中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

1. ∵ H是G的正规子群
∴ 由正规子群定义，H是G的子群

∵ $[G:H]=m$
结合 Lagrange定理有
$|G|/|H|=[G:H]=m$

对于G模H的商群有
$|G/H|=|G|/|H|=m$

对$\forall x\in G$
Hx为G/H中的一个元素
∵ 一个群中元素的阶必定能整除群的阶.
∴ $|Hx|\,\big|\,|G/H|$
即 $(Hx)^m=H$
$Hx^m=H$
故 $x^m\in H$.

2. $H\lhd G$, $K\lhd G$.
$H\cap K=\{e\}$.
∵ H、K都是G的子群
∴ H、K中均包含G的单位元.
此处的e即G的单位元.
~~∴ $H\cap K$是G的非空子集~~
~~$e*e=e$~~
~~e为自身的逆元且为$H\cap K$的单位元~~
~~$H\cap K$的运算满足结合律、封闭性.~~
~~$H\cap K$为G的子群.~~

∵ H、K都是G的正规子群
∴ 对$\forall h\in H$, $k\in K$ 有 $kh^{-1}k^{-1}\in H$
$hkh^{-1}\in K$, $kh^{-1}k^{-1}\in H$
由K的运算封闭性
即有 $hkh^{-1}k^{-1}\in K$.
又∵ $kh^{-1}k^{-1}\in H$
∴ $hkh^{-1}k^{-1}=h(kh^{-1}k^{-1})\in H$
即有 $hkh^{-1}k^{-1}$ 同时属于H也属于K
$hkh^{-1}k^{-1}\in H\cap K$

$hkh^{-1}k^{-1}=e$
$hk=kh$成立

3. (1) 对于一个由n个人组成的群体.
每个人能有的朋友数 大于等于0,
小于等于n.

反证: 假设群体中任意两个人的朋友数量都不一样,易知这些人的朋友数量只能分别为 0, 1, 2, 3, ⋯ $n-1$.

不妨设A有0个朋友, Z有$(n-1)$个朋友
Z有$(n-1)$个朋友等价于Z与群体中除自己以外的所有人都是朋友
但A有0个朋友 => A与Z不是朋友 (矛盾)
故对任何至少有2个人构成的群体,其中必定有2个人他们的朋友数量一样多

(2) ~~2n个~~ 不妨将2n个人随机排序为t_1号、t_2号, ⋯ t_{2n}号
~~设对于2n个人中的t_1、t_2号, t_1和t_2同时认识的人.~~
~~小于2个.(除t_1、t_2本身以外)~~

设 t_2、t_3同时与t_1号认识, 若t_2、t_3除t_1外没有共同认识的人
~~在剩下的$(2n-3)$个人中.~~
~~则最多有$(2n-3)-(n-1)-(n-1)=1$~~
则至少需要 $(n-1)+(n-1)=2n-2$ 个人
又∵ 除t_1、t_2、t_3外只有$(2n-3)$个人
∴ 至少还有1人是t_2、t_3共同认识的

综上, $2n\,(n\geq 2)$个人中,每个人至少与其中的n个人认识,
则其中至少有四个人,使得这四个人围桌而坐时,每个人都与他

2022.11.22 21:34

四. 1.

K维向量的每个维度有 0或 1共2种取法.

故共有 2^k（K维向量）种取法

对于每个K维向量, 根据定义, ~~每个维度~~

者隋 ~~每个为 个K维向量~~

~~某K个~~

有K个K维向量与它有边相连.

(即只有K个维度中的1个维度的同位分量相异)

而两个向量间的边是共用的

故共有 $\frac{k*2^{k}}{2}=k*2^{k-1}$ 条边

故 K维立方体是 2^k 个顶, $k*2^{k-1}$ 条边的图 K.

图中顶点可分为 $K_1=\{$有奇数个1分量为1的K维向量$\}$

$K_2=\{$有偶数分量为1的K维向量$\}$

易知 $K_1\cap K_2=\phi$ (K维向量不能同时有奇数个和偶数个分量为1的分量)

$V(K)=K_1\cup K_2$ (分量为1的个数要么为奇数个, 要么为偶数个)

故K维立方体是 2^k 个顶, $k*2^{k-1}$ 条边的二分图

2. 构造二分图G.

$K_{1,k+1}$.

五. 1. ~~假设存在一个~~

分析知 序列 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2 和 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1 对应的都是有7个顶的图

对于一个有7个顶的简单图, 其中任意两个顶点之间最多只有1条边.

故整个图的边数不多于 $C_7^2=21$

而序列1 总边数为 7+6+5+4+3+3+2=30

序列2 总边数为 6+6+5+4+3+3+1=28

均大于21

故 序列 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2 和 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1 都不是简单图的度数序列.

① 对于 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2: 若是简单图, 则各顶点的度不大于6, 而此序列中有7, 矛盾.

② 对于 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1:

∵ 一共只有7个顶点, 有2个度为6的点

故这两个顶点与图中每个点都相邻.

所有的顶点度都不小于2, 而序列中有度为1的点, 矛盾.

2. ~~$\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数~~

~~对于一个简单图, 任意两顶点间存在一条边.~~

则 ~~对应两顶点的度数分别~~

对于一个简单图, 若任意两顶点之间都存在一条边, 当总顶点数为n时, 总边数为 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$

总度数为 $n(n-1)$ 为偶数

任一n个顶点的简单图都是上述简单图删去若干条边构成, 每删去一条边, 总度数减2

故 $\sum_{i=1}^{n} d_n$ 为偶数.

$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$.

设图的顶点为 $V_1, V_2, \cdots V_n$.

令 D_1 为 $V_1, V_2 \cdots V_k$ 的顶点导出子图的度数之和

∵ 图为简单图 ∴ $D_1 \le k(k-1)$

D_2 为 $V_1, V_2 \cdots V_k$ 与 $V_{k+1}, \cdots V_n$ 之间的连线数 (边数)

$V_{k+1}, V_{k+2} \cdots V_n$ 能提供的最大度数之和为 $\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$

$\sum_{i=1}^{n} d_n = D_1+D_2 \le k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$

综上, 这两个序列对应的图都不是简单图.

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

6. 1.

证：设存在T_0是一棵只有2片树叶的树，

但T_0不是轨，不妨设T_0有n个顶点

则 ∃ $v(u) \in V(T_0)$ 使得 ~~$v(u)\geq 3$~~ u的度数≥ 3

又∵ T_0只有2片叶子，则有$(n-2)$个顶点度数≥ 2

T_0的总度数 $\geq 1+1+3+2(n-3) = 2n-1$

又由树的性质，T_0的边数只能是$(n-1)$条

总度数应为$(2n-2)$

(矛盾)

故一棵只有2片树叶的树一定是轨

2. $\Delta(T) \geq n$.

$$\Delta(T) = \max_{v \in V(T)} d(v)$$

考虑 T中度数最大的顶点所在的连通子树，

设其有k个顶点，故有$(k-1)$条边，顶点度数和为$(2k-2)$

∵ 这是一棵连通树

∴ 每个顶点度数不小于1.

不妨设k个顶点中有m个度为1的顶点（即树叶）

则有$(k-m-1)$个顶点的度不小于2.

~~$m+2(n-m) \leq 2n-2$~~

~~$m+2(n-m-1)+n$~~

$$m+2(k-m-1)+n \leq 2k-2$$

$$m \geq n.$$

∴ T至少有n片树叶.

2022.1