1. 집합의 뜻과 표현 step C 풀이

PROJECT
Eclipse

1번 $n \in A_q$이려면 $n \le \frac{p^2}{q} < n+1$의 정수해가 존재해야 한다.

$q=3$**인 경우** 다음과 같은 부등식

$$3 \le \frac{p^2}{3} < 4$$

이 정수해 $p=3$을 가지므로 $3 \in A_3$이다.

$q=4$**인 경우** 부등식을 세워 보면

$$4 \le \frac{p^2}{4} < 5$$

이 부등식은 정수해가 없으므로 $3 \notin A_4$이다.

$q=5$**인 경우** 부등식을 다시 세워 보면

$$5 \le \frac{p^2}{5} < 6$$

이 부등식은 정수해 $p=5$를 가지므로 $3 \in A_k$이다. 따라서 정답은 4번이다.

2번 이 문제는 간단하다. 정의를 그대로 따라가면 $x_i = 1$인 경우 $i \in X$가 성립한다.
따라서 $x_1 = x_3 = x_4 = 1$이고, $x_2 = 0$이므로 X는 $\{1, 3, 4\}$이다.

3번 각각의 보기에 대해 참/거짓을 판별해 보자.

보기 1번 모든 집합 A에 대해 $\varnothing \subset A$가 성립하므로 참이다.

보기 2번 보기 1번과 같은 이유로 참이다.

보기 3번 $\{\varnothing\} \subset 2^A$는 $\varnothing \in 2^A$와 같은 말이므로 참이다.

보기 4번 $A = \{0,1,2\}$일 때, $2^A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{2,0\}, \{0,1,2\}\}$이므로 $A \not\subset 2^A$, 거짓이다.

보기 5번 $n(2^A)$는 A의 부분집합의 개수이므로 $2^{n(A)}$와 같고, 따라서 참이다.

정답은 4번이다.

4번 규칙대로 계산해 보면 $A * A = \{0,1,2\}$이고, $A \odot A = \{-1,0,1\}$ 이므로 ㄱ, ㄷ이 맞는다. 따라서 정답은 3.

5번 $a \equiv b$일 때, a와 b를 5로 나눈 나머지는 같다. 사실 이 문제는 이 성질을 이용하여 $0 \leq x < 8$인 정수에 대해 모두 확인해도 풀 수 있다. 그렇게 푸는 것이 오히려 빠를 수도 있지만, 별로 얻을 수 있는 것이 없고 ~~내가 이 프로젝트에서 잘릴 수도 있기 때문에~~ 좀 더 제대로 된 풀이로도 풀어보자.

k가 음이 아닌 정수이고, r이 $0 \leq r < 5$인 정수일 때, $5k + r$을 세제곱하면 다음과 같을 것이다.

$$125k^3 + 75rk^2 + 15r^2k + r^3 = 5(25k^3 + 15rk^2 + 3r^2k) + r^3$$

이 식을 통해 $(5k+r)^3$을 5로 나눈 나머지는 r^3을 5로 나눈 나머지와 같다는 것을 알 수 있다. 즉, 집합 A에 있는 수들의 나머지를 구해서, 그걸 세제곱하고 5로 나눠 나머지를 구하면 되는 것이다.

> 사실 다루지 않고 넘어가도 상관은 없지만, 위에서 사용된 성질을 좀 더 일반화할 수 있다. $(nk+r)^m$을 n으로 나눈 나머지는 r^m을 n으로 나눈 나머지와 같다. 이 페이지에는 여백이 충분하니까, 한번 스스로 증명해보자.

따라서 $B = \{3\}$이고, 부분집합의 개수는 $2^1 = \underline{2}$임을 알 수 있다.