9.2 平面薄片的质心

(李顺波 孙俊萍)

● 教学目标与要求

利用二重积分解决实际问题，求解平面薄片的质心

● 教学重点与难点

教学重点：用微元法解决实际问题的方法
教学难点：微元法的思想方法

● 教学方法与建议

我们从曲顶柱体的体积、平面薄片的质量的研究抽象出二重积分的定义；本节我们利用二重积分来解决这些物理、几何和工程技术中的实际问题。质点系的质心在中学物理中未必讲过，本节从质点系引入，利用微元法得出平面薄片的质心公式，并解决这类几和问题.

● 教学过程设计

1．问题提出

从《大学物理》我们学习了在质点系中研究质心(质量之心)的方法。设在xOy平面上有n个质点，他们分别位于点

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

处，质量分别为$m_1,m_2,\cdots,m_n$.从力学知道，该质点系的质量中心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

其中

$$M=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

为该质点系的总质量

$$M_y=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n$$

$$M_x=m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n$$

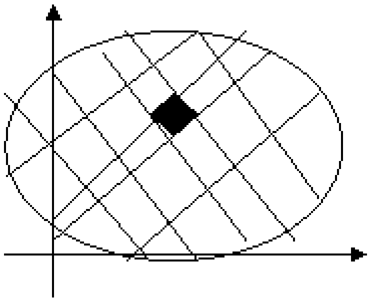
分别为该质点系对y轴和x轴的静矩.
积分的思想就是分割，求和，取极限，如何应用质点系的质心来求平面薄片的质心呢？

2．平面薄片的质心

方法：利用微元法，i.部分量的近似值作为整体量的元素。ii. 以部分量的近似值为被积表达式在被分区域D上积分得整体量。

设有一平面薄片，占有xOy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在D上连续。如何找该薄片的质心的坐标呢？

在闭区域D上任取直径很小的闭区域$d\sigma$（也记为闭区域的面积），(x,y)是这个小闭区域上的一点，由于$d\sigma$的直径很小，且$\rho(x,y)$在D上连续，因此薄片中相应于$d\sigma$的部分的质量近似等于$\rho(x,y)d\sigma$，用极限的思想这部分质量可近似看作集中在点(x,y)上，所以可利用质点系的方法写出静矩元素



$$dM_y = x\rho(x,y)d\sigma$$

$$dM_x = y\rho(x,y)d\sigma$$

以这些元素为被积表达式，在闭区域D上积分，得

$$M_y = \iint_D x\rho(x,y)d\sigma$$

$$M_x = \iint_D y\rho(x,y)d\sigma$$

由前面的一节知，薄片的质量为

$$M = \iint_D \rho(x,y)d\sigma$$

所以，薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$$

注意：如果薄片质量分布均匀，即面密度$\rho(x,y)$为常量，则公式中的ρ可提到积分记号外面并从分子，分母中约去，这样可得到均匀薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D xd\sigma = \frac{1}{A}\iint_D xdxdy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D yd\sigma = \frac{1}{A}\iint_D ydxdy$$

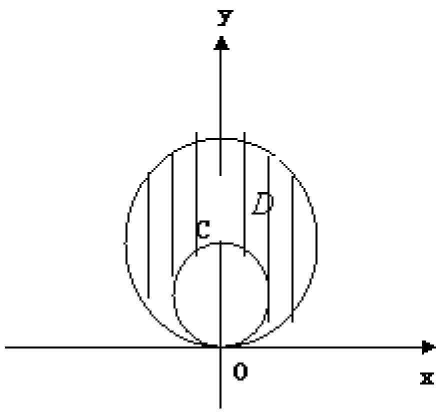
其中A为闭区域D的面积.

3. 举例

例2　求位于两圆$r = 2\sin\theta$和$r = 4\sin\theta$之间的均匀薄片的质心.

解　因为闭区域D为均匀薄片且关于y轴对称（如图所示），所以$\bar{x}$=0. 现在只要求出$\bar{y}$即可.

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D yd\sigma = \frac{1}{A}\iint_D ydxdy$$



由于闭区域D位于半径为1与半径为3的两圆之间，所以闭区域D的面积等于这两圆的面积之差，即A＝$\pi\times 2^2 - \pi\times 1^2 = 3\pi$. 在利用极坐标计算积分，得

$$\iint_D yd\sigma = \iint_D r^2\sin\theta drd\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2 dr = 7\pi$$

因此，质心纵坐标是

$$\bar{y} = \frac{7\pi}{3\pi} = \frac{7}{3}$$