单纯形法

单纯形算法(SIMPLEX)

第一步（初始化）:
确定一个可行基划分$A=(B,N)$, 并计算$\mathbf{x}_B=\bar{\mathbf{b}}:=B^{-1}\mathbf{b}$.

单纯形算法(SIMPLEX)

第二步（最优判定）：
计算向量$\mathbf{w} = (B^T)^{-1}\mathbf{c}_B$, 对所有的非基分量$j \in N$求出$z_j = \mathbf{w}^T\mathbf{A}_j$.
如果$\bar{c}_j = c_j - z_j \geq 0 (j \in N)$, 则当前的可行基解

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$ 已是最优解**[stop!]**。

否则，选取一个满足$c_j - z_j < 0$的$j \in N$进入下一步。 **注：** 选取j的

方式有多种。如：下标从小到大计算$\bar{c}_j$，遇到小于0时直接选取。或者，计算出所有的情况，取$\theta_j^* \bar{c}_j$ 中最小的那个。但是，后者在实际中并未提升求解效率。

单纯形算法(SIMPLEX)

第三步（转轴运算）：
计算向量$\mathbf{d} = -B^{-1}\mathbf{A}_j$. 若$\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, 则问题无有界解**[stop!!]**。否则，找出r使得$\theta^* = \min_{\{i|d_{B_i}<0\}}(-\frac{x_{B_i}}{d_{B_i}})$, 将基矩阵$B$的列向量$\mathbf{A}_{B_r}$用$\mathbf{A}_j$替换，得到新的基矩阵

$$B = (\mathbf{A}_{B_1}, \cdots, \mathbf{A}_{B_{r-1}}, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{B_{r+1}}, \cdots, \mathbf{A}_{B_m}).$$

进而，记新基变量的值为

$$x_{B_i} = x_{B_i} + \theta^* d_i (i = 1, \cdots, m, i \neq r), x_j = \theta^*.$$

令基变量的下标集合与非基变量的下标集合分别为

$$B := (B \cup \{j\}) - \{B_r\}, \quad N := (N \cup \{B_r\}) - \{j\}.$$

回到第二步。

单纯形法的理论收敛性

如前所述，经过转轴运算，对应于$\bar{c}_j < 0$的非基变量x_j入基得到新的可行基解时，目标函数值将减少$\theta^*|\bar{c}_j|$.

对于非退化情况，每次转轴后，目标值严格减小，所以每个可行基解不会被重复到达2次及以上。另外，可行基解的个数是有限的，迭代不会无限重复下去，必在有限次迭代后结束计算。

定理（单纯形法的有限收敛性定理)

（非退化情形）若所给的线性规划问题可以求出初始可行基解，而且转轴运算过程中的所有可行基解都是非退化的，则利用单纯形法在有限次迭代后，要么找到最优解，要么识别出问题无有界解，从而结束计算。

单纯形表

在上述算法中，如果我们每一步直接计算新的基矩阵的逆矩阵B^{-1},浮点数乘法复杂度为 $\mathcal{O}(m^3)$. 其余计算为矩阵向量乘法，例如 $B^{-1}A_j$, $C_B^T B^{-1}$，复杂度为$\mathcal{O}(mn+m^2)$. 故总体复杂度为$\mathcal{O}(mn+m^3)$.
实际上，如果上一步的基矩阵的逆 B^{-1}已经存在，那么计算新的基矩阵$\tilde{B}$的逆，仅需要$\mathcal{O}(m^2)$. 这是因为，

$$B^{-1}\tilde{B} = [e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}, u_r, e_{r+1}, \ldots, e_m],$$

这里的 e_i是$m \times m$单位矩阵 I_m的第i列， $u_r = -d_B = B^{-1}A_j$.

因为$\tilde{B}^{-1}\tilde{B} = I_m$, 我们只需要对$B^{-1}\tilde{B}$作行变换，使得第$r$列变为 e_r即可。这需要先将$B^{-1}\tilde{B}$的第r行乘以$-\frac{u_i}{u_r}$加到第i行， $i \neq r, i = 1, ..., m$. 最后让第r行除以u_r.

单纯形表

单纯形表可以如下表示：

$-\mathbf{c}_B'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{c}'-\mathbf{c}_B'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$
$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

或者　（最上面这行叫做第0行）

$$
\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
-\mathbf{c}_B'\mathbf{x}_B & \bar{c}_1 & \ldots & \bar{c}_n \\
\hline
x_{B(1)} & | & & | \\
\vdots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 & \ldots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n \\
x_{B(m)} & | & & | \\
\hline
\end{array}
$$

单纯形表迭代第1到m行的过程，就是更新逆矩阵B^{-1}的过程，或者说是对单纯性表作行变换。而对于第0行，我们用第r行乘以某个数加到第0行，使得当前的$\bar{c}_{B_r}=0$.

单纯形表

例

考虑问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 20 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

加入松弛变量，我们得到如下问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 20 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 20 \\ & x_1, \dots, x_6 \ge 0. \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (0,0,0,20,20,20)$ 是一个可行基解. 所以, $B(1) = 4$, $B(2) = 5$, and $B(3) = 6$. 基矩阵为单位阵 $\mathbf{I}$. 我们有 $\mathbf{c}_B = \mathbf{0}$ and $\mathbf{c}_B'\mathbf{x}_B = 0$ and $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$.

单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	-10	-12	-12	0	0	0
$x_4=$	20	1	2	2	1	0	0
$x_5=$	20	2 *	1	2	0	1	0
$x_6=$	20	2	2	1	0	0	1

Table: 初始单纯形表,入基变量x_1,出基x_5

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	100	0	-7	-2	0	5	0
x_4	10	0	1.5	1^*	1	-0.5	0
$x_1=$	10	1	0.5	1	0	0.5	0
$x_6=$	0	0	1	-1	0	-1	1

Table: 入基变量x_3,出基x_4

单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	120	0	-4	0	2	4	0
$x_3=$	10	0	1.5	1	1	-0.5	0
$x_1=$	0	1	-1	0	-1	1	0
$x_6=$	10	0	2.5*	0	1	-1.5	1

Table: 入基变量x_2,出基x_6

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	136	0	0	0	3.6	1.6	1.6
$x_3=$	4	0	0	1	0.4	0.4	-0.6
$x_1=$	4	1	0	0	-0.6	0.4	0.4
$x_2=$	4	0	1	0	0.4	-0.6	0.4

Table: 第0行全为非负，最优解得到

单纯形表:退化可行基解的循环

当存在退化解时，下面这个例子说明单纯形法可能陷入循环。

例

假设我们有如下初始单纯形表：

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 =$	0	$1/4^*$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

采用如下规则选取出基入基下标：

1. 对于非基向量，选取下标j使得减少量$\bar{c}_j$最小
2. 对于基向量，出基下标，选取所有满足条件中下标最小的。

单纯形表：退化可行基解的循环

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	-4	$-7/2$	33	3	0	0
$x_1 =$	0	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 =$	0	0	4^*	$3/2$	-15	-2	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 =$	0	1	0	8^*	-84	-12	8	0
$x_2 =$	0	0	1	$3/8$	$-15/4$	$-1/2$	$1/4$	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$1/4$	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 =$	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	$-3/2$	1	0
$x_2 =$	0	$-3/64$	1	0	$3/16^*$	$1/16$	$-1/8$	0
$x_7 =$	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	$3/2$	-1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-1/2$	16	0	0	-1	1	0
$x_3 =$	0	$-5/2$	56	1	0	2^*	-6	0
$x_4 =$	0	$-1/4$	$16/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	0
$x_7 =$	1	$5/2$	-56	0	0	-2	6	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-7/4$	44	$1/2$	0	0	-2	0
$x_5 =$	0	$-5/4$	28	$1/2$	0	1	-3	0
$x_4 =$	0	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0	$1/3^*$	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
$x_5 =$	0	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 =$	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
$x_7 =$	1	0	0	1	0	0	0	1

Figure: 表1-6，回到了原点。目标值一直未改变。

单纯形法-退化情况

存在退化可行基解情况 若遇到退化基解，可采取Bland's rule[最小下标转轴规则]避免循环:

1. 若非基向量中，存在多个 $\bar{c}_i < 0, i \in N$. 选取j为最小的下标。
2. 出基过程中，即在计算下标 r使得 $\theta^* = \min_{\{i|d_{B_i}<0\}}(-\frac{x_{B_i}}{d_{B_i}})$时，选取最小的下标.

感兴趣，可参考：Bland, Robert G. (May 1977). "New finite pivoting rules for the simplex method". Mathematics of Operations Research. 2 (2): 103–107. doi:10.1287/moor.2.2.103. JSTOR 3689647. MR 0459599.

用单纯形法求解如下问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& x_1 - x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

[习题2.4：先列出单纯形法的计算步骤，然后求解上述线性规划问题...]

单纯形法初始化

初始可行基解： 前述单纯形法需要一个可行基解作为初始解。

一般问题中为给出初始可行基解，我们在这里介绍两种常用的初始化方法：

- 两阶段法
- 大M法

单纯形法初始化：两阶段法

两阶段法： 第一阶段求一个辅助问题的最优解；第二阶段再以这个最优解，为原问题的初始可行基解。

在**两阶段法**的第一阶段里，针对线性规划问题

$$\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

考虑如下的辅助问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}^T\mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{辅助问题}$$

这里，$\mathbf{y}$为新引进的m维人工变量向量，$\mathbf{1}$是所有分量均为1的常数向量. 只需要对等式进行符号处理，我们不妨可以假设$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

单纯形法初始化：两阶段法

在 (辅助问题)中，$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$是可行基解。把该可行基解当作初始解，就可直接用单纯形法进行求解。

(辅助问题)的目标函数$\mathbf{1}^T\mathbf{y}$在可行域里取值是非负的。如果原问题存在可行解 $\mathbf{x}$，那么 $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 满足 (辅助问题)的约束条件，且目标函数值为0.

- 当辅助问题的最优解 $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$ 成立$\mathbf{1}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$时，原问题没有可行解。
- 反之，如果辅助问题的最优解为 $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ 0 \end{pmatrix}$. 此时，$\bar{\mathbf{x}}$显然是原问题的一个可行解。

1. 如果辅助问题的基矩阵B的列全部属于A, $\bar{\mathbf{x}}$是可行基解，done!
2. 否则，由于辅助问题的基矩阵B的某些列不在A中，由于A的秩为m，$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ 0 \end{pmatrix}$是辅助问题的退化解，$\bar{\mathbf{x}}$中必定有大于$n-m$个坐标为0. 我们只需要在$A$的列中，找出一些与已有的基列线性无关的列即可。

单纯形法初始化：大M法

先求出初始可行基解后再进行第二阶段最优解的计算合并成一步作业的方法，称为**大M法**。

大M法考虑如下线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} + M \cdot \mathbf{1}^T\mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{24}$$

这里$M > 0$为充分大的常数，我们也假设$\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$，$\mathbf{y}$和常数向量$\mathbf{1}$与两阶段法中的一样。

在**大M法**的问题(24)中，目标函数项$M \cdot \mathbf{1}^T\mathbf{y}$占支配地位，所以单纯形法迭代将首先让人工变量$y_i$的值减小。其结果是，若所有人工变量都成为0, 则目标函数$\mathbf{c}^T\mathbf{x} + M \cdot \mathbf{1}^T\mathbf{y}$ 和原问题的目标函数$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$本质上一致，可认为在此之后单纯形法的迭代所进行的就是求原问题最优解的计算。

事实上，如果原问题有最优解，在M充分大时，得到**大M法**问题(24)的最优解 $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$ 中$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$，且$\bar{\mathbf{x}}$ 成为原问题的最优解。

单纯形法

用**大M法**求解如下问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 3 \\
& x_1 - 2x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

标准化模型（**大M法**）：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 + M(x_6 + x_7) \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\
& x_1 - 2x_3 + x_7 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Table: 迭代单纯形表-1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	$-4M$	$1-3M$	$1-M$	$-3+6M$	0	M	0	0
x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0
x_6	3	2	1	-4	0	-1	1	0
x_7	1	1*	0	-2	0	0	0	1

Table: 迭代单纯形表-2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	$-M-1$	0	$1-M$	-1	0	M	0	3M-1
x_4	10	0	-2	3	1	0	0	-1
x_6	1	0	1*	0	0	-1	1	-2
x_1	1	1	0	-2	0	0	0	1

单纯形法

Table: 迭代单纯形表-3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-2	0	0	-1	0	1	0	M+1
x_4	12	0	0	3*	1	-2	2	-5
x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2
x_1	1	1	0	-2	0	0	0	1

Table: 迭代单纯形表-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	2	0	0	0	1/3	1/3	2/3	M-2/3
x_3	4	0	0	1	1/3	-2/3	2/3	-5/3
x_2	1	0	1	0	0	-1	1	-2
x_1	9	1	0	0	2/3	-4/3	4/3	-7/3

单纯形法总结

- 由多面集的几何性质，我们得到了线性规划标准形式的极点必存在。
- 线性规划的标准形式，如果最优解有限，必在某个可行基解处取到。
- 由大M法，我们可以通过单纯形表求解线性规划问题。并且，每个迭代的浮点数乘法复杂度为$\mathcal{O}(m^2+mn)$.

补充： 对于很多问题，通常只需要$\mathcal{O}(m)$次转轴运算即可得到最优解。但是，最差的情况需要2^n（可参考Chapter 3.7. in Book: Bertsimas, Dimitris, and John N. Tsitsiklis. Introduction to linear optimization. Vol. 6. Belmont, MA: Athena scientific, 1997.）。实际实现算法时，可以考虑算法的稳定性（如舍入误差），结合数据的稀疏性（如稀疏矩阵分解求逆）进一步加速算法。可以参考：Chapter 3.3. in Book: Bertsimas, Dimitris, and John N. Tsitsiklis. Introduction to linear optimization.）