离散数学第一次作业

吴欣怡 PB21051111

第一次作业

一. 1. 证明: $A\cap(\bar{A}\cup B)=A\cap B$

1° 若 $x\in A\cap(\bar{A}\cup B)$

$\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in(\bar{A}\cup B)$

$\Rightarrow x\in A$ 且($x\in\bar{A}$ 或 $x\in B$)

又∵ x 不能同时属于 A 和 $\bar{A}$.

∴ $\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B$

$x\in A\cap B$

2° 若 $x\in A\cap B$

$\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B$

$\Rightarrow$($x\in A$ 且 $x\in B$)或($x\in A$ 且 $x\in\bar{A}$)

又∵ ~~x∈A且~~ $\phi=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in\bar{A}\}$

∴ $x\in A$ 且($x\in\bar{A}$ 或 $x\in B$)

$\Rightarrow x\in A\cap(\bar{A}\cup B)$

综上, $A\cap(\bar{A}\cup B)=A\cap B$

2. $A\cup(A\cap B)=A$.

1° 若 $x\in A\cup(A\cap B)$

$\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in(A\cap B)$

$\Rightarrow x\in A$ 或 [$x\in A$ 且 $x\in B$]

$\Rightarrow$ 由 $A\cap B\subset A$

得到 $A\cup(A\cap B)\subset A$

2° 若 $x\in A$

则由 $A\subset A\cup(A\cap B)$

必然有 $x\in A\cup(A\cap B)$

综上, $A\cup(A\cap B)=A$.

3. ① $\overline{\bigcap_{i=1} A_i}=\bigcup_{i}\overline{A_i}$

假设 $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ 成立, 分析易知 $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\subset\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

若 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$，易知 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i}$

若 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i$，

假设 $B_{n+1} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i} - \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$

则 $B_{n+1} \notin \overline{A_{n+1}}$

$B_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

$B_{n+1} \in \overline{A_{n+1}}$

即有 $\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{A_i} = (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}) \cup \overline{A_{n+1}}$

$= \overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_n}$

又∵ $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{A_1 \cap A_2}$ 有成立

∴由数学归纳法得 对 $A_1 \sim A_n$

$\bigcup_{i=1} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1} A_n}$ 成立.

② $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$

$\bigcap_i^{n+1} \overline{A_i} \subset \bigcap_i^{n} \overline{A_i}$

若 $\overline{\bigcup_i A_i} = \overline{\bigcup_i^{n+1} A_i}$，易证 $\overline{\bigcup_i^{n+1} A_i} = \bigcap_i^{n+1} \overline{A_i}$

若 $\bigcap_i^{n+1} \overline{A_i} \neq \bigcap_i^{n} \overline{A_i}$，则假设

$C_{n+1} = \bigcap_i^{n} \overline{A_i} - \bigcap_i^{n+1} \overline{A_i}$

$C_{n+1} \notin \overline{A_{n+1}}$

$C_{n+1} \in A_{n+1}$

即有 $\overline{\bigcup_i A_i} = (\bigcap_i^{n} \overline{A_i}) \cap \overline{A_{n+1}}$

$= \bigcap_i^{n+1} \overline{A_i}.$

又∵ $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2}$ 成立

∴由数学归纳法得 对 $A_1 \sim A_n$

$\overline{\bigcup A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$ 成立

二. (1) $A_n = \{1, 2, \cdots n\}$ $(n \geq 3)$

(数学归纳法) 假设 A_n 的奇子集个数与偶子集个数相等

即 $|S_n| = |T_n|$

$A_{n+1} = \{1, 2, \cdots\ n+1\}$

① 若 $(n+1)$ 为奇数，则 S_{n+1} 由 S_n 中的所有元素及

T_n 中~~所有~~包含的所有集合都添加 $(n+1)$ 这个元素后的集合共同组成

$|S_{n+1}| = |S_n| + |T_n|$

T_{n+1} 由 T_n 中的所有元素及 S_n 中的所有集合都添加

$(n+1)$ 这个元素后得到的集合共同组成.

$|T_{n+1}| = |S_n| + |T_n|$

故有 $|S_{n+1}| = |S_n| + |T_n| = |T_{n+1}|$

同理可得 $(n+1)$为偶数时，也有$|S_{n+1}|=|T_{n+1}|$成立

又∵对于A_3

奇子集有$\{3\}$ $\{1\}$ $\{1,2\}$ $\{2,3\}$

偶子集有$\{2\}$ $\{1,3\}$ $\{1,2,3\}$ ϕ

即$|S_3|=|T_3|$成立

由数学归纳法得 对A_n，$|S|=|T|$成立

(2) 由对(1)的分析知，

对A_3 $|S_3|=|T_3|$

且1,2,3 这3个元素，在S_n、T_n的元素中均各出现2次，

设在A_n的奇子集的所有元素中 及在偶子集的所有元素中

1、2、3、…n出现的总次数相等，分别为W_{n1}、W_{n2}…W_{nn}

由(1)中推导，在A_{n+1}中

S中i($1\le i\le n$)出现的次数为$W_{ni}+W_{ni}$

T中i($1\le i\le n$)出现的次数为$W_{ni}+W_{ni}$

T、S中$(n+1)$出现的次数均为$\frac{1}{2}|S_{n+1}|$

又∵A_3满足"A_3中元素在T_3、S_3中出现的次数相同

∴由数学归纳法，A_n中 1,2,3,…,n

在S_n、T_n中出现的次数相同

综上，有$\sum\limits_{S_1\in S}\sum\limits_{x\in S_1}x=\sum\limits_{T_1\in T}\sum\limits_{y\in T_1}y$

三. 将 $2a$ 个座位顺时针编号：1，2，3，…，$2a$

~~$(0<k<2a)$~~

第 ~~$2a$ $(n\cdot 2a+k)$ 号可视为 k 号座 $(n\in N^{+})$ $1<k<a$~~

m $(m\in N^{+})$ 相当于 m 被 $2a$ 所除的余数号座

若能够使任一国的两位代表间恰好夹 $(b-1)$ 人.

不妨设 1号和 b号为同一国代表，~~$2b$号~~ $(2b-1)$ 与 $(3b-2)$ 为同一国代表.

[b 与 $(2b-1)$ 不为同一国代表]

因而有 ~~$(2bk+1)$ 与 $(3bk)$~~ ~~$(2bk+1)$ 与 $(2bk+b)$~~

$[2(b-1)k+1]$ 与 $[(2b-2)k+b]$

为同一国代表

$\because \frac{2a}{\gcd(2a,b)} \equiv 1 \pmod 2$

若a为奇数 $2a = [redacted]2q\gcd(2a,b)+1$

取 $k=\frac{a-1}{2}$ 则 $(ab-a-b)$ 与 $(ab-a-1)$ 为同一国家代表

$ab-a-b \equiv -b \pmod{2a}$ $ab-a-1 \equiv -1 \pmod{2a}$

即对应座位为 $(2a-b)$ 和 $(2a-1)$

$2a-b = 2(b-1)k+1$

$\cancel{2a = 2(b-1)(k}$

$2a = (2k+1)b - 2k+1$

$2a = ab-a.\ b=3$

$\cancel{\frac{2a}{\gcd(2a,b)} \equiv 1 \pmod{}}$

此时 $\frac{2a}{\gcd(2a,b)}$ 模 $2a$ 不余1.

与假设矛盾. (当 a为偶数时, 同理可证)

故在题设条件下, 不可能将 $2a$位代表安排在一张圆桌的周围就坐, 使得任国的两位代表之间都恰好夹有$(b-1)$人

四. (反证) 证明: 若形如 $(4n+3)$ 的素数只有有穷个,

为 $P(1)$、$P(2)$、…… $P(k)$

令 $Q = P(1)^2 P(2)^2 \cdots P(k)^2 + 2$

$\because P(n) \equiv 3 \pmod 4 \quad \therefore P(n)^2 \equiv 1 \pmod 4$

$\prod_{i=1}^{k} P(i)^2 \equiv 1 \pmod 4 \qquad Q \equiv 3 \pmod 4$

① 若 Q 为素数, 则与 $P(k)$ 为最大的 $(4n+3)$ 型素数矛盾.

② 若 Q 不为素数, 则 Q 必有至少一个 $(4n+3)$ 型素数.

(否则 $(4n+1)$ 型素数相乘模4仍余1)

而 $P(1)$、$P(2)$、… $P(k)$ 均不为 Q 的素因数.)

等 $(4n+3)$ 型素数.

与假设矛盾.

故 形如 $4n+3$ 的素数有无穷多个.

五. 1. $\begin{cases} 4x \equiv 2 \pmod{10} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$

分析知 ① $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{10} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{10} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$

① 设 $x = 10k+3$

$\because 7 \mid 10k \Rightarrow 7 \mid k \Rightarrow k = 7t$

即 $x = 70t+3$

② $x \equiv 8 \pmod{10}$

$x \equiv 3 \pmod{7}$

$\because$ 10与7互质

$\therefore$ 由中国剩余定理 $x = 70t+38$

综上 $x = 70t+3$ 或 $x = 70t+38$ $(t \in N^*)$

2. $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{30} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$

由 $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{30} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$ 可知 同余方程组可合并为

$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{15} \end{cases}$

$\gcd(12, 15) = 60$

由中国剩余定理知 $x = 60t+37$

六. 1. 证明：对$\forall$给定 $n\in N^+$，一定存在 连续 n个正整数，
它们中的每一个都不是素数.
令 $a=(n+1)!$
$\because 2|a, 3|a$
$\therefore 2|a+2, 3|a+3$
以此类推 $k|a+k$ $(2\le k\le n+1)$
故 $(a+2)\sim a+(n+1)$ 共n个数均不为素数.
$\therefore$ 对$\forall$给定 $n\in N^+$，一定存在 连续 n个正整数，
它们中的每一个都不是素数.

2. 证明：对$\forall$给定的 $n\in N^+$，一定存在连续 n个正整数
使得它们中的每一个都有平方因子.
取n个不相同的素数 $P_1, P_2, \cdots P_n$
考虑 同余组 $x\equiv -i \pmod{P_i^2}$ $i=1,2,\cdots,n$
$\because P_1^2, P_2^2, \cdots P_n^2$ 两两互素
由中国剩余定理，此同余组有正整数解.
故 $(x+1), (x+2), \cdots (x+n)$ 这连续 n个正整数
分别能~~被~~都有 $P_1^2, P_2^2, \cdots P_n^2$
故命题得证.