

Дискретная математика. I Семестр

Буглеев Антон

2022

1 Булевы Функции

1.1 Булевы Функции. Базис

Def. Булевой функцией называется функция вида

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Def. Базис - некоторое множество булевых функций.

Def. Формула над базисом определяется по индукции:

База: всякая функция $f \in F$ является формулой над F

Индуктивный переход: если $f(x_1, \dots, x_n)$ - формула над F , а Φ_1, \dots, Φ_n - переменные, либо формулы над F , то тогда $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - тоже формула над F .

1.2 ПК, ДНФ, СДНФ, ПД, КНФ, СКНФ, Многочлен (полином) Жегалкина

Def. Простой конъюнкцией (ПК) называется конъюнкция одной или нескольких переменных или их отрицаний, причём каждая переменная встречается не более одного раза.

Def. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) - дизъюнкция простых конъюнкций

Def. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) - ДНФ, в которой в каждой конъюнкции участвуют все переменные.

Аналогично определяются *Простая дизъюнкция* (ПД), *Конъюнктивная нормальная форма* (КНФ), *Совершенная конъюнктивная нормальная форма* (СКНФ).

Def. Многочлен (полином) Жегалкина - сумма по модулю 2 конъюнкций переменных без повторений слагаемых, а также (необязательно) слагаемое 1.

$$f(x_1, \dots, x_n) = a \oplus a_1 \wedge x_1 \oplus \dots \oplus a_{12} \wedge x_1 \wedge x_2 \oplus \dots \oplus a_{1..n} \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n$$

Например, $f(x, y, z) = x \oplus x \wedge y \wedge z \oplus 1$

Theorem. Для каждой функции существует единственное представление многочленом Жегалкина.

Proof. ... □

1.3 Замыкание. Замкнутые классы. Полнота

Def. Замыканием $[F]$ базиса F называется множество всех функций, представимых формулой над F

Def. Замкнутый класс - класс, равный своему замыканию: $F = [F]$

1. $T_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$
2. $T_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$
3. $S = \{f \mid f(x_1, \dots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \dots, \neg x_n)\}$
4. $M = \{f \mid \forall \text{ двоичных наборов } \alpha \leq \beta : f(\alpha) \leq f(\beta)\}$
5. $L = \{f \mid f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n \oplus c\}, \text{ где } c \in \{0, 1\}$

Theorem. Классы T_0, T_1, S, M, L являются замкнутыми.

Proof. □

Def. Множество булевых функций F называется **полной системой**, если все булевы функции выразимы как формулы над данным базисом.

Theorem. Множество булевых функций F является полным тогда и только тогда, когда F не содержится ни в одном из пяти классов T_0, T_1, S, M, L

Proof. 1. \Rightarrow

...

2. \Leftarrow

...

□

2 Комбинаторика