Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 1

Donnerstag, 24. Dezember 2020 13:15

Aufgabe 1.1 (Alphabete, Wörter, römische „Zahlen“)

a) Wie sind die römischen „Zahlen“ aufgebaut?

Antwort:

römische Zahlen	arabische Zahlen
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

b) Welche der folgenden Ziffernfolgen sind römische „Zahlen“ ?

1 2 3 4 5

$MMCMDXXII, MCDCCLXXXIV, MDCCCXLXXXVIII, XM, CMXCIX$

Antwort:

1 MMCM|DXXII ✗ 2900 + 500

3 MDCCCXL|XXXVIII ✗ 1840 + 10 + 10 + 10

2 MCD|CCLXXXIV ✗ 1400 + 100 + 100

4 XM != 990 ✗

CMXC = 990 ✓

5 CMXCIX = 999 ✓

c) Wie kann der Wert einer römischen „Zahl“ bestimmt werden?

Antwort:

- Römische Ziffern werden von links nach rechts gelesen
- Eine römische Ziffer kann maximal 3 mal hintereinander folgen
- Wenn auf eine Ziffer eine größere Ziffer folgt, wird die Größere von der Kleineren subtrahiert (z.B IV)

d) Wie lautet die größte darstellbare Zahl im römischen Zahlensystem?

Antwort:

MMMCMXCIX (3999)

e) Geben Sie die größtmögliche Länge eines Wortes im römischen Zahlensystem an!

Antwort:

MMMDCCCLXXXVIII (3888 = 15 Zahlen)

f) Wieviele Wörter der Länge aus Aufgabenteil e) können aus den römischen Ziffern gebildet werden, die keine römischen „Zahlen“ sind?

Antwort:

Basis: 7

Länge: 15

Anzahl: $\#(A^{15}) = (\#A)^{15} = 7^{15}-1 = 47.47561509943$

g) Geben Sie alle römischen „Zahlen“ an, die aus den Ziffern I, V, X, L gebildet werden können und die Länge 3 haben! Ordnen Sie sie lexikographisch und geben Sie ihre Werte an!

Antwort:

I V X L Länge 3

Lexikographisch = Telefonbuchordnung

III = 3	XLI = 41
VII = 7	XLV = 45
XII = 12	LII = 52
XIV = 14	LIV = 54
XIX = 19	LIX = 59
XVI = 16	LVI = 56
XXI = 21	LXI = 61
XXV = 25	LXV = 65
XXX = 30	LXX = 70

h) Berechnen Sie die Werte folgender römischen „Zahlen“:

$XVII, XLIII, MCDXLVII, MCMXCIX$

Antwort:

XVII = 17

XLIII = 43

MCDXLVII = 1447

MCMXCIX = 1999

Aufgabe 1.2 (Kodierung von Zeichen, ASCII-Code)

Kodieren Sie die folgenden zwei Zeilen Text im 7-Bit ASCII-Code (ein Codewort pro byte), wobei jedes Byte mit zwei Hexziffern angegeben werden soll (siehe Tabelle 1)! Die neue Zeile wird in UNIX mit "`LF`" erzeugt.

```
Die Ziffer 0 ist die Null!
Oder?
```

Tabelle 1: ASCII-Tabelle

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2	SP	!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	DEL

Spacebar = 20
newLine = 0A

Mit der ersten Hexziffer des Codewortes sind die Zeilen nummeriert, mit der zweiten die Spalten. Beispiel: Das Zeichen `K` wird als `4B` dargestellt. Die Codewörter `00` - `1F` und `7F` sind nichtdruckbare Steuerzeichen.

Antwort:

D = 44
i = 69
e = 65

20

Z = 5A
i = 69
f = 66
f = 66
e = 65
r = 72

20

0 = 30

20

i = 69
s = 73
t = 74

20

d = 64
i = 69
e = 65

20

N = 4E
u = 75
l = 6C
l = 6C
! = 21

newLine = 0A
O = 4F
d = 64
e = 65
r = 72
? = 3F

Aufgabe 1.3 (Kodierung von Zeichen, ASCII-Code)

a) Dekodieren Sie folgenden Speicherinhalt (ASCII-codierter Text, ein Codewort pro byte):

```
1 000000 20 30 78 34 66 38 0a 2b 30 78 61 33 62 0a 5f 5f
2 000010 5f 5f 5f 5f 0a 3d 30 78 3f 3f 3f 0a
```

Antwort:

1 " 0x4f8LF+0xa3b"

2 "=0x???"

b) Kodieren Sie den Text aus Aufgabenteil a) im 8-bit EBCDIC-Code (siehe Tabelle 2)!

Tabelle 2: EBCDIC-Tabelle

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NU	SH	SX	EX	ST	HT	SA	DT	EG	RI	S2	VT	FF	CR	SO	SI
1	DL	D1	D2	D3	OC	NL	BS	ES	CN	EM	P2	S3	FS	GS	RS	US
2	PA	HO	BH	NH	IN	LF	EB	EC	HS	HJ	VS	PD	PU	EQ	AK	BL
3	DC	P1	SY	TC	CC	MW	SG	ET	SS	GC	SC	CI	D4	NK	PM	SB
4	SP										[	.	<	(	+	!
5	&										]	$	*	)	;	^
6	-	/									¦	,	%	_	>	?
7										`	:	#	@	'	=	"
8		a	b	c	d	e	f	g	h	i						
9		j	k	l	m	n	o	p	q	r						
A		~	s	t	u	v	w	x	y	z						
B																
C		A	B	C	D	E	F	G	H	I						
D		J	K	L	M	N	O	P	Q	R						
E	\		S	T	U	V	W	X	Y	Z						
F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9						AC

Mit der ersten Hexziffer des Codewortes sind die Zeilen nummeriert, mit der zweiten die Spalten. Beispiel: Das Zeichen `A` wird als `C1` dargestellt. Die Codewörter `00` - `3F` und `FF` sind nichtdruckbare Steuerzeichen. Es werden nicht alle möglichen Codewörter benutzt.

Antwort:

Gleiches Verfahren wie bei der Aufgabe 1.3a

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 2

Donnerstag, 24. Dezember 2020 14:39

Aufgabe 2.1 (Lexikographische Ordnung, Vorgänger, Nachfolger, Rang)
Gegeben sei das Alphabet $A = \{2, b, d, p\}$ mit der Ordnung $2 < b, b < d, d < p$.

a) Geben Sie die Mächtigkeit von A^5 an!

Antwort:

$\#A^n = 4^5 = 1024$

b) Wieviele und welche fünfstelligen Wörter über A liegen im Intervall $[bdbpd, bddb2]$?

Antwort:

Ordnung $2 < b, b < d, d < p$.

bdbpd, (...), bddb2

2	b	d	p
0	1	2	3

bdbpp = 12133
bdd22
bdd2b
bdd2d
bdd2p
bddb2

c) Geben Sie die fünf Vorgänger von $bd2b2$ an!

Antwort:

bd2b2, bd22p, bd22d, bd22b, bd222, bbppp

d) Alle fünfstelligen Wörter über A seien in einer Liste lexikographisch geordnet und durchnummeriert (beginnend bei 0). An welcher Stelle (Rang) steht das Wort $bd2pp$? Welches Wort steht an Stelle 815_{10}? (Hinweis: Betrachten Sie die Wörter als fünfstellige Ziffernfolgen im Stellenwertsystem mit der Basis 4!)

Antwort:

	Rest	
815 = 815 : 4 = 203	0,75 • 4 = 3	p
203 : 4 = 50	0,75 • 4 = 3	p
50 : 4 = 12	0,5 • 4 = 2	d
12 : 4 = 3	0 • 4 = 0	2
3 : 4 = 0	0,75 • 4 = 3	p

= p2dpp

(von unten nach oben ablesen)

Aufgabe 2.2 (Stellenwertsysteme, darstellbare Zahlenbereiche)
Geben Sie die Zahlenbereiche für natürliche (vorzeichenlose, unsigned) Zahlen an, die mit folgenden Stellenwertsystemen dargestellt werden können, dezimal und in ihrem jeweiligen System:

a) achtstelliges Dezimalsystem, b) zehnstelliges Binärsystem, c) vierstelliges Hexadezimalsystem

Antwort:

$\boxed{\#A_b^n \to [0, b^n - 1]}$

a) $A_{10}^8 \to [0, 10^8 - 1] = [0; 99999999]$

b) $A_2^{10} \to [0, 2^{10} - 1] = [0; 1111111111]$

c) $A_{16}^4 \to [0, 16^4 - 1] = [0; FFFF]$

Aufgabe 2.3 (Stellenwertsysteme, darstellbare Zahlenbereiche)
Wieviele Stellen werden mindestens benötigt, um 1700_{10} in den folgenden Zahlensystemen darzustellen?

a) Binärsystem, b) Hexadezimalsystem, c) Fünfersystem ($b = 5$)

Antwort:

a) $\overset{(1024)}{2^{10}} - 1 \leq 1700_{10} \leq \overset{(2048)}{2^{11}} - 1$ n = 11

b) $\overset{(256)}{16^2} - 1 \leq 1700_{10} \leq \overset{(4096)}{16^3} - 1$ n = 3

c) $\overset{(625)}{5^4} - 1 \leq 1700_{10} \leq \overset{(3125)}{5^5} - 1$ n = 5

Aufgabe 2.4 (Stellenwertsysteme, Berechnung der Ziffern)
Gegeben sei folgende Darstellung einer natürlichen Zahl im Unärsystem:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | o

Berechnen Sie unter Verwendung der arithmetischen Operationen im Unärsystem die Darstellung der Zahl im

a) Dezimalsystem, b) Binärsystem, c) Hexadezimalsystem, d) Fünfersystem ($b = 5$)!

Wieviele Stellen werden jeweils mindestens benötigt?

Antwort:

a) IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII II$_o$ = II$_o$ • IIIII IIII$_o$ + IIIII II$_o$ = 7

II$_o$ = 0 • IIIII IIII$_o$ + II$_o$ = 2

27_{10}

b) IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII II$_o$ = IIIII IIIII III$_o$ • II$_o$ + I$_o$ = 1

IIIII IIIII III$_o$ = IIIII I$_o$ • II$_o$ + I$_o$ = 1

IIIII I$_o$ = III$_o$ • II$_o$ + 0 = 0

III$_o$ = I$_o$ • II$_o$ + I$_o$ = 1

I$_o$ = 0 • II$_o$ + I$_o$ = 1

11011_2

Aufgabe 2.5 (Stellenwertsysteme, Berechnung der Ziffern)
Die Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl sei 4933_{10}. Berechnen Sie die Darstellung der Zahl im

a) Binärsystem, b) Hexadezimalsystem, c) Fünfersystem ($b = 5$)!

Wieviele Stellen werden jeweils mindestens benötigt?

Antwort:

a)

4933 = 2466 • 2 + 1
2466 = 1233 • 2 + 0
1233 = 616 • 2 + 1
616 = 308 • 2 + 0
308 = 154 • 2 + 0
154 = 77 • 2 + 0
77 = 38 • 2 + 1
38 = 19 • 2 + 0
19 = 9 • 2 + 1
9 = 4 • 2 + 1
4 = 2 • 2 + 0
2 = 1 • 2 + 0
1 = <u>0</u> • 2 + 1

b)

1 3 4 5
0001 0011 0100 0101

1345_{16}

b)

4933 = 308 • 16 + 5
308 = 19 • 16 + 4
19 = 1 • 16 + 3
1 = 0 • 16 + 1

c)

4933 = 986 • 5 + 3
986 = 197 • 5 + 1
197 = 39 • 5 + 2
39 = 7 • 5 + 4
7 = 1 • 5 + 2
1 = 0 • 5 + 1

124213_5

Aufgabe 2.6 (Stellenwertsysteme, Umwandlung)
Die Hexadezimaldarstellung einer natürlichen Zahl sei $34d_{16}$. Berechnen Sie die Darstellung der Zahl im

a) Binärsystem, b) Dezimalsystem!

Wieviele Stellen werden jeweils mindestens benötigt?

Antwort:

3 4 D
a) 0011 0100 1101 n = 10

b) $3 \bullet 16^2 + 4 \bullet 16^1 + 13 \bullet 16^0 =$

$$\begin{array}{r} 768 \\ +\ 64 \\ +\ 13 \\ \hline 845 \end{array} \quad n = 3$$

Aufgabe 2.7 (Stellenwertsysteme, Umwandlung)
Die Binärdarstellung einer natürlichen Zahl sei 100010_2. Berechnen Sie die Darstellung der Zahl im Unärsystem („Strichliste") unter Verwendung der arithmetischen Operationen im Unärsystem!

Antwort:

- in Dezimal umwandeln
- addieren
- dementsprechend Strichliste (-> 34 Striche)

Aufgabe 2.8 (Stellenwertsysteme, Umwandlung)
Die Binärdarstellung einer natürlichen Zahl sei 1010010111101_2. Berechnen Sie die Darstellung der Zahl im

a) Hexadezimalsystem, b) Dezimalsystem!

Wieviele Stellen werden jeweils mindestens benötigt?

Antwort:

1 4 B D
a) 0001 0100 1011 1101 $= 14BD_{16}$ n = 4

b)
$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 128 \\ 1024 \\ 4096 \\ \hline 5309_{10} \end{array}$$

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 3

Freitag, 25. Dezember 2020 18:14

Aufgabe 3.1 (Addition, Subtraktion in Stellenwertsystemen)
Zwei natürliche Zahlen x und y seien in einem Stellenwertsystem mit n Stellen ($n > 0$) dargestellt als $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0$ und $y_{n-1}y_{n-2}\cdots y_1y_0$. Die Darstellung der Summe $z = x + y$, also $z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_1z_0$, kann ziffernweise mit nebenstehendem Algorithmus berechnet werden. Wenn der Übertrag (CA) am Ende nicht null ist, $c \neq 0$, kann z nicht in n Stellen dargestellt werden.

$$\begin{aligned} & i \leftarrow 0 \\ & c \leftarrow 0 \\ loop: & \ (c, z_i) \leftarrow addtab(c, x_i, y_i) \\ & i \leftarrow i + 1 \\ & if(i \neq n) \ goto \ loop \\ ende: & \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Additionstabelle für das Binärsystem an!

Antwort:

A	B	Summe
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

b) Die Subtraktion $x - y$ kann mit dem gleichen Algorithmus berechnet werden, wenn statt der Additionstabelle eine entsprechende Tabelle für die Subtraktion benutzt wird. Geben Sie die Subtraktionstabelle für das Binärsystem an!

Antwort:

A	B	Differenz
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

1
0
--- +
1
0
--- -
1 (Grenzenüberschreitung -> Übertrag)
0

c) Berechnen Sie mit dem angegebenen Algorithmus alle möglichen Summen und Differenzen aus folgenden Binärzahlen und geben Sie jeweils den Wert von CA an:
`10110, 11000, 01000, 10001`

Antwort:

10110	10110	10110	11000	11000	01000
+ 11000	+ 01000	+ 10001	+ 01000	+ 10001	+ 10001
01110	11110	00111	00000	01001	11001
CA = 1	CA = 0	CA = 1	CA = 1	CA = 1	CA = 0

10110	10110	10110	11000	11000	01000
- 11000	- 01000	- 10001	- 01000	- 10001	- 10001
11110	01110	00101	10000	00111	10111
CA = 1	CA = 0	CA = 0	CA = 0	CA = 0	CA = 1

Aufgabe 3.2 (Addition im Hexadezimalsystem)
Berechnen Sie folgende Summen und geben Sie jeweils an, ob eine Bereichsüberschreitung vorliegt:

Antwort:

```
 38f5    7fff    2a3a    c6fe    8000    3533
+5706   +0001   +fff3   +fccf   +7fff   +3fba
 8FFB    8000    2A2D    C3CD    FFFF    74ED

CA = 0  CA = 0  CA = 1  CA = 1  CA = 0  CA = 0
```

Übergrenzwertige Rechnung (eigen):

```
  B(11)
+ F(15)
---------
  ?(26)

? = 26 - 16 = A
```

Dez	Hex
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Aufgabe 3.3 (Subtraktion im Hexadezimalsystem)
Berechnen Sie folgende Differenzen und geben Sie jeweils an, ob eine Bereichsüberschreitung vorliegt:

Antwort:

```
 5706    0001    2a3a    c6fe    8000    3533
-38f5   -7fff   -fff3   -fccf   -7fff   -3fba
 1EF1    8002    2A47    CA2F    0001    F579

CA = 0  CA = 1  CA = 1  CA = 1  CA = 0  CA = 1
```

Übergrenzwertige Rechnung (eigen):

```
  B(11)
- F(15)
---------
  ?(-4)

? = 16 -4 -  = C
```

Aufgabe 3.4 (Addition, Subtraktion im Stellenwertsystem)
Bei der „normalen“, zweistelligen Addition ist der Übertrag $c \in [0, 1]$, unabhängig von der Basis des Stellenwertsystems, bei der „Mehrfach“addition oder -subtraktion kann er größer werden. Die Addition und Subtraktion mit mehr als zwei Operanden ist also schwieriger, was mit dieser Aufgabe demonstriert werden soll:

Lösen Sie folgende Additions- und Subtraktionsaufgaben im Binärsystem ziffernweise ohne Verwendung von Zwischensummen bzw. -differenzen! Geben Sie bei der Berechnung der einzelnen Ziffern genau an, welche Überträge produziert werden!

Antwort:

```
 1010010     101111     11000     101000
+0100111    +011011    -00101    -011110
+0010101    +110111    -00011    -100100
+0001000    +101110    -00001    -101110
 0010110     101111     10001     111000

CA = 1      CA = 1(?)  CA = 0    CA = 1 (?)
```

Aufgabe 3.5 (Stellenwertsysteme, Multiplikation)

a) Führen Sie die Multiplikation $79_{10} \cdot 26_{10}$ im Dezimalsystem durch! Wieviele Stellen werden für die Darstellung des Produkts mindestens benötigt?

Antwort:

$$
\begin{array}{rr}
 & 79 \cdot 26 \\
\hline
 & 54 \\
+ & 420 \\
+ & 180 \\
+ & 1400 \\
\hline
 & 2054
\end{array}
$$

b) Wandeln Sie die Faktoren aus Aufgabenteil a) ins Binärsystem und führen Sie die Multiplikation noch einmal aus! Wieviele Stellen werden für die Darstellung des Produkts mindestens benötigt? Wandeln Sie das Ergebnis ins Dezimalsystem und vergleichen Sie mit Aufgabenteil a)!

Antwort:

$79 = 39 \cdot 2 + 1$
$39 = 19 \cdot 2 + 1$
$19 = 9 \cdot 2 + 1$
$9 = 4 \cdot 2 + 1$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$
$2 = 1 \cdot 2 + 0$
$1 = 0 \cdot 2 + 1$

(79_{10})
1001111_2

$26 = 13 \cdot 2 + 0$
$13 = 6 \cdot 2 + 1$
$6 = 3 \cdot 2 + 0$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$1 = 0 \cdot 2 + 1$

(26_{10})
11010_2

$$
\begin{array}{rr}
 & 1001111 \\
\cdot & 11010 \\
\hline
 & 0000000 \\
+ & 1001111 \\
+ & 0000000 \\
+ & 1001111 \\
+ & 1001111 \\
\hline
 & 100000000110
\end{array}
$$

2048 4 2
100000000110

$$
\begin{array}{rr}
 & 2048 \\
+ & 4 \\
+ & 2 \\
\hline
 & 2054
\end{array}
$$

A	B	Produkt
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 4

Samstag, 26. Dezember 2020 17:45

Aufgabe 4.1 (Stellenwertsysteme, ASCII-Code, Bereichsüberschreitungen)
Wie sieht der String s nach Ausführung des folgenden Programmfragments aus?

```
unsigned int i=641,j=6700417; // 32-bit integers
unsigned char a,b,s[]="123";  // 8-bit integers, ASCII Kodierung
```

s[0] = '1' (49)
s[1] = '2' (50)
s[2] = '3' (51)

$2^8 = 256$

a = 246 = s[1]*s[2]; (50, 51) 2550 mod 256 (8 bit)

b = 41 = s[2]*s[2]; (51, 51) 2601 mod 256 (8 bit)

if (a<b) s[2]='#'; else s[2]='e'; (246 < 41) s[2] = 'e'

s[0]= 'O'= s[0]*127; (49) 49 * 127 mod 256 = 79 ('O')

s[i*j] = 'j'; (1) 641 * 6700417 mod 2^{32} (32 bit)

s[1] = 'j'

Antwort:

s[ ] = Oje

Aufgabe 4.2 (Stellenwertsysteme, Teilbarkeit)
Zeigen Sie, dass im Stellenwertsystem mit Basis b bei der ganzzahligen Division $z = q \cdot b^k + r$ mit $r < b^k$ bei gegebener Darstellung $\underline{z} = (z_{n-1} \ldots z_k z_{k-1} \ldots z_0)_b$ die Darstellungen von Quotient $\underline{q} = (z_{n-1} \ldots z_k)_b$ und $\underline{r} = (z_{k-1} \ldots z_0)_b$ sind.

Antwort:

dez	Zeichen	dez	Zch.	dez	Zch.	dez	Zch.
0	NUL ^@	32	SP	64	@	96	`
1	SOH ^A	33	!	65	A	97	a
2	STX ^B	34	"	66	B	98	b
3	ETX ^C	35	#	67	C	99	c
4	EOT ^D	36	$	68	D	100	d
5	ENQ ^E	37	%	69	E	101	e
6	ACK ^F	38	&	70	F	102	f
7	BEL ^G	39	'	71	G	103	g
8	BS ^H	40	(	72	H	104	h
9	TAB ^I	41	)	73	I	105	i
10	LF ^J	42	*	74	J	106	j
11	VT ^K	43	+	75	K	107	k
12	FF ^L	44	,	76	L	108	l
13	CR ^M	45	-	77	M	109	m
14	SO ^N	46	.	78	N	110	n
15	SI ^O	47	/	79	O	111	o
16	DLE ^P	48	0	80	P	112	p
17	DC1 ^Q	49	1	81	Q	113	q
18	DC2 ^R	50	2	82	R	114	r
19	DC3 ^S	51	3	83	S	115	s
20	DC4 ^T	52	4	84	T	116	t
21	NAK ^U	53	5	85	U	117	u
22	SYN ^V	54	6	86	V	118	v
23	ETB ^W	55	7	87	W	119	w
24	CAN ^X	56	8	88	X	120	x
25	EM ^Y	57	9	89	Y	121	y
26	SUB ^Z	58	:	90	Z	122	z
27	Esc ^[	59	;	91	[	123	{
28	FS ^\	60	<	92	\	124	|
29	GS ^]	61	=	93	]	125	}
30	RS ^^	62	>	94	^	126	~
31	US ^_	63	?	95	_	127	DEL

... (256 Zeichen insgesamt)

Aufgabe 4.3 (Rechnen mit Kongruenzen)

a) Geben Sie die Elemente (Restklassen) folgender Restklassenringe an:

i) $\mathbb{Z}_2$ ii) $\mathbb{Z}_5$ iii) $\mathbb{Z}_6$ iv) $\mathbb{Z}_1$

Antwort:

i) $\mathbb{Z}_2$ Restklasse mod 2

$\mathbb{Z}_2$ Restklasse 0 $(0 + m\mathbb{Z})$

= {..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...}

$\mathbb{Z}_2$ Restklasse 1 $(1 + m\mathbb{Z})$

= {..., -3, -1, 1, 3, 5, ...}

iv) $\mathbb{Z}_1$ Restklasse mod 1

$\mathbb{Z}_1$ Restklasse 0 $(0 + m\mathbb{Z})$

= {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

ii) $\mathbb{Z}_5$ Restklasse mod 5

$\mathbb{Z}_5$ Restklasse 0 $(0 + m\mathbb{Z})$

= {..., -10, -5, 0, 5, 10, ...}

$\mathbb{Z}_5$ Restklasse 1 $(1 + m\mathbb{Z})$

= {..., -9, -4, 1, 6, 11, ...}

$\mathbb{Z}_5$ Restklasse 2 $(2 + m\mathbb{Z})$

= {..., -8, -3, 2, 7, 12, ...}

$\mathbb{Z}_5$ Restklasse 3 $(3 + m\mathbb{Z})$

= {..., -7, -2, 3, 8, 13, ...}

$\mathbb{Z}_5$ Restklasse 4 $(4 + m\mathbb{Z})$

= {..., -6, -1, 4, 9, 14, ...}

b) Berechnen Sie den Rest für die ganzzahlige Division $(137^{13} + 13^{10422}) \div 7$

Antwort:

Methode 1

$(137^{13} + 13^{10422}) : 7 = (137^{13} + 13^{10422}) \bmod 7$

$= 4^{13} + 6^{10422}$

$= 4 \bullet (4^{12}) + (6^2)^{5211}$

$= 4 \bullet (4^3)^4 + (6^2)^{5211}$

$= 4 \bullet 1 + 1$

$6^2 = 36 \bmod 7 = 5 \bullet 7 + \underline{\mathbf{1}} \longrightarrow (1^2)^{5211} = \mathbf{1}$

$4^3 = 64 \bmod 7 = 9 \bullet 7 + \underline{\mathbf{1}} \longrightarrow 1^4 = \mathbf{1}$

Methode 2

$(137^{13} + 13^{10422}) : 7$

$= (137^{13} + 13^{10422}) \bmod 7$

$= (4^{13} + (-1)^{10422}) \bmod 7$ //gerader Exponent -> positive Zahl

$= (4^{13} + 1) \bmod 7$

$= (4^{2*6+1} + 1) \bmod 7$

$= (4^{2*6+1}) \bmod 7 + (1) \bmod 7$

$= (4^2)^6 \bullet 4 \bmod 7$

$= (16)^6 \bullet 4 \bmod 7$

$= (2)^6 \bullet 4 \bmod 7$

$= (64) \bullet 4 \bmod 7$

$= (1) \bullet 4 + (1) \bmod 7$

$= 5$

Aufgabe 4.4 (Stellenwertsysteme, Quersumme, Teilbarkeit)
Die Quersumme der Darstellung $(z_{n-1}z_{n-2}\ldots z_1 z_0)_b$ einer Zahl z im Stellenwertsystem mit Basis b ist die Summe der Werte der einzelnen Ziffern $qs(\underline{z}_b) = z_{n-1} + z_{n-2} + \ldots + z_1 + z_0$.

a) Zeigen Sie:
Im Dezimalsystem $(b = 10)$ ist der Rest r der ganzzahligen Division einer Zahl a durch drei, also die Lösung der Gleichung $a = q * 3 + r$ für $r < 3$, gleich dem Rest der ganzzahligen Division der Quersumme der Darstellung durch drei, also $qs(\underline{a}_{10}) = \tilde{q} * 3 + r$ für $r < 3$.

b) Gilt der Satz aus Aufgabenteil a) auch für die Division durch neun im Dezimalsystem?

c) Wie bei der Division durch drei im Hexadezimalsystem $(b = 16)$?

d) Die Darstellung einer Zahl z mit Basis b sei $\underline{z}_b = (z_{n-1}z_{n-2}\ldots z_1 z_0)_b$, für welche d gilt

$$z = qs(\underline{z}_b) \mod d$$

Antwort:

Aufgabe 4.5 (Stellenwertsysteme, Division)

a) Bestimmen Sie Quotient und Rest für die ganzzahlige Division $419_{10} \div 23_{10}$ im Dezimalsystem!

Antwort:

419 : 23 = 18, $\longrightarrow$ 23 • 18 = 414 + 5 Rest
-23
 189
-178
  11

b) Wandeln Sie Dividend und Divisor aus Aufgabenteil a) ins Binärsystem und führen Sie die Division noch einmal aus! Wandeln Sie das Ergebnis ins Dezimalsystem und vergleichen Sie mit Aufgabenteil a)!

Antwort:

$$
\begin{aligned}
419 &= 209 * 2 + 1\\
209 &= 104 * 2 + 1\\
104 &= 52 * 2 + 0\\
52 &= 26 * 2 + 0\\
26 &= 13 * 2 + 0\\
13 &= 6 * 2 + 1\\
6 &= 3 * 2 + 0\\
3 &= 1 * 2 + 1\\
1 &= 0 * 2 + 1
\end{aligned}
$$

(419_{10})

110100011_2

$$
\begin{aligned}
23 &= 11 * 2 + 1\\
11 &= 5 * 2 + 1\\
5 &= 2 * 2 + 1\\
2 &= 1 * 2 + 0\\
1 &= 0 * 2 + 1
\end{aligned}
$$

(23_{10})

10111_2

```
                                 16   2
110100011 : 10111 = 000010010           Rest 101 (5)
- 0
 11
-  0
  110
-   0
  1101
-    0
  11010
- 10111
   1 1 1
  000110
-      0
     1100
-       0
     11001
   - 10111
      1  1
     000101
   -      0
        101
```

c) Bestimmen Sie den Rest für die ganzzahlige Division $4294967297_{10} \div 641_{10}$! (*http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E026.pdf*)

Antwort:

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 5

Samstag, 2. Januar 2021 18:04

Aufgabe 5.1 (Stellenwertsysteme, darstellbare Zahlenbereiche)
Geben Sie die Zahlenbereiche für ganze (vorzeichenbehaftet, signed) Zahlen an, die mit folgenden Stellenwertsystemen als $b-$Komplemente dargestellt werden können, dezimal und in ihrem jeweiligen System:

a) achtstelliges Dezimalsystem
b) einstelliges Binärsystem
c) vierstelliges Hexadezimalsystem
d) vierstelliges Ternärsystem (b=3)

$\frac{-b^n}{2}$ $\frac{b^n}{2}-1$

Antwort:

a) n = 8, b = 10 b) n = 1, b = 2 c) n = 4, b = 16 d) n = 4, b = 3

a) $\frac{-b^n}{2} = \frac{-10^8}{2} = -50.000.000$

[-50.000.000, 49.999.999]

$\frac{b^n}{2} -1 = \frac{10^8}{2} -1 = 49.999.999$

b) $\frac{-b^n}{2} = \frac{-2^1}{2} = -1$

[-1, 0]

$\frac{b^n}{2} -1 = \frac{2^1}{2} -1 = 0$

c) $\frac{-b^n}{2} = \frac{-16^4}{2} = -32.768$

[8000, 7FFF]

$\frac{b^n}{2} -1 = \frac{16^4}{2} -1 = 32.767$

d) $\frac{-b^n}{2} = \frac{-3^4}{2} = -32.768$

[-40, 33]

$\frac{b^n}{2} -1 = \frac{3^4}{2} -1 = 32.767$

Aufgabe 5.2 (Stellenwertsysteme, b- und $(b-1)$-Komplemente)
Folgende Ziffernfolgen sollen als b-Komplementdarstellungen von Zahlen im Stellenwertsystem mit der jeweils angegebenen Basis und Anzahl von Stellen interpretiert werden:

4355_{10} 7286_{10} efc_{16} 800_{16} 010010_2 10001_2

a) Geben Sie die additiven Inversen der Zahlen in b-Komplementdarstellung mit der jeweils angegebenen Basis und Anzahl von Stellen an, sofern möglich!

b) Geben Sie die Zahlen sowohl in der Darstellung mit der jeweils angegebenen Basis als auch in Dezimaldarstellung jeweils mit Vorzeichen an!

c) Geben Sie die $(b-1)$-Komplemente der Zahlen in der jeweils angegebenen Darstellung an!

d) Fügen Sie den Ziffernfolgen jeweils drei führende Ziffern hinzu, so dass sich die Zahlen nicht ändern!

Antwort:

a)

0000	0000	000	~~000~~	000000	00000
- 4355 p	-7286 n	- EFC n	~~- 800 n~~	- 010010 p	-10001 n
5645 n	2714 p	104 p	~~800 n~~	101110 n	01111 p

b)

4355_{10}	-2714_{10}	-104		010010	-01111
		-260_{10}		18_{10}	-15_{10}

c)

9999	9999	FFF	FFF	111111	11111
- 4355	-7286	- EFC	- 800	- 010010	- 10001
5644	2713	103	7FF	101101	01110

d)

0004355_{10} 9997286_{10} $FFFEFC_{16}$ $FFF800_{16}$ 000010010_2 11110001_2

0 p	0, 1, 2, 3, 4 p	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 p
1 n	5, 6, 7, 8, 9 n	8, 9, A, B, C, D, E, F n

Aufgabe 5.3 (Addition im Stellenwertsystem, Zweierkomplementdarstellung)
Gegeben sind folgende Zweierkomplementdarstellungen von Zahlen im fünfstelligen Binärsystem:

`01101   10110   01111   10000   11111   00001`

a) Ordnen Sie die Zahlen aufsteigend nach ihrem Wert!

Antwort:

01101 = 13
10110 = -10
01111 = 15
10000 = -16
11111 = -1
00001 = 1

10000 < 10110 < 11111 < 00001 < 01101 < 01111

b) Berechnen Sie alle möglichen Summen und Differenzen der Zahlen und geben Sie jeweils an, welchen Wert Carry und Overflow haben!

Antwort:

01101 p	10110 n	10000 n	00001 p	10110 n
+10110 n	- 00001 p	-11111 n	-10110 n	- 01101 p
00011 p	10101 n	10001 n	01011 p	00001 p
CA = 1	CA = 0	CA = 1	CA = 1	CA = 0
OV = 0	OV = 0	OV = 0	OV = 0	OV = 1

p + p = n
n + n = p
p - n = n
n - p = p
Wenn vorhanden, dann OV = 1

c) Geben Sie die Zahlen sowohl in Hexadezimal- als auch in Dezimaldarstellung jeweils mit Vorzeichen an!

Antwort:

$01101_2 = 13_{10}$ $\quad$ 0 D $\quad$ $0000\ 1101_{16}$ $\quad$ = 0D

$10110 = -10_{10}$ $\quad$ 6 $\quad$ $\boxed{1}0110$

negative Zahl
-> b-komplement bilden

0000
- 0001
1111 ⟶ F 6 $\quad$ 1111 0110 $\quad$ = F6

Aufgabe 5.4 (Addition im Stellenwertsystem, 16er-Komplementdarstellung)
Gegeben sind folgende 16er-Komplementdarstellungen von Zahlen im vierstelligen Hexadezimalsystem:

`9a03 53f5 7fff 8000 ffff 0001`

a) Ordnen Sie die Zahlen aufsteigend nach ihrem Wert!

Antwort:

8000 < 9A03 < FFFF < 0001 < 53F5 < 7FFF

7 höchste Zahl
6
5
4
3
2
1
0 p
F n
E
D
C
B
A
9
8 niedrigste Zahl

b) Berechnen Sie alle möglichen Summen und Differenzen der Zahlen und geben Sie jeweils an, welchen Wert Carry und Overflow haben!

Antwort:

9A03 n	8000 n	p + p = n
- 8000 n	+ FFFF n	n + n = p
1A03 p	7FFF p	p - n = n
		n - p = p
		Wenn vorhanden, dann OV = 1
CA = 0	CA = 1	
OV = 0	OV = 1	

c) Geben Sie die Zahlen sowohl in Hexadezimal- als auch in Dezimaldarstellung jeweils mit Vorzeichen an!

Antwort:

9A03
negative Zahl
-> b-komplement bilden

0000
- 9A03
- 65FD

$$9A03_{16} = 6 \bullet 16^3 + 5 \bullet 16^2 + 15 \bullet 16^1 + 13 \bullet 16^0$$
$$= -(24576 + 1280 + 240 + 13)$$
$$= -26109_{10}$$

Aufgabe 5.5 (Stellenwertsysteme, Shiften)
Die Zahl z soll folgende Werte annehmen:

04355_{10}, 7286_{10}, 777_{10}, efc_{16}, 800_{16}, 010010_2, 10001_2

Shiften Sie z im jeweils angegebenen Stellenwertsystem um zwei Stellen

a) nach links b) logisch nach rechts c) arithmetisch nach rechts

Vergleichen Sie jeweils mit der Multiplikation $z \cdot b^2 \bmod b^n$ bzw. der Division $z \div b^2$!

Antwort:

a)

04355 <<2 = 35500
7286 <<2 = 8600
777 <<2 = 700
EFC <<2 = C00
800 <<2 = 000
010010 <<2 = 001000
10001 <<2 = 00100

b)

04355 >>2 = 00043
7286 >>2 = 0072
777 >>2 = 007
EFC >>2 = 00E
800 >>2 = 008
010010 >>2 = 000100
10001 >>2 = 00100

c)

Arithemtisch: bei negativer Zahl b-1 einfügen

04355 >>2 = 00043
7286 >>2 = 9972
777 >>2 = 997
EFC >>2 = FFE
800 >>2 = FF8
010010 >>2 = 000100
10001 >>2 = 11100

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 6

Sonntag, 3. Januar 2021 18:06

Aufgabe 6.1 (logische Operationen)
Führen Sie folgende bitweise, logische Operationen aus:

a) (Einer-)Komplement: `~0xca9f`
b) AND: `0xca9f & 0x6dc5`
c) OR: `0xca9f | 0x6dc5`
d) XOR: `0xca9f ^ 0x6dc5`
e) NAND: `0xca9f nand 0x6dc5`
f) NOR: `0xca9f nor 0x6dc5`

Antwort:

a) **(Einer-)Komplement:** 0xCA9F

```
   C    A    9    F
  1100 1010 1001 1111
~ 0011 0101 0110 0000
```

Negation

A	$\neg A$
1	0
0	1

b) **AND:** 0xCA9F & 0x6DC5

```
  1100 1010 1001 1111
& 0110 1101 1100 0101
  0100 1000 1000 0101
```

AND

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

c) **OR:** 0xCA9F | 0x6DC5

```
  1100 1010 1001 1111
| 0110 1101 1100 0101
  1110 1111 1101 1111
```

OR

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

d) **XOR:** 0xCA9F ^ 0x6DC5

```
  1100 1010 1001 1111
^ 0110 1101 1100 0101
  1010 0111 0101 1010
```

XOR

A	B	$A \veebar B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e) **NAND:** 0xCA9F nand 0x6DC5

```
     1100 1010 1001 1111
nand 0110 1101 1100 0101
     1011 0111 0111 1010
```

NAND

A	B	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

f) **NOR:** 0xCA9F nor 0x6DC5

```
    1100 1010 1001 1111
nor 0110 1101 1100 0101
    0001 0000 0010 0000
```

NOR

A	B	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Aufgabe 6.2 (Stellenwertsysteme, Shiften, logische Operationen)
Gegeben seien die n-bit Wörter $\underline{x} = x_{n-1} \cdots x_0$ und $\underline{y} = y_{n-1} \cdots y_0$. Wie sieht $\underline{y}$ nach folgender Operation aus, wenn $<<$ und $>>$ die logischen Shiftoperatoren links bzw. rechts sind, und | das bitweise Oder?

$$\underline{y} \longleftarrow (\underline{x} << (n-k)) \mid (\underline{x} >> k)$$

Antwort:

Aufgabe 6.3 (Maskierung, Setzen, Invertieren, Löschen von Bits)
Gegeben sei ein n-bit Wort $\underline{z} = (z_{n-1} \ldots z_1 z_0)$ und eine Menge von Positionen in dem Wort, $I \subseteq [0, n-1]$. Die Werte (Bits) an den Positionen $i \in I$, also die $\{z_i \mid i \in I\}$, sollen geändert werden, ohne dass sich die übrigen Bits $\{z_i \mid i \notin I\}$ ändern:

- Zum Setzen der Bits $z_i \leftarrow 1$ für alle $i \in I$ wird ein n-bit Wort $\underline{m} = (m_{n-1} \ldots m_0)$ (Maske) mit $m_i = 1$ für alle $i \in I$ und $m_i = 0$ für alle $i \notin I$ erzeugt und mit dem Wort $\underline{z}$ bitweise Oder-verknüpft, also $\underline{z} \leftarrow \underline{z} \mid \underline{m}$.

  Wird statt der bitweisen Oder-Verknüpfung die bitweise exklusive Oder-Verknüpfung $\underline{z} \leftarrow \underline{z} \,\hat{}\, \underline{m}$ verwendet, werden die Bits z_i invertiert: $z_i \leftarrow z_i'$.

- Zum Löschen der Bits $z_i \leftarrow 0$ für alle $i \in I$ wird ein n-bit Wort $\underline{m} = (m_{n-1} \ldots m_0)$ (Maske) mit $m_i = 0$ für alle $i \in I$ und $m_i = 1$ für alle $i \notin I$ erzeugt und mit dem Wort $\underline{z}$ bitweise Und-verknüpft, also $\underline{z} \leftarrow \underline{z} \,\&\, \underline{m}$.

In den 16-bit Wörter `0x0000`, `0xca9f`, `0xabab`, `0xedda`, `0xffff` sollen die $\boxed{\text{Bits 13,12,11,7,6,3,2 und 0}}$
a) gesetzt, b) invertiert und c) gelöscht werden.
Führen Sie die Operationen mit den entsprechenden Masken durch!

Bit Setzen: OR
Bit invertieren: XOR
Bit Löschen: Erst Maske invertieren, dann AND

Antwort:

```
                 13 12 11     7 6     3 2  0
a) 0xEDDA  =     1110 1101 1101 1010
           OR    0011 1000 1100 1101  <- Maske (wird von uns generiert)
                 1111 1101 1101 1111

                 13 12 11     7 6     3 2  0
b) 0xEDDA  =     1110 1101 1101 1010
           XOR   0011 1000 1100 1101  <- Maske
                 1101 0101 0001 0111

                 13 12 11     7 6     3 2  0
c) 0xEDDA  =     1110 1101 1101 1010
           AND   1100 0111 0011 0010  <- invertierte Maske
                 1100 0101 0001 0010
```

Aufgabe 6.4 (Maskierung, Invertierung von Bits)
Finden Sie 16-bit Wörter y, so dass
a) `0xcafe ^ y = 0xbeef` b) `0xaaaa ^ y = 0x5555`
c) `0xffff ^ y = 0x0000` d) `0xdead ^ y = 0xcaca`

Antwort:

```
a)  0xCAFE = 1100 1010 1111 1110
  0x7411 = ^ 0111 0100 0001 0001 <- Maske (wird von uns generiert)
    0xBEEF = 1011 1110 1110 1111

b)  0xAAAA = 1010 1010 1010 1010
  0xFFFF = ^ 1111 1111 1111 1111 <- Maske (wird von uns generiert)
    0x5555 = 0101 0101 0101 0101

c)  0xFFFF = 1111 1111 1111 1111
  0xFFFF = ^ 1111 1111 1111 1111 <- Maske (wird von uns generiert)
    0x0000 = 0000 0000 0000 0000

d)  0xDEAD = 1101 1110 1010 1101
  0x1467 = ^ 0001 0100 0110 0111 <- Maske (wird von uns generiert)
    0xCACA = 1100 1010 1100 1010
```

^ = XOR

XOR

A	B	$A \veebar B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Aufgabe 6.5 (Bitfelder)
In einem 32-bit Wort $\underline{x} = (x_{31} \ldots x_0)$ seien Zahlen in den Bitfeldern x_{28}–x_{26}, x_{23}–x_{21} und x_{10}–x_7 binär kodiert.

a) Geben Sie für jedes der drei Bitfelder in Dezimaldarstellung mit Vorzeichen an, welche Werte
i) vorzeichenlos, ii) als Zweierkomplemente dargestellt werden können!

Antwort:

i) $[0, b^n - 1]$

$x_{28} - x_{26} = [0, 2^3 - 1] = [0, 7]$

$x_{23} - x_{21} = [0, 2^3 - 1] = [0, 7]$

$x_{10} - x_7 = [0, 2^4 - 1] = [0, 15]$

ii) $\frac{-b^n}{2}$ $\frac{b^n}{2} - 1$

$x_{28} - x_{26} = [-4, 3]$

$x_{23} - x_{21} = [-4, 3]$

$x_{10} - x_7 = [-8, 7]$

b) Wie und mit welchen Masken können die Bitfelder auf null gesetzt werden?

Antwort:

```
        28 27 26   23 22 21          10 9 8  7
      0001 1100 1110 0000 0000 0111 1000 0000
XOR   1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111   <- Maske 0xFFFFFFFF
      1110 0011 0001 1111 1111 1000 0111 1111
```

```
        28 27 26   23 22 21          10 9 8  7
      0001 1100 1110 0000 0000 0111 1000 0000
AND   1110 0011 0001 1111 1111 1000 0111 1111   <- Maske 0xE31FF87F
      0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000
```

$X_{31}X_{30}X_{29}X_{28}X_{27}X_{26}X_{25}X_{24}X_{23}X_{22}X_{21}X_{20}X_{19}X_{18}X_{17}X_{16}X_{15}X_{14}X_{13}X_{12}X_{11}X_{10}X_9X_8X_7X_6X_5X_4X_3X_2X_1X_0$

AND 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 <- Maske 0xE31FF87F

$X_{31}X_{30}X_{29}\,0\;0\;0\;X_{25}X_{24}\,0\;0\;0\;X_{20}X_{19}X_{18}X_{17}X_{16}X_{15}X_{14}X_{13}X_{12}X_{11}\,0\;0\;0\;0\;X_6X_5X_4X_3X_2X_1X_0$

c) Geben Sie die Werte der drei Bitfelder im Wort `0xf2edcace` in Dezimaldarstellung mit Vorzeichen an, bei Interpretation als i) vorzeichenlose Zahlen, ii) Zahlen in Zweierkomplementdarstellung!

Antwort: 0xF2EDCACE =

```
  F    2    E    D    C    A    C    E
     28 27 26 23 22 21      10 9 8  7
1111 0010 1110 1101 1100 1010 1100 1110
```

i) $100_2 = 4_{10}$ $\quad 111_2 = 7_{10}$ $\quad 0101_2 = 5_{10}$

ii)

$$\begin{array}{r} 000 \\ -\,100 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 000 \\ -\,111 \\ \hline 001 \end{array} \qquad =5_{10}$$

$= -4_{10}$ $\quad = -1_{10}$

d) In einem weiteren 32-bit Wort $\underline{y} = y_{31} \dots y_0$ seien die Bits $y_i = 0$ für $i \in [3, 31]$. Geben Sie eine möglichst kurze Sequenz von Operationen an, mit der die drei Bits y_2–y_0 in das Bitfeld x_{28}–x_{26} kopiert werden können!

Antwort:

e) Wie, wenn die drei Bits x_{28}–x_{26} in die drei Bits y_2–y_0 kopiert und $y_i = 0$ für $i \in [3, 31]$ werden sollen?

Antwort:

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1 (Binäre Gleitkommazahlen)

a) Berechnen Sie die Gleitkommadarstellung von $2^{-i}, i \in [1, 6]$ im Binär- und Dezimalsystem!

Antwort:

$\frac{1}{2^x}$ $\quad x = -i \quad 2^i \qquad S = \frac{10}{2} - 1 \qquad \mathbb{Z}_1 > 1$

$\frac{1}{2} \bullet 10 = \frac{10}{2} = 5 = \mathbb{Z}_1$

$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0{,}125$

$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = 0{,}0625$

$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = 0{,}03125$

$2^{-1} = \frac{\overset{s}{1}}{2} \bullet \overset{b}{10} = 5 = \mathbb{Z}_{-1}$

$S = 5 - 5 = 0 \qquad \mathbb{Z} = 0 \bullet 10 = 0$

$2^{-2} = \frac{\overset{s}{1}}{4} \bullet \overset{b}{10} = \frac{5}{2}$ -> $2 = \mathbb{Z}_{-1}$

$S = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{Z} = \frac{1}{2} \bullet 10 = 5 \qquad 5 - 5 = 0$

$= 0{,}25$

$2^{-3} = \frac{\overset{s}{1}}{2^3} = \frac{1}{8} \bullet \overset{b}{10} = \frac{10}{8}$ -> $1 = \mathbb{Z}_{-1}$

$S = \frac{10}{8} - 1 = \frac{2}{8} \bullet 10 = \frac{20}{8} = 2 \qquad 2 = \mathbb{Z}_{-2}$

$S = \frac{20}{8} - 2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} * 10 = 5 \qquad 5 = \mathbb{Z}_{-3}$

$\frac{1}{2} = 1 \bullet \frac{10^1}{2 \bullet 10^1} = \frac{10}{2} \bullet 10^{-1} = 5 \bullet 10^{-1} = 0{,}5$

$2^{-1} = \frac{1}{2} \bullet 2 = 1 \qquad \mathbb{Z}_{-1}$

$S = 1 - 1 = 0 \qquad = 0{,}1$

$2^{-2} = \frac{1}{4} \bullet 2 = \frac{2}{4} \qquad 0 = \mathbb{Z}_{-1}$

$\frac{2}{4} \bullet 2 = 1 \qquad 1 = \mathbb{Z}_{-2}$

$1 - 1 = 0 \qquad = 0{,}01$

b) Wandeln Sie folgende dezimale in binäre Gleitkommazahlen, ggf. unter Kennzeichnung der Periode:
i) 43,75 ii) 4,375 iii) 0,4375 iv) 0,04375

Antwort:

ii) $4{,}375_{10}$

Vorkommazahl

$4 = 2 \bullet 2 + 0$
$2 = 1 \bullet 2 + 0$
$1 = 0 \bullet 2 + 1$

Nachkommazahl

$0{,}375 \bullet 2 = 0{,}750 = 0$
$0{,}750 \bullet 2 = 1{,}50 = 1$
$0{,}50 \bullet 2 = 1 = 1$

$100{,}011_2$

iv) $0{,}04375$

Vorkommazahl

$0 = 0 \bullet 2 + 0$

Nachkommazahl

$0{,}04375 \bullet 2 = 0{,}0875 = 0$
$0{,}0875 \bullet 2 = 0{,}175 = 0$
$0{,}175 \bullet 2 = 0{,}35 = 0$
$0{,}35 \bullet 2 = 0{,}7 = 0$
$0{,}7 \bullet 2 = 1{,}4 = 1$
-> $0{,}4 \bullet 2 = 0{,}8 = 0$
$0{,}8 \bullet 2 = 1{,}6 = 1$
$0{,}6 \bullet 2 = 1{,}2 = 1$
$0{,}2 \bullet 2 = 0{,}4 = 0$
-> $0{,}4 \bullet 2 = 0{,}8 = 0$

$0{,}00001\overline{0110}_2$

c) Stellen Sie folgende binäre Gleitkommazahlen im Dezimalsystem als vereinfachte Brüche und als Gleitkommazahlen dar, ggf. unter Kennzeichnung der Periode:
i) 11010,1101 ii) 110101,101 iii) $1100,10\overline{011}$

Antwort:

i) $\overset{16}{1}\overset{8}{1}0\overset{2}{1}0,\overset{\frac{1}{2}}{1}\overset{\frac{1}{4}}{1}0\overset{\frac{1}{16}}{1} = 26{,}8125$

$= 26\ \frac{13}{16}$

$+\ 2$
$+\ 8$
16
$\overline{26}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}8125$

iii) $1100{,}10\overline{011} = 12{,}5938$

$= 12\ \frac{19}{32}$

4
$+\ 8$
$\overline{12}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0{,}5938$

$\mathbb{Z}_{-1} = \frac{19}{32} \bullet 10 = \frac{190}{32} = \frac{95}{16} = 5\ \frac{15}{16}$

$S = \frac{95}{16} - 5 = \frac{15}{16} = \frac{15}{16} \bullet 10 = \frac{150}{16} = 9\ \frac{6}{16}$

$\frac{150}{16} - 9 = \frac{6}{16}$ 0

$\frac{6}{16} \bullet 10 = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} = 3$

$\frac{15}{4} = \frac{3}{4} \bullet 10 = \frac{30}{4} = 7$

$\frac{2}{4} \bullet 10 = \frac{20}{4} = 5$

$5 - 5 = 0$

Aufgabe 7.2 (Rundung)

Fünf Personen (A,B,C,D,E) sind an einem Unternehmen mit insgesamt 120 Anteilen gleichen Wertes gemäß nebenstehender Tabelle beteiligt.

Person	A	B	C	D	E
Anteile	18	30	20	34	18

Der Fuhrpark des Unternehmens soll aufgelöst werden. Die zehn exakt gleichwertigen Fahrzeuge sollen an die Personen entsprechend ihres Anteils am Unternehmen verteilt werden. Klappt das bei
i) kaufmännischer Rundung, ii) mathematischer Rundung?

Antwort:

	i)	ii)
$A = \frac{18}{120} \cdot 10 = 1{,}5$ Fahrzeuge	= 2	= 2
$B = \frac{30}{120} \cdot 10 = 2{,}5$ Fahrzeuge	= 3	= 2
$C = \frac{20}{120} \cdot 10 = 1{,}\overline{6}$ Fahrzeuge	= 2	= 2
$D = \frac{34}{120} \cdot 10 = 2{,}8\overline{3}$ Fahrzeuge	= 3	= 3
$E = \frac{18}{120} \cdot 10 = 1{,}5$ Fahrzeuge	= 2	= 2
	= 11 > 10 ✗	= 12 > 10 ✗

Aufgabe 7.3 (Gleitkommaarithmetik)

Berechnen Sie die Werte folgender Ausdrücke unter Angabe der einzelnen Rechenschritte! Geben Sie die Ergebnisse als normalisierte Gleitkommazahlen in der jeweiligen Basis an, gerundet auf drei Nachkommastellen! Bei welchen Ausdrücken unterscheiden sich die Ergebnisse bei kaufmännischer und mathematischer Rundung!

i) $5{,}314_{10} \cdot 10^2 + 8{,}500_{10} \cdot 10^{-1}$ ii) $1{,}710_{10} \cdot 10^7 * 6{,}350_{10} \cdot 10^{-4}$
iii) $2{,}100_{10} \cdot 10^2 / 5{,}100_{10} \cdot 10^{-5}$ iv) $1{,}011_2 \cdot 2^5 + 1{,}100_2 \cdot 2^4$
v) $1{,}100_2 \cdot 2^{-3} * 1{,}001_2 \cdot 2^6$ vi) $1{,}100_2 \cdot 2^2 / 1{,}111_2 \cdot 2^{-4}$

1. Zahl Komma entfernen (*10)
2. Zahlen allein verrechnen
3. Potenzen verrechnen

iii) $\frac{2{,}1000 \cdot 10^2}{5{,}1000 \cdot 10^{-5}} = \frac{2{,}100}{5{,}100} \cdot 10^7$

$\frac{21}{51} \cdot \frac{10}{10} = \frac{2100000}{51} \cdot 10^{-5}$

$\frac{2100000}{51} \cdot 10^7 \cdot 10^{-5} = \frac{2100000}{51} \cdot 10^2$

$4{,}1176 \cdot 10^2 = 4{,}1176 \cdot 16^4 + 10^2$
$= 4{,}1176 + 16^6$

ii) $\frac{1{,}710 \cdot 10^7}{6{,}350 \cdot 10^{-4}} = \frac{\boxed{1710} \cdot \boxed{10^4}}{\boxed{6350} \cdot \boxed{10^{-7}}}$

Potenzrechnung
$10^4 * 10^{-7} = 10^{-3}$

$1710 \cdot 6350$
$= 10858500 \cdot 10^{-3}$
$= 1{,}086 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3}$
$= 1{,}086 \cdot 10^4$

vi) $\frac{1{,}100 \cdot 2^2}{1{,}111 \cdot 2^{-4}} = \frac{1100 \cdot 2^{-1}}{1111 \cdot 2^{-7}}$

Potenzregel
$2^{-1} : 2^{-7} = 2^6$

$11000000 : 1111 = 1100{,}\overline{1100}$
- 1111
$\boxed{10010}$
- 1111
000110
- 0
1100
- 0
11000
- 1111
$0\boxed{10010}$

Aufgabe 7.4 (Exzessdarstellung)
Geben Sie die Zahlenbereiche für ganze (vorzeichenbehaftet, signed) Zahlen an, die in folgenden Stellenwertsystemen (Basis b) mit n Stellen und Exzess e dargestellt werden können, dezimal und in ihrem jeweiligen System:

i) $b = 10, n = 4, e = 5000$ ii) $b = 10, n = 3, e = 499$
iii) $b = 16, n = 2, e = 0x80$ iv) $b = 2, n = 11, e = 01111111111_2$ (0x3ff)

Antwort:

i) b = 10 n = 4 e = 5000

Formel: b^n -1 - Exzess

[-5000, 4999]

0000 - Exzess
9999 - Exzess

ii) b = 10, n = 3, e = 499

000 - 499
999 - 499

[-499, 500]

iii) b = 16, n = 2, e = 0x80

00 - 80
FF - 80

[-0x80, 0x7F] = [-128, 127]

iv) b = 2, n = 11, e = 011111111

00000000000 - 01111111111
11111111111 - 01111111111

$[-01111111111_2, 10000000000_2]$
$= [-3FF_{16}, 400_{16}]$
$= [-1023_{10}, 1024_{10}]$

Aufgabe 7.5 (Exzessdarstellung)
Gegeben sind vier Zahlen in zweistelliger Hexadezimaldarstellung mit Vorzeichen:
$a = +0x1C$, $b = +0x5A$, $c = -0x1C$, $d = -0x5A$

a) Geben Sie die vier Zahlen in Exzessdarstellung mit Exzess 0x7F an!

Antwort:

a) Excess = 0x7F

1C	5A	- 1C	- 5A
+ 7F	+ 7F	+ 7F	+ 7F
9B	D9	63	25

b) Berechnen Sie
$e = a + b$, $f = a + d$, $g = c + d$, $h = c - d$
in der Exzessdarstellung mit den nötigen Korrekturen!

Antwort:

1. M	1. M	2. M	2. M
e = 1C	f = 1C	f = 9B	h = 63
+5A	-5A	+25	- 25
76	C2	C0	3E
76	C2	C0	3E
+ 7F	+7F	- 7F	+7F
F5	41	41	BD

1. Methode
a = 0x1C
b = 0x5A
a + b = 76

76
+ 7F
F5

2. Methode
a = 9B
b = D9
(Ergebnis der Aufgabe a)
a + b = 174

174
- 7F
F5

c) Wandeln Sie die Zahlen zurück ins zweistellige Hexadezimalsystem mit Vorzeichen!

Antwort:

Aufgabe 7.6 (IEEE Gleitkommadarstellung)

a) Geben Sie die folgenden vier dezimalen Gleitkommazahlen als binäre Gleitkommanzahlen an und im 32-bit und 64-bit IEEE-Format, sowohl binär als auch hexadezimal!

i) 14,375 ii) -173,875 iii) 0,03125 iv) -0,046875

Antwort:

i) 14,375

Bei 32 Bit: 127
Bei 64 Bit: 1023

1. Vorkomma in Dual

$14 = 7 \cdot 2 + 0$
$7 = 3 \cdot 2 + 1$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$
$1 = 0 \cdot 2 + 1$

1110_2

2. Nachkomma in Dual

$0{,}375 \cdot 2 = 0{,}75 = 0$
$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5 = 1$
$0{,}5 \cdot 2 = 1 = 1$

011_2

3. Normalisieren

1110,011

$= 1{,}110011 \cdot 2^3$

4. **32-Bit:** Charakteristik = Exponent + Bias

$\underset{\text{Exp}}{3} + \underset{\text{Bias}}{127} = 130$

= 10000010

5.Vorzeichen: + = 0
- = 1

0|10000010|

6. Mantisse: wenn keine Periode -> Nachkommazahl + 0 auffüllen
wenn Periode -> Nachkommazahl auffüllen

IEEE

Vorz. (1 Z.) Charakteristik (8 Z.) Mantisse (23 Zahlen)

0|100|0001|0|110|0110|0000|0000|0000|0000

4 1 6 6 0 0 0 0

$= 0x41660000_{16}$

4. **64-Bit:** Charakteristik = Exponent + Bias

$\underset{\text{Exp}}{3} + \underset{\text{Bias}}{1023} = 1026$

= 10000000010

5.Vorzeichen: + = 0
- = 1

0|10000000010|

6. Mantisse: wenn keine Periode -> Nachkommazahl + 0 auffüllen
wenn Periode -> Nachkommazahl auffüllen

IEEE

Vorz. (1 Z.) Charakteristik (11 Z.) Mantisse (52 Zahlen)

0|100|0000|0010|1100|1100|0000|0000|0000 . . . 0

4 0 2 C C 0 0 0 . . . 0

$= 0x402CC00000000000_{16}$

iv) -0,046875

1. Vorkomma in Dual

-0_2

2. Nachkomma in Dual

$0{,}046875 \cdot 2 = 0{,}09375 = 0$
$0{,}09375 \cdot 2 = 0{,}1875 = 0$
$0{,}1875 \cdot 2 = 0{,}375 = 0$
$0{,}375 \cdot 2 = 0{,}75 = 0$
$0{,}75 \cdot 2 = 1{,}5 = 1$
$0{,}5 \cdot 2 = 1 = 1$

000011_2

3. Normalisieren

$-0{,}000011$

$= -1{,}1 \cdot 2^{-5}$

4. **32-Bit:** Charakteristik = Exponent + Bias

Exp Bias
$-5 + 127 = 122$

$= 01111010$

5.Vorzeichen: + = 0
- = 1

101111010

6. Mantisse: wenn keine Periode -> Nachkommazahl + 0 auffüllen
wenn Periode -> Nachkommazahl auffüllen

IEEE

Vorz. (1 Z.) Charakteristik (8 Z.) Mantisse (23 Zahlen)

1011 1101 0100 0000 0000 0000 0000 0000

B D 4 0 0 0 0 0

$= 0xBD40000_{16}$

4. **64-Bit:** Charakteristik = Exponent + Bias

Exp Bias
$-5 + 1023 = 1018$

$= 01111111010$

5.Vorzeichen: + = 0
- = 1

001111111010

6. Mantisse: wenn keine Periode -> Nachkommazahl + 0 auffüllen
wenn Periode -> Nachkommazahl auffüllen

IEEE

Vorz. (1 Z.) Charakteristik (11 Z.) Mantisse (52 Zahlen)

1011 1111 1010 1000 0000 0000 0000 0000 . . . 0

B F A 8 0 0 0 0 . . . 0

$= 0xBFA8000000000000_{16}$

b) Geben Sie die folgenden vier im IEEE-Format gegebenen 32-bit Gleitkommazahlen jeweils als binäre und dezimale Gleitkommazahl an!

i) C1710000 ii) 43616000 iii) 3B800000 iv) BA800000

Antwort:

i) C1710000

C 1 7 1 0 0 0 0
1 100 0001 0 111 0001 0000 0000 0000 0000

Exponent

128 2
1000 0010

128
+ 2
130

130 - 127 = 3
Exponent = 3

C 1 7 1 0 0 0 0
1 100 0001 0 111 0001 0000 0000 0000 0000

$1,1110001000..0 \bullet 2^3$

$= -1111,000100..0 \bullet 2^0$
$= -15,0625_{10}$

Aufgabe 7.7 (IEEE Gleitkommadarstellung)
Nebenstehendes „C"-Fragment liefert folgende Ausgabe:
i:16777217,f:16777216.0
Geben Sie die ganzen Zahlen $16777216=2^{24}$ und $16777217=2^{24}+1$ als binäre Gleitkommazahlen und im IEEE-Format an!

```
float f; unsigned int i;
i=97; i=i*257; i=i*673;
f=97; f=f*257; f=f*673;
printf("i:%d,f:%10.1f\n",i,f);
```

Gleitkommazahl = Normalisieren

Antwort:

2^{24} = 24 Stellen

1000 0000 0000 0000 0000 0000

Exp Bias
$24 + 127 = 151_{10}$

Charakteristik
$= 1001\ 0111_2$

Vorz. (1 Z.) Charakteristik (8 Z.) Mantisse (23 Zahlen)
0 | 1001 0111 | 0000 0000 0000 0000 0000 0000

$1,000... * 2^{23}$

Einführung in die Informatik Aufgabenblatt 8

Sonntag, 24. Januar 2021 17:42

Aufgabe 8.1 (logische Verknüpfungen)
Gegeben seien die Menge $B = \{0, 1\}$ und folgende innere Verknüpfungen:

$B \to B$	
x	$NOT\ x$ x'
0	1
1	0

$B \times B \to B$							
x	y	$x\ OR\ y$ $x + y$	$x\ NOR\ y$	$x\ AND\ y$ $x \cdot y$	$x\ NAND\ y$	$x\ XOR\ y$ $x \oplus y$	$x\ IMPL\ y$ $x \Rightarrow y$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

a) Die Verknüpfung OR ist kommutativ, da $a + b = b + a$. Welche der anderen Verknüpfungen sind kommutativ?

b) Die Verknüpfung XOR ist assoziativ, da $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ und die Klammern auch weggelassen werden können. Welche der anderen Verknüpfungen sind assoziativ?

c) Welche der folgenden „Distributivgesetze" gelten? (Beweis über Wertetabelle)

i) $(a + b)c = ac + bc$ ii) $ab + c = (a + c)(b + c)$
iii) $(a \oplus b)c = ac \oplus bc$ iv) $ab \oplus c = (a \oplus c)(b \oplus c)$
v) $a \oplus b + c = (a + c) \oplus (b + c)$ vi) $(a + b) \oplus c = a \oplus c + b \oplus c$
vii) $a \Rightarrow (bc) = (a \Rightarrow b)(a \Rightarrow c)$ viii) $(ab) \Rightarrow c = (a \Rightarrow c)(b \Rightarrow c)$
ix) $(a\ NOR\ b)\ NAND\ c = (a\ NAND\ c)\ NOR\ (b\ NAND\ c)$

Antwort:

a) Alle außer Implikation. Man kann das mit der Wertetabelle beweisen oder man sieht es mit dem Auge und rechnet im Kopf

b) OR, AND, XOR sind assoziativ. Gleich wie a)

c) Nr. 1, 2, 3, 7 funktionieren (Auch mit Wertetabelle beweisen)

Aufgabe 8.2 (Boolesche Ausdrücke und kombinatorische Schaltungen)

a) Zeichnen Sie Schaltungen aus UND-, ODER- und NICHT-Elementen, die folgende Ausdrücke realisieren:
i) $x(xy' + x'y + y'z)$ ii) $(x'y)'(x' + xyz')$ iii) $(x + y'z)(y + z')$
iv) $(x + y)'(xy')'$ v) $(x' + y)' + y'z$ vi) $y(x + yz)'$

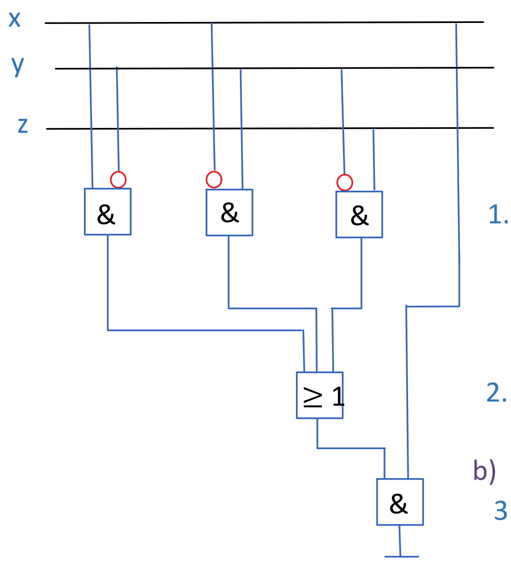
b) Geben Sie für jede Schaltung die Anzahl der Verzögerungen durch die Bauelemente an!

c) Geben Sie für jeden Ausdruck die entsprechende Wertetabelle und das Urbild der Eins an!

d) Geben Sie für jeden Ausdruck die DNF an!

Antwort: x • (x • y' + x' • y + y' • z)

a)



1. Verzögerung

2. Verzögerung

b)

3. Verzögerung

c) Wertetabelle

			1	2	3	4	5	
	x y z	x' y' z'	x • y'	x' • y	y' • z	1 + 2	3 + 4	5 • x
0	0 0 0	1 1 1	0	0	0	0	0	0
1	0 0 1	1 1 0	0	0	1	0	1	0
2	0 1 0	1 0 1	0	1	0	1	1	0
3	0 1 1	1 0 0	0	1	0	1	1	0
4	1 0 0	0 1 1	1	0	0	1	1	1
5	1 0 1	0 1 0	1	0	1	1	1	1
6	1 1 0	0 0 1	0	0	0	0	0	0
7	1 1 1	0 0 0	0	0	0	0	0	0

$S^{-1}(1) = \{4, 5\}$

d) DNF = $\boxed{(x\ y'\ z' + x\ y'\ z)}$

Aufgabe 8.3 (kombinatorische Schaltungen)
Eine Schaltung habe die vier Eingänge x, c_2, c_1, c_0 und einen Ausgang y. Das Ausgangssignal soll $y = x$ sein, wenn die drei Eingangssignale c_2, c_1, c_0 die Ziffern der Binärdarstellung der Zahl 5 sind, und $y = 0$ sonst.

a) Geben Sie eine Wertetabelle und das Urbild der Eins für die Schaltfunktion an, finden Sie einen Booleschen Ausdruck und zeichnen Sie den Schaltplan!

$\boxed{\text{Boolescher Ausdruck = DNF}}$

Antwort:

	X	C_2	C_1	C_0	Y	
0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	0	
2	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	1	0	
4	0	1	0	0	0	
5	0	1	0	1	0	= 5, kein Ausgangssignal
6	0	1	1	0	0	
7	0	1	1	1	0	
8	1	0	0	0	0	
9	1	0	0	1	0	
A	1	0	1	0	0	
B	1	0	1	1	0	
C	1	1	0	0	0	
D	1	1	0	1	1	= 5, Ausgangssignal
E	1	1	1	0	0	
F	1	1	1	1	0	

Binärdarstellung der C Zahlen soll 5 sein!

Ausgangssignal y = 1

Ausgangssignal soll y = x sein!

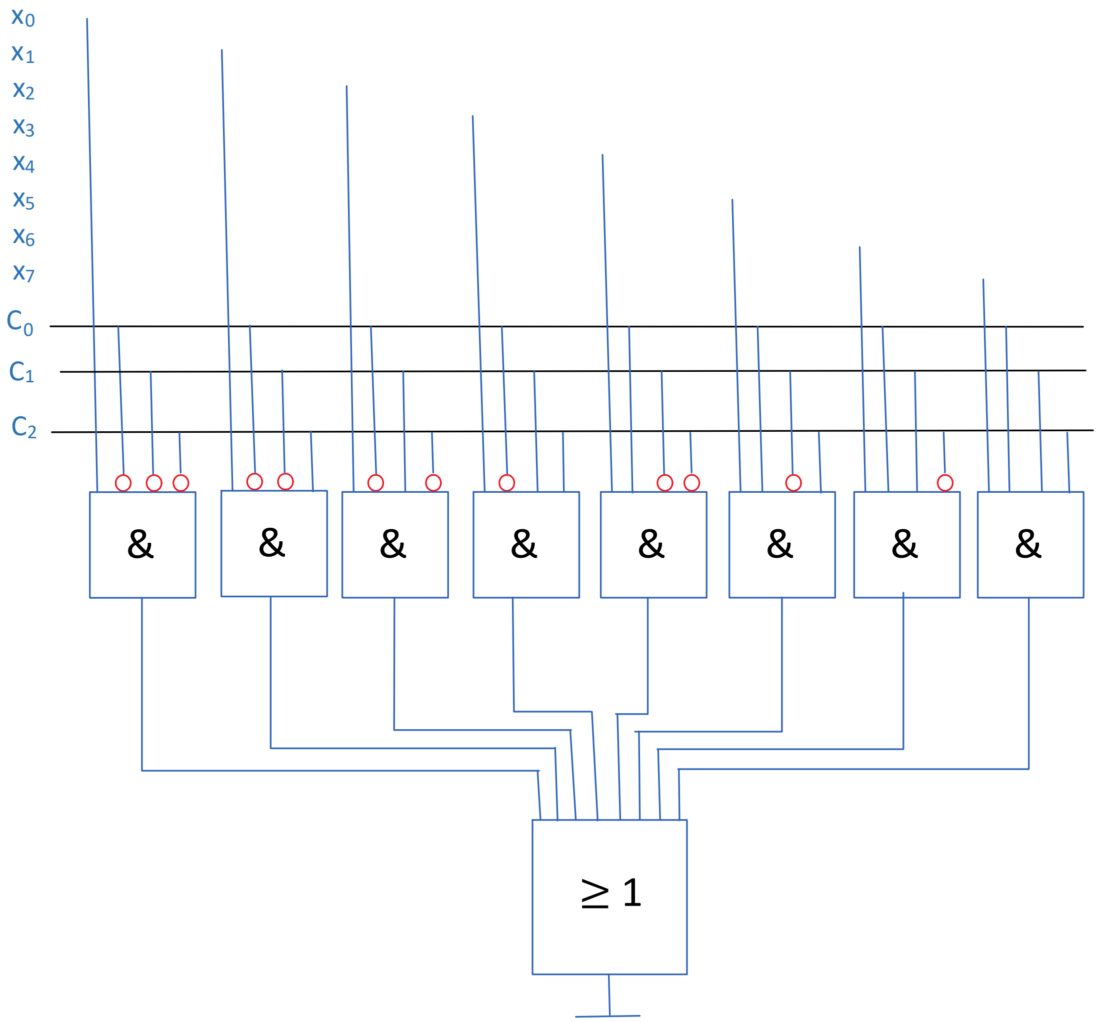
$Y^{-1}(1) = \{D\}$

DNF = $(X\, C_2\, C_1'\, C_0)$

b) Ein Multiplexer ist eine Schaltung, die es erlaubt, aus n Eingangssignalen $x_{n-1}, \cdots, x_0$ ein x_i als Ausgangssignal y auszuwählen. Die Auswahl des Eingangssignals x_i geschieht über m weitere Eingangssignale $c_{m-1}, \cdots, c_0$, die als Ziffern der Binärdarstellung von i interpretiert werden. Erweitern Sie Ihre Schaltung aus Aufgabenteil a) zu einem Multiplexer mit acht Eingängen!

Antwort:

$C_2C_1C_0$
0 0 0
0 0 1
0 1 0
0 1 1
1 0 0
1 0 1
1 1 0
1 1 1



Aufgabe 8.4 (kombinatorische Schaltungen)
Eine Schaltung mit drei Eingängen x_2, x_1, x_0 soll am Ausgang y genau dann $y = 1$ liefern, wenn die arithmetische Summe der drei Eingangssignale gerade ist, und $y = 0$ sonst (ungerade Parität).

a) Geben Sie eine Wertetabelle, das Urbild der Eins, sowie einen Booleschen Ausdruck für die Schaltfunktion an und zeichnen Sie den Schaltplan!

b) Erweitern Sie Ihre Schaltung aus Aufgabenteil a) auf vier Eingänge x_3, x_2, x_1, x_0, wobei der Ausgang jetzt $y = 1$ sein soll, wenn die arithmetische Summe der vier Eingänge ungerade ist, und $y = 0$ sonst (gerade Parität)!

Antwort:

Arithmetische Summe!

y = 1, wenn arithmetische Summe gerade ist

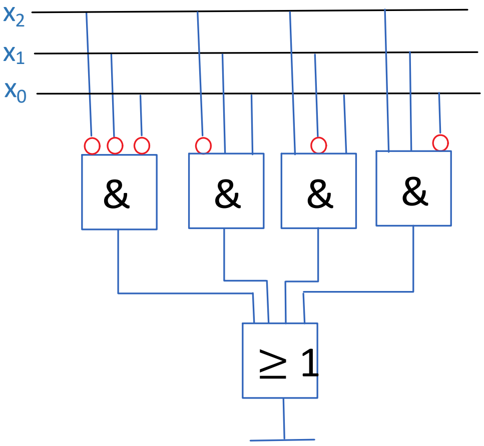
Urbild

$y^{-1}(1) = \{0, 3, 5, 6\}$

DNF = $x_2' x_1' x_0' + x_2' x_1 x_0 + x_2 x_1' x_0 + x_2 x_1 x_0'$

a)

	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0_0	1
1	0	0	1_1	0
2	0	1	0_1	0
3	0	1	1_2	1
4	1	0	0_1	0
5	1	0	1_2	1
6	1	1	0_2	1
7	1	1	1_3	0



Arithmetische Summe!

y = 1, wenn arithmetische Summe ungerade ist

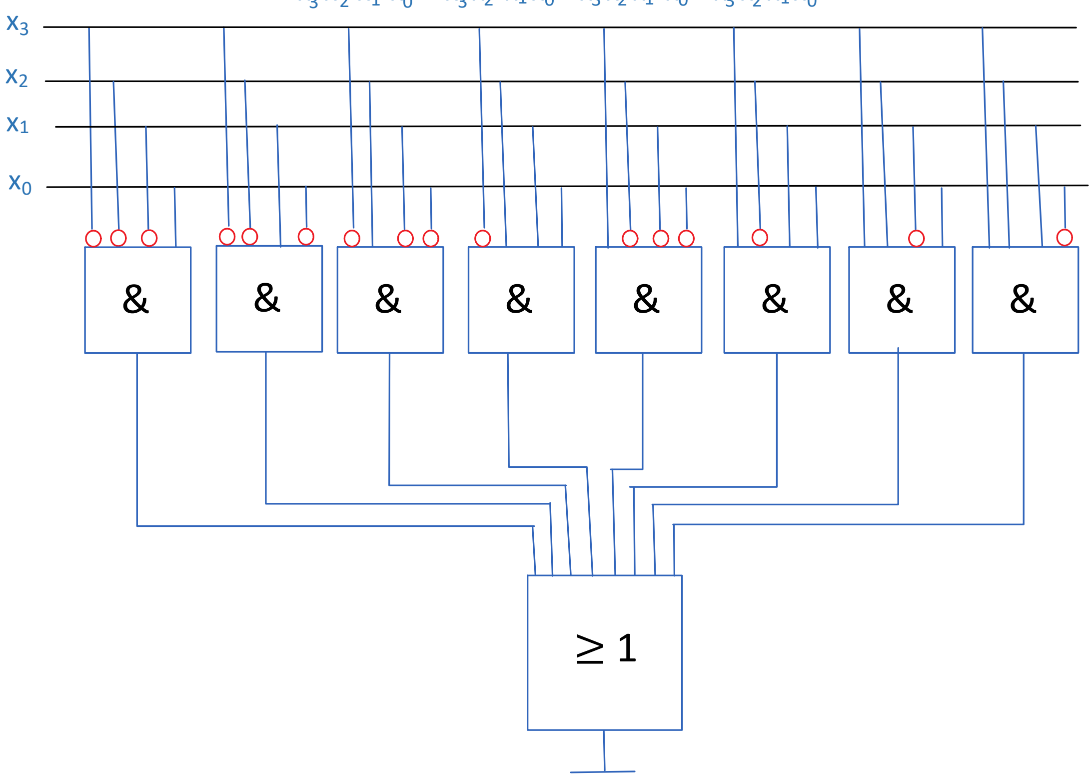
Urbild

$y^{-1}(1) = \{1, 2, 4, 7, 8, B, D, E\}$

DNF = $x_3' x_2' x_1' x_0 + x_3' x_2' x_1 x_0' + x_3' x_2 x_1' x_0' + x_3' x_2 x_1 x_0$

$x_3 x_2' x_1' x_0' + x_3 x_2' x_1 x_0 + x_3 x_2 x_1' x_0 + x_3 x_2 x_1 x_0'$

	x_3	x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	0	0_0	0
1	0	0	0	1_1	1
2	0	0	1	0_1	1
3	0	0	1	1_2	0
4	0	1	0	0_1	1
5	0	1	0	1_2	0
6	0	1	1	0_2	0
7	0	1	1	1_3	1
8	1	0	0	0_1	1
9	1	0	0	1_2	0
A	1	0	1	0_2	0
B	1	0	1	1_3	1
C	1	1	0	0_2	0
D	1	1	0	1_3	1
E	1	1	1	0_3	1
F	1	1	1	1_4	0



Aufgabe 8.5 (2-bit Binäraddierer)
Die Addition zweier n-stelliger Binärzahlen $x_{n-1}x_{n-2}...x_1x_0$ und $y_{n-1}y_{n-2}...y_1y_0$ ergibt die Summe $z_{n-1}z_{n-2}...z_1z_0$, sowie ein Carry-Bit ca und ein Overflow-Bit ov.

a) Geben Sie für den Fall $n = 2$ eine Wertetabelle der Abbildung $B^4 \to B^4$: $(x_1, x_0, y_1, y_0) \mapsto (ov, ca, z_1, z_0)$ an!

b) Geben Sie die die Urbilder $ov^{-1}(1), ca^{-1}(1), z_1^{-1}(1), z_0^{-1}(1)$, an!

Antwort: