一. (1) 任取树T的一个结点X

将之染色为白色

~~将与X~~

将树T上除X外的其它结点

与X中间间隔奇数个结点

(1,3,5,…)的染为白色;

与X中间间隔偶数个结点

(0,2,…)的染为黑色

例如:与X直接相连的$Y_1, Y_2, \cdots Y_n$

结点染为黑色;与$Y_1, Y_2, \cdots Y_n$

直接相连且不为X的结点染为黑色

易知树T上的结点~~要么~~只可能为黑、白中的一色

且白结点之间、黑结点之间都~~不~~没有直接相连的边

树T中的任一边的两个顶点必定

分别位于白点集和黑点集中

综上,每棵树都是一个二分图.

(2) 设一棵树T存在两个完备匹配M和M'

考虑T的子图G

$$G = T[M \ominus M']$$

∵ M和M'是匹配.

∴ M中的边两两无公共端点

M'亦然.

G中顶的次数只能为1次或2次

G的连通片必为其边在M和M'中

交替出现的圈或边在M与M'中

交替出现的轨.

又∵ M与M'的边数相同.

∴由对称差的定义

G中来自M和M'的边数相同.

G的某个连通片必为其边在M和M'中

交替出现的圈.

又∵ G为T的子图.

∴ T中存在圈.

与树的定义相矛盾

故一棵树若存在完备匹配,

那么这个完备匹配唯一.

二. 1.

∵ G是顶点集合划分为X与Y的二分图

∴ G中的每条边的两个顶点分别在X和Y中，X、Y分别是G的一个覆盖

又对于 $\forall S \subset X$ 由二分图定义

~~知 $N(S-S$~~

知 $N(X-S) \subset Y$

以 $N(X-S)$中一点为其中一顶点的边包含了所有以$(X-S)$中一点为其中一顶点和部分以S中一点为其中一顶点的边.

∵ $S \cup X$是G的一个覆盖

∴ $S \cup N(X-S)$是G的一个覆盖.

若$S \cup N(X-S)$不是G的极小覆盖，则存在$M_1 \subsetneq S$或$M_2 \subsetneq N(X-S)$ 使得 $(S-M_1) \cup N(X-S)$ 或 $S \cup [N(X-S)-M_2]$ 为G的一个覆盖

对于$M_1 \subset S$

以M_1和$[N(M_1)-N(X-S)]$为顶点的边的另一顶点不在$(S-M_1) \cup N(X-S)$内.

以M_2和X中一点为顶点的边的顶点不在$S \cup [N(X-S)-M_2]$内

故反证得到 G的一个极小覆盖可以表示为

$S \cup N(X-S)$, $S \subset X$

2. 证明: $\beta(G)=|X|-\max\limits_{S \subset X}(|S|-|N(S)|)$

首先证明 $C_S=(X-S) \cup N(S)$ 是图G的一个覆盖

令 $S_1 = X-S \subset X$

则 $C_S=(X-S) \cup N(S)=S_1 \cup N(X-S_1)$

如1中得 C_S为G的一个极小覆盖

∵ $\max\limits_{S \subset X}(|S|-|N(S)|)$是顶点集$X$的所有子集中不能从$Y$中找到不重复匹配的最少点数.

即$|X|-\max\limits_{S \subset X}(|S|-|N(S)|)$是$G$的最大匹配数.

又∵二分图最小点覆盖数 = 最大匹配数量.

∴ $\beta(G)=|X|-\max\limits_{S \subset X}(|S|-|N(S)|)$

3. ①证明必要性

∵ 当$\beta(G)=|X|$时

$\max\limits_{S\subseteq X}(|S|-|N(S)|)=0$

∴ G的最大匹配数为$|X|$

亦即G存在完美匹配

易证此时 对$\forall S\subseteq X$

对$\forall x_i\in S\ (i=1,2,3,\cdots|S|)$

x_i必有邻居

且$x_1,x_2,\cdots x_{|S|}$必有一组互不重复的邻居

即有$|N(S)|\geq|S|$

② 证明充分性:

当对$\forall S\subseteq X$，都有$|N(S)|\geq|S|$成立时.

对 $\forall S\subseteq X$有 $|S|-|N(S)|\leq 0$

又∵ ~~对于X |N(X)|≤~~

$\max\limits_{S\subseteq X}(|S|-|N(S)|)\leq 0$

由2知 $\beta(G)=|X|-\max\limits_{S\subseteq X}(|S|-|N(S)|)\geq|X|$

易知X为G的一个覆盖

∴ $|\beta(G)|\leq|X|$

综上，有 $\beta(G)=|X|$

2022.12.17 16:3

三. f是 N=(G, s, t, c)上的流函数.

证明: $\sum_{v\in V} f(s,v) = \sum_{v\in V} f(v,t)$

~~∵ 在有向图中, 所有顶点~~

∵ 在有向图中, 每条弧必然连接两个顶点, 对应着一个出度和一个入度

∴ 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和, 不妨设为 W_1

又∵ 对于图中除 s和t 以外的任意一点 x

易证 x的入度与出度相等. ①

① W_1 ~~出 = Σ 有~~

∴ 不妨设除 s和t 外所有顶点的入度、出度之和分别为 $W_{2入}$、$W_{2出}$

∵ $W_{1入} = W_{1出}$

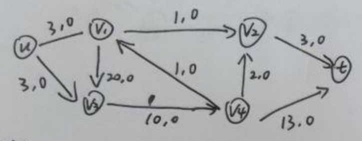
$W_{2入} = W_{2出}$

$$\therefore \sum_{v\in V} f(s,v) = W_{1入} - W_{1出} = W_{2入} - W_{2出} = \sum_{v\in V} f(v,t)$$

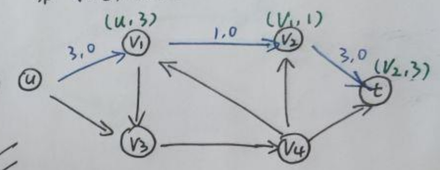
四.

1.

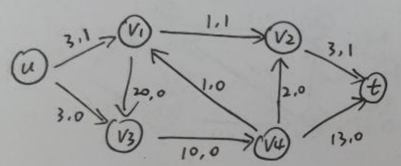
初始状态:



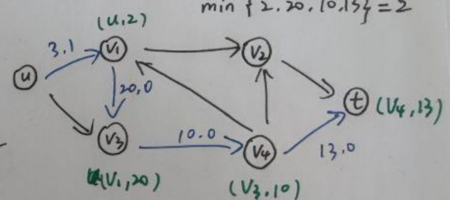
第一条增广路径: $u \to v_1 \to v_2 \to t$ $\min\{3,1,3\}=1$



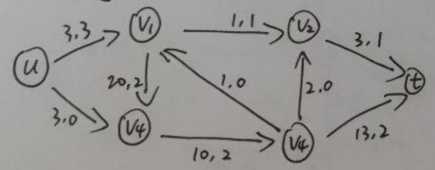
状态1: $v(t)=1$



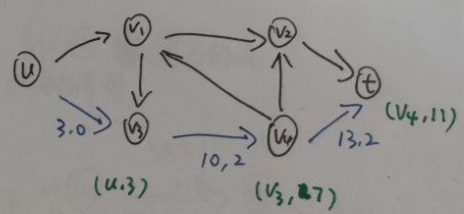
第二条增广路径: $u \to v_1 \to v_3 \to v_4 \to t$ $\min\{2,20,10,13\}=2$



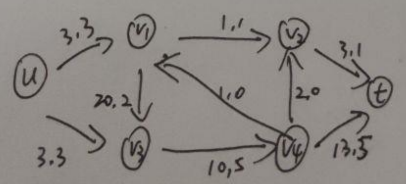
状态2: $v(t)=3$

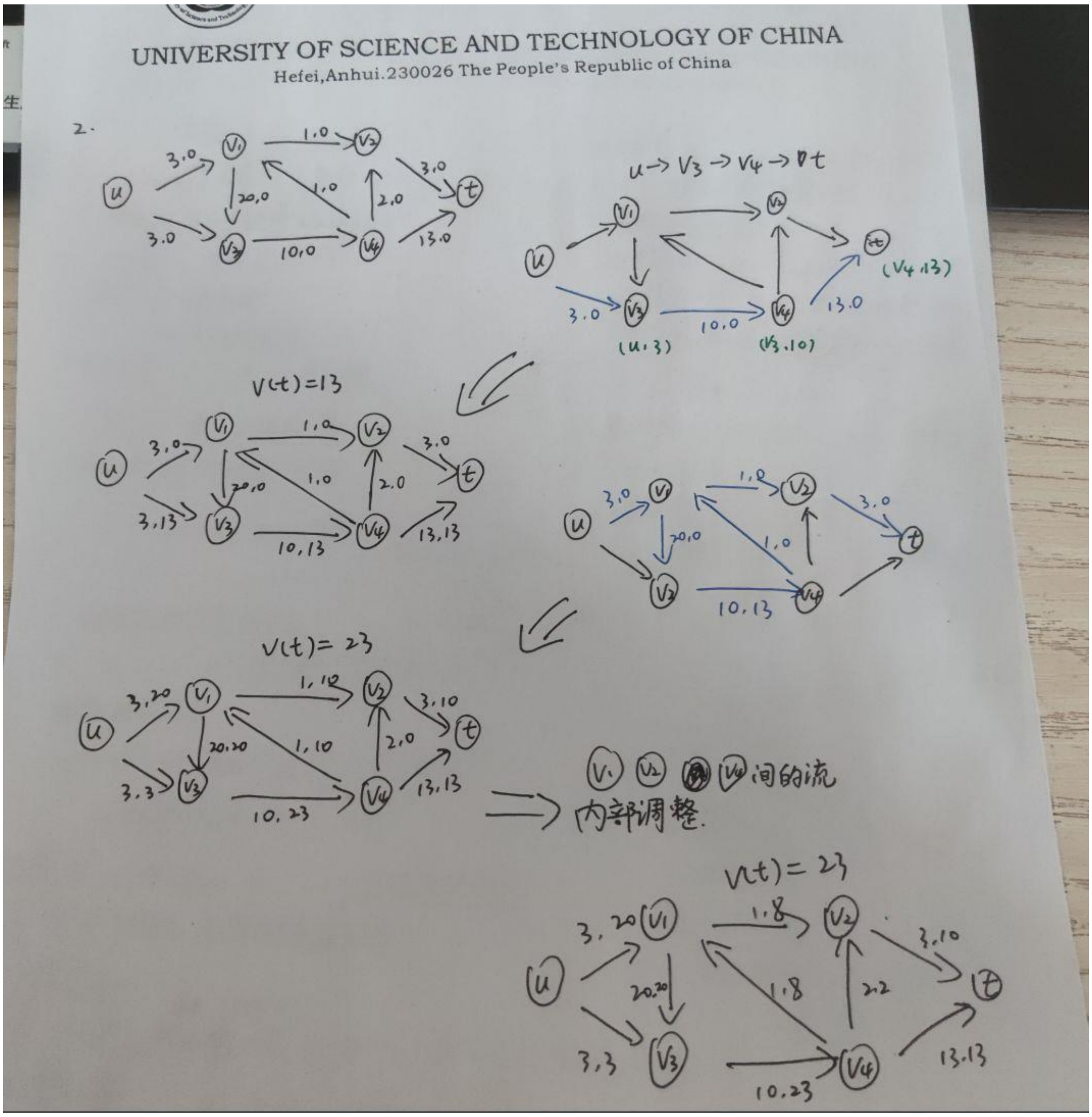


第3条: $u \to v_3 \to v_4 \to t$



状态3: $v(t)=6$




UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China
2.
u→V3→V4→t
V(t)=13
V(t)=23
V1 V2 V4 间的流
内部调整.
V(t)=23

五：1. 证明：

∵ $(V_i,V_j)\in E^{scc}$ 当且仅当

存在 $u,v\in V$ 使得 $(u,v)\in E$

$u\in C_i$，$v\in C_j$

又∵ G 为有向图

∴ (u,v) 为有向边.

分量图 G^{scc} 是一个有向图.

若 G^{scc} 是一个有环图.

不妨设图中的最小环为

$V_1\to V_2\to V_3 \cdots V_i$

且环的边分别为

$V_1 \xrightarrow{(u_1,v_1)} V_2$

$V_2 \xrightarrow{(u_2,v_2)} V_3$

$\vdots$

$V_i \xrightarrow{(u_i,v_i)} V_1$

由强连通分量的定义

$V_1, V_2 \cdots V_i$ 各自内部任意两点

都能相互到达

即对于 $\forall$ ~~km~~ $m\in V_j$ $(1\le j\le i)$

V_j 都能到达 v_{j-1}，u_j

此时若向 V_1 中添加 $V_2,\cdots V_i$ 中的所有点

则可以构成一个新的连通分量

证明如下：~~(1)~~ $(1\le p<j)$

对于 V_p 中任意一点 k_1 和 V_j $(p<j\le i)$ 中任意一点 k_2

从 k_1 到 k_2：$k_1\to u_p\to v_p\to u_{p+1}\to\cdots u_{j-1}\to v_{j-1}\to k_2$

从 k_2 到 k_1：$k_2\to$ ~~(illegible)~~ $u_j\to v_j\to\cdots\to u_i\to v_i\to u_1\to v_1\to\cdots\to u_{p-1}\to v_{p-1}\to k_2$

~~故对于~~

故对于 V_p $(1\le p<j,\ p<j\le i)$

V_j 中的任意一点

都能相互到达

而对 V_q $(1\le q\le i)$

内部的两点，根据 V_q 是强连通分量图知，两者必能相互到达.

此时，我们就构造

出了包含 V_1 中所有点，且加入了新点

仍连通的连通分量，

与 V_1 是强连通分量矛盾

∴ 分量图 G^{scc} 是一个有向无环图.

2. ∵ $G^T=(V,E^T)$

∴ G^T 相当于 G 的所有有向边

反向后得到的图.

∵ 没有增加新的边或点的信息

∴ G^T 的 ~~所有连通~~ 强连通分量

的数目及每个分量中的点构成与

G 相同，分量中的边与 G 反向.

故 $((G^T)^{scc})^T$ 相当于将每个分量

中的所有边再次反向.

∴ $((G^T)^{scc})^T=G^{scc}$