T3.x.1 $P(x)$为关于x的 $(2m+k+1)$ 次多项式.

∵ $P\cancel{(\xi_j=0)}$ 对于 $0<\xi_1<\cdots<\xi_k<1$ 有 $P(\xi_j=0)$

∴ 在 $(0,1)$ 内 $P(x)$ 有 k 个零点

∵ 对于 $a=0,1$, $j=0,1,\cdots m$ 有 $P^{(j)}(a)=0$

∴ $x=0$, $x=1$ 分别为 $P(x)$ 的 $(m+1)$ 重根

综上，$P(x)$ 至少有 $\cancel{2(m+1)}$ $2(m+1)+k=2m+k+2$ 个根

又∵ $P(x)$ 为关于 x 的 $(2m+k+1)$ 次多项式

∴ $P(x)$ 为一常数多项式

又∵ $P(\xi_1)=0$

∴ $P(x)=0$.

T1.

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$

$$=\frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$=-\frac{1}{6}(x-2)(x-1)x(x+2)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$

$$=\frac{1}{4}(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$$

$$l_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$

$$=-\frac{1}{6}(x-2)x(x+1)(x+2)$$

$$l_4(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{4\times3\times2\times1}$$

$$=\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)$$

故有 Lagrange 插值多项式:

$$L_4(x)=\frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1)-\frac{1}{6}(x-2)(x-1)x(x+2)$$

$$+\frac{1}{4}(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)-\frac{1}{6}(x-2)x(x+1)(x+2)$$

$$+\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-4},x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	-2	0				
1	-1	-1	$f[-2,-1]=-1$			
2	0	0	$f[-1,0]=1$	$f[-2,-1,0]=1$		
3	1	1	$f[0,1]=1$	$f[-1,0,1]=0$	$f[-2,-1,0,1]=-\frac{1}{3}$	
4	2	0	$f[1,2]=-1$	$f[0,1,2]=-1$	$f[-1,0,1,2]=-\frac{1}{3}$	$f[-2,-1,0,1,2]=0$

故有 Newton 插值多项式:

$$N_5(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4].$$
$$=-\frac{1}{3}x^4-x^3+\frac{1}{3}x^2+2x.$$

T2. $H_5(x)=h_0(x)\cdot(-1)+h_1(x)\cdot 0+h_2(x)\cdot 1$
$$+g_0(x)\cdot 0+g_1(x)\cdot 1+g_2(x)\cdot 0$$
$$=-h_0(x)+h_2(x)+g_1(x)$$
$$=-\left[1-2(x+1)\left(\frac{1}{-1}+\frac{1}{-2}\right)\right]\left(\frac{(x-1)x}{(-1-0)(-1-1)}\right)$$
$$+\left[1-2(x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\right]\left(\frac{(x+1)x}{(1+1)(1-0)}\right)$$
$$+(x-0)\left[\frac{(x+1)(x-1)}{1\times(-1)}\right]^2$$
$$=x^5-5x^3+5x$$

T3. 求x^3在$[-1,1]$上的2次最佳平方逼近多项式

取$\Phi=\text{span}\{1,x,x^2\}$，$x\in[-1,1]$，$\rho(x)=1$

$(1,f)=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$　　$(x,f)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$

$(x^2,f)=\int_{-1}^{1}x^5dx=0$　　$(1,1)=\int_{-1}^{1}dx=2$

$(1,x)=\int_{-1}^{1}xdx=0$　　$(1,x^2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$

$(x^2,x^2)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$.

$$\begin{bmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{5}\\0\end{bmatrix}$$ 解得$a_0=0$，$a_1=\frac{3}{5}$，$a_2=0$

故x^3在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式为$P_2(x)=\frac{3}{5}$.

T4. 求x^3在$[-1,1]$上的2次最佳一致逼近多项式

设x^3的2次最佳一致逼近多项式为$P_2(x)$

于是$x^3-P_2(x)$为$[-1,1]$上距零点最近的~~首项~~

首项系数为1的3次多项式

$$x^3-P_2(x)=\tilde{T}_3(x)=\frac{1}{4}(4x^3-3x)$$

$$P_2(x)=\frac{3}{4}x$$