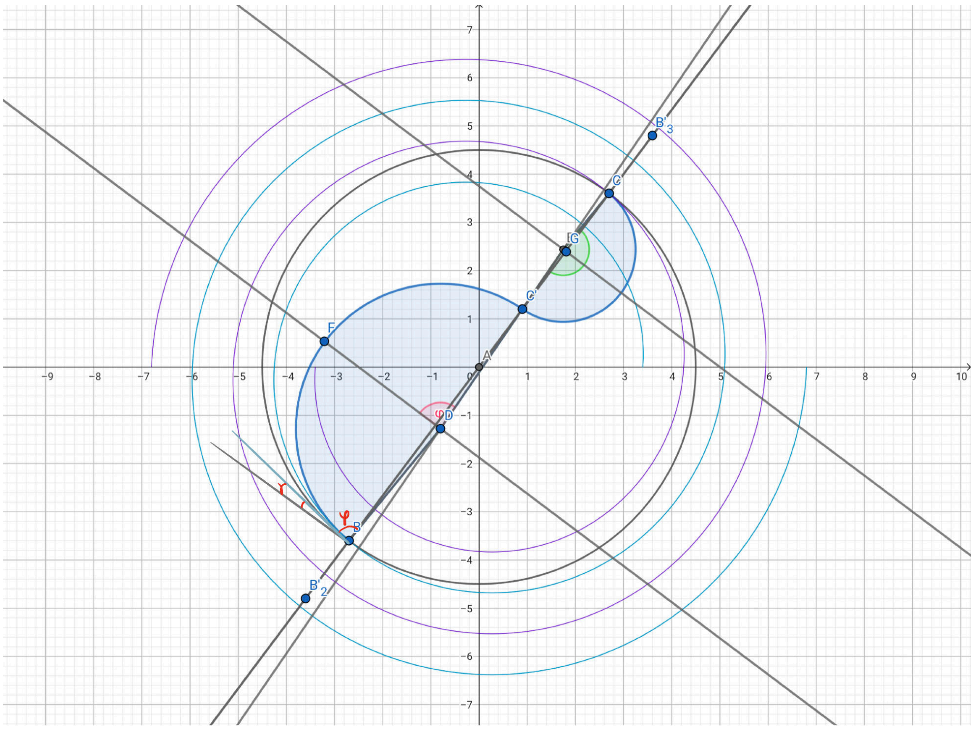

图 20　最短弧长示意图

**Step3：** 舞龙队位置速度的求解方程的建立

同理问题一所建立的递推方程组舞龙队$t'$时刻的位置求解递推方程组为：

$$\begin{cases} \rho_{i,t'}=\begin{cases} \dfrac{170}{2\pi}\theta_{i,t'},\theta<15.8388 \\ A\cos\theta_{i,t'}+B\sin\theta_{i,t'},\theta\geq 15.8388 \end{cases} \\ v_0t=\begin{cases} \displaystyle\int_L \frac{1}{2}a'\left[\theta_{0,t}\sqrt{1+\theta_{0,t}^2}+\ln\left(\theta_{0,t}+\sqrt{1+\theta_{0,t}^2}\right)\right]d\theta_{0,t},\theta\geq 15.8388 \\ \displaystyle\int_L \sqrt{A^2+B^2}d\theta_{0,t},\theta<15.8388 \end{cases} \\ d_{0,t'}=286=\sqrt{\left(x_{1,t'}-x_{0,t'}\right)^2+\left(y_{1,t'}-y_{0,t'}\right)^2} \\ d_{t'}=165=\sqrt{\left(x_{i,t'}-x_{i-1,t'}\right)^2+\left(y_{i,t'}-y_{i-1,t'}\right)^2},i=2...223 \\ y_{i,t'}=\rho_{i,t'}\sin\theta_{i,t'} \\ x_{i,t'}=\rho_{i,t'}\cos\theta_{i,t'} \end{cases} \tag{29}$$

舞龙队速度$t'$时刻求解递推方程组为：

$$
\begin{cases}
v_{1,t'} = \sqrt{v_{x,t'}^2 + y_{y,t'}^2} \\
v_{x,t'} = \dfrac{dx_{1,t'}}{dt'} \\
v_{y,t'} = \dfrac{dy_{1,t'}}{d_{t'}} \\
\dfrac{dy_{i,t'}}{d\theta_{i,t'}} = a'\left(\sin\theta_{i,t'} + \theta_{i,t'}\cos\theta_{i,t'}\right) \\
\dfrac{dx_{i,t'}}{d\theta_{i,t'}} = a'\left(\cos\theta_{i,t'} - \theta_{i,t'}\sin\theta_{i,t'}\right) \\
\tan\beta_{i,t'} = \dfrac{dy_{i,t'}}{dx_{i,t'}} = \dfrac{dy_{i,t'}}{d\theta_{i,t'}} \cdot \dfrac{d\theta_{i,t'}}{dx_{i,t'}} \\
k_1 = -\dfrac{x + 142.1097}{y + 31.9976} \\
k_2 = -\dfrac{x - 293.50515}{y - 31.9976} \\
\tan\alpha_{i,t'} = \dfrac{y_{i,t'} - y_{i-1,t'}}{x_{i,t'} - x_{i-1,t'}} \\
v_{i,t'}\cos\left(\beta_{i,t'} - \alpha_{i,t'}\right) = v_{i-1,t'}\cos\left(\alpha_{i,t'} - \beta_{i-1,t'}\right), i = 2...223
\end{cases}
\tag{30}
$$

**5.4.2 模型的分析与求解**

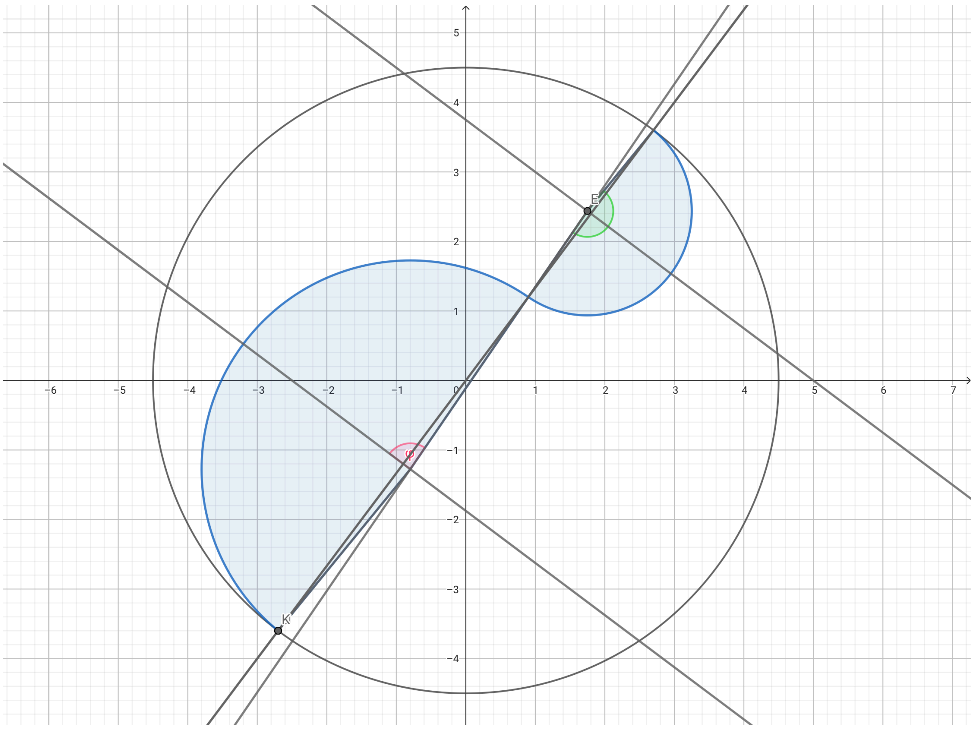

图 21　最短弧长示意图

根据命题二、三可知当螺线为

$$\rho_s = \frac{170}{2\pi}\theta \tag{31}$$

时，即调整螺旋线的常数$r_0 = 0$，示意图见图21，调头曲线为最短且各部分仍相切。

故调整后的调头圆弧曲线为：

$$\begin{cases} (x+142.1097)^2 + (y+31.9976)^2 = 300.7820^2 \\ (x-292.5052)^2 + (y-31.9976)^2 = 150.3910^2 \end{cases}$$

调头曲线弧长为：14.13$m$，各个时刻详细位置与速度见附件 `result4.xlsx`。 表5为部分时刻部分节点处的速度结果:

表 5　问题四速度结果

| | −100s | −50s | 0s | 50s | 100s |
|---|---|---|---|---|---|
| **龙头(m/s)** | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| **第 1 节龙身(m/s)** | 0.000000 | 1.007913 | 1.011524 | 0.999645 | 1.000604 |
| **第 51 节龙身(m/s)** | 0.000000 | 1.006727 | 1.007589 | 1.143352 | 0.996854 |
| **第 101 节龙身(m/s)** | 0.000000 | 1.006318 | 1.006868 | 1.39511 | 1.087242 |
| **第 151 节龙身(m/s)** | 0.000000 | 1.006110 | 1.006564 | 1.136406 | 1.097376 |
| **第 201 节龙身(m/s)** | 0.000000 | 1.005985 | 1.006397 | 1.126035 | 1.081294 |
| **龙尾（后）(m/s)** | 0.000000 | 1.005944 | 1.006345 | 1.106127 | 1.075967 |

表6为部分时刻部分节点处的位置坐标:

表 6　问题四位置结果

| | −100s | −50s | 0s | 50s | 100s |
|---|---|---|---|---|---|
| **龙头 x(m)** | 8.563861 | 6.613735 | −4.208056 | 3.314620 | 3.304717 |
| **龙头 y(m)** | 0.329763 | −1.567052 | −0.566890 | −4.628730 | −6.566453 |
| **第 1 节龙身 x(m)** | 8.005210 | 6.726715 | −3.124330 | 0.595625 | 0.515808 |
| **第 1 节龙身 y(m)** | 3.146324 | 1.303109 | −3.190248 | −5.522041 | −7.225894 |
| **第 51 节龙身 x(m)** | −9.244071 | −6.325619 | −0.081407 | 4.938657 | 0.211041 |
| **第 51 节龙身 y(m)** | 5.773577 | −7.194466 | −8.006304 | −4.383723 | −4.682433 |
| **第 101 节龙身 x(m)** | −12.646097 | 8.240549 | 5.720459 | −9.227218 | 2.907329 |
| **第 101 节龙身 y(m)** | −1.918050 | −8.286933 | 8.767418 | −1.805989 | −7.638837 |
| **第 151 节龙身 x(m)** | −14.422597 | 11.919464 | −4.548048 | 2.825300 | 2.337550 |
| **第 151 节龙身 y(m)** | 0.659011 | −6.272063 | 11.564178 | −11.190772 | 10.302785 |
| **第 201 节龙身 x(m)** | −10.301023 | 8.705875 | −4.634361 | 7.786875 | −7.783228 |
| **第 201 节龙身 y(m)** | 12.132226 | −12.266598 | 13.333053 | −10.835867 | 9.789785 |

| | −100s | −50s | 0s | 50s | 100s |
|---|---|---|---|---|---|
| 龙尾（后）x(m) | −3.082491 | 2.349597 | −4.133288 | −1.997577 | 4.651911 |
| 龙尾（后）y(m) | 16.234175 | 15.507325 | −14.209466 | 13.920971 | −12.429918 |

### 5.4.3 结果分析

根据问题四求解结果 result4，在螺线上行进时，速度连续变化，调头时速度发生明显变化。在1~10$s$该时段，龙头在调头曲线的第一段圆弧处行走，该时段速度，相邻时刻速度相差较大，间隔时刻逐渐递减。10~15$s$该时段，在调头曲线的第二段圆弧处行走，由第一段圆弧进入到第二段圆弧，速度明显减小，且在该圆弧处行走时速度逐渐减小。再次进入到螺线时，速度发生异常变化，明显增大，进入到螺线后速度保持稳定。

### 5.4.4 模型检验

现针对板凳摆放位置进行检验。针对已经求得的各个时刻板凳的为坐标位置，可以求出除龙头外222个板凳的长度，根据这222组数据可以绘出阶梯图（图22）：

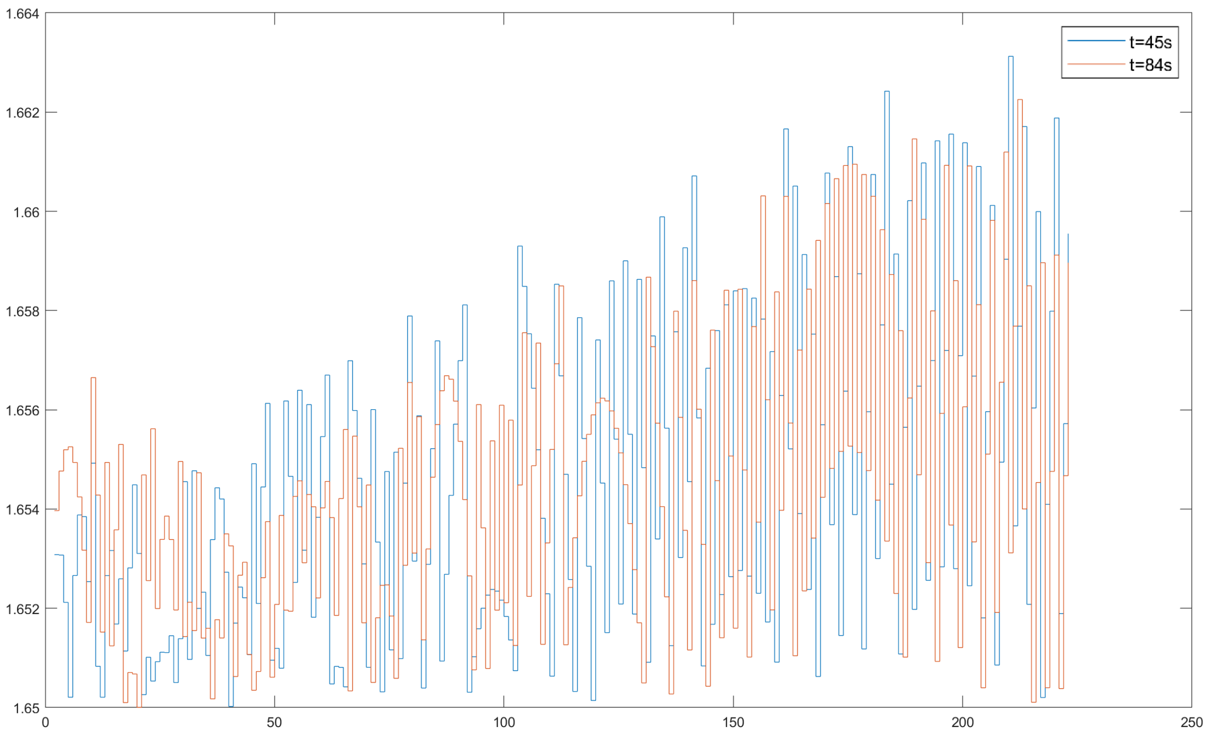


图 22　45s 和 84s 时刻板凳长度

从图中可以发现，板凳的长度均落在区间$[1.65, 1.663]$之间，即距离实际板凳长度165cm最大仅有$166.3-165=1.3$cm的误差，即最大误差度为：$\eta=\dfrac{1.3}{165}\approx 0.79\%$可以忽略不计，故问题四所建立的模型与求解有较强的解释能力。

## 5.5 问题五模型的建立与求解

### 5.5.1 数据分析及处理

根据第四问求解出的速度，发现在圆弧、螺线切线处位置求解存在一定的误差，对速度计算有一定的影响，故下述将判断进入盘入圆弧、进入盘出圆弧、进入盘出螺线的三个位置点是否有明显的误差，因此我们将引入速度的标准差来刻画该指标。龙身、龙尾每时刻速度的标准差：

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{n=1}^{n}\left(v_{i,t}-\overline{v}_{i,t}\right)^{2}}$$

其中，$v_{i,t}$是$t$时刻第$i$处的速度，$\overline{v}_{i,t}$为样本均值，$n$是样本容量。

本题我们使用2倍标准差，根据标准差识别异常数据。根据问题四的数据分析可知，在螺线与调头曲线交界处及调头曲线两段圆弧交界处，曲率半径发生明显变化，所以舞龙队在经过上述交界处时速度发生明显异常。沿螺线行驶时，曲率半径变化较为平缓，所以速度连续变化。综上，由于异常情况的出现，根据与设定阈大小的比较，我们将经过上述交界处的速度数据剔除，即剔除$9s$、$10s$、$14s$时刻的速度。

**5.5.2 最大行进速度优化模型的建立**

根据问题五的分析，龙头速度从$1m/s$开始逐步增加，同理问题四速度求解递推方程组求解出每个时刻舞龙队的速度，接着根据速度的标准差来达到速度不能超过$2m/s$的要求。

**Step1**：速度求解模型

龙头速度逐步增加，下式为龙头速度改变后$\theta$与$t'$关系式的确定，由此同问题四中，递推方程组(29)、(30)，求解出舞龙队的位置和速度。

$$v_0't=\begin{cases}\int_L\frac{1}{2}a'\left[\theta_{0,t}\sqrt{1+\theta_{0,t}^2}+\ln\left(\theta_{0,t}+\sqrt{1+\theta_{0,t}^2}\right)\right]d\theta_{0,t},\theta\geq 15.8388\\ \int_L\sqrt{A^2+B^2}d\theta_{0,t},\theta<15.8388\end{cases}\tag{32}$$

**Step2**：目标函数

将异常数据剔除后，以龙头最大行进速度为目标函数即：

$$\max=v_{0,t}'\tag{33}$$

**Step3:**约束条件

由题意龙身龙尾的速度不能超过$2m/s$所以约束条件为：

$$v_{i,t}'\leq 2\tag{34}$$

在确定最大行进速度时，不能发生碰撞所以确定龙头速度行进范围作为约束条件：

$$1\leq v_{0,t}'\leq 2,t'\neq 10、14、19\tag{35}$$

综上所述问题五龙头最大行驶速度优化模型为：

$$\max = v'_{i,t} \leq 2$$

$$s.t. = \begin{cases} v'_{i,t} \leq 2, t' \neq 10、14、19 \\ 1 \leq v'_{0,t} \leq 2 \end{cases} \tag{36}$$

#### 5.5.3 最大行进速度求解模型的求解

在剔除异常值后，我们每次将龙头最大行进速度增加$0.001m/s$，龙头速度再增加的同时不能发生碰撞，根据迭代方程组求解出每个时刻每个把手处的速度，与$2m/s$依次比较，若在该龙头行进速度下，龙身龙尾处的速度均小于$2m/s$，则继续进行迭代直至求解出龙头的最大行进速度为$1.269m/s$。

#### 5.5.4 模型检验

现将时间向前推进0.001秒对所求龙头最大行进速度进行检验，龙头分别为$1.269m/s$、$1.27m/s$时求解出每个板凳在所有时刻的速度，并绘制出速度分布图像（图23、图24）：

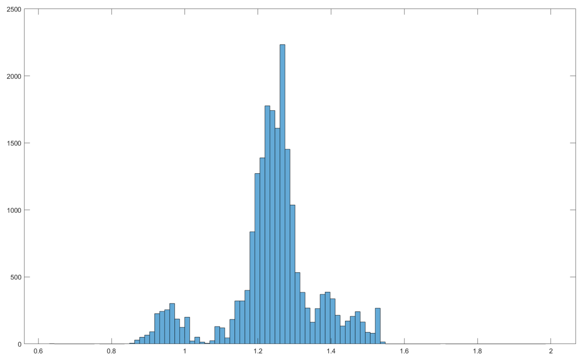

图 23　v=1.269m/s

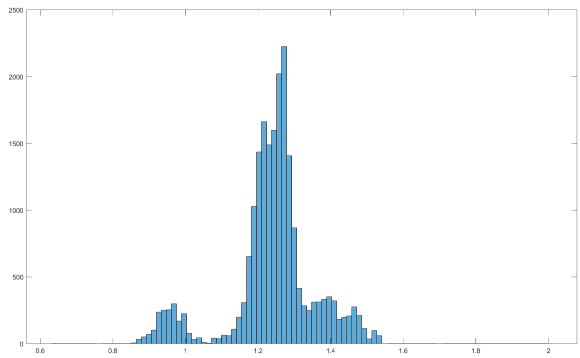

图 24　v=1.270m/s

龙头行进速度为$1.269m/s$、$1.27m/s$时，其余板凳的最大速度分别为$1.9930m/s$、$2.0034m/s$，后一速度不满足本题题目条件，故当龙头最大速度为$1.269m/s$时，所有龙身、龙尾的速度均小于$2m/s$。

## 六、 模型的评价与改进

### 6.1 模型优点

- **简洁易实现：**该模型在求解过程中，通过简化复杂的舞龙运动过程，将问题转化为易于量化的几何模型（如等距螺线方程和圆弧路径），从而易于求解和分析。并且针对各个部分的运动都通过明确的公式进行表达，便于通过编程实现数值模拟。
- **多板凳运动模拟：**模型不仅处理了龙头的运动，还通过螺旋线轨迹及每节板凳的递推关系，描述出整个舞龙过程中各节板凳之间的联动效果，充分考虑了板凳的物理长度及相互约束性，因此能准确模拟整个"板凳龙"在螺旋路径中的行进状态，确保各节板凳不会偏离轨迹，使得整个舞龙队的动作流畅而连贯。

- **扩展性强**：模型不仅能够处理等距螺旋线的盘入过程，还可以通过调整螺距、半径等参数，适应不同的螺旋路径，甚至时非螺线路径。调头时使用的圆弧或$S$形曲线也能通过类似的几何方法描述，展现出良好的灵活性，使得模型在不同规模和形式的舞龙表演中具有广泛的适用性。

### 6.2 模型缺点

- **操作过于理想化**：本文假设所有队员操作完全正确，忽略了实际情况中因为体力、步伐差异和反应时间等导致的路劲偏差的问题。
- **忽略三维运动状态**：本文没有考虑高度变化和舞龙过程中的上下运动。然而，实际舞龙会涉及到一定的空间起伏，这将导致位置、速度计算产生一定的误差。
- **碰撞检测过于简化**：本文仅用简单的距离公式进行碰撞检测，但在复杂的螺旋路径上，相邻板凳可能会有更复杂的重叠或干涉问题，这使得碰撞检测可能不够精确。

### 6.3 模型改进

- **引入现实因素**：为每个板凳的速度或位置引入一个随机变量，如正态分布的随机误差项$\delta v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$。可通过蒙特卡罗方法模拟求解，多次随机模拟，评估误差对整体舞龙轨迹的影响，获得更贴近现实的结果。
- **扩展三维空间**：在原有的二维极坐标基础上，增加高度$z$坐标，使位置表示为$(r, \theta, z)$。将螺旋线扩展为三维空间中的螺旋线，方程为：

$$
\begin{cases}
x(t) = [a + b \cdot \theta(t)] \cdot \cos(\theta(t)) \\
y(t) = [a + b \cdot \theta(t)] \cdot \sin(\theta(t)) \\
z(t) = c \cdot \theta(t)
\end{cases}
$$

可根据该公式重新推导位置、速度和加速度的计算公式，考虑三维空间的分量。

## 七、 模型推广

本文针对“板凳龙”舞龙所建立的数学模型，不仅是使用于解决传统民俗活动中的问题，还可以将改模型推广至无人驾驶汽车、自动化物流机器人等的队列控制与路径规划算法，用于优化编队运动的路径设计和速度分配，使得目标物体的轨迹更加灵活，能够确保不同的机器在有限空间中完成各种任务而不发生碰撞。

## 八、 参考文献

[1] 李谋涛. 守正创新：基于非物质文化遗产“徽州板凳龙”传承人的口述史考察[J]. 通化师范学院学报, 2024, 45(3): 31-37.

[2] 陈远宁. 关于等距曲线的若干研究[D]. 合肥工业大学, 2007.

[3] 胡桐庆, 刘丹, 谢恩东. 基于 GeoGebra 软件圆柱形螺旋线的可视化[J]. 物理通报, 2022(4): 121-124.

[4] 刘延斌, 金光, 张炜. 基于 MATLAB 轨迹规划的模型建立与数值仿真[J]. 计算机仿真, 2004, 21(1): 3-4.

[5] 杨丹. 连续系统模型经离散化后的误差分析[J]. 时代农机, 2018, 45(4): 224-225.

[6] 林庚钗. 城市道路平面几何线形优化设计研究[J].交通科技与管理[J]. 交通科技与管理, 2023, 4(18): 63-65.

# 九、 附录

## 附录 1: 第一问求解位置与速度代码

```
clc,clear,close all

anspos = [];     % 存储龙的各个部分的坐标
ansv = [];       % 存储龙的各个部分的速度

for q = 1:301
    % 求解积分方程，计算走过 (q-1)*100 米后的极坐标
    syms x
    lhs = (55/(4*pi))*(32*pi*sqrt(1 + 32^2*pi^2) + log(32*pi + sqrt(1 + 32^2*pi^2)) ...
        - x*sqrt(1 + x^2) - log(x + sqrt(1 + x^2)));  % 左侧积分方程
    rhs = (q-1)*100;  % 右侧为走过的总路程 (米)
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);  % 求解方程，得到 x 的数值解
    solution = double(solution);  % 将符号解转换为数值解
    disp(solution)  % 显示解

    % 利用微元法分割弧度，theta 为角度，r 为极径
    theta = solution:0.001:pi*44;  % 从解开始到 44 倍 π 的角度范围
    r = 55/(2*pi)*theta;  % 极径与角度成线性关系
    polar(theta,r)  % 极坐标绘制

    % 初始化存储极坐标转换为直角坐标的数组
    x = [];
    y = [];
    ii = [];  % 存储龙的各部分对应的索引

    % 将极坐标转换为平面直角坐标并存储
    for i = 1:length(theta)
        x = [x, r(i)*cos(theta(i))];  % 计算 x 坐标
        y = [y, r(i)*sin(theta(i))];  % 计算 y 坐标
    end

    % 初始化龙头的 x、y 坐标
    ansx = [];
    ansy = [];
    temp = [];  % 临时存储当前步的坐标

    % 计算并摆放龙头的位置
    for i = 1:length(theta)
        % 计算起点到当前点和下一点的距离，用于确定龙头位置
        dis1 = sqrt((x(1)-x(i+1))^2 + (y(1)-y(i+1))^2);
        dis2 = sqrt((x(1)-x(i+2))^2 + (y(1)-y(i+2))^2);
        if (dis1 < (341-55)) && (dis2 >= (341-55))  % 判断龙头是否在该位置
            i = i + 2;  % 更新索引
            ansx = [ansx; x(i)];  % 记录龙头的 x 坐标
            ansy = [ansy; y(i)];  % 记录龙头的 y 坐标
            temp = [temp; x(i); y(i)];  % 临时存储龙头的坐标
            ii = [ii; i];  % 记录索引
            break;  % 找到龙头后退出循环
        end
    end

    % 放置龙身和龙尾
    for i = 1:222  % 龙身一共 222 个节点
        % 获取前一个确定的龙身或龙头位置
        prex = ansx(i);  % 前一个节点的 x 坐标
        prey = ansy(i);  % 前一个节点的 y 坐标
        if i == 1
            j = ii(1);  % 初始化索引
        end
        % 遍历剩余 theta 值，寻找龙身和龙尾的位置
```

```
        for j = j:length(theta)-2
            dis1 = sqrt((prex-x(j+1))^2 + (prey-y(j+1))^2);
            dis2 = sqrt((prex-x(j+2))^2 + (prey-y(j+2))^2);
            if (dis1 < (220-55)) && (dis2 >= (220-55))  % 判断龙身节点是否符合距离条件
                j = j + 2;  % 更新索引
                ansx = [ansx; x(j)];  % 记录龙身的 x 坐标
                ansy = [ansy; y(j)];  % 记录龙身的 y 坐标
                temp = [temp; x(j); y(j)];  % 临时存储该节点坐标
                ii = [ii; j];  % 记录索引
                break;  % 找到节点后退出当前循环
            end
        end
    end

    % 将初始位置 (龙头起点) 添加到答案
    ansx = [r(i)*cos(solution); ansx];  % 将初始 x 坐标插入到结果中
    ansy = [r(i)*sin(solution); ansy];  % 将初始 y 坐标插入到结果中
    temp = [r(i)*cos(solution); r(i)*sin(solution); temp];  % 更新临时存储
    anspos = [anspos, temp];  % 将当前步的坐标存储到总结果中
    ii = [1; ii];  % 更新索引

    % 初始化速度数组, 龙头速度默认为 100
    v = [100];

    % 初始化角度差 det 数组, 存储各部分角度变化
    det = [];

    % 计算龙身及龙尾的角速度 w
    w = 100 / sqrt(ansx(1)^2 + ansy(1)^2);  % 根据龙头位置计算角速度

    % 当 q > 1 时, 开始计算速度
    if q > 1
        for i = 2:224


            % 计算龙头和龙身各部分的角度 theta1, theta2, theta3
            theta1 = atan((ansy(i)-ansy(i-1)) / (ansx(i)-ansx(i-1)));  % 龙头前后点的角度
            dt1 = (sin(theta(ii(i-1))) + theta(ii(i-1)) * cos(theta(ii(i-1)))) / ...
                  (cos(theta(ii(i-1))) - theta(ii(i-1)) * sin(theta(ii(i-1))));
            theta2 = atan(dt1);  % 计算角度 2
            dt2 = (sin(theta(ii(i))) + theta(ii(i)) * cos(theta(ii(i)))) / ...
                  (cos(theta(ii(i))) - theta(ii(i)) * sin(theta(ii(i))));
            theta3 = atan(dt2);  % 计算角度 3
            det = [det; theta1, theta2, theta3];  % 存储角度变化

            if i == 2  % 龙头速度单独计算 (微分法)
                tempv = sqrt((anspos(i, q) - anspos(i, q-1))^2 + ...
                             (anspos(i-1, q) - anspos(i-1, q-1))^2);
            else  % 龙身和龙尾速度用物理定律计算
                tempv = abs(v(i-1) * cos(theta2 - theta1) / cos(theta3 - theta1));
            end

            v = [v; tempv];  % 存储当前速度
        end
        ansv = [ansv, v];  % 将当前步的速度存储到总结果中
    end
end

% 单位换算
ansv = ansv / 100;
anspos = anspos / 100;
```

## 附录 2: 第二问求解碰撞时间代码

```
clc,clear,close all

for q = 300:450
    % 求解积分方程，计算走过 q 米后的极坐标
    syms x
    lhs = (55/(4*pi))*(32*pi*sqrt(1 + 32^2*pi^2) + log(32*pi + sqrt(1 + 32^2*pi^2)) ...
        - x*sqrt(1 + x^2) - log(x + sqrt(1 + x^2))); % 左侧积分方程
    rhs = q*100;  % 右侧方程，单位为米
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x); % 求解方程，获取 x 的数值解
    solution = double(solution); % 将符号解转换为数值解
    disp(solution) % 显示求解结果

    % 利用微元法分割弧度，theta 为角度，r 为极径
    theta = solution:0.001:pi*36; % 从解开始到 36 倍 π 的角度范围
    r = 55/(2*pi)*theta; % 极径与角度成线性关系
    polar(theta, r) % 极坐标绘制

    % 初始化存储极坐标转换为直角坐标的数组
    x = [];
    y = [];
    ii = [];
    anstheta = [];

    % 遍历 theta 计算对应的直角坐标并存储
    for i = 1:length(theta)
        x = [x, r(i)*cos(theta(i))]; % 计算 x 坐标
        y = [y, r(i)*sin(theta(i))]; % 计算 y 坐标
    end

    % 初始化龙头坐标
    ansx = [];
    ansy = [];

    % 查找并确定龙头的位置
    for i = 1:length(theta)
        % 计算当前点与起点之间的距离，用于确定龙头位置
        dis1 = sqrt((x(1)-x(i+1))^2 + (y(1)-y(i+1))^2);
        dis2 = sqrt((x(1)-x(i+2))^2 + (y(1)-y(i+2))^2);
        % 判断是否符合龙头的位置条件 (距离范围约为 341 - 27.5)
        if (dis1 < (341-27.5)) && (dis2 >= (341-27.5))
            i = i+2; % 更新索引
            ansx = [ansx; x(i)]; % 记录龙头的 x 坐标
            ansy = [ansy; y(i)]; % 记录龙头的 y 坐标
            anstheta = [anstheta, theta(i)]; % 记录龙头对应的弧度
            ii = [ii; i]; % 记录索引
            break; % 找到龙头后退出循环
        end
    end

    % 放置龙身和龙尾
    for i = 1:222
        % 确定前一个已确定的龙身或龙头位置
        prex = ansx(i); % 前一个 x 坐标
        prey = ansy(i); % 前一个 y 坐标
        if i == 1
            j = ii(1); % 初始化索引
        end
        % 遍历剩余的 theta 值
        for j = j:length(theta)-2
            % 计算当前点与前一个点的距离，用于确定龙身的位置
            dis1 = sqrt((prex-x(j+1))^2 + (prey-y(j+1))^2);
            dis2 = sqrt((prex-x(j+2))^2 + (prey-y(j+2))^2);
            % 判断是否符合龙身的位置条件 (距离范围约为 220 - 55)
```

```
            if (dis1 < (220-55)) && (dis2 >= (220-55))
                j = j+2; % 更新索引
                ansx = [ansx; x(j)]; % 记录龙身的 x 坐标
                ansy = [ansy; y(j)]; % 记录龙身的 y 坐标
                anstheta = [anstheta, theta(j)]; % 记录龙身对应的弧度
                ii = [ii; j]; % 记录索引
                break; % 找到位置后退出当前循环
            end
        end
    end
    % 将龙头加入到已确定的坐标列表
    ansx = [r(i)*cos(solution); ansx];
    ansy = [r(i)*sin(solution); ansy];
    ii = [1; ii]; % 更新索引
    anstheta = [solution, anstheta]; % 更新弧度值

    % 计算相邻点的角度差
    dtheta = atan((ansy(1)-ansy(2)) / (ansx(1)-ansx(2)));
    if dtheta < 0
        dtheta = pi + dtheta; % 确保角度为正
    end
    % 计算龙头位置的偏移坐标
    xx = ansx(1) + cos(dtheta)*27.5;
    yy = ansy(1) + sin(dtheta)*27.5;

    % 调整 ytheta 以满足距离要求
    if atan(yy/xx) < 0
        ytheta = floor(anstheta(1)/pi)*pi - atan(yy/xx);
    else
        ytheta = ceil(anstheta(1)/pi)*pi - atan(yy/xx);
    end

    % 计算距离差值
    d1 = ytheta*55/2/pi; % 根据极坐标计算 d1
    d = sqrt(15^2 + 27.5^2); % 距离 d
    theta1 = atan(15/27.5); % 角度 theta1
    ytheta = ytheta + theta1; % 调整 ytheta
    d2 = sqrt(xx^2 + yy^2); % 计算 d2

    % 确定龙尾的位置
    for i = 1:40
        if (anstheta(i) < (anstheta(1)+pi*2)) && (anstheta(i+1) >= (anstheta(1)+pi*2))
            i = i + 1;
            break;
        end
    end
    % 计算距离差并判断是否符合要求
    dd = abs(d2 - d1);
    if dd > 40
        break; % 满足条件后退出
    end
end

% 单位换算
ansx = ansx / 100;
ansy = ansy / 100;
```

## 附录 3: 第二问求解碰撞时位置与速度代码

```
% 大致思路同问题一，故不再重复添加注释
clc,clear,close all

anspos = [];
```

```
ansv = [];

for q = 1:408
    syms x
    lhs = (55/(4*pi))*(32*pi*sqrt(1 + 32^2*pi^2) + log(32*pi + sqrt(1 ...
        + 32^2*pi^2)) - x*sqrt(1 + x^2) - log(x + sqrt(1 + x^2)));
    rhs = (q-1)*100;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    disp(solution)

    theta = solution:0.001:pi*44;
    r = 55/(2*pi)*theta;
    polar(theta,r)

    x = [];
    y = [];
    ii = [];

    for i = 1:length(theta)
        x = [x,r(i)*cos(theta(i))];
        y = [y,r(i)*sin(theta(i))];
    end

    ansx = [];
    ansy = [];
    temp = [];

    for i = 1:length(theta)
        dis1 = sqrt((x(1)-x(i+1))^2+(y(1)-y(i+1))^2);
        dis2 = sqrt((x(1)-x(i+2))^2+(y(1)-y(i+2))^2);
        if (dis1<(341-55))&&(dis2>=(341-55))
            i=i+2;
            ansx = [ansx;x(i)];
            ansy = [ansy;y(i)];
            temp = [temp;x(i);y(i)];
            ii = [ii;i];
            break;
        end
    end

    for i = 1:222
        prex = ansx(i);
        prey = ansy(i);
        if i == 1
            j = ii(1);
        end
        for j = j:length(theta)-2
            dis1 = sqrt((prex-x(j+1))^2+(prey-y(j+1))^2);
            dis2 = sqrt((prex-x(j+2))^2+(prey-y(j+2))^2);
            if (dis1<(220-55))&&(dis2>=(220-55))
                j = j+2;
                ansx = [ansx;x(j)];
                ansy = [ansy;y(j)];
                temp = [temp;x(j);y(j)];
                ii = [ii;j];
                break;
            end
        end
    end
    ansx = [r(i)*cos(solution);ansx];
    ansy = [r(i)*sin(solution);ansy];
    temp = [r(i)*cos(solution);r(i)*sin(solution);temp];
    anspos = [anspos,temp];
    ii = [1;ii];

    v = [100];
```

```
    det = [];
    w = 100/sqrt(ansx(1)^2+ansy(1)^2);
    if q>1
        for i = 2:224
            theta1 = atan((ansy(i)-ansy(i-1))/(ansx(i)-ansx(i-1)));
                      dt1  =  (sin(theta(ii(i-1)))+theta(ii(i-1))*cos(theta(ii(i-1))))/
(cos(theta(ii(i-1)))-theta(ii(i-1))*sin(theta(ii(i-1))));
            theta2 = atan(dt1);
            dt2 = (sin(theta(ii(i)))+theta(ii(i))*cos(theta(ii(i))))/(cos(theta(ii(i)))-
theta(ii(i))*sin(theta(ii(i))));
            theta3 = atan(dt2);
            det = [det;theta1,theta2,theta3];

            if i == 2
                               tempv  =  sqrt(  (anspos(i,q)-anspos(i,q-1))^2+(anspos(i-1,q)-
anspos(i-1,q-1))^2 );
            else
                tempv = abs(v(i-1)*cos(theta2-theta1)/cos(theta3-theta1));
            end

            v = [v;tempv];
        end
        ansv = [ansv,v];
    end
end

ansv=ansv/100;
ansx = ansx/100;
ansy = ansy/100;

writematrix(ansx,"ansx.xlsx")
writematrix(ansy,"ansy.xlsx")
writematrix(ansv(:,407),"ansv.xlsx")
```

**附录 4: 第三问求解最小螺距代码**

```
% 大致思路同问题二，故不再重复添加注释
clc,clear,close all

for qq = 55:-1:30   % 迭代螺距，从 50->30
    % 求解碰撞时后的时间
    for q = 100:400
        syms x
        lhs = (qq/(4*pi))*(32*pi*sqrt(1 + 32^2*pi^2) + log(32*pi + sqrt(1 ...
            + 32^2*pi^2)) - x*sqrt(1 + x^2) - log(x + sqrt(1 + x^2)));
        rhs = q*100;
        solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
        solution = double(solution);

        theta = solution:0.001:pi*64;
        r = qq/(2*pi)*theta;
        polar(theta,r)

        x = [];
        y = [];
        ii = [];
        anstheta = [];

        for i = 1:length(theta)
            x = [x,r(i)*cos(theta(i))];
            y = [y,r(i)*sin(theta(i))];
        end

        ansx = [];
```

```
    ansy = [];

    for i = 1:length(theta)
        dis1 = sqrt((x(1)-x(i+1))^2+(y(1)-y(i+1))^2);
        dis2 = sqrt((x(1)-x(i+2))^2+(y(1)-y(i+2))^2);
        if (dis1<(341-27.5))&&(dis2>=(341-27.5))
            i=i+2;
            ansx = [ansx;x(i)];
            ansy = [ansy;y(i)];
            anstheta = [anstheta,theta(i)];
            ii = [ii;i];
            break;
        end
    end

    for i = 1:222
        prex = ansx(i);
        prey = ansy(i);
        if i == 1
            j = ii(1);
        end
        for j = j:length(theta)-2
            dis1 = sqrt((prex-x(j+1))^2+(prey-y(j+1))^2);
            dis2 = sqrt((prex-x(j+2))^2+(prey-y(j+2))^2);
            if (dis1<(220-55))&&(dis2>=(220-55))
                j = j+2;
                ansx = [ansx;x(j)];
                ansy = [ansy;y(j)];
                anstheta = [anstheta,theta(j)];
                ii = [ii;j];
                break;
            end
        end
    end
    ansx = [r(i)*cos(solution);ansx];
    ansy = [r(i)*sin(solution);ansy];
    ii = [1;ii];
    anstheta = [solution,anstheta];

    dtheta = atan((ansy(1)-ansy(2))/(ansx(1)-ansx(2)));
    if dtheta<0
        dtheta = pi+dtheta;
    end
    xx = ansx(1)+cos(dtheta)*27.5;
    yy = ansy(1)+sin(dtheta)*27.5;

    if atan(yy/xx)<0
        ytheta = floor(anstheta(1)/pi)*pi-atan(yy/xx);
    else
        ytheta = ceil(anstheta(1)/pi)*pi-atan(yy/xx);
    end
    d1 = abs(ytheta*qq/2/pi);
    d2 = sqrt(xx^2+yy^2);
    for i = 1:40
        if (anstheta(i)<(anstheta(1)+pi*2))&& ...
            (anstheta(i+1)>=(anstheta(1)+pi*2))
            i = i+1;
            break;
        end
    end
    dd = abs(d2-d1);
    if dd>40
        break;
    end
end
if d2>450
    disp(qq)
    break;
```

```
    end
end
```

## 附录 5: 第四问确定进入时间代码

```
clc,clear,close all

% 从 q = 379 到 q = 579 的循环
for q = 479-100:479+100
    syms x
    lhs = (170/(4*pi))*(32*pi*sqrt(1 + 12^2*pi^2) + log(12*pi + sqrt(1 ...
        + 12^2*pi^2)) - x*sqrt(1 + x^2) - log(x + sqrt(1 + x^2)));
    rhs = q*100;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    disp(solution)

    % 生成从解值到 pi*30 的 theta 值
    theta = solution:0.001:pi*30;
    % 计算对应的 r 值
    r = 170/(2*pi)*theta;
    polar(theta,r)

    % 初始化 x, y, ii, anstheta 的数组
    x = [];
    y = [];
    ii = [];
    anstheta = [];

    % 根据极坐标转换为平面直角坐标
    for i = 1:length(theta)
        x = [x,r(i)*cos(theta(i))];
        y = [y,r(i)*sin(theta(i))];
    end

    ansx = [];
    ansy = [];

    % 找到满足特定条件的点
    for i = 1:length(theta)
        dis1 = sqrt((x(1)-x(i+1))^2+(y(1)-y(i+1))^2);
        dis2 = sqrt((x(1)-x(i+2))^2+(y(1)-y(i+2))^2);
        if (dis1<(341-27.5))&&(dis2>=(341-27.5))
            i=i+2;
            ansx = [ansx;x(i)];
            ansy = [ansy;y(i)];
            anstheta = [anstheta,theta(i)];  % 添加对应的 theta 值
            ii = [ii;i];  % 记录满足条件的索引
            break;
        end
    end

    % 继续在 theta 中寻找更多满足条件的点
    for i = 1:222
        prex = ansx(i);
        prey = ansy(i);
        if i == 1
            j = ii(1);
        end
        for j = j:length(theta)-2
            dis1 = sqrt((prex-x(j+1))^2+(prey-y(j+1))^2);
            dis2 = sqrt((prex-x(j+2))^2+(prey-y(j+2))^2);
            if (dis1<(220-55))&&(dis2>=(220-55))
                j = j+2;
```

```
                ansx = [ansx;x(j)];
                ansy = [ansy;y(j)];
                anstheta = [anstheta,theta(j)];
                ii = [ii;j];
                break;
            end
        end
    end

    % 将初始解的坐标加入结果中
    ansx = [r(i)*cos(solution);ansx];
    ansy = [r(i)*sin(solution);ansy];
    ii = [1;ii];
    anstheta = [solution,anstheta];

    % 计算角度 dtheta
    dtheta = atan((ansy(1)-ansy(2))/(ansx(1)-ansx(2)));
    if dtheta<0
        dtheta = pi + dtheta;  % 调整角度范围
    end

    % 计算板凳端点的坐标
    xx = ansx(1) + cos(dtheta)*27.5;
    yy = ansy(1) + sin(dtheta)*27.5;

    % 碰撞时端点到原点的距离
    d2 = sqrt(xx^2 + yy^2);

    % 如果距离小于 450, 则显示并终止循环
    if d2 < 450
        disp(d2)
        break;
    end
end
```

## 附录 6: 第四问求解-100~0s 的位置和速度代码

```
%大致思路同问题一, 故不再重复添加注释
clc,clear,close all

theta = 15.8388:0.001:32*pi;
r = 170/(2*pi)*theta;
polar(theta,r)

%绘制图像
hold on
polar(theta,-r,'r')
viscircles([-142.1097 -31.9976],300.7819,'Color','r');
viscircles([292.50515 31.9976],150.39095,'Color','g');
hold off

clc,clear,close all

anspos = [];
ansv = [];

for q = 1:101
    syms x
    lhs = (170/(4*pi))*(-15.8388*sqrt(1 + 15.8388^2) - log(15.8388 + sqrt(1 ...
        + 15.8388^2)) + x*sqrt(1 + x^2) + log(x + sqrt(1 + x^2)));
    rhs = (q-1)*100;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    disp(solution)
```

```
theta = solution:0.001:pi*32;
r = 170/(2*pi)*theta;
polar(theta,r)

x = [];
y = [];
ii = [];

for i = 1:length(theta)
    x = [x,r(i)*cos(theta(i))];
    y = [y,r(i)*sin(theta(i))];
end

ansx = [];
ansy = [];
temp = [];

for i = 1:numel(theta)-2
    dis1 = sqrt((x(1)-x(i+1))^2+(y(1)-y(i+1))^2);
    dis2 = sqrt((x(1)-x(i+2))^2+(y(1)-y(i+2))^2);
    if (dis1<(341-55))&&(dis2>=(341-55))
        i=i+2;
        ansx = [ansx;x(i)];
        ansy = [ansy;y(i)];
        temp = [temp;x(i);y(i)];
        ii = [ii;i];
        break;
    end
end

for i = 1:222
    prex = ansx(i);
    prey = ansy(i);
    if i == 1
        j = ii(1);
    end
    for j = j:length(theta)-2
        dis1 = sqrt((prex-x(j+1))^2+(prey-y(j+1))^2);
        dis2 = sqrt((prex-x(j+2))^2+(prey-y(j+2))^2);
        if (dis1<(220-55))&&(dis2>=(220-55))
            j = j+2;
            ansx = [ansx;x(j)];
            ansy = [ansy;y(j)];
            temp = [temp;x(j);y(j)];
            ii = [ii;j];
            break;
        end
    end
end
ansx = [r(i)*cos(solution);ansx];
ansy = [r(i)*sin(solution);ansy];
temp = [r(i)*cos(solution);r(i)*sin(solution);temp];
anspos = [anspos,temp];
ii = [1;ii];

v = [100];

det = [];
w = 100/sqrt(ansx(1)^2+ansy(1)^2);
if q>1
    for i = 2:224
        theta1 = atan((ansy(i)-ansy(i-1))/(ansx(i)-ansx(i-1)));
                      dt1  =  (sin(theta(ii(i-1)))+theta(ii(i-1))*cos(theta(ii(i-1))))/
(cos(theta(ii(i-1)))-theta(ii(i-1))*sin(theta(ii(i-1))));
        theta2 = atan(dt1);
        dt2 = (sin(theta(ii(i)))+theta(ii(i))*cos(theta(ii(i))))/(cos(theta(ii(i)))-
theta(ii(i))*sin(theta(ii(i))));
```

```
            theta3 = atan(dt2);
            det = [det;theta1,theta2,theta3];

            if i == 2
                              tempv  =  sqrt(  (anspos(i,q)-anspos(i,q-1))^2+(anspos(i-1,q)-
anspos(i-1,q-1))^2 );
            else
                tempv = abs(v(i-1)*cos(theta2-theta1)/cos(theta3-theta1));
            end
            v = [v;tempv];
        end
        ansv = [ansv,v];
    end
end

anspos=anspos(:, end:-1:1);
writematrix(ansv,"ansv.xlsx");
writematrix(anspos,"result1pos.xlsx")
```

**附录 7:　第四问求解 0~100s 的位置和速度代码**

```
% 大致思路同问题一，故不再重复添加注释
clc,clear,close all

anspos = [];
ansv = [];

theta0 = 15.8388;

position = [];

% 生成进入螺线的坐标
for i = 1:80000
    x = 170/(2*pi)*theta0*cos(theta0);
    y = 170/(2*pi)*theta0*sin(theta0);
    theta0 = theta0+0.001;
    position = [position;x,y];
end
theta0 = 3.2724;
% 生成进入圆弧的坐标
for i = 1:10000
    if theta0 < 3.2724-pi
        break;
    end
    syms x
    lhs = x^2+2*x*142.1097*cos(theta0)+2*x*31.9976*sin(theta0)+142.1097^2+31.9976^2;
    rhs = 290.7816^2;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    if solution(1)>0
        x = solution(1)*cos(theta0);
        y = solution(1)*sin(theta0);
    else
        x = solution(2)*cos(theta0);
        y = solution(2)*sin(theta0);
    end
    position = [x,y;position];
    disp(solution)
    theta0 = theta0-0.001;
end
temp = [];
theta0 = -pi/6;
% 生成退出圆弧的坐标
for i = 1:10000
```

```
    if theta0 > 3.2724-pi
        break;
    end
    syms x
    lhs = x^2-2*x*292.50515*cos(theta0)-2*x*31.9976*sin(theta0)+292.50515^2+31.9976^2;
    rhs = 145.39095^2;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    disp(solution)
    if solution(1)>0&&isreal(solution(1))
        x = solution(1)*cos(theta0);
        y = solution(1)*sin(theta0);
        temp = [x,y;temp];
    end
    if solution(2)>0&&isreal(solution(2))
        x = solution(2)*cos(theta0);
        y = solution(2)*sin(theta0);
        temp = [x,y;temp];
    end
    disp(solution)
    theta0 = theta0+0.001;
end

[n,m]=size(temp);
for i = 1:n
    for j = i:n
        if temp(i,1)<temp(j,1)
            q=temp(i,:);
            temp(i,:) = temp(j,:);
            temp(j,:) = q;
        end
    end
end
position = [temp;position];

% 生成退出螺线的坐标
theta0 = 15.8388;
for i = 1:30000
    x = -(170/(2*pi)*theta0)*cos(theta0);
    y = -(170/(2*pi)*theta0)*sin(theta0);
    theta0 = theta0+0.001;
    position = [x,y;position;];
end
[n,m]=size(position);
dis_temp = [];
for i = 1:n
    dis_temp = [dis_temp;sqrt(position(i,1)^2+position(i,2)^2)];
end
%plot(position(:,1),position(:,2),'-',linewidth=1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% 导入圆弧上的坐标数据
data = table2array(readtable("position.xlsx","Range","A1:B14"));

% 求解位置和速度
for q = 1:100
    theta = [];
    v = q*1;
    if q<=14
        ansx = [data(q,1)];
        ansy = [data(q,2)];
        temp_theta = atan(ansy/ansx);
        if temp_theta<0
            temp_theta = pi+temp_theta;
        end
        theta = [theta;temp_theta];
        if q<=9
            i_index = floor(34258-333*v);
```

```
        ii = floor([34258-333*v]);
    else
        i_index = floor(34258-3141-(666-141)-666*(v-9-1));
        ii = floor([34258-3141-(666-141)-666*(v-9-1)]);
    end
end
if q>14
    syms xx
    lhs = (170/(4*pi))*(-15.8388*sqrt(1 + 15.8388^2) - log(15.8388 ...
        + sqrt(1 + 15.8388^2)) + xx*sqrt(1 + xx^2) + log(xx + sqrt(1 + xx^2)));
    rhs = ((v-14.1372)+0.1372)*100;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, xx);
    solution = double(solution);
    disp(solution)
    rho_s = 170/(pi*2)*solution;
    theta = [theta;solution];
    abs_diff = abs(dis_temp - rho_s);
    i_index = floor(find(abs_diff == min(abs_diff)));
    ansx = [position(i_index(1),1)];
    ansy = [position(i_index(1),2)];
    ii = [i_index(1)];
end

x = position(:,1);
y = position(:,2);
temp = [];

for i = i_index(1):numel(x)-1
    dis1 = sqrt((ansx(1)-x(i))^2+(ansy(1)-y(i))^2);
    dis2 = sqrt((ansx(1)-x(i+1))^2+(ansy(1)-y(i+1))^2);
    if (dis1<(341-55))&&(dis2>=(341-55))
        i=i+1;
        ansx = [ansx;x(i)];
        ansy = [ansy;y(i)];
        temp = [temp;x(i);y(i)];
        temp_theta = atan(y(i)/x(i));
        if temp_theta<0
                temp_theta = pi+temp_theta;
            end
        for tt = 1:22
            if 170/(2*pi)*(temp_theta+2*pi)>(sqrt(x(i)^2+y(i)^2))
                theta = [theta;temp_theta];
                break;
            end
            temp_theta = temp_theta+2*pi;
        end
        ii = [ii;i];
        break;
    end
end

for i = 1:222
    prex = ansx(i+1);
    prey = ansy(i+1);
    for j = ii(i+1):numel(x)
        dis1 = sqrt((prex-x(j))^2+(prey-y(j))^2);
        dis2 = sqrt((prex-x(j+1))^2+(prey-y(j+1))^2);
        if (dis1<(220-55))&&(dis2>=(220-55))
            j = j+1;
            ansx = [ansx;x(j)];
            ansy = [ansy;y(j)];
            temp = [temp;x(j);y(j)];
            temp_theta = atan(y(j)/x(j));
            if temp_theta<-pi/2
                temp_theta = pi-temp_theta;
            end
            for tt = 1:22
                if 170/(2*pi)*(temp_theta+2*pi)>(sqrt(x(j)^2+y(j)^2))
```

```
                        theta = [theta;temp_theta];
                        break;
                    end
                    temp_theta = temp_theta+2*pi;
                end
                ii = [ii;j];
                break;
            end
        end
    end
    temp = [x(ii(1));y(ii(1));temp];
    anspos = [anspos,temp];

    v = [100];

    det = [];
    w = 100/sqrt(ansx(1)^2+ansy(1)^2);
    if q>1
        for i = 2:2:446
            tempv = sqrt( (anspos(i,q)-anspos(i,q-1))^2+(anspos(i-1,q)-anspos(i-1,q-1))^2);
            v = [v;tempv];
        end
        ansv = [ansv,v];
    end
end
ansv=ansv/100;
anspos = anspos/100;
```

## 附录 8: 第五问求解最优速度代码

```
clc,clear,close all

anspos = [];
ansv = [];

theta0 = 15.8388;

position = [];

for i = 1:80000
    x = 170/(2*pi)*theta0*cos(theta0);
    y = 170/(2*pi)*theta0*sin(theta0);
    theta0 = theta0+0.001;
    position = [position;x,y];
end
theta0 = 3.2724;
for i = 1:10000
    if theta0 < 3.2724-pi
        break;
    end
    syms x
    lhs = x^2+2*x*142.1097*cos(theta0)+2*x*31.9976*sin(theta0)+142.1097^2+31.9976^2;
    rhs = 290.7816^2;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    if solution(1)>0
        x = solution(1)*cos(theta0);
        y = solution(1)*sin(theta0);
    else
        x = solution(2)*cos(theta0);
        y = solution(2)*sin(theta0);
    end
    position = [x,y;position];
    disp(solution)
    theta0 = theta0-0.001;
```

```
end
temp = [];
theta0 = -pi/6;
for i = 1:10000
    if theta0 > 3.2724-pi
        break;
    end
    syms x
    lhs = x^2-2*x*292.50515*cos(theta0)-2*x*31.9976*sin(theta0)+292.50515^2+31.9976^2;
    rhs = 145.39095^2;
    solution = vpasolve(lhs == rhs, x);
    solution = double(solution);
    disp(solution)
    if solution(1)>0&&isreal(solution(1))
        x = solution(1)*cos(theta0);
        y = solution(1)*sin(theta0);
        temp = [x,y;temp];
    end
    if solution(2)>0&&isreal(solution(2))
        x = solution(2)*cos(theta0);
        y = solution(2)*sin(theta0);
        temp = [x,y;temp];
    end
    disp(solution)
    theta0 = theta0+0.001;
end

[n,m]=size(temp);
for i = 1:n
    for j = i:n
        if temp(i,1)<temp(j,1)
            q=temp(i,:);
            temp(i,:) = temp(j,:);
            temp(j,:) = q;
        end
    end
end
position = [temp;position];

theta0 = 15.8388;
for i = 1:30000
    x = -(170/(2*pi)*theta0)*cos(theta0);
    y = -(170/(2*pi)*theta0)*sin(theta0);
    theta0 = theta0+0.001;
    position = [x,y;position;];
end
[n,m]=size(position);
dis_temp = [];
for i = 1:n
    dis_temp = [dis_temp;sqrt(position(i,1)^2+position(i,2)^2)];
end
%plot(position(:,1),position(:,2),'-',linewidth=1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

data = table2array(readtable("position.xlsx","Range","A1:B14"));

for q = 1:100
    theta = [];
    v = q*0.95; % 调整速度
    if q<=14
        ansx = [data(q,1)];
        ansy = [data(q,2)];
        temp_theta = atan(ansy/ansx);
        if temp_theta<0
            temp_theta = pi+temp_theta;
        end
        theta = [theta;temp_theta];
        if q<=9
```

```
            i_index = floor(34258-333*v);
            ii = floor([34258-333*v]);
        else
            i_index = floor(34258-3141-(666-141)-666*(v-9-1));
            ii = floor([34258-3141-(666-141)-666*(v-9-1)]);
        end
    end
    if q>14
        syms xx
        lhs = (170/(4*pi))*(-15.8388*sqrt(1 + 15.8388^2) - log(15.8388 ...
            + sqrt(1 + 15.8388^2)) + xx*sqrt(1 + xx^2) + log(xx + sqrt(1 + xx^2)));
        rhs = ((v-14.1372)+0.1372)*100;
        solution = vpasolve(lhs == rhs, xx);
        solution = double(solution);
        disp(solution)
        rho_s = 170/(pi*2)*solution;
        theta = [theta;solution];
        abs_diff = abs(dis_temp - rho_s);
        i_index = floor(find(abs_diff == min(abs_diff)));
        ansx = [position(i_index(1),1)];
        ansy = [position(i_index(1),2)];
        ii = [i_index(1)];
    end

    x = position(:,1);
    y = position(:,2);
    temp = [];

    for i = i_index(1):numel(x)-1
        dis1 = sqrt((ansx(1)-x(i))^2+(ansy(1)-y(i))^2);
        dis2 = sqrt((ansx(1)-x(i+1))^2+(ansy(1)-y(i+1))^2);
        if (dis1<(341-55))&&(dis2>=(341-55))
            i=i+1;
            ansx = [ansx;x(i)];
            ansy = [ansy;y(i)];
            temp = [temp;x(i);y(i)];
            temp_theta = atan(y(i)/x(i));
            if temp_theta<0
                    temp_theta = pi+temp_theta;
                end
            for tt = 1:22
                if 170/(2*pi)*(temp_theta+2*pi)>(sqrt(x(i)^2+y(i)^2))
                    theta = [theta;temp_theta];
                    break;
                end
                temp_theta = temp_theta+2*pi;
            end
            ii = [ii;i];
            break;
        end
    end

    for i = 1:222
        prex = ansx(i+1);
        prey = ansy(i+1);
        for j = ii(i+1):numel(x)
            dis1 = sqrt((prex-x(j))^2+(prey-y(j))^2);
            dis2 = sqrt((prex-x(j+1))^2+(prey-y(j+1))^2);
            if (dis1<(220-55))&&(dis2>=(220-55))
                j = j+1;
                ansx = [ansx;x(j)];
                ansy = [ansy;y(j)];
                temp = [temp;x(j);y(j)];
                temp_theta = atan(y(j)/x(j));
                if temp_theta<-pi/2
                    temp_theta = pi-temp_theta;
                end
                for tt = 1:22
```

```
                    if 170/(2*pi)*(temp_theta+2*pi)>(sqrt(x(j)^2+y(j)^2))
                        theta = [theta;temp_theta];
                        break;
                    end
                    temp_theta = temp_theta+2*pi;
                end
                ii = [ii;j];
                break;
            end
        end
    end
    temp = [x(ii(1));y(ii(1));temp];
    anspos = [anspos,temp];

    v = [100];

    det = [];
    w = 100/sqrt(ansx(1)^2+ansy(1)^2);
    if q>1
        for i = 2:2:446
            tempv = sqrt( (anspos(i,q)-anspos(i,q-1))^2+(anspos(i-1,q)-anspos(i-1,q-1))^2);
            v = [v;tempv];
        end
        ansv = [ansv,v];
    end
end
ansv=ansv/100;
anspos = anspos/100;
```