

Основы теории множеств. I Семестр

Лектор: Селиванов Виктор Львович

Автор конспекта: Буглеев Антон

2022

1 Мощность. Характеристическая функция

Def. Мощностью $|A|$ называется число элементов в A .

Def. Фиксируем произвольное множество U , элементами которого являются множества A_1, \dots, A_n .

Характеристической функцией (индикатором) множества $X \subset U$ называют функцию $\chi_X(u) = \begin{cases} 1, u \in X \\ 0, u \notin X \end{cases}$

Основные свойства, если $A, B \subset U$:

1. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
3. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_{A \cap B}$
4. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$

Theorem. $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ равно

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Proof.

$$\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \cdot \dots \cdot (1 - \chi_{A_n})$$

Раскрыв скобки получаем

$$\begin{aligned} & \sum_i \chi_{A_i} - \sum_{i < j} \chi_{A_i} \chi_{A_j} + \sum_{i < j < k} \chi_{A_i} \chi_{A_j} \chi_{A_k} - \dots \\ & \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_K| - \dots \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Theorem. $|A_1 \Delta \dots \Delta A_n|$ равно

$$\sum_i |A_i| - 2 \sum_{i < j} |A_i A_j| + 4 \sum_{i < j < k} |A_i A_j A_k| - \dots$$

Def. Множества называются **Равномощными**, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие.

2 Отношения

Def. Отношением называется любое множество $R \subset A \times B$, где A и B - какие-то множества

Def. Бинарное отношение - отношение вида $R \subset X \times X$

Свойства отношений:

1. $\forall x \in X : xRx$ (рефлексивность)
2. $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (симметричность)
3. $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность)
4. $\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow a = b$ (антисимметричность)
5. $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$ (связность)

Def. Отношение эквивалентности - всякое симметричное, рефлексивное и транзитивное отношение

Пример: X - множество прямых в плоскости, тогда всякие прямые $a, b \in X$ находятся в отношении эквивалентности ($a \sim b$).

Отношение равномощности есть отношение эквивалентности. Примеры:

1. Множество бесконечных последовательностей единиц и нулей равномощно множеству всех подмножеств натуральных чисел. $((010101\dots))$ соответствует ряду чётных чисел)

2. Множество подмножеств любого множества $U = P(U)$ равномощно множеству всех функций, которые ставят в соответствие каждому элементу $x \in U$ либо 0, либо 1. Другими словами, каждому $(X \subset P(U))$ соответствует своя характеристическая функция

Def. Отношение частичного порядка - всякое рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение.

Пример: пусть $X = \mathcal{P}(M)$ - множество всех подмножеств множества M . Два произвольные множества $A, B \subset X$ находятся в отношении частичного порядка $(A \preceq B)$.

Def. Отношение линейного порядка - всякое связное отношение частичного порядка.

3 Счётные множества

Def. Множество называется *счётным*, если оно равномощно \mathbb{N} .

Пример: множество \mathbb{Z} счётно, так как множество \mathbb{Z} можно представить в виде: $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

Theorem. Подмножество счётного множества конечно или счётно.

Proof. Возьмём счётное множество $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Множество B образуем следующим образом: вычёркиваем из A те элементы, которые $\notin B$, сохраняя порядок оставших. Очевидно, оставшиеся члены образуют бесконечную последовательность (тогда B - счётно, так как сохранился пронумерованный порядок), либо B конечно. \square

Theorem. Всякое бесконечное множество содержит счётное множество.

Proof. Пусть имеется бесконечное множество B . Возьмём некоторый элемент $b_1 \in B$. Так как B бесконечно, возьмём какой-либо другой элемент $b_2 \in B$, и так далее. Множество $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset B$ является счётным. \square

Theorem. Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.