Part III. 계량 시계열 모형 - 변동성모형

I. 변동성 모형(ARCH and GARCH models)

A. 변동성 모형

i. 변동성은 자산 수익의 표준편차 혹은 분산으로 측정되며 금융자산의 전체적 위험(risk)에 대한 대체적인(crude) 척도로 종종 사용됨

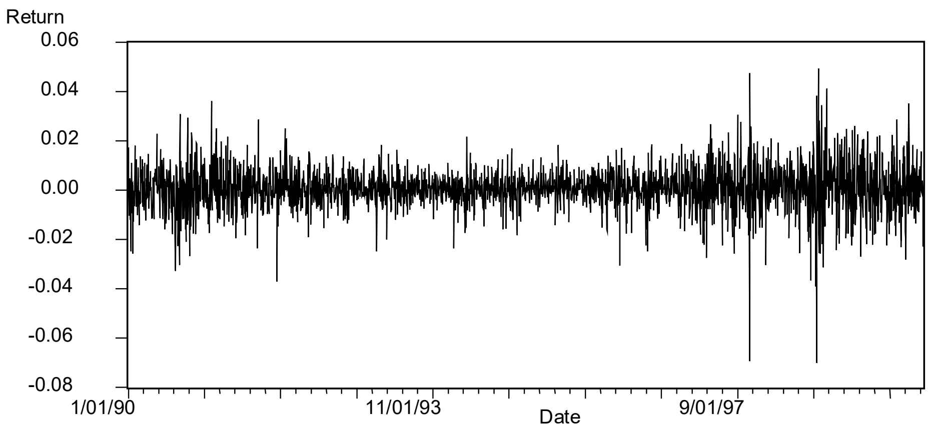
1. 주가, 환율, 인플레율 등은 주식투자자, 수출입업자, 거시경제당국 등의 입장에서 볼 때, 그 평균적 수준 보다는 변동성에 더 큰 관심을 가지게 될 수 있음
2. 정상적 시장여건에서 주어진 신뢰수준으로 목표기간 동안 발생할 수 있는 최대 손실 금액의 계산을 통해 시장위험을 측정하는 다양한 VaR(value-at-risk)모형들은 변동성 모수들에 대한 추정 또는 예측을 필요로 함
3. 거래되는 옵션 가격들을 도출하기 위한 Black-Schloes 공식에도 주식시장 가격들의 변동성이 들어가게 됨

ii. 다양한 변동성 모형들이 존재함

1. 과거 변동성의 단순 평균을 통해 변동성 예측치를 추정하는 모형(historical volatility)
2. 단순평균이 아닌 지수적 가중치를 준 이동평균을 통해 예측치를 추정하는 모형(exponentially weighted moving average models)
3. 변동성에 대한 ARMA 류의 모형을 추정하여 예측치를 만들어내는 모형(autoregressive volatility models)
4. 거래된 옵션 가격들에서 시사되는(implied) 해당 옵션의 존재 기간 동안의 변동성에 대한 예측치를 만들어 내는 모형(implied volatility models)

B. ARCH & GARCH 모형 – 가장 폭넓게 사용되는 변동성 모형

a. Daily S&P 500 Returns for January 1990 – December 1999



ii. 대부분의 금융시계열(주식가격, 환율, 인플레율 등)은 변동성 군집(volatility clustering)이라고 하는 현상을 나타냄
   1. 어떤 기간 동안 상당한 폭의 변동성을 보이다가 상대적으로 평온한 기간이 길게 이어지는 현상
      a. 현재의 변동성 수준은 직전 시기들의 변동성 수준에 양의 상관관계(자기상관)를 보인다는 의미임
iii. 대부분의 통계적 모형은 해당 확률변수의 (조건부) 평균값을 모형화 한 것임
   1. 자산을 보유하는 데 따른 위험의 분석 또는 파생상품의 가치의 분석 등에 있어서는 변동성이 중요
   2. 추정이나 신뢰구간 구축에 있어서도 분산의 변동성 (즉 이분산성)을 고려함으로써 보다 정확한 추정이나 신뢰구간의 구축이 가능해짐
iv. 여기서 제시하는 모형은 해당 확률변수의 조건부 분산 혹은 변동성을 모형화 하는 것임
   1. 조건부 분산
      a. $\sigma_t^2 = \mathrm{var}\left(e_t \middle| e_{t-1,} e_{t-2,} \ldots\right) = E\left(e_t^2 \middle| e_{t-1,} e_{t-2,} \ldots\right)$

C. ARCH 모형

i. ARCH(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) 모형은 변동성에서의 자기상관을 모형화함에 있어서, 조건부 분산이 직전의 오차항의 제곱 값에 의존하도록 함
ii. ARCH 는 Engle(1982)에 의해 제시되었으며, 오차항의 분산의 현재값이 이전의 오차항의 제곱값들에 의존할 것이라는 자연스러운 접근에서 출발
   1. 바로 직전의 오차항의 제곱값에 의존: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2$ → ARCH(1)
iii. 전체 모형은 조건부 평균과 조건부 분산에 대해 두 개의 구별되는 모형을 포함함
   1. $Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \ldots + \gamma_k X_{kt} + e_t\,,\ e_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ (1)
   2. $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q e_{t-q}^2$ → ARCH(q) (2)
iv. ARCH 모형의 문제점
   1. ARCH 의 차수를 결정하는 문제 – 뚜렷한 해법은 없음
   2. 실제로 필요한 q 값이 상당히 클 수가 있음 - 추정해야 하는 모수의 수가 너무 많아지는 문제(parsimonious 하지 않음)
   3. 조건부 분산이 양이 되기 위한 충분조건은- 추정모수가 모두 비음(non-

negative)이어야 하는데, 추정해야하는 모수가 많아지는 경우 이러한 비음 제약이 충족되지 않을 수 있음

D. GARCH 모형

i. ARCH 모형의 문제점을 극복하기 위한 자연스러운 확장이며, Bollerslev (1986)와 Taylor(1986)에 의해 독립적으로 제시됨

1. 오늘날 ARCH 는 실제 거의 사용되지 않고 있으며, 반면에 GARCH 는 광범위하게 사용됨
2. GARCH 모형은 조건부분산이 직전의 오차항의 제곱값과 함께 자체 시차값(lagged values)에 의존하도록 함

ii. GARCH(1,1) 모형

1. 표준적인 GARCH(1,1) 설정:
   i. $Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + ... + \gamma_k X_{kt} + e_t$, (1)
   ii. $\sigma_t^2 = \omega + \alpha\ e_{t-1}^2 + \beta\ \sigma_{t-1}^2$ (2)
2. 조건부 평균에 대한 식 (1) 은 외생 변수 및 오차항의 함수로 표현됨
3. t-1 기까지 알려진 정보에 기반한 조건부 분산의 예측치는 세 가지 항의 함수로 표현되고 있음
   a. 상수항: ω
   b. 이전 기의 변동성에 대한 새로운 정보: 조건부 평균에 대한 식으로부터의 잔차의 제곱으로 측정됨 : e_{t-1}^2 (the ARCH term)
   c. 이전기의 조건부 분산에 대한 예측치: σ_{t-1}^2 (the GARCH term)
4. GARCH(1,1)의 (1,1)은 1 차 GARCH 항과 1 차 ARCH 항의 존재를 가르키는 것임
   a. 통상의 ARCH 모형은 GARCH 모형의 특별한 경우로 조건부 분산 방정식에 시차 조건부 분산이 존재하지 않는 경우임
   b. 금융분야에 있어서 이러한 모형 설정은 다음과 같이 해석됨
      i. 금융거래자가 금융자산 수익에 대한 이번 기의 분산을 예측함에 있어 과거 시기로부터 예측된 분산(GARCH 항) 그리고 이전기에 관측된 변동성에 대한 정보의 가중합으로 예측함
      ii. 자산의 수익이 상방 혹은 하방으로 예기치 않게 컸을 경우, 금융거래자는 다음 기의 분산에 대한 예측치를 증가시킴
      iii. 이 모형은 금융자산의 수익 자료에서 종종 관찰되는 변동성 군집(clustering)과 부합됨.(즉 수익의 큰 변동은 미래의

추가적인 큰 변동으로 이어짐)

5. 모형의 해석에 도움이 되는 분산 방정식에 대한 다른 표현들이 있음
   a. 분산 방정식의 오른쪽에 대해 시차 분산들을 순차적으로 대체해 나갈 경우,

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{(1-\beta)} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} e_{t-j}^2$$

      i. 여기서 볼 때 GARCH(1,1) 모형은 표본 분산과 유사하나 현 시점에서 멀리 떨어진 오차항 제곱에 대해 기하작적으로 감소하는 가중치를 줌
      ii. GARCH(1,1)은 ARCH(∝)으로 표현될 수 있음을 의미
         1. 그럼에도 불구하고 GARCH(1,1)모형은 세 개의 파라메터만 추정하면 됨(parsimonious),
         2. 따라서 비음제약도 충족할 가능성이 높음
   b. $\upsilon_t = e_t^2 - \sigma_t^2 . \Rightarrow \; e_t^2 = \omega + (\alpha + \beta) e_{t-1}^2 + \upsilon_t - \beta \nu_{t-1}$
      i. 오차항의 제곱은 이분산 ARMA(1,1) 과정을 따름
         1. α + β의 크기가 충격의 지속성을 결정하게 되는 데 많은 실제 경우에 있어서 이는 1 에 가까운 값을 가지며, 따라서 충격은 상당히 완만하게 감쇄해 나가게 됨

iii. 비조건부 분산(The unconditional variance)

1. GARCH(1,1)모형에서의 조건부 분산은
   a. $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$
   b. 조건부 분산은 시간에 따라 변화하지만, 비조건부 분산은 시간 불변으로 가정할 수 있으며, 비조건부 분산을 σ^2 이라 하면, E(E(X|I)) = E(X)임을 이용하여

$$\sigma^2 = E\left(\varepsilon_t^2\right) = E\left[E\left(\varepsilon_t^2 \middle| I_{t-1}\right)\right]$$
$$= E\left(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta E\left(\varepsilon_{t-1}^2 \middle| I_{t-2}\right)\right) = \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2$$

   c. α + β<1 인 경우에

      → $\sigma^2 = \omega / \left(1 - \alpha - \beta\right)$

   d. α + β ≥ 1 인 경우에 비조건부 분산의 존재하지 않음
      i. 이 경우 분산에 있어서의 비정상성(non-stationarity in variance)라고 명명할 수 있음
      ii. 특히 α + β=1 인 경우 분산에 있어서의 단위근 혹은 Integrated

GARCH (IGARCH)라 부름

iv. (G)ARCH 모형의 추정

1. (G)ARCH 모형들은 오차항이 조건부 정규분포를 한다는 가정하에 최우추정법에 의해 추정함

2. $Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + ... + \gamma_k X_{kt} + e_t$, $e_t \left| I_{t-1} \sim N\left(0, \omega + \alpha\ e_{t-1}^2 + \beta\ \sigma_{t-1}^2\right)\right.$

   a. $\rightarrow\ y_t \left| I_{t-1} \sim N\left(\gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + ... + \gamma_k X_{kt}, \omega + \alpha\ e_{t-1}^2 + \beta\ \sigma_{t-1}^2\right)\right.$

$$\rightarrow\ f\left(y_t \left| I_{t-1}\right.\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V(y_t \left| I_{t-1}\right.)}} \exp \frac{-\left(y_t - E\left(y_t \left| I_{t-1}\right.\right)\right)^2}{2V(y_t \left| I_{t-1}\right.)}$$

3. $(\left(y_t, x_{1t}, ..., x_{kt}\right)$, t=1…T 가 주어져 있을 때 우도 함수는

L=

$$\prod_{t=1} f\left(y_t \mid I_{t-1}\right) = \prod_{t=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(\frac{-(y_t - \gamma_0 - \gamma_1 x_{1t} - ... - \gamma_k x_{kt})^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

   a. 로그 우도 함수는 다음과 같이 주어짐

$$l_t = \sum_{t=1}\left(-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma_t^2) - \frac{(y_t - \gamma_0 - \gamma_1 x_{1t} - ... - \gamma_k x_{kt})^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

단, $\sigma_t^2 = \omega + \alpha(y_t - \gamma_0 - \gamma_1 x_{1t} - ... - \gamma_k x_{kt})^2 + \beta\ \sigma_{t-1}^2$

4. 이러한 우도 함수의 극대화는 통상적인 경우보다 훨씬 복잡함(beyond our scope)

v. GARCH(*p, q*) Model

1. GARCH(***p, q***) :

$$[Y_t] = [X_t]^{'}\gamma + [e_t]$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{t-i}^2$$

p : 는 GARCH 항의 차수, ***q*** : ARCH 항의 차수

2. 대부분의 경우 GARCH(***1, 1***) 으로도 변동성 군집을 잡아내는데

충분하며, 그 이상의 고차 GARCH 모형은 거의 사용되지 않음

II. GARCH 모형의 확장

A. 분산 방정식의 추가적 설명변수

i. 기타 다른 변수들을 분산 방정식에 포함시킬 수 있음

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\ e_t^2 + \beta\ \sigma_{t-1}^2 + \pi\ Z_t$$

ii. 문제는 이 모형의 분산의 예측치가 양(+)이라는 보장이 없음

1. 따라서 포함되는 설명변수를 항상 +값을 갖거나 음의 분산 예측치를 낳게 될 가능성을 최소화 하는 형태로 포함시키는 것이 바람직함. 예컨대 $Z_t = abs(X_{i\,t})$

B. The (G)ARCH-M Model

i. 조건부 분산을 조건부 평균 방정식에 포함시키는 경우: ARCH-in-Mean (ARCH-M) model (Engle, Lilien and Robins, 1987)

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + \ldots + \gamma_k X_{kt} + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

1. ARCH-M 모형은 자산의 기대 수익이 자산의 기대 위험과 연관되는 경우에 종종 사용됨
2. 기대 위험에 대한 추정계수는 위험-수익 tradeoff 의 척도임
3. ARCH-M 모형의 변형은 조건부 분산 대신에 조건부 표준편차를 사용하는 것임

C. 변동성모형에서의 레버리지 효과의 고려

i. 레버리지 효과

1. 시장이 참가자들의 기대 밖으로 하락세에 있을 때 (음의 충격의 경우) 같은 크기의 양의 충격에 비하여 변동성에 훨씬 더 큰 영향을 미침
2. 일반적인 GARCH 모형은 현재수익률의 잔차항의 '제곱'이 미래 수익률의 변동성에 영향을 미치게 되어 있어 조건분변동성에 대한 충격이 양인지 또는 음인지에 관계없이 항상 대칭적인 효과를 미치므로 이러한 레버리지 효과를 갖는 경우 예측에 한계를 가짐

ii. Exponential Garch 모형 (EGARCH) (Nelson, D.B. , 1991, Econometrica Vol. 59)

1. 모형
   a. $r_t = X_t\Gamma + \varepsilon_t$:조건부 평균 (X: 설명변수 벡터, Γ: 파라메터 벡터)
   b. $\ln\sigma_t^2 = \alpha' + \beta\ln\sigma_{t-1}^2 + \omega\cdot\left(\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}\right) + \gamma\left|\varepsilon_{t-1}/\sigma_{t-1}\right|$
   c. 이러한 로그-로그 형태의 설정은 추정 모수가 음수라해도 조건부 분산이 양수임이 보장된다는 이점이 있음

2. $\omega \cdot \left(\varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1} \right) + \gamma \left| \varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1} \right|$ 는 ε의 부호에 의해 영향을 받음을 알 수 있음

a. $\xi \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma}$ 라 할 때, $\xi_{t-1} < 0$ 이면, $\frac{\partial \ln \sigma_t^2}{\partial \xi_{t-1}} = \omega - \gamma$ 이고, $\xi_{t-1} > 0$ 이면, $\frac{\partial \ln \sigma_t^2}{\partial \xi_{t-1}} = \omega + \gamma$.

b. ξ 가 +이던 - 이던 그 절대값이 증가함에 따라 조건부 분산의 크기는 증가하는 방향으로 영향을 미치며, 따라서 따라서 $\xi_{t-1} < 0$ 일때는 $\frac{\partial \ln \sigma_t^2}{\partial \xi_{t-1}} = \omega - \gamma$ < 0, $\xi_{t-1} > 0$ 일때는 $\frac{\partial \ln \sigma_t^2}{\partial \xi_{t-1}} = \omega + \gamma > 0$ 이며, 분산에 미치는 영향의 크기는 $|\omega - \gamma|$ 과 $\omega + \gamma$ 을 비교해야 함.

c. 레버리지 효과가 없으려면 이 두 크기가 같아야 하므로 $\omega = 0$ 임을 의미함. 또한 $\gamma > 0$ 임.

d. 레버리지 효과가 있으려면 $|\omega - \gamma|$ > $\omega + \gamma$ 이어야 하고, $\gamma > 0$ 이므로 $\omega < 0$ 이어야 함.

e. 따라서 $H_0 : \omega = 0$, $H_0 : \omega < 0$ 을 검정함으로써 레버리지 효과의 존재를 검정할 수 있음

   i. 만약 비대칭성 여부만 판단하려면 $H_0 : \omega = 0$, $H_0 : \omega \neq 0$ 을 검정하면 됨

3. EGARCH 모형 추정

a. Yen-Dollor 환율 자료를 사용하여 EGARCH 모형을 추정해봄

b. GARCH-M 항의 유의성이 없는 것으로 나타났었으므로, 조건부 평균식에서 표준편차를 제거해주고 여기서는 EGARCH(1,1)으로 추정함

4. 그 추정결과는 다음과 같이 나타난다.

   i. $r_t = -0.0000624 + \varepsilon_t + 0.042920 \varepsilon_{t-1}$

   ii. $$\ln \sigma_t^2 = -1.399986 + 0.876381 \ln \sigma_{t-1}^2 - 0.086141 \varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1} + 0.221290 \left| \varepsilon_{t-1} / \sigma_{t-1} \right|$$

iii. Threshold Garch 모형 (TGARCH) (Glosten, Jaganathan, and Runkle (1993), Journal of Finance Vol. 48) - GJR 모형이라고도 불리움

1. GARCH 모형의 틀 안에서 레버리지 효과를 고려

a. $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2$, $\quad d_{t-1} = \begin{cases} 1 & if\, \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

b. γ가 +일 경우 레버리지 효과가 존재함

2. 같은 자료를 이용한 추정 결과임

i. $r_t = -0.0000661 + \varepsilon_t + 0.032425 \varepsilon_{t-1}$

ii. $$\sigma_t^2 = 0.0000017 + 0.045600 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.024799 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + 0.906140 \sigma_{t-1}^2$$

iii. 이 경우 지속성 파라메터는 $\alpha_1 + \beta + \gamma / 2$가 됨