Основы теории множеств

Буглеев Антон

1 Мощность. Характеристическая функция

Def. Мощностью $|A|$ называется число элементов в A.

Def. Фиксируем произвольное множество U, элементами которого являются множества $A_1, ..., A_n$.
Характеристической функцией (индикатором) множества $X \subset U$ называют функцию $\chi_X(u) = \begin{cases} 1, u \in X \\ 0, u \notin X \end{cases}$

Основные свойства, если $A, B \subset U$:

1. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
3. $\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_{A \cap B}$
4. $\chi_{A^c} = \chi_A$

Theorem. $|A_1 \cup ... \cup A_n|$ *равно*

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ...$$

Proof.

$$\chi_{A_1 \cup ... \cup A_n} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \cdot ... \cdot (1 - \chi_{A_n})$$

Раскрыв скобки получаем

$$\sum_i \chi_{A_i} - \sum_{i<j} \chi_{A_i}\chi_{A_j} + \sum_{i<j<k} \chi_{A_i}\chi_{A_j}\chi_{A_k} - \dots$$

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_K| - \dots$$

что и требовалось. □

Theorem. $|A_1 \triangle ... \triangle A_n|$ *равно*

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i A_j| + 4\sum_{i<j<k} |A_i A_j A_k| - \ldots$$

Def. Множества называются **Равномощными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

2 Отношения

Def. **Отношением** называется любое множество $R \subset A \times B$, где A и B - какие-то множества

Def. **Бинарное отношение** - отношение вида $R \subset X \times X$

Свойства отношений:

1. $\forall\, x \in X : xRx$ (рефлексивность)
2. $\forall\, x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (симметричность)
3. $\forall\, x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность)
4. $\forall\, x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)
5. $\forall\, x, y \in X : xRy \vee yRx$ (связность)

Def. **Отношение эквивалентности** - всякое симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение

Пример: X - множество прямых в плоскости, тогда всякие прямые $a, b \in X$ находятся в отношении эквивалентности $(a \sim b)$.

Def. **Отношение частичного порядка** - всякое рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение.

Пример: пусть $X = \mathcal{P}(M)$ - множество всех подмножеств множества M. Два произвольные множества $A, B \subset X$ находятся в отношении частичного порядка $(A \preceq B)$.

Def. **Отношение линейного порядка** - всякое связное отношение частичного порядка.