T1. 1. $\vdash x_1 \to (x_2 \to (x_1 \to x_2))$

(1) $x_1$ 假定

(2) $x_1 \to (x_2 \to x_1)$ (L1)

(3) $x_2 \to x_1$ (1), MP
L1

(4) $x_2 \to (x_1 \to x_2)$ (2),(3), MP

(5) $x_1 \to (x_2 \to (x_1 \to x_2))$ (1),(5), MP

2. $\{p \to q, \neg(q \to r) \to \neg p\} \vdash p \to r$

(1) $\neg(q \to r) \to \neg p$ 假定

(2) $p \to (q \to r)$ ($L_3$)

(3) $((p \to q) \to (p \to r))$ (L2)

(4) $p \to q$ 假定

(5) $p \to r$ ~~(3), MP~~ (3),(4), MP

3. $\{p\to q,\ q\to r\} \vdash p\to r$

(1) $q\to r$ 假定

(2) $p\to(q\to r)$

(3) $(p\to q)\to(p\to r)$ (L2)

(4) $p\to q$ 假定

(5) $p\to r$ (3),(4),MP

二. 1. $\vdash (p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$

由演绎定理，只用证 $\{\cancel{p \to q, q\}}$

$\{p \to \neg q, q\} \vdash \neg p$

把 $p$ 当作新假定

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $p$ | 新假定 |
| (2) | $p \to \neg q$ | 假定 |
| (3) | $q$ | 假定 |
| (4) | $\neg q$ | (1),(2),MP |

由(3)(4)用反证律即得

$$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$$

2. $\vdash \neg(p\to q)\to\neg q$

把q当作新假定

(1) $q$ 新假定

(2) $p$ 新假定

(3) $\neg(p\to q)$ 假定

(4) $\neg q$ (2),(3),MP

由(1)(4)用反证律即得

$\neg(p\to q)\to\neg q$

3. $\vdash \neg(p\to q)\to p$

(1) $\neg p$ 新假定

(2) $\neg(p\to q)$ 假定

(3) 由2知 $\neg(p\to q)\to\neg q$

(4) $\neg q\to\neg p$ (1),(3),MP

(5) $p\to q$ (4),换位律

由(2)(5)用反证律得 $\neg(p\to q)\to p$

三. 1. $p = (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$

p的成真指派为 $(1,1,0)$ $(1,1,1)$ $(1,0,1)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$

故p的等值主析取范式为

$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \wedge (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee$

$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$

2. $q = \neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$

q的成真指派为 $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,0)$

故q的等值主析取范式为

$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$

四.

1. $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$

$\forall x_3 R_1^1(x_3) \to \forall x_2 R_1^1(x_1, x_2)$

$\exists x_3 (R_1^1(x_3) \to \forall x_2 R_1^1(x_1, x_2))$

$\forall x_2 \exists x_3 (R_1^1(x_3) \to R_1^1(x_1, x_2))$

2. $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3))$

对于 $\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3)$

$= \exists x_4 R_1^1(x_4) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3)$

$= \exists x_3 (\exists x_4 R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$

$= \forall x_4 \exists x_3 (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$

$\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 (x_2, x_3))$

$= \forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \forall x_4 \exists x_3 (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$

$= \forall x_4 \exists x_3 \exists x_1 ((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3)))$