2. 집합의 연산 step C 풀이

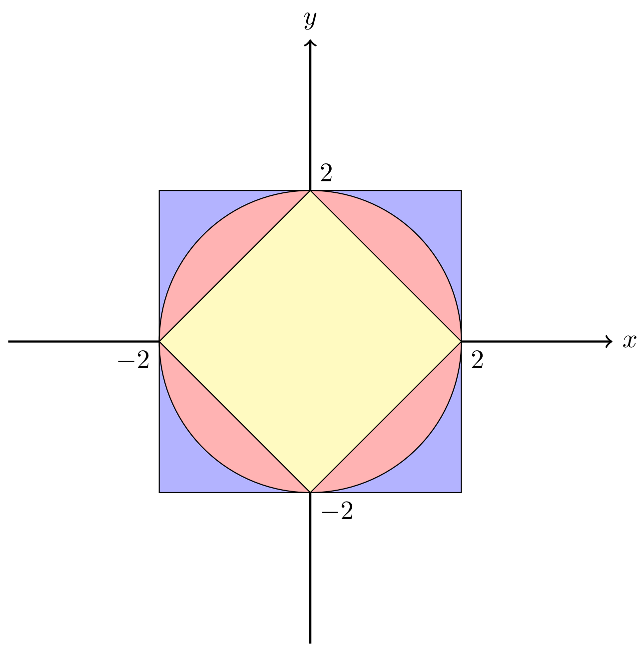
PROJECT
Eclipse

1번 $\mathrm{P}(A)$는 A의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합임을 알 수 있다. 간단하게 $\mathrm{P}(A)$와 $\mathrm{P}(B)$를 계산하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}\}, \mathrm{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

따라서 보기 중 성립하는 것은 2밖에 없다.

2번 이 문제는 그래프를 통해 해결 가능하다. 각각의 집합 A, B, C를 나타내면 다음과 같다.



이 그림에서 파랑, 빨강, 노랑 도형은 각각 집합 A, B, C를 나타낸다. 즉, $C \subset B \subset A$를 알 수 있고, 보기에서 맞는 것을 고르면 2이다.

3번 문제에 주어졌듯, A_n은 다음과 같다. (편의상 $\mathbb{N}$을 자연수의 집합이라고 하자.)

$$A_n = \{x \mid 2n \leq x < 8n + 6, x, n \in \mathbb{N}\}$$

$n \to n + 1$일 때, 식은 다음과 같다.

$$A_{n+1} = \{x \mid 2n + 2 \leq x < 8n + 14, x, n \in \mathbb{N}\}$$

이때, $A_n \cap A_{n+1}$은 다음과 같을 것이다.

$$A_n \cap A_{n+1} = \{x \mid 2n + 2 \leq x < 8n + 6, x, n \in \mathbb{N}\}$$

좀 더 일반화시키면, A_{n+k}는 다음과 같을 것이고,

$$A_{n+k} = \{x \mid 2(n+k) \le x < 8(n+k)+6, x, n, k \in \mathbb{N}\}$$

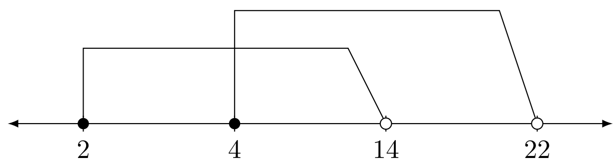
이때, $A_n \cap A_{n+k}$는

$$A_n \cap A_{n+k} = \{x \mid 2(n+k) \le x < 8n+6, x, n, k \in \mathbb{N}\}$$

그냥 넘어가지 말고 위의 식들과 비교하며 패턴을 찾아 보자.

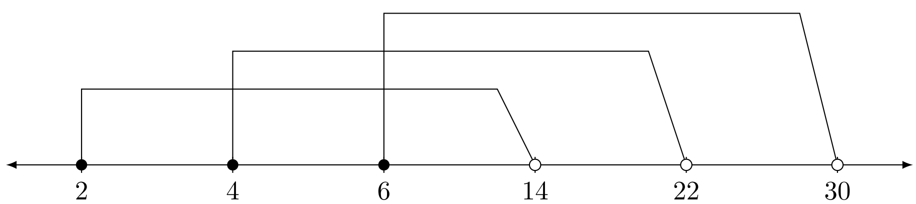
이 문제에서 중요한 사실은 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$를 계산하든 $A_1 \cap A_3$를 계산하든 똑같다는 것이다. 왜 그런지를 증명해보자.

수직선에 $A_1 \cap A_2$를 나타내면 다음과 같다.



~~눈금 선형 아닌건 안비밀~~

여기에 A_3까지 그려보자.



~~눈금 스케일 아는분 찾아요~~

사실 눈치 빠른 사람이라면 지금쯤 A_1부터 A_n까지 합집합한 것이 A_1과 A_n을 합집합한 것과 같다는 것을 알게 되었을 것이다. 따라서 사실

$$S = A_1 \cap A_n = \{x \mid 2n \le x < 14\, x \in \mathbb{N}\}$$

이고, 따라서 $S \neq \varnothing$인 n의 최댓값은 6이므로 $a = 6$, 이때 $S = \{12, 13\}$이므로 $b = 2$, $a + b = \underline{8}$이다.

4번

보기 ㄱ m과 n이 서로소이어도 공통인 약수 1을 가지므로 $A_m \cap A_n \neq \varnothing$이다.

보기 ㄴ $k \in A_m$인 모든 k에 대해, 자연수 p에 대하여 $kp = n$이므로 맞는 보기이다.

보기 ㄷ m과 n의 최대공약수가 G이고, $m = aG$, $n = bG$ (단, a와 b는 서로소)일때 주어진 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(A_{aG} \cap A_{bG}) \subset A_{(a+b)G}$$

$A_{aG} \cap A_{bG}$는 A_{aG}와 A_{bG}의 공약수의 집합이므로 A_G와 같다. 따라서 보기 ㄴ에 의해

$$A_{aG} \cap A_{bG} = A_G \subset A_{(a+b)G}$$

가 성립한다.

5번 A의 모든 원소 합이 28이고, $A \cup B$의 모든 원소 합이 55이므로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 28$$
$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + 5d - (4 + 7) = 55$$

이 식들을 통해 $d = 2$임을 알 수 있고, $A \cap B = \{4, 7\}$이므로 $\{4, 7\} \subset A$이고, $\{4, 7\} \subset B$임을 알 수 있다. 또한,

$$B = \{a_i + d \mid a_i \in A\} = \{a_i + 2 \mid a_i \in A\}$$

이고, 이를 거꾸로 이용하면 $A = \{b_i - d \mid b_i \in B\} = \{b_i - 2 \mid b_i \in B\}$이므로 $\{2, 5\} \subset A$이다. A의 모든 원소의 합은 28이므로 $A = \{2, 4, 5, 7, 10\}$이고, 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 곱은 <u>20</u>.