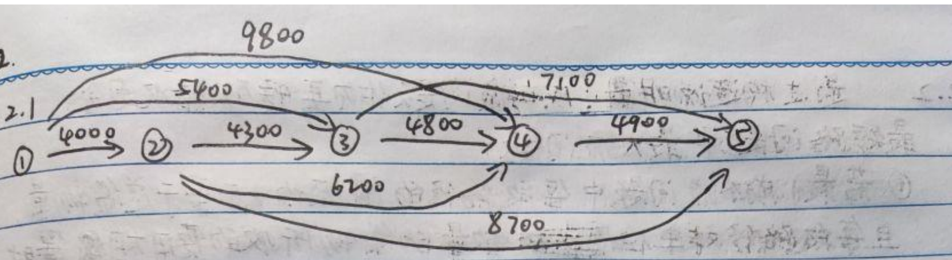
HW2.

作业 2.1



从①出发，到②、③、④、⑤初始距离：

	②	③	④	⑤
距离	4000	5400	9800	∞

确定 4000 为 ①② 最小距离，重新检测 ①③、①④、①⑤ 最短距离

①③：$4000+4300=8300>5400$

①④：$4000+6200=10200>9800$

①⑤：$4000+8700=12700<\infty$ 更新 ①⑤

	②	③	④	⑤
距离	4000	5400	9800	12700

确定 5400 为 ①③ 最小距离，重测 ①④、①⑤ 最短距离

①④：$5400+4800=10200>9800$

①⑤：$5400+7100=12500<12700$ 更新①⑤

	②	③	④	⑤
距离	4000	5400	9800	12500

确定 9800 为 ①④ 最短距离，重测 ①⑤ 最短距离

①⑤：$9800+4900=14700>12500$

综上，①⑤ 的最短距离为12500，对应最短路径为 ①③⑤

故最优更新策略为第一年、第三年各租赁2年期的设备，5年内的更换总费用为12500元。

作业2.2

最短路问题：考虑最短路问题网络 $N=(G,s,t,c)$，引入哑元终点 $\tilde{t}$ 和新边 $(v,\tilde{t})$ s.t. $c(v,\tilde{t})=0$, $u(v,\tilde{t})=1$, $\forall v\in V$

则最短路径问题的求解化为求解流值 $f^*=n$ 的最大流问题，其中n为顶点数。

因为连接 $\tilde{t}$ 与其它顶点的边容量均为1，且流值为 $n=|V|$，所以由s到 $\tilde{t}$ 的最小成本流使得s到各个顶点的成本最小，又因为原网络中各边容量为∞，所以为最短路径。

最大流问题：

引入哑元始点 $\tilde{s}$，添加新边：

$(\tilde{s},s)$ s.t. $c(\tilde{s},s)=0$ $u(\tilde{s},s)=\infty$

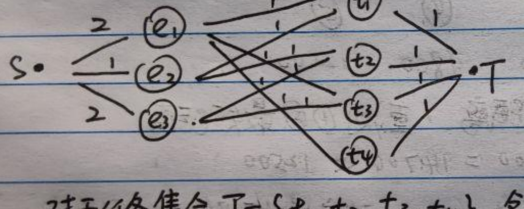
$(\tilde{s},t)$ s.t. $c(\tilde{s},t)=1$ $u(\tilde{s},t)=\infty$.

令原网络中 $c(e)=0$, $\forall e\in E$，令流值 $f^*=\sum_{e\in E}u(e)$，源点为 $\tilde{s}$，汇点为t，则最大流问题转化为求解 $\tilde{s}$ 到t的最小成本流问题。

这是因为为使成本最小，尽量避免使流量直接从 $\tilde{s}$ 到t，而是流经s到t，在原网络流量达到最大流后剩下的流量从 $\tilde{s}$ 到t。

2.3 ① 创建源节点S和汇点节点T.

对于员工集合 $E=\{e_1,e_2,e_3\}$，创建与员工相关的节点，并连接到源节点S。S到 e_1、e_2、e_3 的边代表该员工最多执行的任务数。



对于任务集合 $T=\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$，创建与任务有关的节点，并连接到汇点节点T。T到 t_1、t_2、t_3、t_4 的边代表该任务需要一员工执行

在 e_i 到 t_j 之间的边代表员工 e_i 能处理任务 t_j，每边长为1 表示只需 1~~人处理~~ 1人次

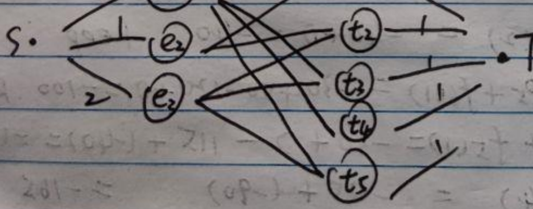
② Ford – Fulkerson

首先将 e_1 分配给 t_1 和 t_3，再看 e_2，e_2 只能分配给 t_2，再看 e_3，e_3 适配的 t_2 和 t_3 都被占。看最近的 $e_2 t_2$ 能否取消，但取消后 e_2 也没有空闲可适配的其它任务，所以先不改变 $e_2 - t_2$，再看 $e_1 - t_3$，$e_1 - t_3$ 取消后，e_1 可分配给 t_4，而 e_3 可分配给 t_3。达到最大流量。

③ 员工 e_1 作 t_1、t_4，员工 e_2 作 t_2、员工 e_3 作 t_3 可达最大流量

同理还有：$\{e_1: t_3、t_4，e_2: t_1，e_3: t_2\}$ $\{e_1: t_4，e_2: t_1，e_3: t_2、t_3\}$

④ 流网络修改为：不妨设新任务为 t_5



修改后最大流量分配为：$\{e_1: t_1、t_4，e_2: t_2，e_3: t_3, t_5\}$

同理有 $\{e_1: t_3、t_4，e_2: t_1，e_3: t_2、t_5\}$

$\{e_1: t_4、t_5，e_2: t_1，e_3: t_2、t_3\}$

最大流量为5.

作业3.1 $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = (100, 105, 110, 115, 120)$

建立动态归规模型：

阶段 i 指代 第 i 年 $i = 1, 2, \cdots, n$

在阶段 i 时的下一步策略有2种，keep（保留）和 replace（换掉设备）

阶段 i 的状态指在第 i 年初设备的使用年数

有递归式

$$f_i(t) = \begin{cases} -C_t + f_{i+1}(t+1) & ; \text{keep} \\ -C_0 + V_t - P_i + f_{i+1}(1), & \text{replace} \end{cases}$$

分析所有可能出现的情况:

年份	1	2	3	4	5	6
		0	0	0	0	出售
	0	1	1	1	1	
			2	2	2	或不出售
设备年限	2	3	4	3	3	
				5	4	

只对这些情况分析即可.

则有. $f_5(4) = \max\begin{cases} -C_4 + f_6(5) = -90 + 0 = -90 & \text{keep} \\ -C_0 + V_4 - P_5 + f_6(1) = -30 + 5 - 120 + 0 = -145 & \text{Replace} \end{cases}$

$f_5(3) = \max\begin{cases} -C_3 + f_6(4) = -75 + 0 = -75 & \text{keep} \\ -C_0 + V_3 - P_5 + f_6(1) = -30 + 10 - 120 + 0 = -140 & \text{Replace} \end{cases}$

$f_5(2) = \max\begin{cases} -C_2 + f_6(3) = -50 + 0 = -50 & \text{keep} \\ -C_0 + V_2 - P_5 + f_6(1) = -30 + 25 - 120 + 0 = -120 & \text{Replace} \end{cases}$

$f_5(1) = \max\begin{cases} -C_1 + f_6(2) = -40 + 0 = -40 & \text{keep} \\ -C_0 + V_1 - P_5 + f_6(1) = -30 + 50 - 120 + 0 = -100 & \text{Replace} \end{cases}$

$f_4(5) = -C_0 + V_5 - P_4 + f_5(1) = -30 + 2 - 115 + (-40) = -183$

$f_4(3) = \max\begin{cases} -C_3 + f_5(4) = -75 + (-90) = -165 & \text{keep} \\ -C_0 + V_3 - P_4 + f_5(1) = -30 + 10 - 115 + (-40) = -175 & \text{Replace} \end{cases}$

$f_4(2) = \max\begin{cases} -C_2 + f_5(3) = -50 + (-75) = -125 & \text{keep} \\ -C_0 + V_2 - P_4 + f_5(1) = -30 + 25 - 115 + (-40) = -160 & \text{Replace} \end{cases}$

$$f_4(1)=\max\begin{cases}-C_1+f_5(2) = -40+(-50) = -90 & \text{keep}\\ -C_0+V_1-P_4+f_5(1) = -30+50-115+(-40) = -135 & \text{Replace}\end{cases}$$

$$f_3(4)=\max\begin{cases}-C_4+f_4(5) = -90+(-183) = -273 & \text{keep}\\ -C_0+V_4-P_3+f_4(1) = -30+5-110+(-90) = -225 & \text{Replace}\end{cases}$$

$$f_3(2)=\max\begin{cases}-C_2+f_4(3) = -50+(-165) = -215 & \text{keep}\\ -C_0+V_2-P_3+f_4(1) = -30+25-110+(-90) = -205 & \text{Replace}\end{cases}$$

$$f_3(1)=\max\begin{cases}-C_1+f_4(2) = -40+(-125) = -165 & \text{keep}\\ -C_0+V_1-P_3+f_4(1) = -30+50-110+(-90) = -180 & \text{Replace}\end{cases}$$

$$f_2(3)=\max\begin{cases}-C_3+f_3(4) = -75+(-225) = -300 & \text{keep}\\ -C_0+V_3-P_2+f_3(1) = -30+10-105+(-165) = -290 & \text{Replace}\end{cases}$$

$$f_2(1)=\max\begin{cases}-C_1+f_3(2) = -40+(-205) = -245 & \text{keep}\\ -C_0+V_1-P_2+f_3(1) = -30+50-105+(-165) = -250 & \text{Replace}\end{cases}$$

$$f_1(2)=\max\begin{cases}-C_2+f_2(3) = -50+(-290) = -340 & \text{keep}\\ -C_0+V_2-P_1+f_2(1) = -30+25-100+(-245) = -350 & \text{Replace}\end{cases}$$

综上，最优更新策略是KRKKK，收益为-335(第六年卖出)或-340(第六年不卖出)

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨

作业3.2. ① 最小代价路径为按上图编号中的 ①→②→③→⑥→⑨

代价最小为 $3+1+1+2=7$

② 从(0,0)到(M,N)，总共需要向右、向下共(M+1+N+1)次

等价于要从这(M+N+2)次中挑出(M+1)次向下(右)移动。

共有 C_{M+N+2}^{M+1} 种不同路径