第三节 泰勒公式

教学目的：理解泰勒中值定理，掌握常见泰勒公式.

教学重点：泰勒中值定理.

教学难点：泰勒中值定理和泰勒中值定理的应用.

教学内容：

一、泰勒(Taylor)中值定理的引入

对于一些较复杂的函数,为了便于研究,往往希望用一些简单的函数来近似表达.由于用多项式表示的函数,只要对自变量进行有限次加、减、乘三种运算,便能求出它的函数值,因此我们经常用多项式来近似表达函数.

在微分的应用中已经知道,当$|x|$很小时,有如下的近似等式:

$$e^x \approx 1 + x,\ \ln(1+x) \approx x$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子.但是这种近似表达式还存在着不足之处:首先是精确度不高,这所产生的误差仅是关于x的高阶无穷小;其次是用它来作近似计算时,不能具体估算出误差大小.因此,对于精确度要求较高且需要估计误差时候,就必须用x_0高次多项式来近似表达函数,同时给出误差公式.

设函数$f(x)$在含有的开区间内具有直到$n+1$阶导数,现在我们希望做的是:找出一个关于$x-x_0$的n次多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达$f(x)$,要求$p_n(x)$与$f(x)$之差是比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小,并给出误差$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$的具体表达式.

我们自然希望$p_n(x)$与$f(x)$在x_0的各阶导数(直到$n+1$阶导数)相等,这样就有

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n'''(x) = 3!\ \ a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

$$\ldots\ldots,\ p_n^{(n)}(x) = n!a_n$$

于是$p_n(x_0) = a_0$, $p_n'(x_0) = a_1$, $p_n''(x_0) = 2!a_2$, $p_n'''(x_0) = 3!a_3, \cdots$, $p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

按要求有$f(x_0) = p_n(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = p_n'(x_0) = a_1$,

$$f''(x_0) = p_n''(x_0) = 2a_2,\ f'''(x_0) = p_n'''(x_0) = 3!a_3, \ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(x_0) = p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

从而有$a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = \frac{1}{2!}f''(x_0)$,

$$a_3 = \frac{1}{3!}f'''(x_0), \ldots\ldots, a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

即$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$ ($k = 1, 2, \cdots, n$).

于是就有

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

二、泰勒中值定理

定理（泰勒中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数, 则当 x 在 (a,b) 内时, $f(x)$ 可以表示为 $x-x_0$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间).

证明：由假设, $R_n(x)$ 在 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数, 且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

两函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间)

两函数 $R_n'(x)$ 及 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间), 此下去, 经过 $(n+1)$ 次后, 得 $P_n^{(n+1)}(x)=0$, 所以 $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$

则由上式得 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间). 证毕

说明：

1．这里多项式 $P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

称为函数 $f(x)$ 按 $x-x_0$ 的幂展开的 n 次近似多项式, 公式

2．$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$

称为 $f(x)$ 按 $x-x_0$ 的幂展开的 n 阶泰勒公式, 而 $R_n(x)$ 的表达式

3．$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间)称为拉格朗日型余项.

4．当 $n=0$ 时, 泰勒公式变成 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$（$\xi$ 介于 x_0 与 x 之间)—拉格朗日中值公式, 因此泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

5．如果对于某个固定的 n, 当 x 在区间 (a,b) 内变动时, $|f^{(n+1)}(x)|$ 总不超过一个常数 M, 则有估计式 $|R_n(x)|=\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\dfrac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ 及

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

可见, 当 $x\to a$ 时, 误差 $|R_n(x)|$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小, 即

$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, 该余项称为皮亚诺形式的余项.

6．在不需要余项的精确表达式时, n 阶泰勒公式也可写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

7．当 $x_0=0$ 时的泰勒公式称为麦克劳林(**Maclaurin**)公式, 就是

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

或 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

8．由此得近似计算公式 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

误差估计式变为 $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

四、简单的应用

例3-16　求 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式

解 由于 $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$

所以 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

而 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ 代入公式, 得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

由公式可知 $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

估计误差：设 $(x>0)$ $|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1).$

取 $x=1,\quad e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, 其误差 $|R_n|<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$.

例3-17求 $f(x)=\sin x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解: 因为 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$, $n=1,2,\cdots$

所以 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, f^{(4)}(0)=0,\cdots$

于是 $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x)$.

当 $m=1,2,3$ 时, 有近似公式

$\sin x\approx x$, $\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3$, $\sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$.

例3-18　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 由于 $e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$

所以 $e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$

故 原式= $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$.

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$