离散数学第四次作业

作业提交方式：2022 年 12 月 17 前将电子版作业上传到 bb 系统

一. （2 分） 证明：

1. 每棵树都是一个二分图。
2. 如果一棵树存在完备匹配，那么这个完备匹配是唯一的。

二. （3 分） 我们首先定义一个图 G 的**覆盖**：

> 设 G 是一个图, C 是其顶点集合的子集, 即 $C \subseteq V(G)$, 若 G 中任意一条边都有一个端点属于 C, 则称 C 是 G 的一个覆盖。若 C 是 G 的覆盖, 但 C 的任何真子集都不是 G 的覆盖, 则称 C 是 G 的**极小覆盖**。若 C^* 是 G 的覆盖, 且不存在 G 的覆盖 C, 使得 $|C| < |C^*|$, 则称 C^* 是 G 的**最小覆盖**, 且称 $|C^*|$ 是 G 的覆盖数, 记作 $\beta(G)$ 。

设 G 是顶点集合划分为 X 与 Y 的二分图，$V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$，证明如下结论：

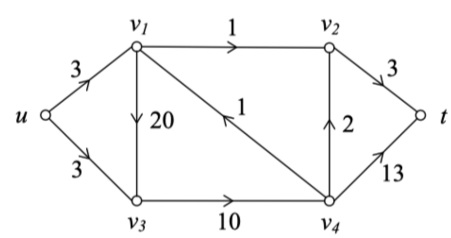
1. G 的每个极小覆盖可以表示为 $S \cup N(X - S), S \subset X$，其中 $N(S)$ 表示 S 的邻居集合。
2. $\beta(G) = |X| - \max\limits_{S \subset X}(|S| - |N(S)|)$。
3. $\beta(G) = |X|$，当且仅当任给 $S \subseteq X$, 都有 $|N(S)| \geq |S|$。

三. （1 分） 假设 f 是网络 $N = (G, s, t, c)$ 上的流函数。证明:

$$\sum_{v \in V} f(s, v) = \sum_{v \in V} f(v, t)$$

四. （2 分） 有向图 G 如图所示

1. 在图中模拟 ford-fulkerson 算法求出网络的最大流，要求给出过程。
2. 如果边权重表示流函数下界，即 $f(u, v) \geq c(u, v)$，求网络的最小流。



五. （2 分） 对于有向图 $G = (V, E)$，我们可以定义**强连通分量图** $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$，假设 G 有强连通分量 $C_1, \ldots, C_k$，那么 $V^{SCC} = \{v_1, \ldots, v_k\}$，$V^{SCC}$ 中的点 v_i 对应 G 中强连通分量 C_i，$(v_i, v_j) \in E^{SCC}$ 当且仅当存在 $u, v \in V$ 使得 $(u, v) \in E, u \in C_i, v \in C_j$。

1. 证明：分量图 G^{SCC} 是一个有向无环图。
2. 定义 $G^T = (V, E^T)$，这里 $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$。证明：$((G^T)^{SCC})^T = G^{SCC}$