一. 1. $(G, \times_G)$ 构成一个群.

1° 封闭性

对于 $\forall (a,b)\in G$, $(c,d)\in G$

$(a,b)\times_G (c,d) = (ac, ad+b)$

$\because a,b,c,d\in R$

$\therefore ac\in R$, $ad+b\in R$.

即有 $(ac, ad+b)\in R$

$\because a\neq 0$, $c\neq 0$

$\therefore ac\neq 0$

即有 $(ac, ad+b)\in G$.

2° 结合律

$[(a,b)\times_G (c,d)]\times_G (e,f) = (ac, ad+b)\times_G (e,f)$

$= (ace, acf+ad+b)$

$(a,b)\times_G [(c,d)\times_G (e,f)] = (a,b)\times_G (ce, cf+d)$

$= (ace, acf+ad+b)$

故有 $[(a,b)\times_G (c,d)]\times_G (e,f) = (a,b)\times_G [(c,d)\times_G (e,f)]$

3° 单位元.

若 $(a,b) * (c,d) = (a,b)$

$$\begin{cases} ac=a \\ ad+b=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=0 \end{cases}$$

而 $(1,0) * (a,b) = (a,b)$, $1\neq 0$

故 $(1,0)$ 为 G 的单位元.

4° 逆元 $\forall (a,b)\in G$

$(a,b) * (c,d) = (1,0)$

$$\begin{cases} ac=1 \\ ad+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{a} \\ d=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

$(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) * (a,b) = (1,0)$，$a\neq 0$ $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})\in G$

故对 $\forall (a,b)\in G$，它的逆元为 ~~$(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ 且~~

~~且 $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$~~ G 中的 $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

综上，~~$(G, \times G)$~~ $(G, \times_G)$ 构成一个群.

(2) $K=\{(1,b) \mid b\in R\}$

易知 K 中元素都属于 G，K 是 G 的一个子群

对 $\forall (a,c)\in G$，$(a,c)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{c}{a})$

$$(\frac{1}{a}, -\frac{c}{a}) \times_G (1,b) \times_G (a,c) = (\frac{1}{a}, \frac{b}{a}-\frac{c}{a}) \times_G (a,c)$$

$$= (1, \frac{b}{a})$$

$\because$ $b\in R$, $a\in R$, $a\neq 0$

$\therefore$ $\frac{b}{a}\in R$

~~即~~ 即对 $\forall g\in G$，$h\in K$

都有 $g^{-1}*h*g\in K$.

~~由~~ K 为 G 的正规子群

二. 证明:

1. 有理数加法与非零有理数乘法群不同构.

$G_1=\langle Q,+\rangle$ ~~⇐R~~ 设 Q^* 为所有非零有理数的集合

$G_2=\langle Q^*,\times\rangle$ 不妨假设 G_1 与 G_2 同构.

设 φ 为 G_2 到 G_1 上的双射(一一映射),

对 $\forall a\in G_2$, 由 $a\neq 0$, 可知 $a\neq -a$

$\because \varphi$ 为双射 $\therefore \varphi(a)\neq\varphi(-a)$

$\varphi(a^2)=\varphi(a\times a) = \varphi(a)+\varphi(a) = 2\varphi(a)$

$\varphi(a^2)=\varphi((-a)\times(-a)) = \varphi(-a)+\varphi(-a)=2\varphi(-a)$

$\because \varphi(a^2)=\varphi(a^2)$

$\therefore 2\varphi(a)=2\varphi(-a)$

$\varphi(a)=\varphi(-a)$

与 $\varphi(a)\neq\varphi(-a)$ 矛盾.

则有: 有理数加法与非零有理数乘法群不同构.

2. 实数加法群与正实数乘法群同构.

$G_1=\langle R,+\rangle$ $G_2=\langle R^+,\times\rangle$

设 $\varphi: R\to R^+$ $\varphi(x)=e^x$

当 $x\in R$ 时, $e^x\in R^+$

又 $\because y=e^x$ 在 R 上单调递增

$\therefore$ 易知 φ 是双射

对 $\forall x,y\in R$. $\varphi(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

故 φ 为同构映射 $\langle R,+\rangle\cong\langle R^+,\times\rangle$

三. 证明：G是6阶群, G有且仅有一个3阶子群.

~~|G|=6~~

首先证明 G存在3阶子群

(1) 若G中 $\exists\, a\in G$, $|a|=6$, 即 $a^6=e$

则 $(a^2)^3=e$

a^2 为G中的3阶元

$H=\{a^2$ 就是G的一个3阶子群

故 G存在3阶子群.

(2) G中不存在6阶元或3阶元

则G中所有元素的阶均为1或2.

即 $\forall x, y\in G$

$x^2=e$, $y^2=e$

$x=x^{-1}$, $y=y^{-1}$

$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}\cdot x^{-1}=yx$.

故G为阿贝尔群.

取G中非单位元 a, b, $(a\neq b)$

$H=\{a, b, ab, e\}$ $\langle H, \times\rangle$ 可构成一个群

[证明: $a\times b=ab$ $ab\times b=a$, $ab\times a=b$, $e\times a=a$, $e\times b=b$,

$a\times a=e$, $b\times b=e$, $ab\times ab=e$, $e\times e=e$, $ab\times e=ab$

满足封闭性, 结合律.

单位元为e, 逆元为其本身].

H为G的一个子群, 但为4阶群, 而4不为6的因子.

此时与 Lagrange 定理矛盾.

综上，G 中必含 3 阶元，G 必有 3 阶子群.

下面证明 G 有且仅有一个 3 阶子群

若: G 有两个及以上不相同的 3 阶子群，则 G 至少有 2 个不同的 3 阶元

$a, b \quad (a \neq b)$

$a^3 = e, \ b^3 = e$

又 $\because (a^2)^3 = e, \quad (b^2)^3 = e$

$\therefore \quad a^2, b^2$ 也为 G 的 3 阶元

又 $\because \quad a \neq b,$

$\therefore \ ab \neq a^2, \ ab \neq b^2$

[证：若 $ab = a^2$，由群的结合律 $a \cdot ab = a^2 b = a^3 = e$ 即有 $a = b$ (矛盾)
同理可得 $ab \neq a$，$ab \neq b$，$ab \neq b^2$]

$\because \ ab \cdot b = ab^2$ 与 a, a^2, ab, b, b^2, e 各不相同.

$\therefore$ 此时 G 中元素个数多于 6 个，与题意矛盾.

四. 证明：在偶数阶群中，阶数为 2 的元素有奇数个.

首先证明 任意偶数阶群都存在阶数为 2 的元素

不妨设 G 为一偶数阶群，其阶数为 $2n$. $\quad n \in \mathbb{Z}$

则 $\exists a \in G, \ a^{2n} = e.$

$a, a^2, \cdots a^{2n}$ 必定都在群 G 中

a^n 即为阶为 2 的元素

取 G 中一元素 b，设 b 的阶大于 2，为 k.

∵ $b^k=e$.

$(b\cdot b')^k=e^k=e$.

∴ b' 的阶也为k.

亦即 G 的 m阶元 ($2<m\le 2n$) 都是成对出现的, 共有 $2p$个 ($p\in Z^+$)

又∵ G的1阶元有且仅有1个, 为单位元e

且G中元素总个数为偶数.

∴ G中阶数为2的元素有奇数个.

五. 设 $G=\langle a\rangle$ 为一无限循环群.

$p=m$是使 a^p包含于非平凡子群H的最小正整数

若H中包含a^n, 且 n不是 m的整数.

则 $a^{(m,n)}$ 也包含于H中, 且 $(m,n)<m$

~~与m是使~~ 与"$p=m$是使 a^p包含于H的最小正整数的假设矛盾"

故 H由 a^m 生成.

同时 H一定为一无限循环群, 否则则存在 $a^{km}=e$

与G为无限群的假设矛盾.

若H为G的一个子群, 易知H至少有2个生成元 a^m 及 $(a^m)'$, 下面证明仅有2个生成元

证明: 假设H存在多于2个生成元, 不妨设 a, b为其中两个生成元 ($a\neq b$)

则 a, b可以互相表示 $a^s=e$, $b^t=e$

即有 $a^{st}=a$

故 $st=1$ 或 $st=\infty$

当 $st=\infty$ 时， s、t 无解，故舍去.

当 $st=1$ 时， $\begin{cases} s=1 \\ t=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} s=-1 \\ t=-1 \end{cases}$

故 $a=b$ 或 $a=b^{-1}$

故 H 仅有2个生成元，且 两生成元互为彼此的逆元]

设 G_1、G_2 为 G 的任意子群 $G_1=\langle a^{g_1}\rangle$ $G_2=\langle a^{g_2}\rangle$

. 由以上证明可知.

要使 $G_2>G_1$ 且 $G_2\neq G$ 对任意 G_1 都成立

需有 $(g_1,g_2)\geq m$ 或 $(g_1,g_2)=1$ 成立

即 g_2 不存在非平凡因子，$g_2\neq\pm1$ （若 $G_2=\pm1$，则 $G_2=G$）

即 g_2 为素数.

因此，G 的全部极大子群为 $\langle a^{p}\rangle$，p 为任意素数.

六.

1. $Z(G)=\{g\in G;\ \forall x\in G,\ xg=gx\}$

证：首先证明 $Z(G)$ 为群.

∵ 对 $\forall x\in G$ $1\cdot x=x\cdot 1$

∴ $1\in Z(G)$ 且易知1为 $Z(G)$ 的单位元.

对于 $\forall x\in G$. $xg=gx$ (1) ~~证毕~~

对 $\forall g\in G,\forall x,y\in Z(G)$. 由 G 满足结合律知 $Z(G)$ 满足结合律.

在方程(1)两边左乘 x^{-1}，右乘 x^{-1} 可得 $gx^{-1}=x^{-1}g$

所以 x^{-1} 与群 G 中任何元素可交换.

$x^{-1}\in Z(G)$，即 x 在 $Z(G)$ 中存在逆元.

2.

对于 $x\in Z(G)$，$y\in Z(G)$

根据结合律和 x, y 与 G 中任何元素可交换的性质，

$$(xy)g = x(yg) = (yg)x = y(gx) = (gx)y = g(xy)$$

~~故 (xy) 与 g 可交换~~

即有 $xy\in Z(G)$，满足封闭性。

故 $Z(G)$ 为一个群。

又∵ $Z(G) = \{g\in G : \forall x\in G,\ gx = xg\}$

$g\in G$，$Z(G)$ 的单位元为 G 的单位元。

若 $gx = xg$ 易知 $g x\in G$.

∵ $(gx)g^{-1} = (xg)g^{-1} = x = ex = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx)$ ∴ $g^{-1}\in Z(G)$

∴ $Z(G)$ 为 G 的一个子群。

对 $\forall g\in Z(G)$ $\forall x\in G$.

$xg = gx$

$\cancel{gxg^{-1} = g(xg^{-1}) = g(g^{-1}x) = (gg^{-1})x = ex = x}$

~~对于~~ $xgx^{-1} = x(gx^{-1}) = x(x^{-1}g) = (xx^{-1})g = eg = g$ $\in Z(G)$

因此 $xZ(G)x^{-1} = Z(G)$

由正规子群定义得，$Z(G)$ 为 G 的正规子群。

2. $G/Z(G)$是循环群.

且 $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$

令 $xZ(G), yZ(G) \in \langle aZ(G) \rangle$

~~且 $xZ(G) = (aH)^s$, y~~

且 $xZ(G) = (aZ(G))^s$, $yZ(G) = (aZ(G))^t$

则 $xZ(G) = a^s Z(G)$

$yZ(G) = a^t Z(G)$

于是有 $h_1, h_2 \in Z(G)$ 使得.

$x = a^s h_1$, $y = a^t h_2$

$\because$ $Z(G)$中元素同G中任何元素可交换.

故 $xy = (a^s h_1)(a^t h_2) = (a^t h_2)(a^s h_1) = yx$.

即 G是交换群.