作业1

习题 1.1 证明无约束问题的极值条件(二阶充分条件):

设目标函数 $f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处二次可微, 若 $\nabla f(\bar{x})=0$ 且 $\nabla^2 f(\bar{x})>0$, 则 $\bar{x}$ 是局部极小点

证: 由 $\bar{x}$ 是驻点及 $\nabla f(\bar{x})$ 的连续性可知, 存在 $\bar{x}$ 的 ε 邻域使得

对任意 $x^* \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ 有 $\nabla^2 f(x^*)>0$ 恒成立.

又对于任意 $x_1 \in (\bar{x}, \bar{x}+\varepsilon)$, 存在 $x_2 \in [\bar{x}, x_1]$ 使得

$$f(x_1)-f(\bar{x})=\frac{1}{2}(x_1-\bar{x})^T \nabla^2 f(x_2)(x_1-\bar{x})$$

又 $\because$ $x_2 \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$

$\therefore$ $\nabla^2 f(x_2)>0$

即有 $f(x_1)>f(\bar{x})$

又对于 $x_3 \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x})$, 同理有 $f(x_3)>f(\bar{x})$

故对任意 $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ 且 $x \neq \bar{x}$, 不等式 $f(x)>f(\bar{x})$ 成立,

即 $\bar{x}$ 是 f 在 U 上的局部最小值点.

习题 1.2 说明以下问题是凸问题, 但 LICQ 不满足, KKT 条件不成立.

$$\min_{x,y} \ y$$

$$\text{s.t.} \ (x-1)^2+y^2=1$$

$$(x+1)^2+y^2=1.$$

$0<t<1$

① $\because$ $g(y)=y$ 满足 $g(ty_1+(1-t)y_2)=tg(y_1)+(1-t)g(y_2)$

$\therefore$ $g(y)$ 是凸函数

又 $\because$ 约束条件为两个圆的方程, 是凸集

$\therefore$ 原问题是凸问题

2023.09.28 14:03

令 $c_1(x,y)=(x-1)^2+y^2-1$　　$c_2(x,y)=(x+1)^2+y^2-1$

$c_1(x,y)=0$，$c_2(x,y)=0$ 为约束条件

$\nabla c_1=(2(x-1),2y)$　　$\nabla c_2=(2(x+1),2y)$

考虑一个点 (x,y)，使得两个约束同时成立，则有

$$(2(x-1),2y)=\lambda \times (2(x+1),2y)$$

观察可知，$y=0$ 时，存在实数 λ 使得上述等式成立

即 $y=0$ 时，两个约束方程的梯度向量线性相关

即不满足 LICQ 条件

也即 KKT 条件不成立.

习题 2.1 证明 ~~P~~ $P=Q$，其中 $P=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$

$Q=\{x \mid \tilde{A}x=\tilde{b},\ x\geq 0\}$

考虑P的解 ∵ A的秩为 k.

∴ 存在一个 $k\times n$ 的矩阵 $\tilde{A}$（其秩为k）和一个 $n\times n$ 的矩阵C

使得 $A=\tilde{A}C$（其中 $\tilde{A}$ 包含了A的k个线性无关的行向量）

若 $Ax=b$ 在 $x\geq 0$ 下可解，即有 $\tilde{A}(Cx)=b$ 在 $x\geq 0$ 约束下可解.

由于 $x\geq 0$ 所以 $Cx\geq 0$，此时 $\tilde{x}=Cx$ 满足 $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ 且 $\tilde{x}\geq 0$

即有任意 P的解满足Q.

考虑Q的解集. 若有一非负解 $\tilde{x}$ 满足 $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$

则可以将 $\tilde{x}$ 扩展为n维向量 x，

$x=[\tilde{x},0,\cdots,0]$ 使得 $Ax=b$ 成立

且有 $x\geq 0$ 即 Q的解集满足P解集的条件.

综上，故有 $P=Q$

习题2.2 证明：x是可行基解，则x是顶点.

令 $I=\{i \mid a_i^T x = b_i\}$，$c=\sum_{i\in I} a_i$

则有 $c^T x = \sum_{i\in I} a_i x = \sum_{i\in I} b_i$

由x为一可行基解，可知 对$\forall x\in P$，有 $a_i^T x \geq b_i$

即有 $c^T x = \sum_{i\in I} a_i x \geq \sum_{i\in I} b_i$

则 x为 $\min\{c^T x \mid x\in P\}$ 的一个最优解.

又$\because$ x存在 n个线性无关的有效约束

有 x是 $\{a_i^T x = b_i, i\in I\}$ 的唯一解.

$\therefore$ $\sum_{i\in I} a_i x = \sum_{i\in I} b_i$ 成立当且仅当 $x=X$

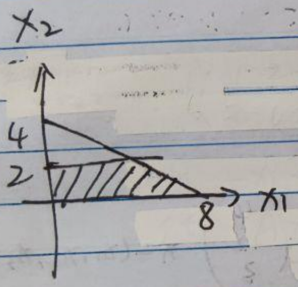
由顶点定义知，X是一个顶点

习题2.3 求解 极点和基解.

$$\min\ -x_1+3x_2$$
$$\text{s.t.}\ x_1+2x_2 \leq 8$$
$$x_2 \leq 2,\quad x_1, x_2 \geq 0$$

标准化得

$$\min\ -x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$
$$\text{s.t.}\ x_1+2x_2+x_3=8$$
$$x_2+x_4=2$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$



作图可知，共5个极点

$(0,4)$，$(0,2)$，$(0,0)$

$(8,0)$，$(4,2)$

阴影处为可行域

分析知，共4个基解

$(0,2)$，$(0,0)$，$(4,2)$，$(8,0)$.

习题2.4 $\min \quad -4x_1-x_2$

s.t. $-x_1+2x_2\le 4$

$2x_1+3x_2\le 12$

$x_1-x_2\le 3$

$x_1,x_2\ge 0.$

先转为 $\max \quad 4x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=4\\2x_1+3x_2+x_4=12\\x_1-x_2+x_5=3\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0.\end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&2&1&0&0\\2&3&0&1&0\\1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}4\\12\\3\end{pmatrix}$ $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T$

以 x_3,x_4,x_5 为基变量 令 $x_1,x_2=0$ 初始可行解为 $X=(0,0,4,12,3)^T$

$C_j\rightarrow$			4	1	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	-1	2	1	0	0
0	x_4	12	2	3	0	1	0
0	x_5	3	1	-1	0	0	1

选择 x_1 作为换入变量，考虑第三个约束方程，令 x_5 降到 0.

则有 $x_1=3$，且不影响其它约束方程的成立

$X_1=(3,0,4,6,0)^T$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	7	0	1	1	0	1
x_4	6	0	5	0	1	-2
x_1	3	1	-1	0	0	1

考虑 x_2 为换入变量，考虑第二个约束方程

令 x_4 降至0，则 x_2 可为 $\frac{6}{5}$

此时 x_1 应为 $\frac{21}{5}$，x_3 应为 $\frac{29}{5}$

验证知，无法进一步优化.

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	$\frac{29}{5}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_2	$\frac{6}{5}$	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$
x_1	3	1	-1	0	0	1

故最优解为 $(\frac{21}{5}, \frac{6}{5})^T$

对应最优值为 -18.

习题 2.5 ① $\min C^Tx$ s.t. $Ax \geq b$.

构造 Lagrange 函数 $L(x,\lambda) = C^Tx + \lambda^T(Ax-b)$ $\lambda \geq 0$

$\because Ax - b > 0$ $\lambda \geq 0$

$\therefore L(x,\lambda) \geq C^Tx$ $\sup\limits_{\lambda} L(x,\lambda) = C^Tx$

~~定义 $g(\lambda)$ =~~ 故原问题等价于求 $\inf\limits_{x\in D} \sup\limits_{\lambda} L(x,\lambda)$

构造对偶问题: $\sup\limits_{\lambda} \inf\limits_{x\in D} L(x,\lambda)$

$$\inf_{x\in D} L(x,\lambda) = -\lambda^T b + \inf_x (\lambda^T A + C^T)x.$$

$$= \begin{cases} -\lambda^T b & \lambda^T A + C^T = 0 \\ -\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，对偶问题只在 $\lambda^T A + C = 0$ 成立时才有意义.

故对偶问题可写成 $\max$ $-\lambda^T b$

s.t. $\lambda^T A + C^T = 0$.

② $\min\ c^Tx$, s.t. $Ax\le b$

$L(x,\lambda)=c^Tx+\lambda^T(Ax-b) \quad \lambda\ge 0$

$\because\ Ax-b\le 0 \quad \lambda\ge 0$

$\therefore\ L(x,\lambda)\le c^Tx$

原问题等价于求 $\sup\limits_{\lambda}\inf\limits_{x\in D} L(x,\lambda)$

构造对偶问题: $\inf\limits_{\lambda}\sup\limits_{x\in D} L(x,\lambda)$

$$\sup_{x\in D} L(x,\lambda) = -\lambda^Tb + \sup_{x\in D}(\lambda^TA+c^T)x$$

$$=\begin{cases}-\lambda^Tb, & \lambda^TA+c^T=0\\ -\infty, & 其它\end{cases}$$

对偶问题只在 $\lambda^TA+c^T=0$ 时有意义

即对偶问题可写成: $\min\ -\lambda^Tb$

s.t. $\lambda^TA+c^T=0$

③ 证明: 对偶问题的对偶是原问题

假设原问题为 $\min\ f(x)$

s.t. $g_i(x)\le 0 \quad i=1,2,\cdots,m$

$h_j(x)=0 \quad , j=1,\cdots,n$

2023.09.28 14:02

则对偶问题为 $\max \ b$

$$\text{s.t.} \quad b \le f(x) + \Sigma(\lambda_i * g_i(x), i=1,2,\cdots,m) + \Sigma(\mu_j * h_j(x), j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $\mu>0$，$\lambda>0$，b 为对偶问题目标函数

将对偶问题约束条件变形得.

$$f(x) \ge b - \Sigma(\lambda_i * g_i(x), i=1,2,\cdots,m) - \Sigma(\mu_j * h_j(x), j=1,2,\cdots,n)$$