十 关注用户



文章 / 股票问题系列通解 (转载翻译)



股票问题系列通解 (转载翻译)

Storm 📎 🔽 发布于 2020-08-22 9.1k 阅读

说明

原文出处: Most consistent ways of dealing with the series of stock problems

这篇文章大致是对原文的翻译。和原文相比,这篇文章多了未优化空间的代码,且代码都重新写了,另外更改了部分文字描述。

前言

股票问题一共有六道题,链接如下:

- 121. 买卖股票的最佳时机
- 122. 买卖股票的最佳时机 II
- 123. 买卖股票的最佳时机 Ⅲ
- 188. 买卖股票的最佳时机 IV
- 309. 最佳买卖股票时机含冷冻期
- 714. 买卖股票的最佳时机含手续费

每个问题都有优质的题解,但是大多数题解没有建立起这些问题之间的联系,也没有给出股票问题 系列的通解。这篇文章给出适用于全部股票问题的通解,以及对于每个特定问题的特解。

一、通用情况

这个想法基于如下问题:**给定一个表示每天股票价格的数组,什么因素决定了可以获得的最大收益?**

相信大多数人可以很快给出答案,例如「在哪些天进行交易以及允许多少次交易」。这些因素当然重要,在问题描述中也有这些因素。然而还有一个隐藏但是关键的因素决定了最大收益,下文将阐述这一点。

首先介绍一些符号:

- 用 n 表示股票价格数组的长度;
- 用 i 表示第 i 天 (i 的取值范围是 0 到 n 1);
- 用 k 表示允许的最大交易次数;
- 用 T[i][k] 表示在第 i 天结束时,最多进行 k 次交易的情况下可以获得的最大收益。

基准情况是显而易见的: T[-1][k] = T[i][0] = 0 , 表示没有进行股票交易时没有收益 (注意第一天对应 i = 0 , 因此 i = -1 表示没有股票交易)。现在如果可以将 T[i][k] 关联到子问题,例如 T[i-1][k] 、 T[i][k-1] 、 T[i-1][k-1] 等子问题,就能得到状态转移方程,并对这个问题求解。如何得到状态转移方程呢?

最直接的办法是看第 i 天可能的操作。有多少个选项?答案是三个: 买入、卖出、休息。应该选择哪个操作?答案是:并不知道哪个操作是最好的,但是可以通过计算得到选择每个操作可以得到的最大收益。假设没有别的限制条件,则可以尝试每一种操作,并选择可以最大化收益的一种操作。但是,题目中确实有限制条件,规定不能同时进行多次交易,因此如果决定在第 i 天买入,在买入之前必须持有 0 份股票,如果决定在第 i 天卖出,在卖出之前必须恰好持有 1 份股票。持有股票的数量是上文提及到的隐藏因素,该因素影响第 i 天可以进行的操作,进而影响最大收益。

因此对 T[i][k] 的定义需要分成两项:

- T[i][k][0] 表示在第 i 天结束时,最多进行 k 次交易且在进行操作后持有 0 份股票的情况下可以获得的最大收益;
- T[i][k][1] 表示在第 i 天结束时,**最多**进行 k 次交易且在进行操作后持有 1 份股票的情况下可以获得的最大收益。

使用新的状态表示之后,可以得到基准情况和状态转移方程。

基准情况:

```
T[-1][k][0] = 0, T[-1][k][1] = -Infinity
T[i][0][0] = 0, T[i][0][1] = -Infinity
```

状态转移方程:

```
T[i][k][0] = \max(T[i-1][k][0], T[i-1][k][1] + \text{prices}[i])
T[i][k][1] = \max(T[i-1][k][1], T[i-1][k-1][0] - \text{prices}[i])
```

基准情况中, T[-1][k][0] = T[i][0][0] = 0 的含义和上文相同, T[-1][k][1] = T[i][0][1] = -Infinity 的含义是在没有进行股票交易时不允许持有股票。

对于状态转移方程中的 T[i][k][0] ,第 i 天进行的操作只能是**休息**或**卖出**,因为在第 i 天结束时持有的股票数量是 0 。 T[i-1][k][0] 是**休息**操作可以得到的最大收益,T[i-1][k][1] + prices[i] 是**卖出**操作可以得到的最大收益。注意到允许的最大交易次数是不变的,因为每次交易包含两次成对的操作,**买入**和**卖出**。只有**买入**操作会改变允许的最大交易次数。

对于状态转移方程中的 T[i][k][1] ,第 i 天进行的操作只能是休息或买入,因为在第 i 天结束时持有的股票数量是 1 。 T[i-1][k][1] 是休息操作可以得到的最大收益, T[i-1][k-1] [0] - Prices[i] 是买入操作可以得到的最大收益。注意到允许的最大交易次数减少了一次,因为每次买入操作会使用一次交易。

为了得到最后一天结束时的最大收益,可以遍历股票价格数组,根据状态转移方程计算 T[i][k] [0] 和 T[i][k][1] 的值。最终答案是 T[n-1][k][0],因为结束时持有 0 份股票的收益一定大于持有 1 份股票的收益。

二、应用于特殊情况

上述六个股票问题是根据 k 的值进行分类的,其中 k 是允许的最大交易次数。最后两个问题有附加限制,包括「冷冻期」和「手续费」。通解可以应用于每个股票问题。

情况一: k = 1

情况一对应的题目是「121. 买卖股票的最佳时机」。

对于情况一,每天有两个未知变量: T[i][1][0] 和 T[i][1][1], 状态转移方程如下:

```
T[i][1][0] = max(T[i - 1][1][0], T[i - 1][1][1] + prices[i])
T[i][1][1] = max(T[i - 1][1][1], T[i - 1][0][0] - prices[i]) = max(T[i - 1][1][1], -prices[i])
```

第二个状态转移方程利用了 T[i][0][0] = 0。

根据上述状态转移方程,可以写出时间复杂度为 O(n) 和空间复杂度为 O(n) 的解法。

```
class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
            return 0;
        }
        int length = prices.length;
        int[][] dp = new int[length][2];
        dp[0][0] = 0;
        dp[0][1] = -prices[0];
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            dp[i][0] = Math.max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1] + prices[i]);
            dp[i][1] = Math.max(dp[i - 1][1], -prices[i]);
        }
        return dp[length - 1][0];
    }
}</pre>
```

如果注意到第 i 天的最大收益只和第 i-1 天的最大收益相关,空间复杂度可以降到 O(1)。

```
Java
```

```
class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
            return 0;
        }
        int profit0 = 0, profit1 = -prices[0];
        int length = prices.length;
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            profit0 = Math.max(profit0, profit1 + prices[i]);
            profit1 = Math.max(profit1, -prices[i]);
        }
        return profit0;
    }
}</pre>
```

现在对上述解法进行分析。对于循环中的部分, profit1 实际上只是表示到第 i 天的股票价格的相反数中的最大值,或者等价地表示到第 i 天的股票价格的最小值。对于 profit0 ,只需要决定 **卖出**和休息中的哪项操作可以得到更高的收益。如果进行**卖出**操作,则**买入**股票的价格为 profit1 ,即第 i 天之前(不含第 i 天)的最低股票价格。这正是现实中为了获得最大收益会做的事情。但是这种做法不是唯一适用于这种情况的解决方案。读者可能在 这里 找到别的好的解决方案。

情况二: k 为正无穷

情况二对应的题目是「122. 买卖股票的最佳时机Ⅱ」。

如果 k 为正无穷, 则 k 和 k - 1 可以看成是相同的, 因此有 T[i - 1][k - 1][0] = T[i - 1][k][0] 和 T[i - 1][k - 1][1] = T[i - 1][k][1] 。每天仍有两个未知变量: T[i][k][0] 和 T[i][k][1] ,其中 k 为正无穷, 状态转移方程如下:

```
T[i][k][0] = max(T[i - 1][k][0], T[i - 1][k][1] + prices[i])
T[i][k][1] = max(T[i - 1][k][1], T[i - 1][k - 1][0] - prices[i]) = max(T[i - 1][k][1], T[i - 1][k][0]

| |
```

第二个状态转移方程利用了 T[i - 1][k - 1][0] = T[i - 1][k][0]。

根据上述状态转移方程,可以写出时间复杂度为 O(n) 和空间复杂度为 O(n) 的解法。

```
class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
            return 0;
        }
        int length = prices.length;
        int[][] dp = new int[length][2];
        dp[0][0] = 0;
        dp[0][1] = -prices[0];
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            dp[i][0] = Math.max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1] + prices[i]);
            dp[i][1] = Math.max(dp[i - 1][1], dp[i - 1][0] - prices[i]);
        }
        return dp[length - 1][0];
    }
}</pre>
```

如果注意到第 i 天的最大收益只和第 i-1 天的最大收益相关,空间复杂度可以降到 O(1)。

```
Java

class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
            return 0;
        }
        int profit0 = 0, profit1 = -prices[0];
        int length = prices.length;
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            int newProfit0 = Math.max(profit0, profit1 + prices[i]);
            int newProfit1 = Math.max(profit1, profit0 - prices[i]);
            profit0 = newProfit0;</pre>
```

```
profit1 = newProfit1;
}
return profit0;
}
```

这个解法提供了获得最大收益的贪心策略:可能的情况下,在每个局部最小值买入股票,然后在之后遇到的第一个局部最大值卖出股票。这个做法等价于找到股票价格数组中的递增子数组,对于每个递增子数组,在开始位置买入并在结束位置卖出。可以看到,这和累计收益是相同的,只要这样的操作的收益为正。

情况三: k = 2

情况三对应的题目是「123. 买卖股票的最佳时机 III」。

情况三和情况一相似,区别之处是,对于情况三,每天有四个未知变量: T[i][1][0] 、 T[i][1] [1] 、 T[i][2][0] 、 T[i][2][1] ,状态转移方程如下:

```
T[i][2][0] = max(T[i - 1][2][0], T[i - 1][2][1] + prices[i])

T[i][2][1] = max(T[i - 1][2][1], T[i - 1][1][0] - prices[i])

T[i][1][0] = max(T[i - 1][1][0], T[i - 1][1][1] + prices[i])

T[i][1][1] = max(T[i - 1][1][1], T[i - 1][0][0] - prices[i]) = max(T[i - 1][1][1], -prices[i])
```

第四个状态转移方程利用了 T[i][0][0] = 0。

根据上述状态转移方程,可以写出时间复杂度为 O(n) 和空间复杂度为 O(n) 的解法。

```
Java
class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
           return 0:
        int length = prices.length;
        int[][][] dp = new int[length][3][2];
        dp[0][1][0] = 0;
        dp[0][1][1] = -prices[0];
        dp[0][2][0] = 0;
        dp[0][2][1] = -prices[0];
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            dp[i][2][0] = Math. max(dp[i-1][2][0], dp[i-1][2][1] + prices[i]);
            dp[i][2][1] = Math. max(dp[i-1][2][1], dp[i-1][1][0] - prices[i]);
            dp[i][1][0] = Math. max(dp[i-1][1][0], dp[i-1][1][1] + prices[i]);
            \label{eq:dp[i][1][1] = Math.max(dp[i-1][1][1], dp[i-1][0][0] - prices[i]);} \\
        return dp[length - 1][2][0];
```

如果注意到第 i 天的最大收益只和第 i-1 天的最大收益相关,空间复杂度可以降到 O(1)。

该解法与这里给出的解法基本相同。

情况四: k 为任意值

情况四对应的题目是「188. 买卖股票的最佳时机 Ⅳ」。

情况四是最通用的情况,对于每一天需要使用不同的 k 值更新所有的最大收益,对应持有 0 份股票或 1 份股票。如果 k 超过一个临界值,最大收益就不再取决于允许的最大交易次数,而是取决于股票价格数组的长度,因此可以进行优化。那么这个临界值是什么呢?

一个有收益的交易至少需要两天(在前一天买入,在后一天卖出,前提是买入价格低于卖出价格)。如果股票价格数组的长度为 n ,则有收益的交易的数量最多为 n / 2 (整数除法)。因此 k 的临界值是 n / 2 。如果给定的 k 不小于临界值,即 k >= n / 2 ,则可以将 k 扩展为正无穷,此时问题等价于情况二。

根据状态转移方程,可以写出时间复杂度为O(nk)和空间复杂度为O(nk)的解法。

```
Java
class Solution {
    public int maxProfit(int k, int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
           return 0;
        int length = prices.length;
        if (k \ge 1 \text{ ength } / 2) {
            return maxProfit(prices);
        int[][][] dp = new int[length][k + 1][2];
        for (int i = 1; i \le k; i++) {
            dp[0][i][0] = 0;
            dp[0][i][1] = -prices[0];
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            for (int j = k; j > 0; j—) {
                dp[i][j][0] = Math. max(dp[i-1][j][0], dp[i-1][j][1] + prices[i]);
                dp[i][j][1] = Math. max(dp[i-1][j][1], dp[i-1][j-1][0] - prices[i]);
        return dp[length - 1][k][0];
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
           return 0;
        int length = prices.length;
        int[][] dp = new int[length][2];
        dp[0][0] = 0;
        dp[0][1] = -prices[0];
```

如果注意到第 i 天的最大收益只和第 i-1 天的最大收益相关,空间复杂度可以降到 O(k)。

```
Java
class Solution {
    public int maxProfit(int k, int[] prices) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
            return 0;
        int length = prices.length;
        if (k \ge 1 \text{ ength } / 2) {
           return maxProfit(prices);
        int[][] dp = new int[k + 1][2];
        for (int i = 1; i \le k; i ++) {
           dp[i][0] = 0;
            dp[i][1] = -prices[0];
        for (int i = 1; i < length; i++) \{
            for (int j = k; j > 0; j--) {
                dp[j][0] = Math. max(dp[j][0], dp[j][1] + prices[i]);
                dp[j][1] = Math. max(dp[j][1], dp[j-1][0] - prices[i]);
        return dp[k][0];
```

```
public int maxProfit(int[] prices) {
   if (prices == null || prices.length == 0) {
      return 0;
   }
   int profit0 = 0, profit1 = -prices[0];
   int length = prices.length;
   for (int i = 1; i < length; i++) {
      int newProfit0 = Math.max(profit0, profit1 + prices[i]);
   }
}</pre>
```

如果不根据 k 的值进行优化,在 k 的值很大的时候会超出时间限制。

该解法与 这里 的解法相似。对交易次数的循环使用反向循环是为了避免使用临时变量。

情况五: k 为正无穷但有冷却时间

情况五对应的题目是「309. 最佳买卖股票时机含冷冻期」。

由于具有相同的 k 值,因此情况五和情况二非常相似,不同之处在于情况五有「冷却时间」的限制,因此需要对状态转移方程进行一些修改。

情况二的状态转移方程如下:

```
T[i][k][0] = max(T[i-1][k][0], T[i-1][k][1] + prices[i])
T[i][k][1] = max(T[i-1][k][1], T[i-1][k][0] - prices[i])
```

但是在有「冷却时间」的情况下,如果在第 i-1 天卖出了股票,就不能在第 i 天买入股票。因此,如果要在第 i 天买入股票,第二个状态转移方程中就不能使用 T[i-1][k][0] ,而应该使用 T[i-2][k][0] 。状态转移方程中的别的项保持不变,新的状态转移方程如下:

```
T[i][k][0] = \max(T[i-1][k][0], T[i-1][k][1] + \text{prices}[i])
T[i][k][1] = \max(T[i-1][k][1], T[i-2][k][0] - \text{prices}[i])
```

根据上述状态转移方程,可以写出时间复杂度为 O(n) 和空间复杂度为 O(n) 的解法。

```
class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices) {
        if (prices == null || prices. length == 0) {
            return 0;
        }
        int length = prices. length;
        int[][] dp = new int[length][2];
        dp[0][0] = 0;
        dp[0][1] = -prices[0];
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            dp[i][0] = Math. max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1] + prices[i]);
            dp[i][1] = Math. max(dp[i - 1][1], (i >= 2 ? dp[i - 2][0] : 0) - prices[i]);
        }
        return dp[length - 1][0];
    }
}
```

如果注意到第 i 天的最大收益只和第 i-1 天和第 i-2 天的最大收益相关,空间复杂度可以降到 O(1)。

```
class Solution {
   public int maxProfit(int[] prices) {
      if (prices == null || prices. length == 0) {
           return 0;
      }
      int prevProfit0 = 0, profit0 = 0, profit1 = -prices[0];
      int length = prices. length;
      for (int i = 1; i < length; i++) {
           int nextProfit0 = Math. max(profit0, profit1 + prices[i]);
           int nextProfit1 = Math. max(profit1, prevProfit0 - prices[i]);
           profit0 = profit0;
           profit1 = nextProfit1;
      }
}</pre>
```

```
return profit0;
}
```

dietpepsi 在 这里 分享了一个很好的解法,并加入了思考过程,该解法和上面的解法是相同的。

情况六: k 为正无穷但有手续费

情况六对应的题目是「714. 买卖股票的最佳时机含手续费」。

情况二的状态转移方程如下:

```
T[i][k][0] = max(T[i-1][k][0], T[i-1][k][1] + prices[i])

T[i][k][1] = max(T[i-1][k][1], T[i-1][k][0] - prices[i])
```

由于需要对每次交易付手续费,因此在每次买入或卖出股票之后的收益需要扣除手续费,新的状态转移方程有两种表示方法。

第一种表示方法,在每次买入股票时扣除手续费:

```
 T[i][k][0] = \max(T[i-1][k][0], T[i-1][k][1] + \text{prices}[i]) 
 T[i][k][1] = \max(T[i-1][k][1], T[i-1][k][0] - \text{prices}[i] - \text{fee})
```

第二种表示方法,在每次卖出股票时扣除手续费:

```
T[i][k][0] = \max(T[i-1][k][0], T[i-1][k][1] + \text{prices}[i] - \text{fee})
T[i][k][1] = \max(T[i-1][k][1], T[i-1][k][0] - \text{prices}[i])
```

根据上述状态转移方程,可以写出时间复杂度为 O(n) 和空间复杂度为 O(n) 的解法。

```
class Solution {
    public int maxProfit(int[] prices, int fee) {
        if (prices == null || prices.length == 0) {
            return 0;
        }
        int length = prices.length;
        int[][] dp = new int[length][2];
        dp[0][0] = 0;
        dp[0][1] = -prices[0] - fee;
        for (int i = 1; i < length; i++) {
            dp[i][0] = Math.max(dp[i - 1][0], dp[i - 1][1] + prices[i]);
            dp[i][1] = Math.max(dp[i - 1][1], dp[i - 1][0] - prices[i] - fee);
        }
        return dp[length - 1][0];
    }
}</pre>
```

如果注意到第i 天的最大收益只和第i-1 天的最大收益相关,空间复杂度可以降到O(1)。

```
class Solution {
   public int maxProfit(int[] prices) {
      if (prices == null || prices. length == 0) {
          return 0;
      }
      int profit0 = 0, profit1 = -prices[0] - fee;
      int length = prices. length;
      for (int i = 1; i < length; i++) {
          int newProfit0 = Math. max(profit0, profit1 + prices[i]);
          int newProfit1 = Math. max(profit1, profit0 - prices[i] - fee);
          profit0 = newProfit0;
          profit1 = newProfit1;
      }
      return profit0;
}</pre>
```

三、总结

总而言之,股票问题最通用的情况由三个特征决定:当前的天数 i 、允许的最大交易次数 k 以及每天结束时持有的股票数。这篇文章阐述了最大利润的状态转移方程和终止条件,由此可以得到时间复杂度为 O(nk) 和空间复杂度为 O(k) 的解法。该解法可以应用于六个问题,对于最后两个问题,需要将状态转移方程进行一些修改。这里推荐 peterleetcode 的 解法,该解法可以推广到任意的 k 值,感兴趣的读者可以进行阅读。



情况四: k 为任意值

```
从第k次开始到1和从1开始到k次有什么区别吗? 为什么要从后往前
     for (int i = 1; i < length; i++) {
       for (int j = k; j > 0; j--) {
          dp[j][0] = Math.max(dp[j][0], dp[j][1] + prices[i]);
          dp[j][1] = Math.max(dp[j][1], dp[j - 1][0] - prices[i]);
     }
△赞 伊踩 見查看3条回复 △回复
常大伟
                                                          2020-11-25
不知道这个算不算是不符合无后效性原则,前面的选择都会影响后面
△1 ▽踩 🗦 查看 2 条回复 🗘 回复
J_hou আ
                                                          2020-08-23
很清晰,已经过了这些股票题,,
凸2 夕踩 4回复
WAN QU
                                                          2020-09-01
情况三为什么不是对dp[i][2][0]和dp[i][1][0]取最大呢
△赞 ♀踩 目查看5条回复 △回复
🌑 Jaan আ
                                                          2020-12-10
为什么最多允许的交易次数只和买有关,买和卖是——对应的,要是我想限制卖的次数而不是买的次数,可以吗?该怎么写状态转移
△赞 伊踩 同查看1条回复 △回复
   Velvet
                                                          2020-10-30
如何证明: 因为结束时持有 0 份股票的收益一定大于持有 1 份股票的收益?
△赞 伊踩 同查看2条回复 ◇回复
Phil 👊
                                                          2020-08-29
交易k-1次的结果 可是这时候k-1次还没有结果啊
△赞 伊踩 貝查看3条回复 △回复
Gabriel-18 😎
                                                             8 天前
②太獅了
△赞 ♀踩 △回复
🧲 Gabriel-18 🔽
                                                             8 天前
大佬还会发其他dp的总结吗
△赞 伊踩 ☆回复
```

力扣 LeetCode	企业服务	商务	关于我们
	在线面试	社区合作	价值观

方程

< 1 2 >

 讨论社区
 招聘
 赞助竞赛

 求职
 培训
 产品推广

Plus 会员 解决方案

周边商城

商务咨询 问题反馈 加入我们 使用条款 隐私政策 © 2021 领扣网络 (上海) 有限公司