Основы теории множеств. I Семестр

Лектор: Селиванов Виктор Львович
Автор конспекта: Буглеев Антон

2022

1 Мощность. Характеристическая функция

Def. Мощностью $|A|$ называется число элементов в A.

Def. Фиксируем произвольное множество U, элементами которого являются множества $A_1, ..., A_n$.
Характеристической функцией (индикатором) множества $X \subset U$ называют функцию $\chi_X(u) = \begin{cases} 1, u \in X \\ 0, u \notin X \end{cases}$

Основные свойства, если $A, B \subset U$:

1. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
3. $\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_{A \cap B}$
4. $\chi_{A^c} = \chi_A$

Theorem. $|A_1 \cup ... \cup A_n|$ *равно*

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ...$$

Proof.

$$\chi_{A_1 \cup ... \cup A_n} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \cdot ... \cdot (1 - \chi_{A_n})$$

Раскрыв скобки получаем

$$\sum_i \chi_{A_i} - \sum_{i<j} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + \sum_{i<j<k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_k} - \dots$$

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_K| - \dots$$

что и требовалось. □

Theorem. $|A_1 \triangle ... \triangle A_n|$ *равно*

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i A_j| + 4\sum_{i<j<k} |A_i A_j A_k| - \ldots$$

Def. Множества называются **Равномощными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

2 Отношения

Def. Отношением называется любое множество $R \subset A \times B$, где A и B - какие-то множества

Def. Бинарное отношение - отношение вида $R \subset X \times X$

Свойства отношений:

1. $\forall x \in X : xRx$ (рефлексивность)
2. $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (симметричность)
3. $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность)
4. $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)
5. $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$ (связность)

Def. Отношение эквивалентности - всякое симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение

Пример: X - множество прямых в плоскости, тогда всякие прямые $a, b \in X$ находятся в отношении эквивалентности ($a \sim b$).

Отношение равномощности есть отношение эквивалентности. Примеры:

1. Множество бесконечных последовательностей единиц и нулей равномощно множеству всех подмножеств натуральных чисел. ((010101 . . .) соответствует ряду чётных чисел)

2. Множество подмножеств любого множества $U = P(U)$ равномощно множеству всех функций, которые ставят в соответствие каждому элементу $x \in U$ либо 0, либо 1. Другими словами, каждому $(X \subset P(U))$ соответствует своя характеристическая функция

Def. Отношение частичного порядка - всякое рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение.

Пример: пусть $X = \mathcal{P}(M)$ - множество всех подмножеств множества M. Два произвольные множества $A, B \subset X$ находятся в отношении частичного порядка $(A \preceq B)$.

Def. Отношение линейного порядка - всякое связное отношение частичного порядка.

3 Счётные множества

Def. Множество называется *счётным*, если оно равномощно $\mathbb{N}$.

Пример: множество $\mathbb{Z}$ счётно, так как множество $\mathbb{Z}$ можно представить в виде: $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

Theorem. *Подмножество счётного множества конечно или счётно.*

Proof. Возьмём счётное множество $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Множество B образуем следующим образом: вычёркиваем из A те элементы, которые $\notin B$, сохраняя порядок оставших. Очевидно, оставшиеся члены образуют бесконечную последовательность (тогда B - счётно, так как сохранился пронумерованный порядок), либо B конечно. □

Theorem. *Всякое бесконечное множество содержит счётное множество.*

Proof. Пусть имеется бесконечное множество B. Возьмём некоторый элемент $b_1 \in B$. Так как B бесконечно, возьмём какой-либо другой элемент $b_2 \in B$, и так далее. Множество $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset B$ является счётным. □

Theorem. *Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.*

4 Числовые структуры теории множеств

Натуральные числа

Def. Определим $\mathbb{N}$ как мощности конечных множеств

$$
\begin{align}
0 &= |\varnothing| \tag{1}\\
1 &= |\{0\}| \tag{2}\\
|A| + |B| &= |(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)| \tag{3}\\
|A| \cdot |B| &= |A \times B|\,, 0 = |\varnothing|\,, 1 = |\{0\}| \tag{4}
\end{align}
$$

Свойства операций $+, \cdot$:

1. $+$ - ассоциативна и коммутативна

2. $\cdot$ - ассоциативна, коммутативна и дистрибутивна

3. $0, 1$ - нейтральны относительно сложения и умножение соответсвенно

4. $0 < 1 < 2 < ...$ и между соседями нет других натуральных чисел

5. $(P(0) \wedge \forall\, x : P(X) \Rightarrow P(x+1) \Rightarrow \forall\, P(x)$

Целые числа

Def. Определим $\mathbb{Z}$ как

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim, \text{ где } (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d \Leftrightarrow a + c = b + d$$

Рассмотрим $[a, b] = \{(x, y) \mid (x, y) \sim (a, b)\}$
Некоторые свойства:

1. $[a, b]\tilde{+}[c, d] = [a + c, b + d]$

2. $[a, b]\tilde{\cdot} = [ac + bd, ad + bc]$

Рациональные числа

Def. Определим $\mathbb{Q}$ как

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\})/\sim, \text{ где } (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Некоторые свойства:

1. $[a, b]\tilde{+}[c, d] = [ad + bc, bd]$
2. $[a, b]\tilde{\cdot}[c, d] = [ac, bd]$
3. $[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow ad \leq bc$
4. $\tilde{0} = [0, 1]; \tilde{1} = [1, 1]$

Вещественные числа

Def. Последовательность рациональных есть отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

Def. Определим $\mathbb{R}$ как $\mathbb{R} = S/\sim$, где S - множество всех последовательностей Коши $\{q_i\}$ рациональных чисел.
Т.е. $\forall\, n\; \exists\, m\; \forall\, i, j > m : |q_i - q_j| < 2^{-n}$, где
$\{q_i\} \sim \{r_i\} \Leftrightarrow \lim_i(q_i - r_i) = 0$

Комплексные числа

Def. Поле комплексных чисел есть наименьшеее расширение поля вещественных чисел, обладающие элементов i, таким, что $i^2 = -1$.
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Свойства:

1. $(x, y)\tilde{+}(z, w) = (x + z, y + w)$
2. $(x, y)\tilde{\cdot}(z, w) = (xz - yw, xw + yz)$

5 ZFC – система Цермело-Френкеля