

Математический анализ

Буглеев Антон

1 Действительные числа

1.1 Аксиоматика действительных чисел

Аксиомы сложения

Операция сложения: $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$

1. $\exists 0 \in R \forall x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
2. $\forall x \in R \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
3. $\forall x, y, z \in R : x + (y + z) = (x + y) + z$
4. $\forall x, y \in R : x + y = y + x$

Аксиомы умножения

Операция умножения: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$

1. $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in R : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in R : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

Связывающие аксиомы и аксиома полноты

Связь сложения и умножения:

$$(x + y)z = xz + yz$$

Аксиомы порядка:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$

Связь сложения и порядка:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$$

Связь умножения и порядка:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$$

Аксиома полноты (непрерывности):

Если X, Y - непустые подмножества \mathbb{R} , обладающие тем свойством, что если $\forall x \in X \forall y \in Y x \leq y$, то $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in X \forall y \in Y : x \leq c \leq y$

1.2 Некоторые следствия из аксиом

Следствия аксиом сложения

Theorem. В множестве \mathbb{R} существует единственный 0

Proof. Пусть существует 0_1 и 0_2 , тогда:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

□

Theorem. $\forall x \in R \exists! (-x)$

Proof. Пусть существуют x_1 и x_2 , противоположные x :

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$$

□

Theorem. Уравнение $a + x = b$ в \mathbb{R} имеет единственное решение $x = b + (-a)$

Proof.

$$\begin{aligned} a + x = b &\Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a) \\ &\Leftrightarrow x + a + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow x + 0 = b + (-a) \Leftrightarrow x = b + (-a) \end{aligned}$$

□

Следствия аксиом умножения

Theorem. В множестве \mathbb{R} существует единственная 1

Proof. Пусть существуют единицы 1_1 и 1_2 , тогда:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2$$

□

Theorem. $\forall x \neq 0 \in R \exists! x^{-1}$

Proof. Пусть существуют x_1 и x_2 обратные x , тогда:

$$x_1 = x_1 \cdot 1 = x_1 \cdot (x \cdot x_2) = (x_1 \cdot x) \cdot x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2$$

□

Theorem. Уравнение $ax = b$ в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеет единственное решение $x = ba^{-1}$

Proof.

$$ax = b \Leftrightarrow axa^{-1} = ba^{-1} \Leftrightarrow xaa^{-1} = ba^{-1} \Leftrightarrow x = ba^{-1}$$

□

Следствия аксиомы связи сложения и умножения

Theorem. $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

Proof.

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow \\ x \cdot 0 &= x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))) = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0 \end{aligned}$$

□

Theorem. $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Proof. Решим уравнение относительно x , затем относительно y :

$$1. x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \cdot y^{-1} \Rightarrow x = 0$$

$$2. x \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x^{-1} \Rightarrow y = 0$$

□

Theorem. $\forall x \in \mathbb{R} : -x = (-1) \cdot x$

Proof.

$$\begin{aligned} -x &= (-1) \cdot x \Rightarrow \\ -x + x &= (-1) \cdot x + x \Rightarrow 0 = ((-1) + 1) \cdot x \Rightarrow \\ &0 = 0 \cdot x \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Theorem. $\forall x \in \mathbb{R} : (-1)(-x) = x$

Proof. Согласно предыдущей теореме

$$x = (-1)(-x)$$

□

Theorem. $\forall x \in \mathbb{R} : (-x)(-x) = x \cdot x$

Proof.

$$(-x)(-x) = (-1)x(-x) = x(-1)(-x) = x \cdot x$$

□

Следствия аксиом порядка

Theorem. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$

Proof.

$$\begin{aligned}(x \leq y) \vee (y \leq x) &\Rightarrow (x < y) \vee (x = y) \vee (y < x) \vee (y = x) \\ &\Rightarrow (x = y) \vee (x < y) \vee (x > y)\end{aligned}$$

□

Theorem. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \begin{cases} (x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x < z) \\ (x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z) \end{cases}$

Proof. Докажем первое утверждение:

$$\begin{aligned}(x \leq y) \wedge (y < z) &\Rightarrow \\ (x \leq y) \wedge (y \leq z) \wedge (y \neq z) &\Rightarrow \\ (x \leq z) &\end{aligned}$$

Докажем теперь, что $x \neq z$. Пойдём от противного:

$$\begin{aligned}(x \leq y) \wedge (y < z) &\Rightarrow \\ (z \leq y) \wedge (y < z) &\Rightarrow \\ (z \leq y) \wedge (y \leq z) \wedge (y \neq z) &\Rightarrow \\ (z = y) \wedge (y \neq z) &\end{aligned}$$

Получили противоречие, что и требовалось.

□

Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

Theorem. $\forall x, y, z, w \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned}(x < y) &\Rightarrow (x + z) < (y + z) \\ (0 < x) &\Rightarrow (-x < 0) \\ (x \leq y) \wedge (z \leq w) &\Rightarrow (x + z \leq y + w) \\ (x \leq y) \wedge (z \leq w) &\Rightarrow (x + z < y + w)\end{aligned}$$

Proof. Докажем третье утверждение:

$$\begin{aligned}
 (x \leq y) \wedge (z \leq w) &\Rightarrow \\
 (x \leq y) \wedge (y \leq y + w + (-z)) &\Rightarrow \\
 (x \leq y + w + (-z)) &\Rightarrow \\
 (x + z \leq y + w)
 \end{aligned}$$

□

Theorem. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 (0 < x) \wedge (0 < y) &\Rightarrow (0 < xy) \\
 (x < 0) \wedge (y < 0) &\Rightarrow (0 < xy) \\
 (x < 0) \wedge (0 < y) &\Rightarrow (xy < 0) \\
 (x < y) \wedge (0 < z) &\Rightarrow (xz < yz) \\
 (x < y) \wedge (z < 0) &\Rightarrow (yz < xz)
 \end{aligned}$$

Theorem. $0 < 1$

Proof. $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, т.е. $0 \neq 1$.

Пусть $1 < 0$, тогда по предыдущей теореме:

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow 0 < 1$$

Т.е., одновременно $(1 < 0)$ и $(0 > 1)$ - противоречие.

□

Theorem. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 (0 < x) &\Rightarrow (0 < x^{-1}) \\
 (0 < x) \wedge (x < y) &\Rightarrow (0 < y^{-1}) \wedge (y^{-1} < x^{-1})
 \end{aligned}$$

1.3 Аксиома полноты и верхняя (нижняя) грань числового множества

Def. Множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху (снизу), если $\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in X : x \leq c$ ($c \leq x$)

Число c называют верхней (нижней) границей X или мажорантой (минорантой)

Def. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*

Def. Элемент $a \in X$ называется *наибольшим (наименьшим)* элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in X : x \leq a$ ($a \leq x$)

$$(a = \max X) := a \in X \ \forall x \in X : x \leq a$$

$$(a = \min X) := a \in X \ \forall x \in X : a \leq x$$

Lemma. Если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он только один.

Def. Верхней гранью множества X называется

$$(s = \sup X) := \forall x \in X ((x \leq s) \wedge (\forall s' < s \exists x' \in X : s' < x'))$$

Def. Нижней гранью называется

$$(i = \inf X) := \forall x \in X ((i \leq x) \wedge (\forall i' > i \exists x' \in X : x < i'))$$

Lemma. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет единственную верхнюю (нижнюю) грань.

Proof. Пусть $x_1 = \sup X, x_2 = \sup X$. Из определения верхней грани

следует, что $\begin{cases} \forall x \in X : x \leq x_1 \\ \forall x \in X : x \leq x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ x_2 \leq x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \square$

1.4 Классы действительных чисел

Натуральные числа и индукция

Def. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит число $x + 1$.

Пример: пересечение $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ любого семейства индуктивных множеств X_α , если оно непусто. Покажем:

$$\begin{aligned} x \in X &= \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Rightarrow \\ \forall \alpha \in A : x \in X_\alpha &\Rightarrow \\ \forall \alpha \in A : (x+1) \in X_\alpha &\Rightarrow \\ (x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha &= X \end{aligned}$$

Def. Множеством *натуральных чисел* \mathbb{N} называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1.

Lemma. *Принцип математической индукции.*

$$(E \subset \mathbb{N}) \wedge (1 \in E) \wedge (\forall x \in E : x \in E \Rightarrow x+1 \in E) \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

Theorem. $\forall x, y \in \mathbb{N} : (x+y) \in \mathbb{N} \wedge (x \cdot y) \in \mathbb{N}$

Proof. Докажем сложение. Пусть E множество тех $y \in \mathbb{N}$, для которых $(x+y) \in \mathbb{N}$.

$1 \in E$, так как $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (m+1 \in \mathbb{N})$ по определению индуктивного множества.

Если $y \in E \Leftrightarrow (x+y) \in \mathbb{N}$, то $y+1 \in E$, так как $x+(y+1) = ((x+y)+1) \in \mathbb{N}$ по определению индуктивного множества.

Опираясь на предыдущую лемму доказано. \square

Theorem. $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq 1 \Rightarrow (n-1) \in \mathbb{N}$

Proof. Пусть $E = \{(n-1) \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 1\}$. Докажем, что $E = \mathbb{N}$

$$(1 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (2 := (1+1) \in \mathbb{N}) \Rightarrow (1 = (2-1) \in E)$$

Пусть $(n-1) \in E$. Тогда:

$$(n-1)+1 = (n+1)-1$$

$$(n+1) \in \mathbb{N} \wedge (n+1) \neq 1 \Rightarrow ((n+1)-1) \in E$$

По индукции заключаем, что $E = \mathbb{N}$. \square

Theorem. $\forall x, n \in \mathbb{N} : \neg(n < x < n+1)$

Целые числа

Def. *Целые числа* есть множество $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Def. Число $p \in \mathbb{N}, \neq 1$ называется *простым*, если

$$\forall x \in \mathbb{N}, \neq p, \neq 1 : x \nmid p$$

Theorem. $\forall n \in \mathbb{N} \exists! n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$, где p_1, \dots, p_k - простые числа

Рациональные числа

Def. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ называются *рациональными* и обозначаются как множество \mathbb{Q} .

Theorem. $\forall m, k \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N} : \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}$

Proof.

$$\frac{mk}{nk} = (mk)(nk)^{-1} = (mk)(k^{-1} \cdot n^{-1}) = m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n}$$

□

Иррациональные числа

Def. *Иррациональные числа* есть $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Theorem. $\exists s \in \mathbb{R} : s^2 = 2 \wedge s \in \mathbb{R}$