

离散数学第二次作业

2022 年 10 月

作业提交方式:2022 年 10 月 27 日周四上课交纸质版 (同时在上课前请将作业拍成照片或扫描, 将电子版作业上传到 bb 系统)

一. 设 $G = \{(a, b) \mid a, b \in R, a \neq 0\}$, 定义 $(a, b) \times_G (c, d) = (ac, ad + b)$, 证明:

1. (G, \times_G) 构成一个群

2. $K = \{(1, b) \mid b \in R\}$ 是 G 的正规子群 (正规子群定义: H 是群 G 的子群. 如果对所有的 G 中元素 g 和 H 中元素 h 都有 $g' * h * g \in H$, 那么称 H 是 G 的正规子群)

二. 证明:

1. 有理数加法群和非零有理数乘法群不同构

2. 实数加法群和正实数乘法群同构

三. 证明: G 是 6 阶群, G 有且仅有一个 3 阶子群.

四. 证明: 在偶数阶群 G 中, 阶数为 2 的元素有奇数个.

五. 群 G 的子群 N 称为 G 的极大子群, 如果不存在群 B 满足 $N \subsetneq B \subsetneq G$, 求无限循环群 $\langle a \rangle$ 的所有极大子群

六. 1. G 是一个群, 定义集合 $Z(G) = \{g \in G : \forall x \in G, xg = gx\}$ 为群 G 的中心, 证明: $Z(G)$ 是 G 的正规子群

2. 设 G 为有限群, 若 $G/Z(G)$ 为循环群, 证明: G 为交换群.