

由离散点和特征线构建地形的优化控制方法

宋敦江¹, 岳天祥², 华凤³

(1 中国科学院科技政策与管理科学研究所, 北京, 100190,

(2 中国科学院地理科学与资源研究所, 北京, 100101)

(3 湖北大学资源环境学院, 湖北, 430000)

摘 要: 基于拉普拉斯(Laplace)方程和优化控制(Optimal Control)理论, 提出一种构建地形的 OC 方法。以极小化拉普拉斯方程左端项平方和为目标函数, 以采样离散点作为等式约束条件, 河流线作为不等式约束条件, 以格网点附近的离散点集的高程范围为上下界约束条件, 形成一个标准的优化控制问题, 求解 OC 问题即可获得融合原始数据中隐含信息的 DEM。通过调节 OC 的参数值, 可以获得不同的 DEM。真实案例表明, OC 方法既能保证地形曲面的整体光滑性, 又能保证 DEM 结果对于原始数据的忠实性, OC 模拟结果优于约束不规则三角网(CTIN)模拟结果。

关键词: 河流线; 不规则三角网; 拉普拉斯; 优化控制; 等式约束; 不等式约束

A new Method of DEM Generation from scattered points and terrain feature lines Using Optimal Control

Song Dunjiang^a, Yue Tianxiang^b, Hua Feng^c

(^aInstitute of Policy and Management CAS(Chinese Academy of Sciences), Zhongguancun East Road No. 55, Beijing China 100190;

^bInstitute of Geographical Sciences and Natural Resources Research CAS, 11 A, Road DaTun, ChaoYang District, Beijing, China, 100101;

^cFaculty of Resources and Environmental Science Hubei University, Hubei, China, 430000)

[Abstract] A new interpolation method called Laplace based Optimal Control (OC) is proposed, which can make use of the quantitative and qualitative information of stream lines, no need to interpolate the heights of stream lines prior to DEM generation procedure. By minimizing the square of finite difference of Laplace equations, subject to bound constraints and equality constraints from scattered points, inequality constraints from stream lines, OC method can be used to generate reasonable DEM. By adjusting the parameter values (e.g the lower and upper bound constraints) of OC, different DEM can be generated. One real case study is given, results from OC is compared with that from constraint TIN (Triangulated Irregular Network). CTIN result is not desirable; OC method is preferable in DEM construction from scattered points and stream lines. The advantage of OC includes its simpleness for understanding, easiness for implementation and for fusion of other data sources. The fidelity of DEM can be further improved by incorporating more constraints from existing (auxiliary) data or discovered information from original data, so long as they can be expressed in terms of inequality, or equality, or lower and upper bound constraints.

[Key words] Stream lines; TIN (Triangulated Irregular Network); Laplace; Optimal Control (OC); equality constraints; inequality constraints

1 引言

高精度 DEM 广泛应用于水文学、精准农业^[1]和军事航迹规划^[2]等领域, 地形特征对于建立高精度 DEM 非常重要^[1], 利用地形特征信息可以提高 DEM 的精度。地形特征是地形的基本信息。由于地形特征依赖于人们观测世界的尺度, 地形特征对于多尺度的地形表示和地形简化来说非常关键^[3-5]。地形特征主要包括山峰、山脊线、山谷线、鞍部和洼地。在地形图中, 山峰一般用一个高程相对较大的山峰点来表示, 除了山峰点外, 整个山峰的坡度都是下降的^[2]。山脊线是一条相对较高的地面线, 该线的高程是变化的, 山脊线不是一列简单的山峰点, 处于山脊线上的点的高程值比山脊两侧点的高程值都大^[2]。从 8 邻居离散格网角度来看, 可以认为山脊线只有其两侧的格网点高程可能比它低, 山脊线上的前后两个格网点的高程高低都不确定。更多关于地形特征的信息可以参考^[6]。由于地形特征数据应用广泛, 故从原始

地形图中如何提取地形特征的方法研究有很多。地形特征可以从不同的数字地形模型中提取, 比如规则格网 DEM、等高线和不规则三角网(TIN), 它们分别被当作点、线和面^[7-11]。在构建 DEM 过程中, 地形特征线可以通过约束不规则三角网(Constraint Triangulated Irregular Network, CTIN), 将地形特征线作为“硬断裂线”或“软断裂线”^[12], 在 ArcGIS 9.0 的 3D 分析模块中已经实现了该功能, CTIN 方法得到的结果出现谷底被“填平”, 坡度呈“平面”等不符合自然的现象。

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(基于地形特征建立 DEM 的 Frenet 方法研究, 40801187), 国家自然科学基金杰出青年科学基金(资源环境模型与系统模拟, 40825003)

作者简介: 宋敦江, 1979-, 男, 副研究员/博士, 主要从事地理计算研究; 岳天祥, 研究员, 博士生导师/博士; 华凤, 本科生。

收稿日期: 2012-1-23 E-mail: songdj@casipm.ac.cn

优化控制 (Optimal Control, OC) 理论是变分法的推广, 它考虑工程设计中遇到的多种约束条件, 包括控制函数中的微分方程约束、路径约束等等, 在给定的约束条件下, 寻求一个控制信号, 同时最小化性能指标值^[13]。在现代系统设计中, 如物理、社会和经济运行过程的运行, 优化控制扮演着越来越重要的角色。优化现象在自然界中也无处不在, 例如在物理系统中, 各子系统不断演化, 使整个系统趋于最小能量状态; 在一个化学系统中, 分子间相互作用, 直至它们电子总势能最小^[14]。优化控制理论广泛应用于工业工程设计、经济管理、商业与运筹学领域, 却很少应用于地理科学, 特别是地形重建。其主要原因可能是缺乏有效的算法来解决大规模的优化问题。随着计算机硬件和优化软件的发展, 超过 10 万个约束变量的问题都能迅速解决^[15], 从而为优化控制的广泛应用提供了更多机会。

拉普拉斯方程(Laplace), 又被称为热导方程或位势方程^[16], 描述了许多与时间无关的物理现象, 包括二维空间中静态的温度分布^[16]。它可以以封闭(或显式)的方式解决受边界条件约束的简单系统, 例如一个矩形金属板边缘的初始温度, 还可用来模拟膜、重力、静电电位或某些流体流动中的均衡位移。因此, 本文尝试将 Laplace 方程应用于构建 DEM, 高程可看作是与温度势能类似, 这里的边界条件由高程已知的离散点构成, 如同在温度传导模型里, 离散点不必在边界处。高程从高程已知的离散点流动到系统中其他高程未知点的过程, 与金属板模型中热量扩散的方式相同。Dr. William Randolph Franklin 在《解析地图制图学的应用》一文中利用 Laplace 方程进行等高线插值建立 DEM^[17]。Tobler(1999)将 Laplace 方程用于行政区划资料的平滑^[18]。

Franklin 和 Tobler 利用 Laplace 方程在空间插值方面取得了较好的结果。受此启发, 本文提出一种建立 DEM 的新方法, 称为 OC(优化控制)方法。在 OC 方法里, 目标函数为 Laplace 方程左端项平方和, 约束边界条件由已知高程的离散点和已知流向的河流线构成。最后通过实际案例, 比较分析 OC 方法与 CTIN 方法得出的结果。

2 优化控制方法

优化控制的经典研究问题是, 在满足边界条件的弧段集合中寻找一条弧段 T , 最小化积分函数的值^[16]:

$$J(\theta) = \int_{T_0}^{T_1} L(t, \theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}) dt \quad (1)$$

$$s.t. \begin{cases} \theta(T_0) = \theta_0 \\ \theta(T_1) = \theta_1 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $[T_0, T_1]$ 是给定的区间, $L: [T_0, T_1] \times R^n \times R^n \rightarrow R$ 是给定的函数, θ_0, θ_1 是 R^n 上的两点。

基于优化控制理论, OC 方法在整个研究区域内, 在满足约束条件的情况下, 最小化 Laplace 积分函数:

$$J(x, y) = \iint (\phi_{xx} + \phi_{yy})^2 dx dy \quad (3)$$

$$s.t. \begin{cases} v(\mathbf{p}_0) = v_0 \\ v(\mathbf{s}_0) = v_l \end{cases} \quad (4)$$

其中, ϕ_{xx}, ϕ_{yy} 分别表示函数 ϕ 在 x 和 y 方向上的二阶导数, v 是关于三维空间点集的二维坐标、高程值和点集拓扑

连接关系的函数, \mathbf{p}_0 是一组离散点的二维坐标集, \mathbf{s}_0 是二维空间中的一组河流线段集, v_0 是对应采样点的高程集, v_l 是对应河流线的流向集, 用 -1 或 1 来表示。

为便于理解本文提出的 OC 方法, 设

$$\mathbf{f} = [F_{1,1}, F_{1,2}, \dots, F_{1,m_y}, F_{2,1}, F_{2,2}, \dots, F_{2,m_y}, \dots, F_{m_x,1}, F_{m_x,2}, \dots, F_{m_x,m_y}]^T \quad (5)$$

式中 \mathbf{F} 为与待生成 DEM 相对应的格网矩阵, m_x 和 m_y 分别为 \mathbf{F} 的行数和列数。 \mathbf{f} 是矩阵 \mathbf{F} 的 Z 空间填充曲线^[19]

形成的一维向量, 它们之间的关系为 $\mathbf{f}(k) = F_{i,j}$, $k = (i-1) \times m_y + j$ 。将整个研究区域上的 \mathbf{f} 被看作是未知变量, OC 方法可表达为:

$$\min_x \frac{1}{2} \|C \cdot \mathbf{f} - \mathbf{d}\|_2^2 \quad (6)$$

$$s.t. \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{f} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{c} \\ \mathbf{l} \leq \mathbf{f} \leq \mathbf{u} \end{cases} \quad (7)$$

其中, \mathbf{C} 是由拉普拉斯方程左端项有限差分得到的结构化稀疏矩阵, \mathbf{A} 是由河流线得到的稀疏矩阵, \mathbf{B} 是由离散点得到的稀疏矩阵, $\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 分别是与 $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ 对应的一维向量, 一维向量 \mathbf{l} 和 \mathbf{u} 是由已知高程离散点得到的下界和上界。

2.1 目标函数的形成

在二维空间中, Laplace 方程表示为:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (8)$$

Laplace 方程的五点中心有限差分格式可表示为:

$$\frac{1}{h^2} [\phi(x+h, y) + \phi(x-h, y) + \phi(x, y+h) + \phi(x, y-h) - 4\phi(x, y)] = 0 \quad (9)$$

其中, h 为网格大小或 DEM 的分辨率。对于研究区域的网格点 $F_{i,j}$, 式 (9) 又可等价表示为:

$$F_{(i+1,j)} + F_{(i-1,j)} + F_{(i,j+1)} + F_{(i,j-1)} - 4 F_{(i,j)} = 0 \quad (10)$$

式 (10) 左端项的平方和即为 OC 方法的目标函数。

2.2 约束函数的形成

OC 方法建立 DEM 的重要步骤之一是由采样数据建立约束方程: 由河流线建立不等式约束, 由离散点建立等式约束和上下界约束等等, 具体步骤将在下面介绍。

不等式约束: 河流下游格网点的高程小于河流上游格网点的高程, 河流中格网点的高程小于河流岸边格网点的高程。若将河流线离散化为规则格网点, 对每个格网点考虑其 8 邻域, 则除了河流下游格网点较低外, 河流上游格网点和其它 6 个处于河边的格网点都较高 (见图 1)。因此, 对于河流线穿过的任一格网点 $\mathbf{f}(k)$, 可以获得 8 个不等式约束方程, 其中 2 个是从河流上游和河流下游格网点处获得,

$$\mathbf{f}(\text{河流下游}) < \mathbf{f}(\text{河流上游}) \quad (11)$$

如图 1 所示, 对于中心格网点 (Center Grid) 578 来说, 这 2 个不等式约束分别是 $\mathbf{f}(578) < \mathbf{f}(534)$ 和 $\mathbf{f}(622) < \mathbf{f}(578)$ 。其它 6 个是从河岸边格网点处获得:

$$f(\text{河中}) < f(\text{河岸边}) \quad (12)$$

如图 1 所示, 对于中心格网点 578 来说, 6 个不等式约束分别为 $f(578) < f(535)$, $f(578) < f(579)$, $f(578) < f(623)$, $f(578) < f(621)$, $f(578) < f(577)$, $f(578) < f(533)$ 。

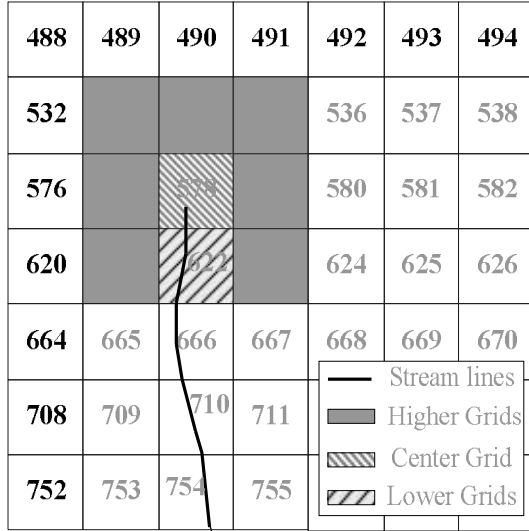


图 1 河流线作为不等式约束

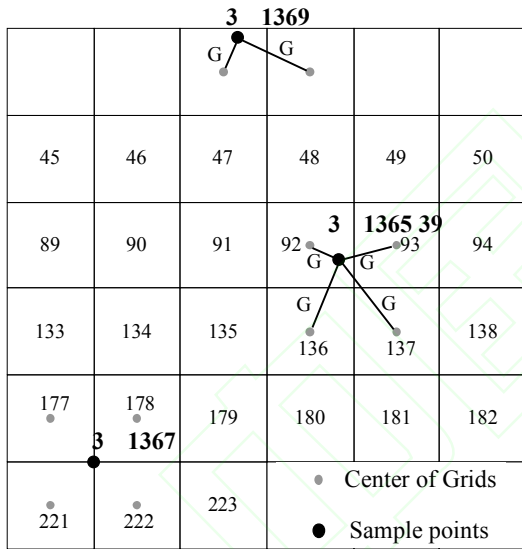


图 2 采样点作为等式约束

等式约束: 假设一个高程为 z 的采样点位于格网点 $f(k)$ 上, 如果 DEM 的分辨率 (网格大小) 足够精细, 或者采样点与格网中心点 $f(k)$ 的距离足够小, 可以直接将采样点的高程赋给格网中心点 $f(k)$, 即得到等式约束:

$$f(k) = z \quad (13)$$

如果 DEM 的格网比较粗, 可以考虑距离采样点最近的 m 个格网点, 采用反距离加权法 (IDW) 用 m 个格网点的加权值来表示采样点的高程。为了简单起见, 这里将 m 的最大值设为 4, 点 P 的高程可表示为:

$$\sum_{i=1}^4 (f(IX(i)) / d_i) / \sum_{i=1}^4 (1 / d_i) = z \quad (14)$$

其中, $IX[4]$ 表示在一维向量 f 中距离采样点 P 最近的 4 个格网点的索引值数组, d_i ($i=1,2,3,4$) 表示第 i 个最近格网点与采样点 P 的距离。

若采样点位于研究区域边界或角落, 则只需两个采样

点就可得到格网点的高程。如图 2 所示, 图中有三个采样点, 其中 $P1$ 的高程为 1369 米, $P2$ 的高程为 1365.39 米, $P3$ 的高程为 1367.1 米, 格网中心依次编号为 $1, 2, \dots, m_x, \dots, m_x m_y$ 。对于采样点 $P1$, d_1 为采样点 $P1$ 到格网点 3 的距离, d_2 为采样点 $P1$ 到格网点 4 的距离, 因而等式约束为 $(f(3)/d_1 + f(4)/d_2) / (1/d_1 + 1/d_2) = 1369$ 。对于采样点 $P2$, d_1 、 d_2 、 d_3 、 d_4 分别表示采样点 $P2$ 到格网点 92, 136, 137, 93 的距离, 类似地, 等式约束为 $(f(92)/d_1 + f(136)/d_2 + f(137)/d_3 + f(93)/d_4) / (1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 + 1/d_4) = 1365.39$ 。若一个采样点恰好落在它四个最邻近格网点的中心, 假设图 2 中的采样点 $P3$ 位于格网点 177、178、221 和 222 中间, 则等式约束为 $(f(177) + f(178) + f(221) + f(222)) / 4 = 1367.1$ 。

上下界约束: 当采样数据的空间分布比较理想, 如极值, 峰点或汇点被采集到时, 可以假设任意格网点的高程不可能大于所有采样点高程的最大值, 类似地可以假设任意格网点的高程不可能小于所有采样点高程的最小值。这个假设就形成了松边界约束, 它允许每个格网点高程值在一定的高程范围内变化。

一般情况下, 可以假设一个已知格网点的高程不可能过分大于 (小于) 它周围几个 (至少两个) 离散采样点高程的最大值 (最小值)。换言之, 一个格网点的高程上界和下界由它附近的几个或多个采样点的高程值所决定。对于一个给定的格网点 $f(k)$, 它的上下界约束可表示为:

$$\begin{aligned} \min(S(I[n_1])) - \delta &\leq f(k) \\ &\leq \max(S(I[n_2])) + \delta \end{aligned} \quad (15)$$

其中, S 是所有采样点的高程集合, r 是 S 的高程范围即 $r = \max(s) - \min(s)$, $\delta = r * 10^{-3}$, 整数 n_1 、 n_2 分别是为确定格网点 $f(k)$ 下界约束和上界约束而搜索的最近采样点数目, $I[n_1]$ 、 $I[n_2]$ 是 S 中最邻近的 n_1 、 n_2 个采样点的索引数组。 n_1 、 n_2 分别介于 2 (紧边界, 见图 3) 与采样点数 (松边界) 之间。当 n_1 、 n_2 皆为 2 时, 则在确定任意网格点的高程上下界时只需要搜索离该格网点最邻近的 2 个采样点, 如, 对于格网点 534, 535, 578 和 579 等只需要搜索到采样点 $P1$ 和采样点 $P3$ 即可。

2.3 约束优化问题求解

OC 方法可归结为线性最小二乘的曲线拟合问题, 采用 Mosek 6.0 的 $lsqlin$ 函数可解决 OC 方法的求解问题。Mosek 优化工具箱的计算引擎采用主对偶型内点算法 (Interior Point Method, IPM), 非常适用于解决大型优化问题, Mosek 中的算法采用先进的线性代数法实现^[20]。Mosek 中 $lsqlin$ 函数的语法与 Matlab 中的相同:

$$[x, resnorm, residual, exitflag, output, lambda] = lsqlin(C, d, A, b, B, c, l, u, x0, options)$$

其中, $x0$ 是初始解向量, 它不需要预先指定为符合约束条件的值, 全部设置为 0 即可, 因为它在内点法中会被重新赋值^[20]。 C 、 d 、 A 、 b 、 B 、 c 、 l 、 u 与式 (6) 和式 (7) 中的变量对应。参数的更多信息可参考^[20]。

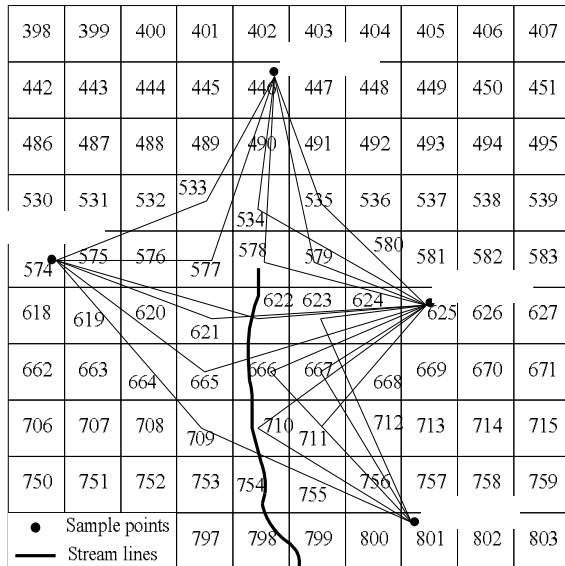


图3 采样点作为上下界约束

在下面的实际案例中, F 是大小为 $[461 \times 411]$ 的矩阵, C 是由拉普拉斯算子得到的大小为 $[189471 \times 189471]$ 的稀疏矩阵, 其非零元素至多有 189471×5 个, A 是由河流线得到的大小为 $[10593 \times 189471]$ 的矩阵, 其非零元素至多有 10593×2 个, B 是由离散点得到的大小为 $[100 \times 189471]$ 的矩阵, 其非零元素至多有 100×4 个, d 是元素值均为零的列向量, b 和 c 分别是维度为 $[10593 \times 1]$ 、 $[100 \times 1]$ 的列向量, l 和 u 是 $[189471 \times 1]$ 的列向量, 表示每个格网点高程最大值和最小值。在理论上, IPM 方法求解约束优化问题的最坏情况的时间复杂度为多项式复杂度^[21], 表示为 $O(n^2)$, 但是在具体问题时有时会表现为 $O(n)$ 。在 Q9300 2.5GHz, 4Cores, RAM 4.G 的微机对本算法进行测试, 求解下面的实际案例的优化控制问题大约耗时 186s。可以肯定的是, 如果进一步有效利用系数矩阵 C 、 A 和 B 的结构化的信息, 可以进一步缩短计算时间。

3 计算案例

3.1 数据源

崆峒沟位于甘肃省庆阳市董志塬镇, 是典型的黄土高原沟壑地貌, 该地区面积约 4×5 平方公里, 通过扫描比例尺为 1:1 万地形图可以获得包括离散点、等高线、河流线等数据。为简单起见, 本文只研究其中的河流线和离散点等两种数据的情形。如图 4 所示, 图中共有 100 个离散点 (用高程标记, 为简洁起见, 进行了四舍五入), 19 条河流线。每条河流线都正确定位以代表水流的流向。如果河流线段的方向设置不正确, 可以通过 ArcGIS 9.0 中的 "flip" 命令调整。

3.2 结果与讨论

为了便于与 OC 方法比较, 分别使用 CTIN 和 OC 法得到的 DEM 派生等高线, 见图 5 和图 6。从图 6 中可以看到, 由 OC 方法得到的 DEM 既保证了地形曲面的整体光滑性, 又保证了对原始等高线数据的忠实性, 还将离散点和河流线信息融入到最终的结果中。松界约束时, 式 (15) 中的 n_1 和 n_2 均为全部采样点数 100, 紧界约束时, 式 (15) 中的 n_1 为 100, n_2 为 2。图 6a 和图 6b 分别是由松界约束 OC 方法和紧界约束 OC 方法得到的 DEM 派生等高线。DEM 派生等高线能够有效检查地形特征, 因为等高线的位置、方向和曲率

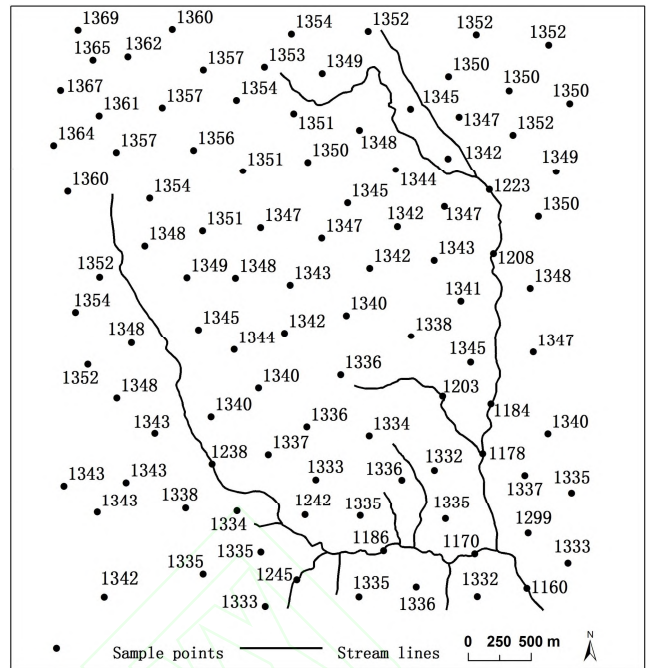


图4 数据源

与对应 DEM 的高程、坡向和平面曲率直接相关。利用 ArcGIS 9.0 可得到 DEM 的派生等高线。图 6a 表明, 利用松下界约束 OC 方法得到的 DEM 结果有多处震荡, 这种现象反映为在地形较缓的地方出现多条等高线数据上, 形成一个独立的山峰。用紧上界约束 OC 方法可以有效地避免这一现象 (如图 6b 所示)。

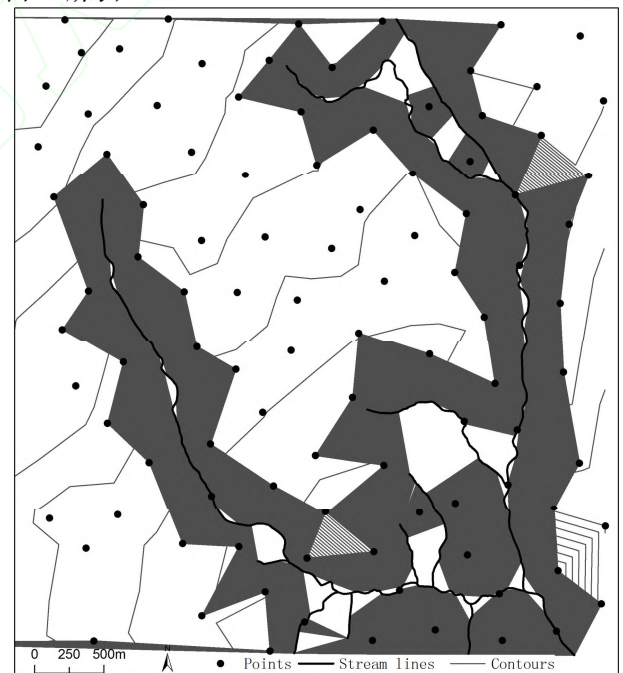


图5 CTIN 回放等高线

与 OC 方法相比, 由 CTIN 方法得到的 DEM 派生等高线呈“之”字形, 见图 5。总体来说, 由 TIN 方法构建的 DEM 结果不太理想, OC 方法通过离散点和河流线建立的 DEM 结果较理想。OC 方法是 Laplace 方程的扩展应用, 通过调整参数值 (如上下界约束) 可以生成不同的 DEM。与 CTIN 方法相比, OC 方法至少有两处优点: 1) 数学模型简单, 易于实现和理解, 整个过程表达为一个标准的优化控制模型。2) 便于融合各种信息, 只要可以表示成格网点之间的等式或不

等式约束条件, 多分辨率和多来源的信息就能融合到最终的 DEM 中。

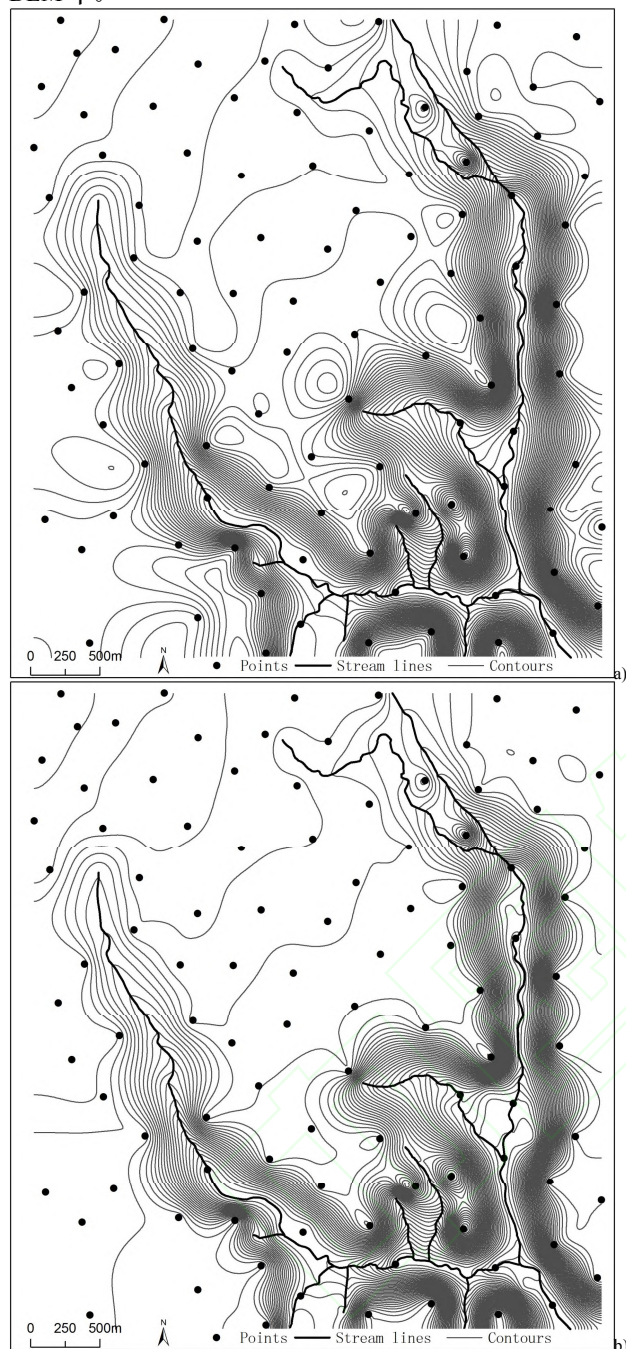


图 5 OC 回放等高线 a) 松上界约束 b) 紧上界约束

4 展望

进一步的研究包括: 第一, 有效利用拉普拉斯方程和采样点产生的矩阵的特殊结构, 加快内点法 (IPM) 解决大规模约束优化问题的速度。对于含不等式约束、等式约束和边界约束的大规模优化问题, 如何快速求解目前是一个国际上的热点问题。第二, 利用文献^[10-11]提出的方法, 从离散点里直接提取地形特征信息, 建立更多的地形特征信息的融合模型, 即将山脊线、山峰点和断裂线等用不等式约束、等式约束和边界约束等表示出来, 将更多的已知信息融合到最后的 DEM 模拟结果里, 使最后模拟 DEM 结果的精度更高。

参考文献

- [1] M F Hutchinson, and J C Gallant, 2000. Digital elevation models and representation of terrain shape. In J.P. Wilson and J.C. Gallant (eds), *Terrain Analysis*, New York: John Wiley and Sons, 29-50
- [2] Department of the Army, U.S. Army Map Reading and Land Navigation Handbook[M], The Lyons Press, 2004
- [3] Q Q Li, Z Wang, B S Yang, Multi-resolution representation of digital terrain models with terrain features preservation [J], *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2008, 51, 145-154
- [4] J M Gauch, and S M Pizer, Multiresolution Analysis of Ridges and Valleys in Grey-Scale Images [J], *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, 15(6), 635-646
- [5] K Matuk, Feature-based terrain model simplification[D], Hong Kong: Hong Kong Polytechnic University (People's Republic of China), 2006
- [6] W W Gert, 2004, *Topographic Surfaces and Surface Networks*, in Sanjay R. (eds), *Topological Data Structures for Surfaces: An Introduction to Geographical Information Science*, John Wiley & Sons, 15-29
- [7] V Mascardi, Extraction of Significant Terrain Features from RSG and TIN: A Survey, <http://citeseer.nj.nec.com/mascardi98extraction.html>, accessed March 1, 2003.
- [8] 朱庆, 赵杰, 钟正等, 基于规则格网 DEM 的地形特征提取算法 [J], *测绘学报*, 2004, 33(1): 77-82
- [9] T H Ai, The drainage network extraction from contour lines for contour line generalization, *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 62(2), 93-103, 2007.
- [10] 刘学军, 王永君, 任政等, 基于不规则三角网的河网提取算法 [J], *水利学报*, 2008, 39(1), 27-34
- [11] N L Jones, S G Wright, and D R Maidment, Watershed delineation with triangle-based terrain models [J], *Journal of Hydraul. Eng.*, 1990, 116(10), 1232-1251
- [12] Ø Hjelle, and M Dæhlen, *Triangulations and Applications* [M], Berlin Heidelberg: Springer, 2006.
- [13] D E Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction* [M], NJ: Prentice Hall, Inc., 1970
- [14] J Nocedal, S J Wright, *Numerical Optimization* (2nd Ed) [M], Springer, 2006
- [15] G Vanderplaats, Very large scale optimization, Tech. Rep. NASA/CR-2002-211768, Vanderplaats Research and Development, Inc., Colorado Springs, Colorado, 2002
- [16] G Sewell, *The numerical solution of ordinary and partial differential equations* [M], John Wiley and Sons, 2005
- [17] W R Franklin, *Applications of Analytical Cartography* [J], *Cartography and Geographic Information Systems*, 2000, 27(3), 225-237
- [18] W Tobler, Converting administrative data to a continuous field on a sphere, http://www.ncgia.ucsb.edu/conf/SANTA_FE_CD-ROM/sf_papers/tobler_waldo/tobler_waldo.html, 1999
- [19] H Sagan, *Space-Filling Curves* [M], Springer-Verlag, 1994
- [20] The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 6.0 (Revision 78), <http://mosek.com/resources/doc/>, 2011
- [21] Y Y Ye, *Interior point algorithms: theory and analysis* [M], John Wiley and Sons, 1997