deepshare.net
深度之眼

《 Deep Learning 》
数学基础

导师：Johnson

数学基础

Machine Learning Basics

1.矩阵对角化，SVD分解以及应用

2.逆矩阵，伪逆矩阵

3.PCA原理与推导

4.极大似然估计，误差的高斯分布与最小二乘估计的等价性

5.最优化，无约束，有约束，拉格朗日乘子的意义，KKT条件

1.矩阵对角化，SVD分解以及应用

deepshare.net
深度之眼

实用性质:

$A(B+C)=AB+AC$ （分配率）

$A(BC)=(AB)C$ (结合律)

$AB \neq BA$ (一般不满足交换律)

$(AB)^T=B^TA^T$ (转置)

$x^Ty=(x^Ty)^T=y^Tx$ (转置) *学员附注：x,y都是列向量，x^T是行向量，x^Ty的结果是一个标量*

单位矩阵：任意向量或矩阵和单位矩阵相乘，都不会改变，记为 ***I***。所有沿主对角线的元素都是1，而所有其他位置的元素都是 0。

$$I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \cdots,\ I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵逆：矩阵（方阵）的逆满足如下条件

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

deepshare.net
深度之眼

矩阵B（方阵）的对角化 $P^{-1}AP=B$

其中A为对角矩阵，P为单位正交矩阵

一般的矩阵不一定能对角化，但是对称矩阵一定可以对角化(特别是对称正定矩阵，得到的λi都是正数)

曾经一道面试题矩阵的压缩表示

最小n+1

$$P^TP = PP^T = I$$
$$P^T = P^{-1}$$

所以：$B = P^TAP$

设$P^T = (u_1, u_2, \cdots, u_n), u_i \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

则$B = (u_1, u_2, \cdots, u_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {u_1}^T \\ \vdots \\ {u_n}^T \end{pmatrix}$

$$= \underline{\lambda_1 u_1 {u_1}^T} + \lambda_2 u_2 {u_2}^T + \lambda_3 u_3 {u_3}^T + \cdots + \lambda_n u_n {u_n}^T$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{n\times 1} \quad \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}_{1\times n}$$

一般矩阵的svd分解：

A^TA为对称正定矩阵

$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA \Rightarrow$ 对称性

$x^TA^TAx = (x^TA^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) \geq 0 \Rightarrow$ 正定性

deepshare.net
深度之眼

$$A_{m\times n}$$

$$(A^TA)_{n\times n} = U^TDU$$

$$(AA^T)_{m\times m} = V^TDV$$

$$\Rightarrow A_{m\times n} = {V^T}_{m\times m}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} U_{n\times n}$$

其中λ_i为D的对角元素

令${V^T}_{m\times m} = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$

${U^T}_{n\times n} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$

$$\Rightarrow A_{m\times n} = \lambda_1^{\frac{1}{2}} v_1 {u_1}^T + \lambda_2^{\frac{1}{2}} v_2 {u_2}^T + \cdots$$

图像的压缩存储最小需要m+n+1

当压缩存储量为(m+n+1)*K时，误差为

$$error = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i}$$

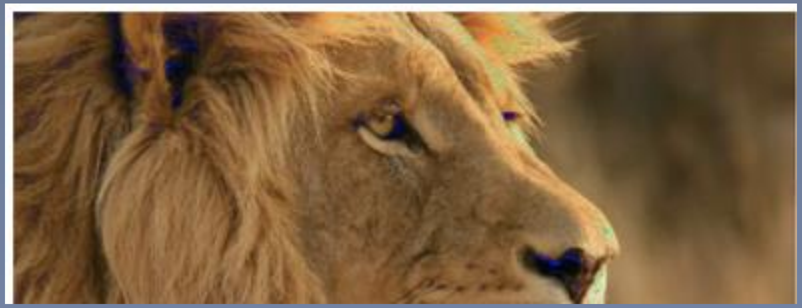
$$A_{m\times n} = \lambda_1^{\frac{1}{2}} v_1 u_1^{T} + \lambda_2^{\frac{1}{2}} v_2 u_2^{T} + \cdots$$

保留了前10个(压缩率122)

前30个(压缩率31)

前50个(压缩率17)

传统网络图片传输与现代传输的原理



$$A_{m\times n}=\lambda_1^{\frac{1}{2}}v_1u_1^T+\lambda_2^{\frac{1}{2}}v_2u_2^T+\cdots$$

deepshare.net
深度之眼

$$A_{200\times 100}=\lambda_1^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \\ v_1 \\ \\ \end{pmatrix}_{200\times 1}\begin{pmatrix} & u_1 & \end{pmatrix}_{1\times 100}+\lambda_2^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} \\ v_2 \\ \\ \end{pmatrix}_{200\times 1}\begin{pmatrix} & u_2 & \end{pmatrix}_{1\times 100}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{10} \end{pmatrix}_{200\times 10}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & & \\ & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & \\ & & \ddots \\ & & \end{pmatrix}_{10\times 10}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{10} \end{pmatrix}_{10\times 100}$$

$$\approx M_{200\times 10}N_{10\times 100}$$

$A_{200\times 100}$ $X_{100\times 1}$算200×100次乘法

$M_{200\times 10}$ $N_{10\times 100}$ $X_{100\times 1}$算$10\times 100+10\times 200=3000$次

能够极大的减小算法复杂度，在深度神经网络中有着广泛的应用

2.逆矩阵，伪逆矩阵，最小二乘解，最小范数解

deepshare.net 深度之眼

$x_1, x_2, \cdots, x_N, x_i \in \mathbb{R}^n$

$y_1, y_2, \cdots, y_N, y_i \in \mathbb{R}^1$

$y_1 = x_{11}a_1 + x_{12}a_2 + \cdots + x_{1n}a_n$

$y_2 = x_{21}a_1 + x_{22}a_2 + \cdots + x_{2n}a_n$

$\vdots$

$y_N = x_{N1}a_1 + x_{N2}a_2 + \cdots + x_{Nn}a_n$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$X_{N\times n}a_{n\times 1} = Y_{N\times 1}$

当$N = n$且$X_{N\times n}$可逆时：

$a = X^{-1}Y$s

一般情况：$N \neq \mathrm{n}$

$\min\|xa - Y\|^2 = J \qquad \frac{\partial J}{\partial a} = x^T(xa - Y) = 0$

$x^Txa = x^TY \qquad x^Tx$是否可逆？

$1. \mathrm{N} > \mathrm{n}$

如$N = 5, n = 3 \quad (x^Tx)_{3\times 3}$一般是可逆的

$a = (x^Tx)^{-1}x^TY$

$2. N < n$

如$N = 3, n = 5 \quad (x^Tx)_{5\times 5}$

$R(x^Tx) \leq R(x) \leq 3$

故x^Tx不可逆

此刻 $J=\|xa-Y\|^2+\lambda\|a\|^2$

$$\frac{\partial J}{\partial a}=x^T xa-x^T Y+\lambda a=0$$

$$(x^T x+\lambda I)a=x^T Y$$

$$a=(x^T x+\lambda I)^{-1}x^T Y$$

$x^T x$为对称矩阵可对角化

$$x^T x=\mathrm{p}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\mathrm{p}$$

$$\left|x^T x\right|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{\mathrm{n}}$$

1. $a^T(x^T x)a=(xa)^T(xa)\geq 0 \;\rightarrow\; \lambda_i\geq 0$

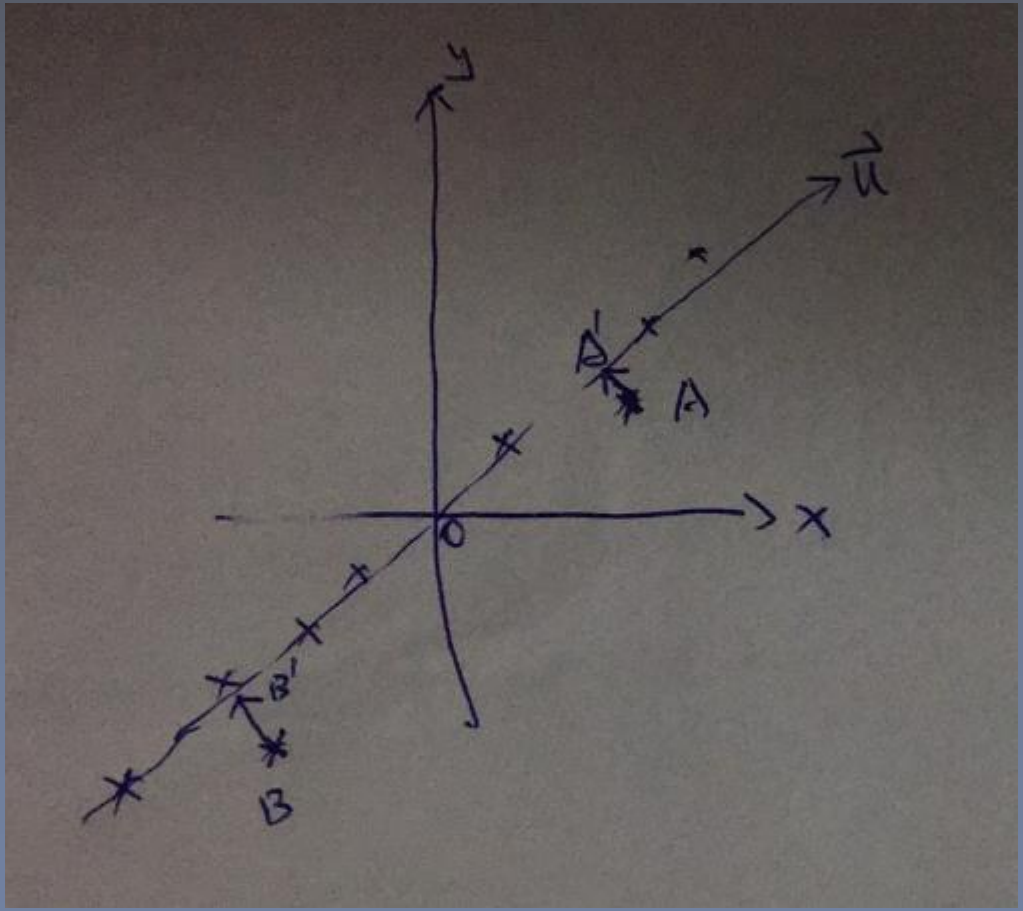
   $\left|x^T x\right|$仍可能为0，不一定可逆

2. $a^T(x^T x+\lambda I)a=(xa)^T(xa)+\lambda a^T a>0 \;\rightarrow\; \lambda_i>0$

   $\left|x^T x+\lambda I\right|>0$恒成立，一定可逆

3.PCA原理与推导

deepshare.net
深度之眼



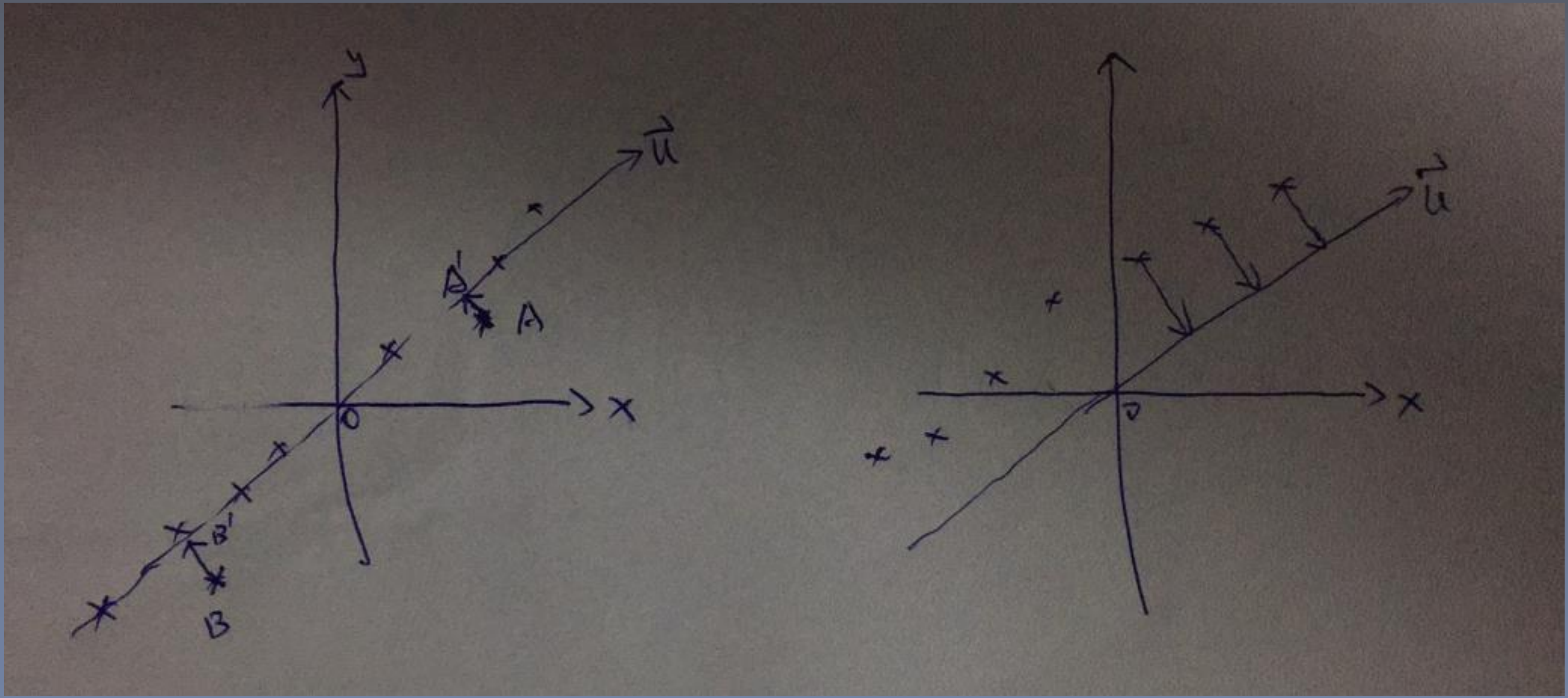
PCA仍然是一种数据压缩的算法

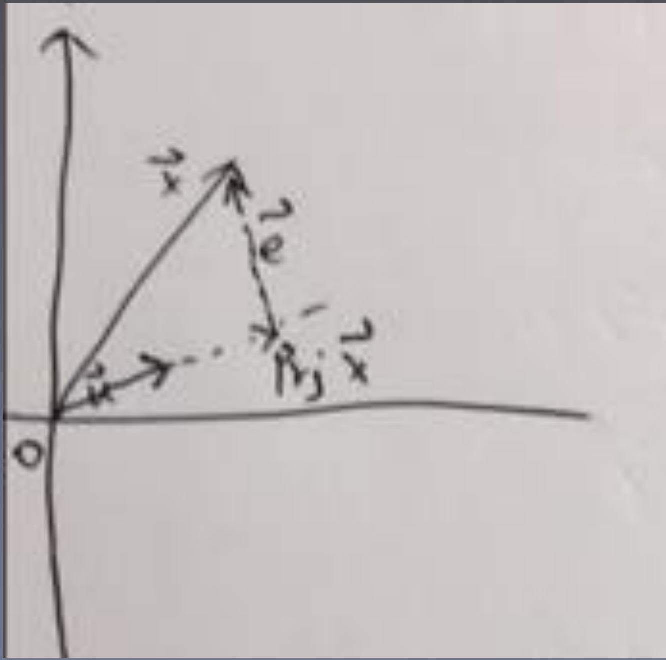
A点需要x,y两个坐标来表示，假设A在向量u上面的投影点为A'，则A'仅仅需要一个参数就能表示，就是OA'的长度(即A'在u上的坐标),我们就想着用A'来替换A，这样N个点(原来要2*N个参数),现在只需要(N+2)个参数(u也需要2个参数)

但是此时就带来了误差，如AA'和BB',所以我们要能够找到这样一个方向u,使得所有原始点与投影点之间的误差最小

最小重构误差

样本点中心化





$$\vec{e} = \vec{x} - p_{rj}\vec{x}$$
$$= \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u}$$
$$= x - (x^T u)u; x, u \in \mathbb{R}^n \quad \text{且} \|u\| = 1, u^T u = 1$$

$$J = \|\vec{e}\|^2 = e^T e = [x - (x^T u)u]^T [x - (x^T u)u]$$
$$= [x^T - (x^T u)u^T][x - (x^T u)u]$$
$$= x^T x - (x^T u)(x^T u) - (x^T u)(x^T u) + (x^T u)^2 u^T u$$
$$= \|x\|^2 - (x^T u)^2 - (x^T u)^2 + (x^T u)^2$$
$$= \|x\|^2 - (x^T u)^2$$

$$\max(x^T u)^2$$

$$\Leftrightarrow \max(x^T u)(x^T u) \Leftrightarrow \max(u^T x)(x^T u)$$

$$\Leftrightarrow \max u^T (x\, x^T) u$$

共有N个样本

$$\max \sum_{i=1}^{N} u^T (x_i\, x_i{}^T) u = u^T (\underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^T x_i}_{X}) u \text{ ,且} \|u\| = 1$$

$$\max u^T (X) u, st{:}\ \|u\| = 1$$

$$L(u, \lambda) = u^T X u + \lambda(1 - u^T u)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Rightarrow Xu - \lambda u = 0$$

$$Xu = \lambda u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^T u = 1$$

极大似然估计，误差的高斯分布与最小二乘估计的等价性

deepshare.net
深度之眼

假设随机变量 $X \sim P(x;\theta)$

现有样本$x_1, x_2, \cdots, x_N$

定义似然函数为$\tilde{L} = P(x_1;\theta)P(x_2;\theta)\cdots P(x_N;\theta)$

对数似然函数为$L = \ln \tilde{L} = \ln[P(x_1;\theta)P(x_2;\theta)\cdots P(x_N;\theta)]$

极大似然估计为$\max L$

高斯分布：$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}}$

样本$x_1, x_2, \cdots, x_N$

$$L=\ln[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_1-u)^2}{2\sigma^2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_N-u)^2}{2\sigma^2}}]$$

$$L=-N\ln\sqrt{2\pi}-N\ln\sigma-[\frac{(x_1-u)^2}{2\sigma^2}+\cdots+\frac{(x_N-u)^2}{2\sigma^2}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial u}=2(x_1-u)+2(x_2-u)+\cdots+2(x_N-u)=0$$

$$\Rightarrow u=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma}=0 \Rightarrow -\frac{N}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-u)^2}{\sigma^3}=0$$

$$\Rightarrow \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-u)^2}{N}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_N, x_i \in \mathbb{R}^n$

$y_1, y_2, \cdots, y_N, y_i \in \mathbb{R}$

$y_i = w^T x_i, w \in \mathbb{R}^n$

拟合误差: $e_i = y_i - w^T x_i$

若设$e_i \sim N(0,1)$

即$e_i \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e_i^2}{2}}$

似然函数$L = \ln[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e_1^2}{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e_2^2}{2}} \cdots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e_N^2}{2}} \ ]$

$$= -N \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_N^2)$$

最大化L等价于

最小化 $(e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_N^2)$

$J = \min(y_1 - w^T x_1)^2 + (y_2 - w^T x_2)^2 + \cdots + (y_N - w^T x_N)^2$

$$J = \min(y_1 - w^T x_1)^2 + (y_2 - w^T x_2)^2 + \cdots + (y_N - w^T x_N)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial w} = (y_1 - w{x_1}^T)x_1 + \cdots + (y_N - w{x_N}^T)x_N = 0$$

$$w(\sum_{i=1}^{N} {x_i}^T x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i$$

$$w = (\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i)(\sum_{i=1}^{N} {x_i}^T x_i)^{-1}$$

对比之前 $a = (x^T x)^{-1} x^T Y$

最优化，无约束，有约束，拉格朗日乘子的意义，KKT条件

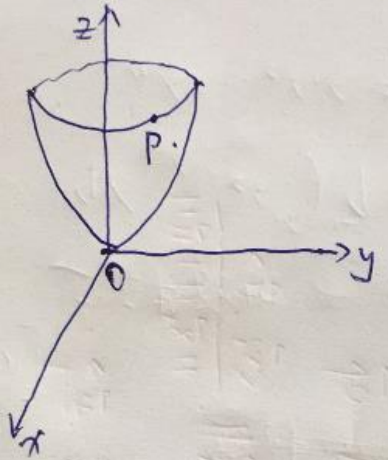
deepshare.net
深度之眼

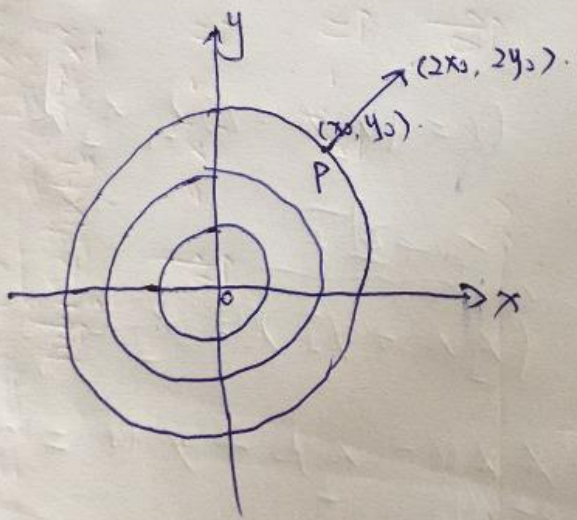
无约束优化问题是机器学习中最普遍、最简单的优化问题。

$$x^* = min_x\ f(x), x \in R^n$$

梯度下降法

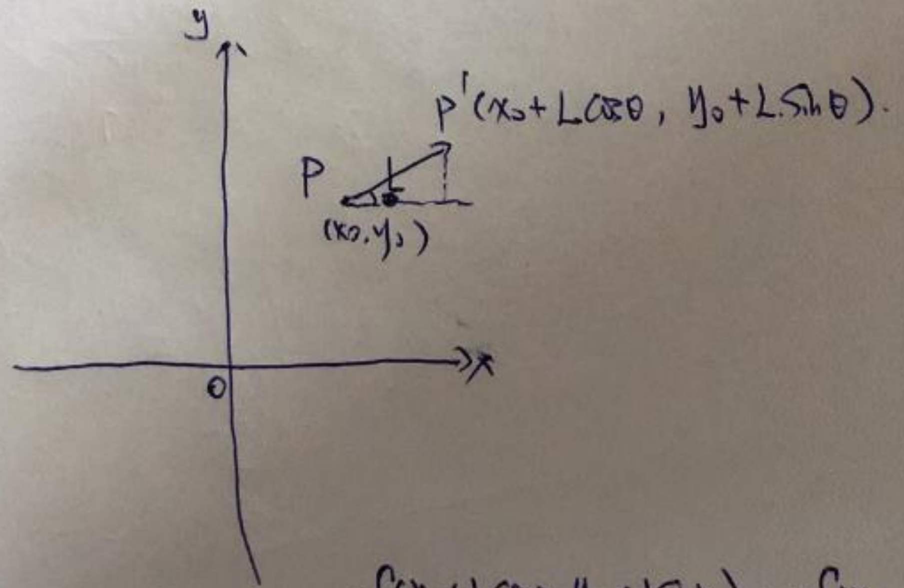
$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$





$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$. 标量

梯度为 $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ 矢量.



单位长度变化为: $\dfrac{f(x_0+L\cos\theta, y_0+L\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{L}$.

单位长度变化为: $\dfrac{f(x_0+L\cos\theta,\ y_0+L\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{L}$

$$= \frac{f(x_0+L\cos\theta,\ y_0+L\sin\theta)-f(x_0+L\cos\theta,\ y_0)}{L} + \frac{f(x_0+L\cos\theta,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{L}$$

$$= \sin\theta \cdot \frac{f(x_0+L\cos\theta,\ y_0+L\sin\theta)-f(x_0+L\cos\theta,\ y_0)}{L\cdot\sin\theta} + \cos\theta\,\frac{f(x_0+L\cos\theta,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{L\cos\theta}$$

$L \to 0$

$$= \sin\theta\ f_x(x_0,y_0) + \cos\theta\ f_y(x_0,y_0)$$

$$(\sin\theta\cdot f_x + \cos\theta\cdot f_y)^2 \le (\sin^2\theta+\cos^2\theta)(f_x^2+f_y^2)$$

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cos\theta$$

$$\langle x,y\rangle^2 = \|x\|^2\|y\|^2\cos^2\theta$$

$$\le \|x\|^2\|y\|^2$$

Cauchy 不等式

令 $x=(\sin\theta,\ \cos\theta)$

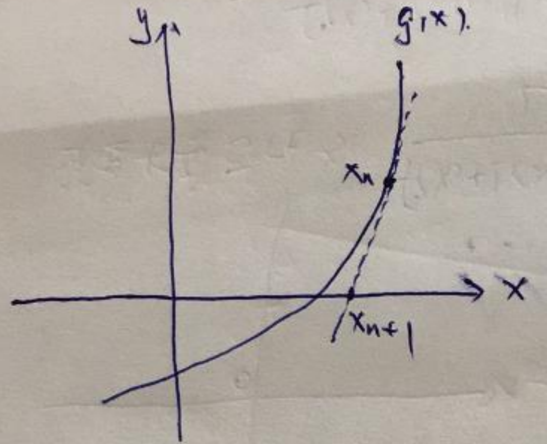
$y=(f_x,\ f_y)$

“=” 条件为 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{f_x}{f_y}$

牛顿法（两种解释）

$\min f(x)$

$f'(x) = 0$

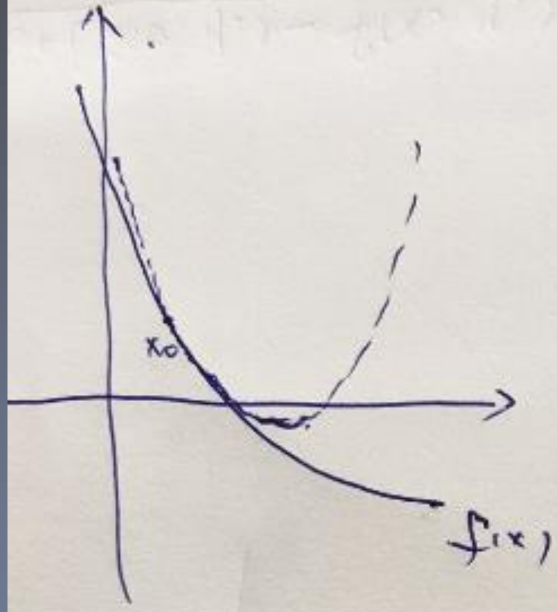


$$y - g(x_n) = g'(x_n)(x - x_n)$$

令 $y=0 \Rightarrow x = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

用 $f'(x)$ 替换 $g(x)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$= \frac{f''(x_0)}{2}x^2 + \left(f'(x_0) - x_0 f''(x_0)\right)x + \cdots$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{f'(x_0) - x_0 f''(x_0)}{f''(x_0)} = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

收敛速度比较，梯度下降是一次收敛，牛顿法是二次收敛（速度快，但也有缺陷，要在比较接近最优点的时候才能收敛，否则可能发散）

$$\| x_{n+1} - x^* \| < K \| x_n - x^* \|$$

$$\| x_{n+1} - x^* \| < K \| x_n - x^* \|^2$$

有约束，拉格朗日乘子的意义，KKT条件

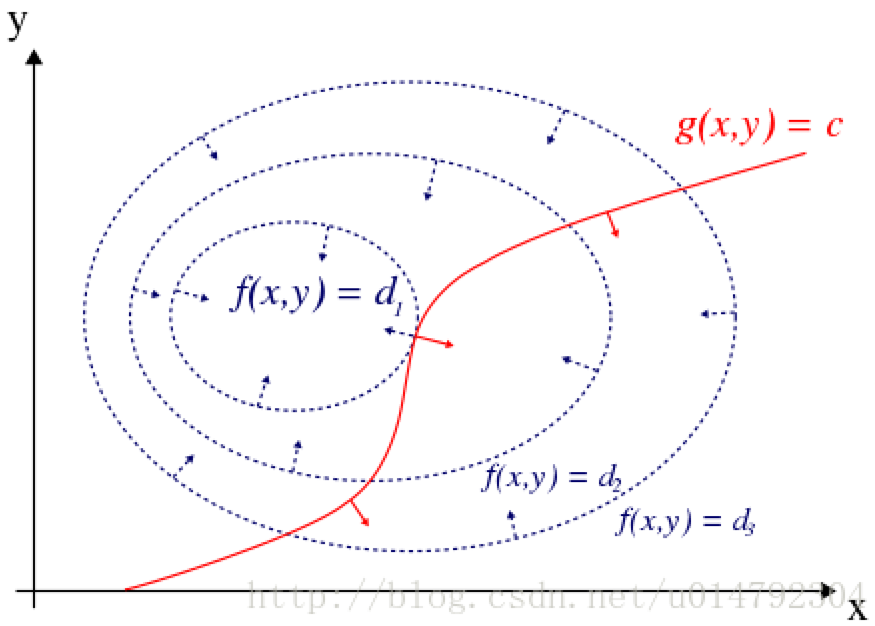
deepshare.net
深度之眼

经典拉格朗日乘子法是下面的优化问题（注：$\boldsymbol{x}$是一个向量）：

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

$$s.t. g(\boldsymbol{x}) = 0$$

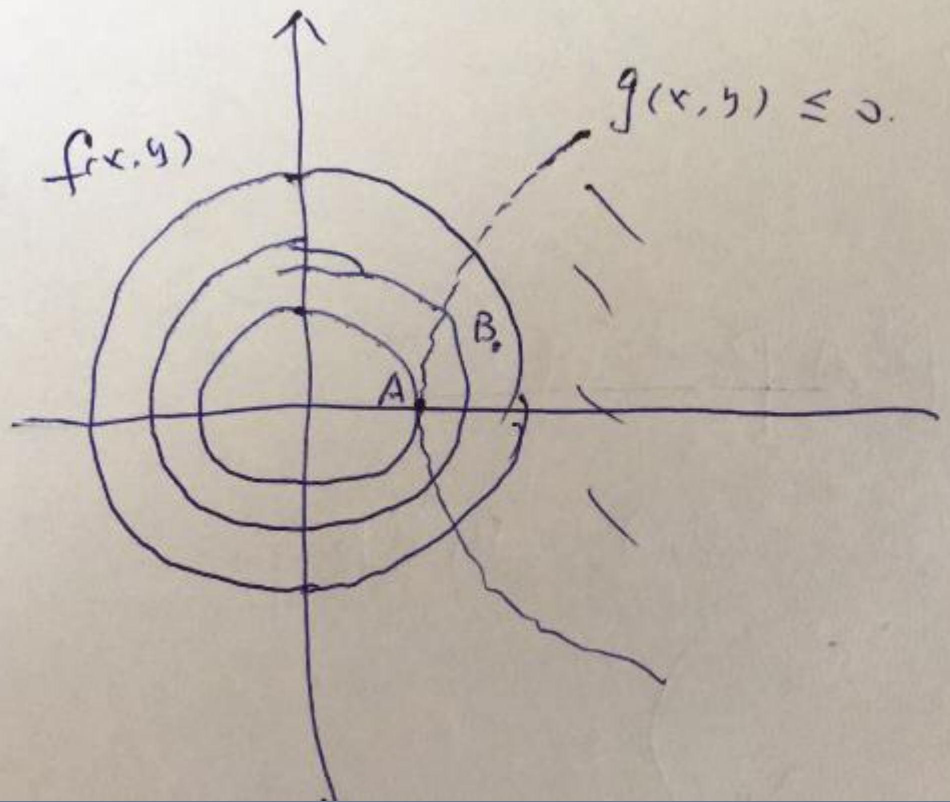
直观上理解，最优解$\boldsymbol{x}_{optimal}$一定有这样的性质，以$\boldsymbol{x}$是二维变量为例：（网上下的图。为了符合行文风格，这里的$g(x,y)=c$应为$g(x,y)=0$）



$$\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$$

这时引入拉格朗日函数：

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x})$$



$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*).$$

$$\lambda g(x^*, y^*) = 0.$$

$$\downarrow$$

KKT条件.

$$L = f(x) - \lambda g(x).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \lambda g(x) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min f(x). \\ g_i(x) \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots n) \end{cases}$$

$$L = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(x_i)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g(x_i). \\ \lambda_i g(x_i) = 0. \quad (\text{kkt 条件}) \end{cases}$$

λ_i >=0

件都加工:

例 5.1.1　求下列非线性规划问题的 K-T 点：

$$\min f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2;$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leqslant 5, \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

解　将上述问题的约束条件改写为 $g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 的形式：

$$\text{s.t}\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geqslant 0, \\ g_2(\boldsymbol{x}) = -3x_1 - x_2 + 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

设 K-T 点为 $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$，有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{bmatrix},$$

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix},$$

$$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

理 5.1.2，且将(5.1.14)式中第 1 个向量方程拆成分量形式，有：

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\gamma_1 x_1 + 3\gamma_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\gamma_1 x_2 + \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1(5 - x_1^2 - x_2^2) = 0, \\ \gamma_2(6 - 3x_1 - x_2) = 0, \\ \gamma_1 \geqslant 0, \\ \gamma_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.1.17}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ \gamma_1 = 1, \\ \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

deepshare.net

深度之眼

联系我们:

电话: 18001992849

邮箱: service@deepshare.net

Q Q: 2677693114

公众号

客服微信