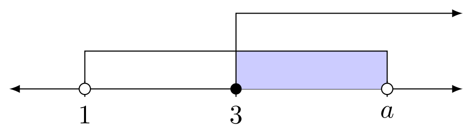
8. 여러 가지 부등식 step C 풀이

1 (1)번 원래 부등식

$$\begin{cases} x^2-(a+1)x+a<0 & \text{(a)} \\ x\geq 3 & \text{(b)} \end{cases}$$

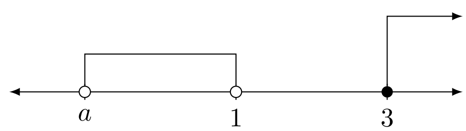
여기서 (a)를 인수분해하면 $(x-1)(x-a)<0$이고, 2가지 경우로 나눌 수 있다.

1. (a)의 해가 $1<x<a$인 경우 부등식을 그림으로 그려보자.



이 때 부등식의 해가 있으려면 파란색으로 색칠된 부분이 존재해야 한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 이 경우에서는 $a>3$이 성립하여야 한다.

2. (a)의 해가 $a<x<1$인 경우 방금 전처럼 그림으로 나타내면



그림에서 볼 수 있듯 겹치는 부분이 없으므로 이때 조건을 만족하는 a의 범위는 존재하지 않는다.

따라서 답은 $\underline{a>3}$이다.

1 (2)번 원래 부등식은

$$\begin{cases} x^2+x-6>0 & (a) \\ |x-a|\leq 1 & (b) \end{cases}$$

우선 (a)를 인수분해하면 $(x+3)(x-2)>0$이므로 이를 풀면 $x>2$, $x<-3$이다. 또한, (b)를 풀면 $-1+a\leq x\leq 1+a$임을 알 수 있다.

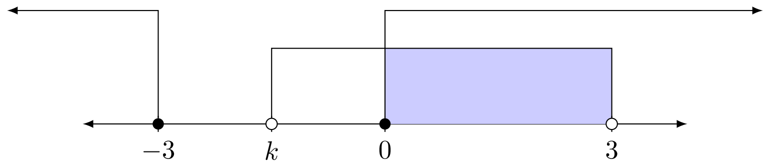
이 부등식이 해를 가지기 위해서는 $-1+a<-3$ 또는 $1+a>2$이여야 하고, 따라서 이 일차부등식을 풀면 답을 구할 수 있다.

따라서 답은 $\underline{a<-2,\ a>1}$이다.

2번 원래 부등식을 다음과 같이 놓자.

$$\begin{cases} x^2+ax+b<0 & (a) \\ x^2+3x\geq 0 & (b) \end{cases}$$

(b)를 풀면 해가 $x\leq -3$, $x\geq 0$임을 알 수 있다. 또한, 주어진 연립부등식의 해가 $0\leq x<3$인 것을 통해 (a)의 해는 $k<x<3$의 꼴임을 알 수 있다. 이때 부등식이 성립하는 경우를 그림으로 그려보면 다음과 같다.



근과 계수의 관계의 의해 $3+k=-a$, $3k=b$임을 알 수 있다. $-3 \le k \le 0$이므로 $|a|+|b|=3+k-3k$이고, $3-2k=5$이므로 k는 -1, a는 -2, b는 -3임을 알 수 있고, 이 문제의 답은 $\underline{13}$이 된다.

3번 주어진 부등식을 정리하면

$$|(m+1)(x-1)| > (m+1)(m+2)$$

이 경우에서 우변의 값의 범위에 따라 몇 가지 경우로 나눌 수 있다.

1. $(m+1)(m+2)<0$**인 경우** 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

2a. $m=-1$**인 경우** $0>0$이므로 해가 없다. 따라서 $b=-1$이다.

2b. $m=-2$**인 경우** $|-x+1|>0$이므로 $x \neq 1$이다.

3. $(m+1)(m+2)>0$**인 경우** 절댓값 기호를 풀면

$$(m+1)(x-1) > (m+1)(m+2)$$

또는

$$(m+1)(x-1) < -(m+1)(m+2)$$

임을 쉽게 알 수 있다.

여기서 $m+1>0$이면 $x-1>m+2$ 또는 $x-1<-(m+2)$이고, 이를 풀면 $x>m+3$ 또는 $x<-(m+1)$이다. 따라서 $a=0$이다.

반대로 $m+1<0$이면 $x-1<m+2$ 또는 $x-1>-(m+2)$이고, 이를 방금 전처럼 풀면 $x<m+3$ 또는 $x>-(m+1)$이다. 따라서 $c=-2$이다.

정답은 $a=0$, $b=-1$, $c=-2$이므로 $a-2b-3c=\underline{8}$이다.

4번 주어진 이차방정식을 그래프로 나태냈을 때의 축의 방정식은 $x=-2a$이고, a가 양수이므로 축은 y축 왼쪽에 존재한다는 것을 알 수 있다. 즉, 실근이 존재한다면 적어도 하나는 음수인 것이다. 따라서 주어진 이차방정식이 실근을 가지면 되므로

$$(4a)^2-4(4-a^2) \ge 0$$

를 만족하면 되고, 정리하면

$$20a^2-16 \ge 0$$

이를 풀면 $a \ge \frac{2}{\sqrt{5}}$이고, $m=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다. 따라서 답은 $5m^2=\underline{4}$.

5번 $t^2-2t-2=(t-1)^2-3$이고, $f(x)$의 값은 다음과 같이 경우를 나누어 범위를 확인할 수 있다.

1. $x \le 1 \le x+2$**인 경우** x의 범위는 $-1 \le x \le 1$이고, $f(x)=-3$이므로 정수 x로 -1, 0, 1이 가능하다.

2. $1<x$**인 경우** $f(x)=x^2-2x-2$이고, $x^2-2x-2 \le x$를 풀면 정수해의 값은 0, 1, 2, 3이다.

3. $x+2<1$**인 경우** $f(x)=(x+2)^2-2(x+2)-2$이고, 이를 정리하면 $f(x)=x^2+2x-2$이다. 이때 $x^2+2x-2\le x$를 풀면 정수해의 값은 -2, -1, 0, 1이다.

따라서 정수 x의 개수는 $\underline{6}$개이다.

6번 우선 조건 (가)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 의해 대칭임을 알 수 있다. 따라서 문제의 조건을 이용하면 $f(x)$를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$f(x)=n(x-3)^2+m$$

여기서 n, m은 자연수이다. (나)를 이용하면 다음 이차방정식은 중근을 갖는다.

$$n(x-3)^2+m=2x-4$$

따라서 판별식을 이용하면 다음과 같다.

$$(6n+2)^2-4n(9n+m+4)=0$$

이를 간단히 하면

$$2n-mn+1=0$$

이고, 이를 통해 $n=1$, $m=3$임을 알 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+6+k-k^2$이 서로 다른 두 교점을 가지므로 다음 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가진다.

$$x^2-6x+12=kx+6+k-k^2$$

판별식을 이용하여 부등식을 세우고, 정리하면

$$3k^2-16k-12<0$$

이를 풀면 $-\frac{2}{3}<k<6$임을 알 수 있다.
따라서 자연수 k로 가능한 것은 1, 2, 3, 4, 5 $\underline{6}$개임을 알 수 있다.