Математический анализ. I Семестр

Лектор: Кисляков Сергей Витальевич
Автор конспекта: Буглеев Антон

2022

Contents

1 Действительные числа

1.1 Аксиоматика действительных чисел

Аксиомы сложения

Операция сложения: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$

1. $\exists\, 0 \in R\ \forall\, x \in R : x + 0 = 0 + x = x$
2. $\forall\, x \in R\ \exists\, (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$
3. $\forall\, x, y, z \in R : x + (y + z) = (x + y) + z$
4. $\forall\, x, y \in R : x + y = y + x$

Аксиомы умножения

Операция умножения: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}$

1. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \forall\, x \in R : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \exists\, x^{-1} \in R : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
4. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

Связывающие аксиомы и аксиома полноты

Связь сложения и умножения:

$$(x + y)z = xz + yz$$

Аксиомы порядка:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x \leq x$
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$

3. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : (x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z)$

4. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : (x \le y) \vee (y \le x)$

Связь сложения и порядка:

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : (x \le y) \Rightarrow (x + z \le y + z)$$

Связь умножения и порядка:

$$\forall\, x, y \in R : (0 \le x) \wedge (0 \le y) \Rightarrow (0 \le x \cdot y)$$

Аксиома полноты (непрерывности):
Если X, Y - непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что если $\forall\, x \in X\ \forall\, y \in Y\ x \le y$, то $\exists\, c \in R\ \forall\, x \in X\ \forall\, y \in Y : x \le c \le y$

1.2 Некоторые следствия из аксимом

Следствия аксиом сложения

Theorem. *В множестве $\mathbb{R}$ существует единственный* 0

Proof. Пусть существует 0_1 и 0_2, тогда:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

□

Theorem. $\forall\, x \in R\ \exists!\, (-x)$

Proof. Пусть существуют x_1 и x_2, противоположные x:

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$$

□

Theorem. *Уравнение $a + x = b$ в $\mathbb{R}$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$*

Proof.

$$\begin{aligned}&a + x = b \Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a)\\&\quad\Leftrightarrow x + a + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow x + 0 = b + (-a) \Leftrightarrow x = b + (-a)\end{aligned}$$

□

Следствия аксиом умножения

Theorem. *В множестве* $\mathbb{R}$ *существует единственная* 1

Proof. Пусть существуют единицы 1_1 и 1_2, тогда:

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2$$

□

Theorem. $\forall\, x \neq 0 \in R\ \exists!\, x^{-1}$

Proof. Пусть существуют x_1 и x_2 обратные x, тогда:

$$x_1 = x_1 \cdot 1 = x_1 \cdot (x \cdot x_2) = (x_1 \cdot x) \cdot x_2 = 1 \cdot x_2 = x_2$$

□

Theorem. *Уравнение* $ax = b$ *в* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *имеет единственное решение* $x = ba^{-1}$

Proof.

$$ax = b \Leftrightarrow axa^{-1} = ba^{-1} \Leftrightarrow xaa^{-1} = ba^{-1} \Leftrightarrow x = ba^{-1}$$

□

Следствия аксиомы связи сложения и умножения

Theorem. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

Proof.

$$x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow$$
$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 + (-(x \cdot 0))) = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0$$

□

Theorem. $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Proof. Решим уравнение относительно x, затем относительно y:

1. $x \cdot y = 0 \Rightarrow\ x = 0 \cdot y^{-1} \Rightarrow\ x = 0$
2. $x \cdot y = 0 \Rightarrow\ y = 0 \cdot x^{-1} \Rightarrow\ y = 0$

□

Theorem. $\forall\, x \in \mathbb{R} : -x = (-1) \cdot x$

Proof.

$$-x = (-1) \cdot x \Rightarrow$$
$$-x + x = (-1) \cdot x + x \Rightarrow 0 = ((-1)+1) \cdot x \Rightarrow$$
$$0 = 0 \cdot x \Rightarrow 0 = 0$$

□

Theorem. $\forall\, x \in \mathbb{R} : (-1)(-x) = x$

Proof. Согласно предыдущей теореме

$$x = (-1)(-x)$$

□

Theorem. $\forall\, x \in \mathbb{R} : (-x)(-x) = x \cdot x$

Proof.
$$(-x)(-x) = (-1)x(-x) = x(-1)(-x) = x \cdot x$$

□

Следствия аксиом порядка

Theorem. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$

Proof.

$$\begin{aligned}(x \le y) \vee (y \le x) \Rightarrow (x < y) \vee (x = y) \vee (y < x) \vee (y = x)\\ \Rightarrow (x = y) \vee (x < y) \vee (x > y)\end{aligned}$$

□

Theorem. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} : \begin{cases}(x < y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x < z)\\ (x \le y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)\end{cases}$

Proof. Докажем первое утверждение:

$$\begin{aligned}&(x \le y) \wedge (y < z) \Rightarrow\\ &(x \le y) \wedge (y \le z) \wedge (y \ne z) \Rightarrow\\ &(x \le z)\end{aligned}$$

Докажем теперь, что $x \ne z$. Пойдём от противного:

$$\begin{aligned}&(x \le y) \wedge (y < z) \Rightarrow\\ &(z \le y) \wedge (y < z) \Rightarrow\\ &(z \le y) \wedge (y \le z) \wedge (y \ne z) \Rightarrow\\ &(z = y) \wedge (y \ne z)\end{aligned}$$

Получили противоречие, что и требовалось. □

Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением

Theorem. $\forall\, x, y, z, w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z)\\ &(0 < x) \Rightarrow (-x < 0)\\ &(x \le y) \wedge (z \le w) \Rightarrow (x + z \le y + w)\\ &(x \le y) \wedge (z \le w) \Rightarrow (x + z < y + w)\end{aligned}$$

Proof. Докажем третье утверждение:

$$\begin{aligned}
&(x \le y) \wedge (z \le w) \Rightarrow \\
&(x \le y) \wedge (y \le y + w + (-z)) \Rightarrow \\
&(x \le y + w + (-z)) \Rightarrow \\
&(x + z \le y + w)
\end{aligned}$$

□

Theorem. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
&(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy) \\
&(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < xy) \\
&(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0) \\
&(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (xz < yz) \\
&(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (yz < xz)
\end{aligned}$$

Theorem. $0 < 1$

Proof. $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, т.е. $0 \ne 1$.
Пусть $1 < 0$, тогда по предыдущей теореме:

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow 0 < 1$$

Т.е., одновременно $(1 < 0)$ и $(0 > 1)$ - противоречие. □

Theorem. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
&(0 < x) \Rightarrow (0 < x^{-1}) \\
&(0 < x) \wedge (x < y) \Rightarrow (0 < y^{-1}) \wedge (y^{-1} < x^{-1})
\end{aligned}$$

1.3 Верхняя (нижняя) грань числового множества

Def. Множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверхну (снизу)*, если $\exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in X : x \le c \; (c \le x)$

Число c нахывают верхней (нижней) границей X или мажорантой (минорантой)

Def. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*

Def. Элемент $a \in X$ называется *наибольшим (наименьшим)* элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall\, x \in \mathbb{R} : x \leq a$ $(a \leq x)$

$$(a = \max X) := a \in X\ \forall\, x \in X : x \leq a$$
$$(a = \min X) := a \in X\ \forall\, x \in X : a \leq x$$

Lemma. *Если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он только один.*

Def. *Верхней гранью* множества X называется

$$(s = \sup X) := \forall\, x \in X((x \leq s) \wedge (\forall\, s' < s\ \exists\, x' \in X : s' < x'))$$

Def. *Нижней гранью* называется

$$(i = \inf X) := \forall\, x \in X((i \leq x) \wedge (\forall\, i' > i\ \exists\, x' \in X : x < i'))$$

Lemma. *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет единственную верхнюю (нижнюю) грань.*

Proof. Пусть $x_1 = \sup X, x_2 = \sup X$. Из определения верхней грани следует, что $\begin{cases} \forall\, x \in X : x \leq x_1 \\ \forall\, x \in X : x \leq x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ x_2 \leq x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$ □

1.4 Классы действительных чисел

Натуральные числа и индукция

Def. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит число $x + 1$.

Пример: пересечение $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ любого семейства индуктивных множеств X_α, если оно непусто. Покажем:

$$\begin{aligned}
&x \in X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Rightarrow \\
&\forall\, \alpha \in A : x \in X_\alpha \Rightarrow \\
&\forall\, \alpha \in A : (x+1) \in X_\alpha \Rightarrow \\
&(x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X
\end{aligned}$$

Def. Множеством *натуральных чисел* $\mathbb{N}$ называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1.

Lemma. *Принцип математической индукции.*

$$(E \subset \mathbb{N}) \wedge (1 \in E) \wedge (\forall\, x \in E : x \in E \Rightarrow x+1 \in E) \Rightarrow E = \mathbb{N}$$

Theorem. $\forall\, x, y \in \mathbb{N} : (x+y) \in \mathbb{N} \wedge (x \cdot y) \in \mathbb{N}$

Proof. Докажем сложение. Пусть E множество тех $y \in \mathbb{N}$, для которых $(x+y) \in \mathbb{N}$.
$1 \in E$, так как $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (m+1 \in N)$ по определению индуктивного множества.
Если $y \in E \Leftrightarrow (x+y) \in N$, то $y+1 \in E$, так как $x+(y+1) = ((x+y)+1) \in \mathbb{N}$ по определению индуктивного множества.
Опираясь на предыдущую лемму доказано. □

Theorem. $\forall\, n \in \mathbb{N} : n \neq 1 \Rightarrow (n-1) \in \mathbb{N}$

Proof. Пусть $E = \{(n-1) \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 1\}$. Докажем, что $E = \mathbb{N}$

$$(1 \in \mathbb{N}) \Rightarrow (2 := (1+1) \in \mathbb{N}) \Rightarrow (1 = (2-1) \in E)$$

Пусть $(n-1) \in E$. Тогда:

$$(n-1)+1 = (n+1)-1$$

$(n+1) \in \mathbb{N} \;\wedge\; (n+1) \neq 1 \Rightarrow ((n+1)-1) \in E$
По индукции заключаем, что $E = \mathbb{N}$. □

Theorem. $\forall\, x, n \in \mathbb{N} : \neg(n < x < n+1)$

Целые числа

Def. *Целые числа* есть множество $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Def. Число $p \in \mathbb{N}, \neq 1$ называется *простым*, если

$$\forall\, x \in N, \neq p, \neq 1 : x \nmid p$$

Theorem. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists!\ n = p_1 \cdot ... \cdot p_k$*, где* $p_1, \ldots, p_k$ *- простые числа*

Рациональные числа

Def. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ называются *рациональными* и обозначются как множество $\mathbb{Q}$.

Theorem. $\forall\, m, k \in \mathbb{Z}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \frac{mk}{nk} = \frac{m}{n}$

Proof.

$$\frac{mk}{nk} = (mk)(nk)^{-1} = (mk)(k^{-1} \cdot n^{-1}) = m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n}$$

□

Иррациональные числа

Def. *Иррациональные числа* есть $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Theorem. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Proof. Пойдём от обратного.
Пусть $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists$ несократимая дробь $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.
Имеем:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow 2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow m = 2x$$

Но это также значит, что

$$2n^2 = 4x^2 \Rightarrow n^2 = 2x^2 \Rightarrow 2 \mid n$$

То есть, дробь $\frac{m}{n}$ сократима на два - противоречие. □

Def. *Модулем* числа $x \in \mathbb{R}$ называется

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля:

1. $-|x| \leq x \leq |x|$
2. Пусть $a > 0$. Тогда $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$ - *Неравенство треугольника*

Proof. Используя свойство 1, а затем свойство 2:

$$\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases} \Rightarrow -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$
$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

□

1.5 Аксиомы непрерывности или полноты

Аксиома Архимеда. $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : x \leq n$
Аксиома индукции. $\forall\, X \subset \mathbb{N}, X \neq \varnothing : \exists\, \min X$

Def. Непустые $A, B \subset \mathbb{R}$ образуют *щель*, если $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B : a \leq b$
Данная *щель* содержит $x \in \mathbb{R}$: $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B : a \leq x \leq b$

Аксиома Кантора-Дедекинда. Любая щель содержит хотя бы одно вещественное число.

Полезные следствия

Theorem. *Несуществование бесконечно малых величин.*

$$x \in R \land \left(\forall\, n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x \leq 0$$

Proof. Предположим обратное, тогда x - положителен, значит:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : x \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{x}$$

что противоречит аксиоме Архимеда. $\square$

Theorem. $\forall$ *ограниченных снизу* $X \subset \mathbb{Z} : \exists\, \min X$

Proof. Пусть $i = \inf X$. По аксиоме Архимеда $\exists\, n \in \mathbb{N} : n \geq i$. Построим множество $X' = \{x + n + 1 \mid x \in X\}$. Очевидно, что $X' \subset \mathbb{N} \Rightarrow$ по аксиоме индукции $x_0 = \min X'$. Значит, $x_0 - (n+1) = \min X$, что и требовалось. $\square$

Theorem. *Пусть* $I = \langle a; b \rangle, s > 0$.

$$\exists\, r \in \mathbb{Q} : rs \in I$$

Proof. Пусть $\alpha = b - a$ - длина промежутка I. Согласно аксиоме архимеда

$$\exists\, q \in \mathbb{N} : \frac{s}{\alpha} < q \Leftrightarrow \frac{s}{q} < \alpha$$

Теперь осталось найти $p \in \mathbb{Z}$, чтобы выполнялось $p\dfrac{s}{q} \in I$.
Пусть дано $E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \cdot \frac{s}{q} \geq b\}$. Из предыдущей теоремы мы знаем, что $\exists\, m_0 = \min E$.
Очевидно, что $(m_0 - 1) \notin E \Rightarrow (m_0 - 1) \cdot \frac{s}{q} < b$. Докажем, что $(m_0 - 1) \cdot \frac{s}{q} > a$.

$$\frac{s}{q} < \alpha \Leftrightarrow a < b - \frac{s}{q} \leq m_0 \cdot \frac{s}{q} - \frac{s}{q} = (m_0 - 1)\frac{s}{q}$$

Таким образом, $r = (m_0 - 1)\dfrac{s}{q}$ $\square$

Theorem. $\exists!\, a \in R, a > 0 : a^2 = 2$

Proof. Пусть $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \wedge y^2 > 2\}$.
(A, B) - щель, если неверно: $\exists\, y \in B\ \exists\, x \in A : y \leq x \Rightarrow y^2 < x^2 \Leftrightarrow 2 < y^2 \leq x^2 < 2$. Очевидно противоречие. Следовательно, (A, B) - щель. Значит по аксиоме Кантора-Дедекинда $\exists\, c \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\ \forall y \in B : x \leq c \leq y$.
Докажем, что $c^2 = 2$. Пойдём от обратного, значит, что $c^2 < 2 \vee c^2 > 2$.

Lemma. *В множестве A нет наибольшего числа, а в B нет наименьшего*

Proof. ... □

1. $c^2 < 2 \Rightarrow c \in A$, но согласно лемме $\exists d \in A : c < d$ - противоречие.

2. аналогично

□

Theorem. *На любом невырожденном отрезке есть иррациональные точки*

1.6 Грани

Def. Пусть A - непустое ограниченное сверху множество. Пусть B - мнлжество всех верхних границ