离散数学第三次作业

作业提交方式：2022 年 11 月 24 前将电子版作业上传到 bb 系统

一. （1 分） 设 G 为群, $H \triangleleft G$, 且 $[G:H]=m$. 证明: 对每个 $x \in G$, 都有 $x^m \in H$

答: $\boxed{\text{推论：设 } G \text{ 是有限群 } |G|=n,\ \forall a \in G \text{ 有 } a^n = e}$
$\because H \triangleleft G\ \therefore G/H$ 商群存在，又 $\because [G:H]=m\ \therefore |G/H|=m$
$\forall x \in G$ 有 $xH \in G/H$ 由推论 $(xH)^m = eH$
又因为正规子群陪集乘法，$(xH)^m = x^m H$
$x^m H = eH \Rightarrow x^m \in eH = H$

二. （1 分） 设 H, K 为群 G 的两个正规子群. 证明: 如果 $H \cap K = \{e\}$, 则对任意的 $h \in H, k \in K$, 有 $hk = kh$.

答: 由正规子群定义以及群中运算的封闭性我们有以下结论
$kh^{-1}k^{-1} \in H \Rightarrow hkh^{-1}k^{-1} \in H$
$hkh^{-1} \in K \Rightarrow hkh^{-1}k^{-1} \in K$
$hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K \Rightarrow hkh^{-1}k^{-1} = e \Rightarrow hk = kh$

三. （2 分） 证明以下结论：

1. 任何至少由两人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数量一样多。
2. $2n(n \geq 2)$ 人中, 每个人至少与其中的 n 个人认识, 则其中至少有四个人, 使得这四个人围桌而坐时, 每个人旁边都是他认识的人。

答:

1. n 个人构成的群体中，假设任意两人朋友数不同，那么他们的朋友数分别为 $0, 1, \ldots, n-1$，显然朋友数为 $n-1$ 的人与所有人都是朋友，这与有人朋友数为 0 矛盾。
2. 首先选两个互相不认识的人 v_1, v_2，如果不存在两个互相不认识的人，那么 $2n$ 人两两认识，结论显然。考虑他们俩与其余 $2n-2$ 人之间的连边，v_1, v_2 连出去至少 $2n$ 条边，显然其余人中至少两人同时认识 v_1, v_2，那么这四个人围桌而坐，每个人身边都是他认识的人。

四. （2 分） 以分量为 0 或 1 的 k 维向量集为顶集, 仅当两向量只一个同位分量相异时, 在相应二顶间连一边, 所得之图称为 k 维立方体, $k \in \mathbf{N}$。

1. 证明：k 维立方体是 2^k 个顶, $k * 2^{k-1}$ 条边的二分图。
2. 构造一个二分图 G, 使得 G 不与任何 k 维立方体的子图同构。其中 k 为任意正整数。

答:

1. 按顶点编码分量和的奇偶性分为两部分，是二分图。每个顶点的度数为 k，因此 $k * 2^{k-1}$ 条边。
2. $K_{2,3}$。一对点不可能有三个公共邻居。

五. （2 分） 我们将图 G 中所有顶点的度数按照从大到小的顺序排列, 称为图 G 的度数序列。证明:

1. $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$ 和 $6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$ 都不是简单图的度数序列。
2. 设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是简单图的度数序列, 则 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数, 且对任意 $1 \le k \le n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$$

答:

1. $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$ 中七个顶，最大度应小于 7，$6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$ 两个度数为 6 的顶和其他所有顶相邻，因此不应该存在度数为 1 的顶。
2. $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数显然。$\sum_{i=1}^{k} d_i$ 前 k 个顶连出的所有边内部最多消耗掉 $k(k-1)$，剩下 $n-k$ 个顶中每个顶点 i 最多给前 k 个顶贡献 $\min\{k, d_i\}$ 条边，于是等式显然。

六. （2 分） 证明以下结论:

1. 如果一棵树只有两片树叶, 则这棵树是一条轨。
2. 如果 T 是树, 且 $\Delta(T) \ge n$, 则 T 至少有 n 片树叶。其中 $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$。

答:

1. 已知在树中 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|V(G)| - 2$, 因为只有两片树叶, 不妨设为 v_1, v_2, 对于其他顶点我们有 $d(v) \ge 2$, 那么我们有 $d(v_1) + d(v_2) + \sum_{v \ne v_1, v_2} d(v) \ge 1 + 1 + 2(|V(G)| - 2) = 2|V(G)| - 2$, 显然对于 $v \ne v_1, v_2$ 有 $d(v) = 2$，是一条轨。
2. 假设有 x 片树叶, 有 $2|V| - 2 = \sum_{v \in V(G)} d(v) \ge n + x + 2(|V(G)| - x - 1) = 2|V(G)| - 2 - x + n$, 显然有 $x \ge n$。
   方法二：将度数最大的顶删掉，得到 $\Delta(G)$ 棵子树，每棵子树至少包含一片树叶。