

1. 집합의 뜻과 표현 step C 풀이

Project Eclipse

1번 $n \in A_q$ 이려면 $n \leq \frac{p^2}{q} < n+1$ 의 정수해가 존재해야 한다.

$q = 3$ 인 경우 다음과 같은 부등식

$$3 \leq \frac{p^2}{3} < 4$$

이 정수해 $p = 3$ 을 가지므로 $3 \in A_3$ 이다.

$q = 4$ 인 경우 부등식을 세워 보면

$$4 \leq \frac{p^2}{4} < 5$$

이 부등식은 정수해가 없으므로 $3 \notin A_4$ 이다.

$q = 5$ 인 경우 부등식을 다시 세워 보면

$$5 \leq \frac{p^2}{5} < 6$$

이 부등식은 정수해 $p = 5$ 를 가지므로 $3 \in A_5$ 이다. 따라서 정답은 4번이다.

2번 이 문제는 간단하다. 정의를 그대로 따라가면 $x_i = 1$ 인 경우 $i \in X$ 가 성립한다. 따라서 $x_1 = x_3 = x_4 = 1$ 이고, $x_2 = 0$ 이므로 X 는 $\{1, 3, 4\}$ 이다.

3번 각각의 보기에 대해 참/거짓을 판별해 보자.

보기 1번 모든 집합 A 에 대해 $\emptyset \subset A$ 가 성립하므로 참이다.

보기 2번 보기 1번과 같은 이유로 참이다.

보기 3번 $\{\emptyset\} \subset 2^A$ 는 $\emptyset \in 2^A$ 와 같은 말이므로 참이다.

보기 4번 $A = \{0, 1, 2\}$ 일 때, $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 0\}, \{0, 1, 2\}\}$ 이므로 $A \notin 2^A$, 거짓이다.

보기 5번 $n(2^A)$ 는 A 의 부분집합의 개수이므로 $2^{n(A)}$ 와 같고, 따라서 참이다.

정답은 4번이다.

4번 규칙대로 계산해 보면 $A * A = \{0, 1, 2\}$ 이고, $A \odot A = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 \neg, \sqsubset 이 맞는다. 따라서 정답은 3.

5번 $a \equiv b$ 일 때, a 와 b 를 5로 나눈 나머지는 같다. 사실 이 문제는 이 성질을 이용하여 $0 \leq x < 8$ 인 정수에 대해 모두 확인해도 풀 수 있다. 그렇게 푸는 것이 오히려 빠를 수도 있지만, 별로 얻을 수 있는 것이 별로 없고 내가 이 프로젝트에서 잘릴 수도 있기 때문에 좀 더 제대로 된 풀이로도 풀어보자.

k 가 음이 아닌 정수이고, r 이 $0 \leq r < 5$ 인 정수일 때, $5k + r$ 을 세제곱하면 다음과 같을 것이다.

$$125k^3 + 75rk^2 + 15r^2k + r^3 = 5(25k^3 + 15rk^2 + 3r^2k) + r^3$$

이 식을 통해 $(5k + r)^3$ 을 5로 나눈 나머지는 r^3 을 5로 나눈 나머지와 같다는 것을 알 수 있다. 따라서 $B = \{3\}$ 이고, 부분집합의 개수는 $2^1 = 2$ 임을 알 수 있다.