极点的最优

定理

考虑线性规划问题，在多面集 $P=\{x \mid Ax \geq b\}$上，最小化$c^\top x$。假设P中存在至少一个极点。那么，要么最优值是$-\infty$，要么必定有某个极点是最优解。

定理

考虑线性规划问题，在标准形式的多面集 $P=\{x \mid Ax=b, x\geq 0\}$上，最小化$c^\top x$。那么，要么最优值是$-\infty$，要么必定有某个极点是最优解。

最优解的约定

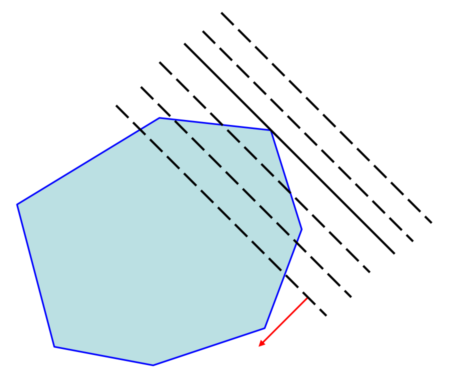
可行域为空 $\Longrightarrow$ 无解

可行域有界 $\Longrightarrow$ 唯一解 或者 不唯一解

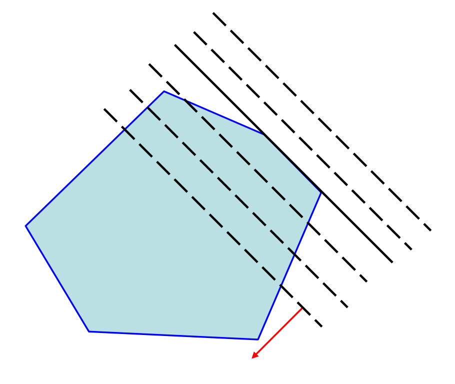
可行域无界 $\Longrightarrow$ (1)唯一解 或者 (2)无穷多解,P中可能不存在极点 或者 (3)最优值为$-\infty$

我们把“唯一解”和“无穷多解”称为模型存在最优解，而把“无界解 $-\infty$”归入不存在最优解的情形。

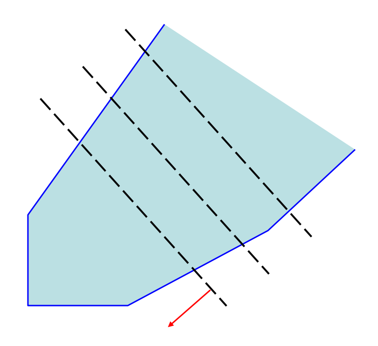
线性规划的直观图解–有界解唯一



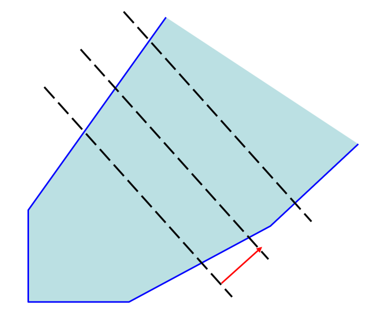
线性规划的直观图解–有界解不唯一



线性规划的直观图解-无界



(a) 最优值$-\infty$



(b) 最优解唯一

总结： 当线性规划标准形式存在最优解时，目标函数的最优值一定能在可行域的某个极点处达到，即(LP)存在最优解时，则一定存在一个可行基解是最优解。

这样，线性规划模型的求解（最优解）归结为求最优可行基解。这一思想正是单纯形方法的基本出发点。但可行基解的个数往往很多（上界为$\frac{n!}{m!(n-m)!}$），不宜一一枚举。该采取何种策略？而这正是单纯形算法的实质...

单纯形法

基本思想： 从一个可行基解出发，求下一个使目标函数值有所改善的可行基解；通过不断迭代改进可行基解力图达到最优可行基解。

主要步骤：

- 最优判定 (optimality)
- 转轴运算 (pivoting)

单纯形法

首先假定对线性规划标准形问题

$$\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

已得到一个可行基的划分 $A = (B, N)$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{pmatrix}$.

从可行基解 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ 0 \end{pmatrix}$开始，考虑沿着方向$d = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_B \\ d_N \end{pmatrix}$移动到 $x + \theta d, \theta > 0$. 其中，选择$j \in N$, $d_j = 1, d_i = 0, i \in N, i \neq j$, d_B待确定. 即做如下移动：对于非基变量，

$$\tilde{x}_j = x_j + \theta, \theta > 0.$$

$$\tilde{x}_i = 0, i \neq j, i \in N.$$

移动后的点，首先需要保证$A(x + \theta d) = b$。

那么由$A(x+\theta d)=b$，$Ax=b$，我们有

$$0=Ad=Bd_B+A_j,$$

所以

$$d_B=-B^{-1}A_j.$$

A_j表示矩阵A的第j列向量。在点$x+\theta d$的目标函数值可表示为

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{x}_B+\theta d_B)+\theta \mathbf{c}_N^T d_N \\ &= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{x}_B-\theta B^{-1}A_j)+\theta \mathbf{c}_j \end{aligned} \tag{18}$$

所以，目标值相对于原来$c^\top x$变化量为

$$z-c^\top x=\theta(\mathbf{c}_j-c_B^\top B^{-1}A_j).$$

我们将

$$\bar{c}_j=\mathbf{c}_j-c_B^\top B^{-1}A_j \tag{19}$$

称为非基方向x_j的减少量。

定理

标准形式线性规划问题中，某个可行基解为 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$, 若由式(19)所决定的$\bar{c}$满足（**最优判定条件**）

$$\bar{c}_j \geq 0, \forall j \in N, \tag{20}$$

那么x是一个最优解.

证明： 记任意可行解y（满足$y_j \geq 0, j \in N$），令$d = y - x$. 那么$Ad = 0$, 得到

$$d_B = -B^{-1}Nd_N$$

进一步，计算

$$c^\top y - c^\top x = c^\top d = \sum_{j\in N}(c_j - c_B^\top B^{-1}A_j)d_j = \sum_{j\in N}\bar{c}_j d_j.$$

由于y可行， $d_j \geq 0, j \in N$. 因此， $c^\top x$为最小值。

单纯形法

上述变换过程$x+\theta d$，并未考虑 $x+\theta d$的关于约束$x\geq 0$的可行性。

定义 (退化基解)

基解x称为退化基解，如果x有大于n个主动约束。

对于标准形式的多面集，基解x总有$n-m$个坐标为0。如果x有大于n个主动约束，那么有大于$n-m$ 个主动约束是$x_i=0$,也就是有大于$n-m$个分量是0。反之，如果x是一个基解，并且x有大于 $n-m$个分量是0，那么x处有大于n个主动约束（因为等式约束有m个）。所以，对于标准形式，我们有如下定义：

定义 (退化基解)

标准形式的多面集，基解x称为退化基解，如果x有大于 $n-m$个分量是0。

定义 (可行方向)

令$x \in P$是一个可行点，我们称d是x的可行方向，如果存在正数$\theta > 0$，使得$x + \theta d \in P$.

假设x是一个可行基解，对x做上述移动： $x + \theta d$:

1. 如果x非退化，那么$x_B > 0$, 存在充分小$\theta > 0$，使得$x_B + \theta d_B \geq 0$成立；
2. 如果x退化，方向d 可能非可行方向。

单纯形法

例

考虑 $P=\{x=(x_1,...,x_7)|Ax=b,x\geq 0\}$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

考虑由线性独立列 A_1，A_2，A_3，A_7 组成的基。为了计算相应的基解，我们首先将非基变量 x_4，x_5，和 x_6 设为零，然后解系统 $Ax=b$ 以获得其余变量，得到 $x=(4,0,2,0,0,0,6)$。这是一个退化的基可行解，因为我们有四个变量为零，而$n-m=3$. 我们也可以选线性独立列 A_1，A_3，A_4，A_7 组成基，同样得到$x=(4,0,2,0,0,0,6)$.
我们令$B=(A_1,A_2,A_3,A_7)$. 对于非基变量x_4，$d_B=-B^{-1}A_4=(0,-1.5,0.25,1.5)$, 所以$d=(0,-1.5,0.25,1,0,0,1.5)$,不是可行方向。

对于非基变量x_5，我们有$d_B=-B^{-1}A_5=(0,0.5,-0.25,-0.5)$，$d=(0,0.5,-0.25,0,1,0,-0.5)$。只要 $\theta\leq 8$，$x+\theta d$可行。目标值的减少量为$c5-c_B^\top B^{-1}A_5=c_5+c_B^\top d_B$。最后，$x+8d=(4,4,0,0,8,0,2)$也是一个可行基解。

由上例可知，对于非退化可行基解，我们可以适当的选择非基变量x_j和$\theta > 0$,到达新的可行基解。单纯性法便是这种想法。
我们先假设任意可行基解都非退化，后面我们会看到，单纯形法可以巧妙的处理退化解。
回顾之前的做法，为了保证解的可行性，有必要进一步分析θ的取值及基变量$\mathbf{x}_B$的变化情况。记 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \theta d$. 若取$x_j = \theta$, $x_i = 0(i, j \in N, i \neq j)$, 则由线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$得$\tilde{\mathbf{x}}_B$的值为

$$\tilde{\mathbf{x}}_B = x_B - \theta B^{-1}\mathbf{A}_j.$$

记$d_B = -B^{-1}\mathbf{A}_j$, 上式可写成

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{B_1} \\ \tilde{x}_{B_2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{B_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} d_{B_1} \\ d_{B_2} \\ \vdots \\ d_{B_m} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

单纯形法

1. 如果$d_B \geq 0$, $\theta = +\infty$. 这时若$\bar{c}_j < 0$，线性规划的最优值为 $-\infty$
2. 如果存在$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $d_{B_i} < 0$. θ必须满足$\theta \leq -x_{B_i}/d_{B_i}$. 我们取最大可能的$\theta$,记作

$$\theta^* = \min_{\{i|d_i<0\}} \left(-\frac{x_{B_i}}{d_{B_i}}\right). \tag{22}$$

得到新的点

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \theta^* d$$

记r是取到(22)中最小值的下标(可能在多个下标取到最小值，可以任取一个下标.这种情况下，新得到的点是退化的。)，那么 $\tilde{\mathbf{x}}_{B_r} = 0$.
注意到，$\tilde{\mathbf{x}}_j = \theta^* > 0$, $\tilde{\mathbf{x}}_i = 0, i \in N, i \neq j$.

单纯形法

至此，x_{B_r}和$x_i(i \in N, i \neq j)$合起来不少于$n-m$个变量取值为0; 取值为正的只能是$\{x_{B_1}, \cdots, x_{B_{r-1}}, x_j, x_{B_{r+1}}, \cdots, x_{B_m}\}$. 把这$m$个变量看成新的基变量，另外$n-m$个看成非基变量，就得到了新的“划分”。

简单来说，我们将 A_{B_r}从B中踢出，让A_j进入，得到新的基矩阵 $\tilde{B}$.

于是，我们获得了新的可行解

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_{B_1}, \cdots, x_{B_{r-1}}, 0, x_{B_{r+1}}, \cdots, x_{B_m}, 0, \cdots, x_j, \cdots, 0)^T.$$

定理

上述新得到的$\tilde{\mathbf{x}}$是可行基解,即$\tilde{B} = (B_1, \cdots, B_{r-1}, B_j, B_{r+1}, \cdots, B_m)$的秩为$m$.

证明： 因为$B^{-1}A_j = d_B$，d_B的第r个分量非零。并且$B^{-1}B_i, i \neq r$ 是单位矩阵I_m的第i列。所以他们线性无关。

故$B_1, \cdots, B_{r-1}, B_j, B_{r+1}, \cdots, B_m$线性无关。

单纯形法

以上操作是通过替换基变量x_{B_r}与非基变量x_j来确定新的可行基解，我们称之为**转轴运算**(pivoting).

另外，称这时的x_{B_r}为出基变量，x_j为入基变量。这样得到的新可行基解，利用式(20)进行最优判定，并重复上述操作。

单纯形算法(SIMPLEX)

第一步（初始化）:
确定一个可行基划分$A=(B,N)$, 并计算$\mathbf{x}_B=\bar{\mathbf{b}}:=B^{-1}\mathbf{b}$.

单纯形算法(SIMPLEX)

第二步（最优判定）：
计算向量$\mathbf{w} = (B^T)^{-1}\mathbf{c}_B$, 对所有的非基分量$j \in N$求出$z_j = \mathbf{w}^T\mathbf{A}_j$.
如果$\bar{c}_j = c_j - z_j \geq 0 (j \in N)$, 则当前的可行基解
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 已是最优解**[stop!]**。
否则，选取一个满足$c_j - z_j < 0$的$j \in N$进入下一步。 **注：**选取j的

方式有多种。如：下标从小到大计算$\bar{c}_j$，遇到小于0时直接选取。或者，计算出所有的情况，取$\theta_j^* \bar{c}_j$ 中最小的那个。但是，后者在实际中并未提升求解效率。

单纯形算法(SIMPLEX)

第三步（转轴运算）：
计算向量$\mathbf{d} = -B^{-1}\mathbf{A}_j$. 若$\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, 则问题无有界解[stop!!]。
否则，找出r使得$\theta^* = \min_{\{i|d_i<0\}}(-\frac{x_{B_i}}{d_{B_i}})$, 将基矩阵$B$的列向量$\mathbf{A}_{B_r}$用$\mathbf{A}_j$替换，得到新的基矩阵

$$B = (\mathbf{A}_{B_1}, \cdots, \mathbf{A}_{B_{r-1}}, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{B_{r+1}}, \cdots, \mathbf{A}_{B_m}).$$

进而，记新基变量的值为

$$x_{B_i} = x_{B_i} + \theta^* d_i (i = 1, \cdots, m, i \neq r), x_j = \theta^*.$$

令基变量的下标集合与非基变量的下标集合分别为

$$B := (B \cup \{j\}) - \{B_r\}, \quad N := (N \cup \{B_r\}) - \{j\}.$$

回到第二步。

单纯形法的理论收敛性

如前所述，经过转轴运算，对应于$\bar{c}_j < 0$的非基变量x_j入基得到新的可行基解时，目标函数值将减少$\theta^*|\bar{c}_j|$.

对于非退化情况，每次转轴后，目标值严格减小，所以每个可行基解不会被重复到达2次及以上。另外，可行基解的个数是有限的，迭代不会无限重复下去，必在有限次迭代后结束计算。

定理（单纯形法的有限收敛性定理)

（非退化情形）若所给的线性规划问题可以求出初始可行基解，而且转轴运算过程中的所有可行基解都是非退化的，则利用单纯形法在有限次迭代后，要么找到最优解，要么识别出问题无有界解，从而结束计算。