10.26

T5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx \quad (a>0)$

$P(x) = x^2 dx$ (2次) $Q(x) = (x^2+a^2)$ (4次) 都是多项式.

$Q(x)$ 比 $P(x)$ 次数高2次

$\because a>0 \quad \forall x \in R, \ Q(x) \neq 0.$

记 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ 由 $z^2+a^2=0$ 解得奇点为

$z_1 = ai, \quad z_2 = -ai$ 均为2级极点

$\because a>0$

$\therefore f(z)$ 在上半平面只有奇点 ai

$I = 2\pi i Re[f(z), ai] = 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \lim_{z\to ai} \frac{d}{dz}[(z-ai)^2 f(z)]$

$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to ai} \frac{2z^2 ai - 2z^2 a^2}{(z+ai)^4}$

$= \frac{\pi}{2a}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0, b>0)$

$P(x)=1$ (0次) $Q(x) = (x^2+a^2)(x^2+b^2)$ (4次)都是多项式.

$Q(x)$ 比 $P(x)$ 高2次以上.

$\because a>0, b>0 \quad \therefore$ 对 $\forall x \in R, \ Q(x) \neq 0.$

2022.11.04 16:01

记 $f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$

由 $(z^2+a^2)(z^2+b^2)=0$ 解得奇点为 $z_1=ai$, $z_2=-ai$, $z_3=bi$, $z_4=-bi$

z_1, z_2, z_3, z_4 均为1级极点.

$\because a>0, b>0$

$\therefore f(z)$ 在上半平面只有奇点 $z_1=ai$, $z_3=bi$

$I=2\pi i\,\mathrm{Re}[f(z), ai]+2\pi i\,\mathrm{Re}[f(z), bi]$

$=\{\lim\limits_{z\to ai}[(z-ai)f(z)]+\lim\limits_{z\to bi}[(z-bi)f(z)]\}\cdot 2\pi i$

$=\frac{\pi}{ab(b+a)}$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$\because g(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 为偶函数.

$\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$

$P(x)=1+x^2$ (2次) $Q(x)=1+x^4$ (4次) 都是多项式.

$Q(x)$ 比 $P(x)$ 高2次

$\because$ 对 $\forall x\in R$, $Q(x)\neq 0.$

记 $f(z)=\frac{1+z^2}{1+z^4}$

由 $1+z^4=0$ 解得奇点为 $z_1=e^{\frac{1}{4}\pi i}$ $z_2=e^{\frac{3}{4}\pi i}$ $z_3=e^{\frac{5}{4}\pi i}$ $z_4=e^{\frac{7}{4}\pi i}$

$f(z)$在上半平面仅有 奇点 $z_1=e^{\frac{1}{4}\pi i}$ $z_2=e^{\frac{3}{4}\pi i}$ 为1级极点

$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+z^2}{1+z^4}dz}$

$I=\frac{1}{2}\{2\pi i Res[f(z),e^{\frac{1}{4}\pi i}]+2\pi i Res[f(z),e^{\frac{3}{4}\pi i}]\}$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\{\lim_{z\to(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}(z-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)f(z)+\lim_{z\to(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}(z+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)f(z)\}$

$=\cancel{\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\pi}{4}}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

P133

T6. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$ $(a>0,b>0)$

设 $\cancel{f(z)=\frac{z\sin az}{z^2+b^2}}$ $g(x)=\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}$为偶函数. $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$

设 $f(z)=\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}$ 故 $I=\frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}dz$

由 $z^2+b^2=0$ 解得 奇点 $z_1=bi$, $z_2=-bi$ 为1级极点
$(b>0)$

$I=\frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}dz=\pi i\{Res[f(z),bi]+\ldots\}$

$=\pi i[\frac{1}{2}e^{-ab}\ldots]$

$$= \cancel{\mathrm{Im}[\pi i(e^{-ab}+e^{ab})]}$$

$$= \mathrm{Im}[\tfrac{1}{2}\pi i \cdot e^{-ab}] = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ab}$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx \quad (a>0, b>0)$

$\because \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}$ 为偶函数

$\therefore I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$

令 $f(z) = \frac{\sin az}{z(z^2+b^2)}$ 　由 $z(z^2+b^2)=0$ 解得奇点为 $z_1=bi, z_2=-bi, z_3=0$ 为1级极点 $(b>0)$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\pi i \cdot \mathrm{Res}[f(z),0] + 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z), bi]\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}[\frac{\pi i}{b^2} + (-\frac{e^{-ab}}{b^2})i]$$

$$= \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}).$$

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (a>0)$

$\because \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \cdot \frac{\sin x}{x}$ 为偶函数

$\therefore I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \cdot \frac{\sin x}{x} dx.$

$f(z) = \frac{z^2-a^2}{z^2+a^2} \cdot \frac{e^{iz}}{z}$ 由 $(z^2+a^2)z=0$

解得奇点 $z_1=0$, $z_2=ai$, $z_3=-ai$ 均为1级极点

$I = \frac{1}{2} Im \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(z^2-a^2)e^{iz}}{(z^2+a^2)z} dz$

$= \frac{1}{2} Im \{\pi i Res[f(z), 0] + 2\pi i Res[f(z), ai]\}$

$= \frac{1}{2} Im [-\pi i + e^{-a} \cdot 2\pi i]$

$= \pi e^{-a} - \frac{1}{2}\pi$

2022.11.04 16:02

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx \quad (a>0, b>0)$

$\because \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}$ 为偶函数.

$\therefore I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx.$

$f(z) = \frac{e^{i\cdot 2az} - e^{i\cdot 2bz}}{z^2}$ $z=0$ 为奇点. 2级极点.

$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}$

$= \frac{1}{2}\mathrm{Re} \cdot \pi i \, \mathrm{Res}[f(z), 0]$

$= \pi(b-a)$

(5) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$ T7.

$\because$ 被积函数是偶函数

$\therefore I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx.$

令 $f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$

$= \frac{1 + 3iz + \frac{1}{2}(3iz)^2 + \frac{1}{3!}(3iz)^3 - 3 - 3iz - \frac{3}{2}(iz)^2 - \frac{3}{3!}(iz)^3 + 2}{z^3}$

$= \frac{3(iz)^2 + \cdots}{z^3} = \frac{-3 + \cdots}{z}$

故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的 1级极点.

又 $\because \cancel{\frac{\sin^3 z}{z^3}} \mathrm{Re}\frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = \frac{\sin 3z - 3\sin z + 2}{z^3}$

$= \frac{-4\sin^3 z + 2}{z^3}$

$\cancel{I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(z) - \frac{2}{z^3}\right] dz.}$

$\cancel{= -\pi i \, \mathrm{Res}[f(z), 0]} \to 0$

$\cancel{\lim_{r\to 0^+} \int_{C_r^-} f(z)\, dz = -\pi i \, \mathrm{Res}[f(z), 0]}$

$I = -\pi i \, \mathrm{Res}[f(z), 0] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z^3} dz.$

$= \frac{3}{8}\pi.$

2022.11.04 16:02

T7. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$

$F(z) = \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z}$ $Re F(z) = \frac{\cos z - e^{-z}}{z}$

取闭路 C 为四分之一圆: $|z|<R$, $Re z>0$, $Im z>0$ 的边界

∵ $F(z)$ 在全平面内解析

∴ $\int_C Re F(z) = 0.$

~~0为 F(z)的1级极点. Res [F(z),0] = a_{-1}~~

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx$

$f(z) = \frac{z}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}$ $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点. 不妨令 $f(0)=0$

在 $-R<Re z<R$, $0<Im z<\frac{1}{2}$ 围成的闭矩形上.

$\int_{-R}^{R} f(x)dx + i\int_0^{\frac{1}{2}} f(r+iy)dy + \int_R^{-R} f(x+\frac{1}{2}i)dx + i\int_{\frac{1}{2}}^{0} f(-r+iy)dy = 0$

$\lim_{R\to+\infty} [i\int_0^{\frac{1}{2}} f(r+iy)dy] = 0$

$\lim_{R\to+\infty} [i\int_{\frac{1}{2}}^{0} f(r+iy)dy] = 0$

又∵ $\int_{-R}^{R} f(x+\frac{i}{2})dx = \int_{-R}^{R} \frac{x+\frac{i}{2}}{e^{\pi(x+\frac{i}{2})} - e^{-\pi(x+\frac{i}{2})}} dx$

$= \frac{1}{i}\int_{-R}^{R} \frac{x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} dx$

$+\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$

$= 0 + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{e^{\pi x}}{1+e^{2\pi x}} dx$

$\xlongequal{t=\pi x} \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi i}^{2\pi i} \frac{e^{\frac{t}{2}}}{1+e^{t}} dt$

又∵ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bu}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin \pi b}$

$\lim_{x\to+\infty} \int_{-2\pi x}^{2\pi x} \frac{e^{t}}{1+e^{t}} dt = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{4}$

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{1}{8}.$

T9. (1)

ma

故在

(2)

2022.11.04 16:02

T9. (1) $2z^5-z^3+z^2-2z+8=0$

$\max\{2,|-1|,1,|-2|,8\}=8.$

取 $f(z)=8$

$\varphi(z)=P(z)-f(z)=2z^5-z^3+z^2-2z$

则 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在 $|z|=1$ 及其内部解析.

在边界 $|z|=1$ 上.

$|f(z)|=8 \quad |\varphi(z)|\le|2z^5|+|z^3|+|z^2|+|2z|=6$

故在 $|z|=1$ 上, $|\varphi(z)|<|f(z)|$

因此由儒歇定理.

在 $|z|<1$ 内, $P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点.

$\because$ 在 $|z|<1$ 内, $f(z)=8$ 没有零点

$\therefore$ 在 $|z|<1$ 内, $P(z)=0$ 没有根. 根的个数为0

(2) $z^7-6z^5+z^2-3=0$

$\max\{z^7,|-6|,1,|-3|\}=6$

取 $f(z)=-6z^5$

$\varphi(z)=P(z)-f(z)=z^7+z^2-3.$

则 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在 $|z|=1$ 及其内部解析.

在边界 $|z|=1$ 上 $|f(z)|=6 \quad |\varphi(z)|=1$

故在 $|z|=1$ 上, $|f(z)|>|\varphi(z)|$

因此由儒歇定理. 在 $|z|<1$ 内, $P(z)=f(z)+\varphi(z)$ 和 $f(z)$ 有相同个数的零点

$\because$ 在 $|z|<1$ 内, $f(z)=-6z^5$ 只有一个零点 0(五级)

$\therefore$ 在 $|z|<1$ 内, $P(z)=0$ 有五个根.

T10. (1) 证明：$z^4+6z+1=0$ 有3个根落在圆环 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 内.

~~$\max\{1, 6, 1\}=6$~~

~~令 $f(z)=6z$.~~

~~$\varphi(z)=p(z)-f(z)=z^4+1$.~~

~~$|z|=1$ 时 $|f(z)|=6$, $|\varphi(z)|=2$~~

~~$z=1$ 上, $|f(z)|>|\varphi(z)|$~~

令 $f(z)=z^4$ $g(z)=6z+1$

∵ 在 $|z|=\frac{1}{2}$ 上, $|f(z)|=\frac{1}{16}<4=|g(z)|$

在 $|z|=2$ 上, $|f(z)|=16>13=|g(z)|$

∴ 在 $|z|<\frac{1}{2}$ 内, $z^4+6z+1=0$ 与 ~~$f(z)=0$~~ $g(z)=0$ 有相同个数的根

在 $|z|<2$ 内, $z^4+6z+1=0$ 与 $f(z)=0$ 根的个数相同.

∵ $|z|<\frac{1}{2}$ 内, $g(z)=0$ 有一个根 $z=-\frac{1}{6}$

$|z|<2$ 内, $f(z)=0$ 有四个根

∴ 在 $\frac{1}{2}<|z|<2$ 内, $z^4+6z+1=0$ 有3个根.

(2) $\lambda-z-e^{-z}=0.\quad(\lambda>1)$

~~对充分大的R，取C为右半~~

令 $f(z)=\lambda-z$

$g(z)=-e^{-z}$

$\lambda-z-e^{-z}=f(z)+g(z)$

取充分大的R $(R>2)$

$\because$ 在 $|z|=R$ 上 $|f(z)|=|\lambda-R|>|-e^{-R}|=|g(z)|$

$\therefore$ 根据儒歇定理

在 $|z|<R$ 时 $f(z)+g(z)$ 与 $f(z)$ 的根的个数相同.

又 $\because f(z)$ 在 $|z|<R$ 内仅有一根 $z=\lambda\ (\lambda>1)$

故证得 $\lambda-z-e^{-z}=0\ (\lambda>1)$ 在右半平面内有唯一的一个根 $z=\lambda$，且是实的.

(3) $e^{z}=3z^{n}.\qquad e^{z}-3z^{n}=0$

$f(z)=-3z^{n}$

$g(z)=e^{z}$

$f(z)$、$g(z)$ 在 $|z|<1$ 上解析.

在边界曲线单位圆 $|z|=1$ 上，

$|f(z)|=3\quad |g(z)|=e$

$\because |f(z)|>|g(z)|$

$\therefore$ 由儒歇定理有

$f(z)+g(z)$ 与 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 的内部有相同零点数

又 $\because f(z)$ 在 $|z|<1$ 内部有 n 个零点

$\therefore e^{z}=3z^{n}$ 有在 $|z|<1$ 内有 n 个根.