离散数学第五次作业

作业提交方式：2023 年 1 月 6 前将电子版作业上传到 bb 系统

我们由命题变元集 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ 出发可以得到公式集 $L(X)$，首先我们回顾一下命题逻辑中的公理和证明：

定义 1 (公理). *取 $L(X)$ 中具有以下形状的公式作为"公理"：*

(L1) $p\to(q\to p)$, *(肯定后件律)*

(L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$, *(蕴涵词分配律)*

(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$, *(换位律)*

其中 $p,q,r\in L(X)$.

定义 2 (证明). *设 $\Gamma\subseteq L(X),p\in L(X)$. 当我们说"公式 p 是从公式集 Γ 可证的", 是指存在着 $L(X)$ 的公式的有限序列 $p_1,\cdots,p_n$, 其中尾项 $p_n=p$, 且每个 $p_k(k=1,\cdots,n)$ 满足:*

(i) $p_k\in\Gamma$, *或*

(ii) p_k *是"公理", 或*

(iii) 存在 $i,j<k$ 使 $p_j=p_i\to p_k$.(MP 规则)

具有上述性质的有限序列 $p_1,\cdots,p_n$ 叫做 p 从 Γ 的"证明"。

这里给出一个证明的例子：

例 3 证明 $\{x_1,x_2\to(x_1\to x_3)\}\vdash x_2\to x_3$.

下面是所要的一个证明:

(1) $x_2\to(x_1\to x_3)$	假定
(2) $(x_2\to(x_1\to x_3))\to((x_2\to x_1)\to(x_2\to x_3))$	(L2)
(3) $(x_2\to x_1)\to(x_2\to x_3)$	(1)，(2)，MP
(4) x_1	假定
(5) $x_1\to(x_2\to x_1)$	(L1)
(6) $x_2\to x_1$	(4)，(5)，MP
(7) $x_2\to x_3$	(3)，(6)，MP

一. （3 分） 只使用三条公理以及 MP 规则证明以下结论：

1. $\vdash x_1\to(x_2\to(x_1\to x_2))$.
2. $\{p\to q,\neg(q\to r)\to\neg p\}\vdash p\to r$.
3. $\{p\to q,q\to r\}\vdash p\to r$

二. （3 分） 使用演绎定理、假设三段论、反证律、归谬律等定理证明：

1. $\vdash(p\to\neg q)\to(q\to\neg p)$
2. $\vdash\neg(p\to q)\to\neg q$
3. $\vdash\neg(p\to q)\to p$

定义 3 (析取范式与合取范式). 形为 $\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)$ 的公式叫做析取范式, 形为 $\wedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right)$ 的公式叫做合取范式, 其中每个 y_{ij} 是某个命题变元 x_k 或它的否定 $\neg x_k$.

定义 4 (主析取范式与主合取范式). $L(X)$ 中的主析取范式是这样的析取范式, 在它的每个析取支中, 每个命题变元 $x_1, \cdots, x_n$ *(带否定号或不带否定号)* 按下标由小到大的次序都出现且都只出现一次. 主合取范式同样定义, 只用把"每个析取支"改为"每个合取支".

例 1. 求 $p = (x_1 \to x_2) \to x_3$ 的等值主析取范式和等值主合取范式. 解 p 的成真指派是

$$(1,1,1),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)$$

$\neg p$ 的成真指派是

$$(1,1,0),(0,1,0),(0,0,0).$$

p 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3).$$

$\neg p$ 的等值主析取范式是

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3),$$

由此得 p 的等值主合取范式是

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

三. （2 分） 显然我们可以通过求出一个公式的成真指派得到他的等值主析取范式，以及通过他的成假指派求出他的等值主合取范式，求出以下公式的成真指派并写出他们的等值主析取范式：

1. $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \leftrightarrow x_3)$
2. $\neg((x_1 \to \neg x_2) \to x_3)$

定义 5 (前束范式). 前束范式, 指形如

$$Q_1 x \cdots Q_n y p$$

的公式, 其中 $Q_1, \cdots, Q_n$ 表示量词符号 $\forall$ 或 $\exists$, 尾部 p 是不含有量词的公式.

例 2. 找出与公式

$$p = \neg\left(\forall x_1 \exists x_2 R_1^3(c_1, x_1, x_2) \to \exists x_1\left(\neg \forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right)$$

等价的前束范式.

解:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \neg\left(\forall x_3 \exists x_4 R_1^3(c_1, x_3, x_4) \to \exists x_1\left(\neg \forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right),\\
q_2 &= \neg \exists x_3 \forall x_4\left(R_1^3(c_1, x_3, x_4) \to \exists x_1\left(\neg \forall x_2 R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right),\\
q_3 &= \neg \exists x_3 \forall x_4\left(R_1^3(c_1, x_3, x_4) \to \exists x_1\left(\exists x_2 \neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right),\\
q_4 &= \neg \exists x_3 \forall x_4\left(R_1^3(c_1, x_3, x_4) \to \exists x_1 \forall x_2\left(\neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right),\\
q_5 &= \neg \exists x_3 \forall x_4 \exists x_1 \forall x_2\left(R_1^3(c_1, x_3, x_4) \to\left(\neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right),\\
q_6 &= \forall x_3 \exists x_4 \forall x_1 \exists x_2 \neg\left(R_1^3(c_1, x_3, x_4) \to\left(\neg R_1^2(x_2, c_2) \to R_1^1(x_1)\right)\right).
\end{aligned}$$

q_6 即为所求.

四.（2 分） 找出与所给公式等价的前束范式.

1. $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$
2. $\forall x_1 \left(R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)\right) \to \left(\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3)\right)$