Q1.

1. 正确。

由 $\forall i \in N^+$, $f_i(n) = O(g(n))$

可知存在正常数 C_i 和 n_i 使得对所有 $n \geq n_i$ 有

$$0 \leq f_i(n) \leq C_i g(n)$$

令 $n_0 = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$

$C_0 = \max\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$

$\because n_0 \geq n_i$, $C_0 \geq C_i$

$\therefore$ 对 $\forall n \geq n_0$ 有

$$0 \leq f_i(n) \leq C_i g(n) \leq C_0 g(n)$$

又 $\because$ $F_m(n) = \sum_{i=1}^{m} f_i(n)$

$\therefore 0 \leq F_m(n) = \sum_{i=1}^{m} f_i(n) \leq C_0 m g(n)$

即证得 $F_m(n) = O(g(n))$

2. 不正确。

反例 令 $f_i(n) = \frac{2}{n}$, $g(n) = \frac{1}{n}$. $i \in N^+$, $n > 0$

易知存在 $n_0 = 1$, $c = 4$ 使得对 $\forall n \geq n_0$ 有.

$$0 \leq f_i(n) \leq c g(n)$$

即满足 $f_i(n) = O(g(n))$

但对于 $F(n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(n)$

$$= \frac{2}{n} \times n = 2.$$

$$g(n) = \frac{1}{n}$$

当 $n \to \infty$ 时 $g(n) \to 0$

而 $F(n)$ 始终为 2.

易知 $F(n)$ 的渐近上界不为 $g(n)$

证得命题不正确.

3. 正确.

证明: $f(n)>0$, $g(n)>0$ 且 $f_i(n)=o(g(n))$

则存在无穷正数列 $\{f_1, f_2, \cdots\}$ 使得 $\forall i\in N^+$,

$f_i(n)=o(f_{i+1}(n))$ 且 $f_i(n)=o(g(n))$

举出一例即可:

令 $g(n)=2^2 n=4n$

$f_i(n)=2^{\sum_{i=0}^{i}(\frac{1}{2})^i}n$

即有 $f_1(n)=2^{\frac{3}{2}}n$ $f_2(n)=2^{\frac{7}{4}}n$ $f_3(n)=2^{\frac{15}{8}}n$ $\cdots\cdots$

$\sum_{i=0}^{i}(\frac{1}{2})^i=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^i}<2$

对 $n_0=1$, $c=1$, 任意 $n\geq n_0$ 有

$0<f_i(n)=2^{\sum_{i=0}^{i}(\frac{1}{2})^i}n<2^2 n=cg(n)$

即有 $f_i(n)=o(g(n))$

当然 $f_1(n)=o(g(n))$

对 $n_0=1$, $c=1$ 有. 任意 $n\geq n_0$ 有

$0<f_i(n)=2^{\sum_{i=0}^{i}(\frac{1}{2})^i}n<2^{\sum_{i=0}^{i+1}(\frac{1}{2})^i}n$

$=cf_{i+1}(n)$

即有 $f_i(n)=o(f_{i+1}(n))$

结合前面证得的 $f_i(n)=o(g(n))$

可知命题成立.

4. 错误，反例为：

$$f(n)=\begin{cases} n^2, & n\in(2k,2k+1] \\ 0, & n\in(2k+1,2k+2] \end{cases} \quad k\in N^+$$

$$g(n)=\begin{cases} 0, & n\in(2k,2k+1] \\ n^2, & n\in(2k+1,2k+2] \end{cases} \quad 其中 k\in N^+$$

$f(n)+g(n)=n^2$

易知 $f(n)+g(n)=\Omega(n^2)$

但显然 $f(n)$ 的渐近下界不为 n^2

$g(n)$ 的渐近下界不为 n^2

即有命题不成立

5. 错误，反例为：

若 $f(n)=\begin{cases} n^\alpha, & n为奇数 \\ n^\beta, & n为偶数 \end{cases}$

$0\le\alpha\le\beta$.

易证. $f(n)$ 的渐近上界为 n^β

渐近下界为 n^α

但 对于 $\begin{cases} n为奇 & f(n+1)=\Theta(n^\beta) \\ & f(n)=\Theta(n^\alpha) \\ n为偶 & f(n+1)=\Theta(n^\alpha) \\ & f(n)=\Theta(n^\beta) \end{cases}$

即有命题不成立

Q2. (1) 证明对 $\forall m,n\in N$，$A(m,n)$ 递归总能终止.

先求几个基本项 $A(0,0)=1$ $A(0,1)=2$

$A(1,0)=A(0,1)=2$ $A(1,1)=A(0,A(1,0))$
$=A(1,0)+1$
$=3$

由此可知 $A(m,n)$ 对于 $0\le m\le 1$，$0\le n\le 1$ 的整数对 (m,n) 都可以递归终止.

采用数学归纳法：

假设对于 $0\le m\le m_0$，$0\le n\le n_0$ $m,n\in N$ 组成的任意 (m,n) 对，$A(m,n)$ 可递归终止.
已知.

其中 $m_0\ge 1$，$n_0\ge 1$

下面证明此时有.对于 $0\le m\le m_0+1$，$0\le n\le n_0+1$，$m,n\in N$ 组成的任意 (m,n) 对，$A(m,n)$ 可递归终止.

令 m_1 为 $[1,m_0+1]$ 范围内的数.
n_1 为 $[1,n_0+1]$ 范围内数

$$A(m_1,n_1)=A(m_1-1,A(m_1,n_1-1))$$
$$=\cdots$$
$$=A(m_1-1,A(m_1-1,\cdots A(m_1-1,A(m_1,0)))$$

$\because$ $A(m_1,0)=A(m_1-1,1)$

$A(m_1-1,1)$ 可递归终止

$\therefore$ 不妨设 $A(m_1-1,1)=k$

1° $k>n_0$ 则 $A(m_1,n_1)=A(m_1-1,\cdots A(m-1,k)))$
$$=A(m_1-1,\cdots,A(m_1-1,A(m_1-1,k-1))$$
$$=\cdots$$
$$=A(m_1-1,\cdots A(m_1-1,\cdots A(m_1-1,k-(k-n_0)))$$

即有

$A(m_1,n_1)=A(m_1-1,A(m_1-1,\cdots A(m_1-1,n_0)))$

同理由 $A(m_1-1,n_0)$ 可递推终止

用处理 $A(m_1-1,1)=k$ 的方式

处理，可知递推将终止.

2° $k\le n_0$ 则由 $A(m_1-1,k)$ 递推

可终止，令 $A(m_1-1,k)=k'$

用同样的分类讨论处理 k'

同样可以递推终止.

综上，对 $m_1\in[1,m_0+1]$ $m_1\in N$

$n_1\in[1,n_0+1]$ $n_1\in N$

范围内的 $A(m_1,n_1)$，递推可终止.

又∵ $A(m_1,0)=A(m_1-1,1)$

$A(0,n_1)=n_1+1$

都可递推终止

即对 $0\le m\le m_0+1$，$0\le n\le n_0+1$，$m,n\in N$

组成的任意 (m,n) 对，$A(m,n)$ 可递归终止

得证.

$\Rightarrow$ 即有 $\forall m,n\in N$ $A(m,n)$ 递归总能终止.

(2) 先求 $A(0,n)$、$A(1,n)$、$A(2,n)$ 表达式

$A(0,n)=n+1$

$A(1,n)=A(0,A(1,n-1))$

$=A(1,n-1)+1$

$=A(1,n-2)+2=\cdots$

$=A(1,0)+n=n+2.$

$$A(2,n)=A(1,A(2,n-1))$$
$$=A(2,n-1)+2$$
$$=A(1,A(2,n-2))+2\times 2$$
$$=\cdots$$
$$=A(2,0)+2n=2n+3$$
$$A(3,n)=2^{n+3}-3.$$

易知 $A(m,n)\geqslant n+1$ 对于 $m=0,1,2$ $n\in N, n\geqslant 0$ 恒成立

下面用数学归纳法证明 $A(m,n)\geqslant n+1$

对于 $m,n\in N$, $m,n\geqslant 0$ 恒成立.

假设已知 $A(m_0,n)\geqslant n+1$ 对于 $n\in N, n\geqslant 0$ 恒成立 $m_0\geqslant 2$

对 $n\geqslant 2$, $A(m_0+1,n)=A(m_0,A(m_0+1,n-1))$
$$\geqslant A(m_0+1,n-1)+1$$
$$=A(m_0,A(m_0+1,n-2))+1$$
$$\geqslant A(m_0+1,n-2)+2\geqslant\cdots$$
$$\geqslant A(m_0+1,0)+n$$
$$=A(m_0,1)+n\geqslant n+2.$$

又∵ $A(m_0+1,0)=A(m_0,1)=A(m_0-1,A(m_0,0))$
$$=A(m_0-1,A(m_0-1,1))$$
$$=A(m_0-1,A(m_0-2,A(m_0-1,0)))$$
$$=\cdots$$
$$=A(m_0-1,A(m_0-2,\cdots A(0,0)))$$
$$\geqslant 1$$
$$A(m_0+1,1)=A(m_0,A(m_0+1,0))$$
$$\geqslant A(m_0+1,0)+1$$
$$\geqslant 2.$$

故有 $A(m_0+1,n)\geqslant n+1$.

又∵ 对于 $0\leq m\leq 2$, $m\in N$, $n\in N$

已证明 $A(m_0,n)\geqslant n+1$ 恒成立

∴ 对 $m,n\in N$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$ 有 $A(m,n)\geqslant n+1$

① 证明 $A(m, n+1) > A(m,n)$

$\because A(m,n) \geq n+1$

$\therefore A(m, n+1) = A(m-1, A(m,n))$

$\geq A(m,n)+1$

即 $A(m, n+1) > A(m,n)$

② 证明 $A(m+1, n) > A(m,n)$

先由数学归纳法证明

$A(m,n) > n+2$ 对 $m \geq 3$ 恒成立

$\because A(3,n) = 2^{n+3}-3 > n+3$

假设已知 $A(m_0, n) > n+2$ 对 $\cancel{m \geq 3}$ m_0 成立

其中 m_0 为一大于3整数.

$A(m_0, n) = A(m_0-1, A(m_0, n-1))$

$\geq A(m_0, n-1)+2$

$= A(m_0, A(m_0+1, n-2))+2$

$\geq A(m_0, 0)+n+1$

$= A(m_0, 1)+n \geq n+3.$

即 $A(m_0, n) > n+2$

$\because A(m,n) \geqslant n+2$ 对 $m \geqslant 2$ 恒成立.

$A(m+1,n) = A(m, A(m+1, n-2))$

$A(m+1,n) \geqslant n+2$ 对 $m \geqslant 1$ 成立

不妨令 $A(m+1,n-2) = k > (n-2)+2 = n$.

$\therefore A(m+1,n) = A(m,k)$

又 $\because$ 前面证得 $A(m,n+1) > A(m,n)$

$k > n$

$\therefore A(m+1,n) = A(m,k) > A(m,n)$

综上，有 $A(m+1,n) > A(m,n)$

$A(m,n+1) > A(m,n+1)$ 成立

(3) $A(n,n) \leq x$ 的最大自然数 n 为 $\alpha(x)$

证明：$\alpha(x) = \omega(1)$

$\alpha(x) = o(\lg^* x)$

① 证明 $\alpha(x) = \omega(1)$

由 (2) 知 $A(n,n)$ 随 n 的增大而递增

同理有 $\alpha(x_1) \geq \alpha(x_2)$，$x_1 > x_2$ 时

$\because A(1,1)=1$

取 $c_0 = \frac{1}{2}$，$x_0 = 4$，当 $x \geq x_0$ 时

$0 \leq \frac{1}{2} \times 1 < 1 = \alpha(x_0) \leq \alpha(x)$

即 $\alpha(x) > c_0 \times 1 > 0$

即 $\alpha(x) = \omega(1)$

② 证明 $\alpha(x) = o(\lg^* x)$

由于 $A(n,n) = A(n-1, A(n,n-1))$

$= \cdots$

$= A(n-1, A(n-1, \cdots A(n,0)))$

Q3. (1)

⑤

① $T(n)=3T(\frac{n}{2})+n^2$. 可以用主定理情况③

$\log_b a=\log_2 3<2$.

取 $\varepsilon=2-\log_2 3$ 有.

$f(n)=n^2=\Omega(n^{\log_2 3+\varepsilon})$

又∵ 取 $c=1$, $n_0=1$, 当 $n\geq n_0$ 时有.

$3f(\frac{n}{2})=3\times\frac{n^2}{4}\leq 1\times n^2=cf(n)$

∴ $T(n)=\theta(n^2)$

② $T(n)=4T(\frac{n}{2})+n^2$. 可以用主定理情况②

$\log_b a=\log_2 4=2$

∵ $f(n)=\theta(n^{\log_b a})$

∴ $T(n)=\theta(n^{\log_b a}\lg n)=\theta(n^2\lg n)$

③ $T(n)=T(\frac{n}{2})+2^n$.

由于 2^n 无法求出多项式形式的上界

故不能用主定理

④ $T(n)=2^nT(\frac{n}{2})+n^n$. 可以用主定理、情况③

$\log_b a=\log_2 2^n=n$

∵ $f(n)=n^n=n^{\log_b a}$

$f(n)=\theta(n^{\log_b a})$

∴ $T(n)=\theta(n^n\lg n)$

⑤ $T(n)=16T(\frac{n}{4})+n.$ 可以用主定理.

~~$\log_b a=\log_2 2^n=n$~~. 情况①.

$\log_b a=\log_4 16=2$

$\because f(n)=n=n^1$

$\therefore \varepsilon=1 \quad f(n)=O(n)=O(n^{\log_4 16-1})$

$T(n)=\theta(n^2)$

⑥ $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n$

$\log_b a=\log_2 2=1$

$\because$ ~~$f(n)=n\lg n=O(n\lg n)<\theta(n^2)$~~

~~无法找到~~

$\because f(n)=n\lg n \quad O(n)<f(n)=O(n\lg n)<O(n^2)$

$\therefore$ 不能使用主定理

⑦ $T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\lg n}$ 可以用主定理

$\log_b a=\log_2 2=1$ 情况②

$\because O(\frac{n}{\lg n})<O(n)$

$f(n)=O(n^1)$

$\therefore T(n)=\theta(n\lg n)$

⑧ $T(n)=2T(\frac{n}{4})+n^{0.51}$

可用主定理，情况③

$\log_4 2=0.5$

$n^{0.51}=n^{\log_4 2+0.01}$

令 $\varepsilon=0.01$

$f(n)=\Omega(n^{\log_4 2+0.01})$

又∵ 取 $c=2$，$n_0=1$，当 $n\geq n_0$ 时有

$af(\frac{n}{b})=2f(\frac{n}{4})=2\cdot(\frac{n}{4})^{0.51}$

$=2^{-0.02}n^{0.51}$

$cf(n)=n^{0.51}$

$af(\frac{n}{b})\leq cf(n)$

即有 $T(n)=\theta(f(n))=\theta(n^{0.51})$

⑨ $T(n)=\frac{1}{2}T(\frac{n}{2})+\frac{1}{n}$

可以用主定理，情况②

$\log_2\frac{1}{2}=-1$

$f(n)=n^{-1}=n^{\log_b a}$

$f(n)=\theta(n^{\log_b a})$

$T(n)=O(n^{-1}\lg n)=O(\frac{\lg n}{n})$

⑩ $T(n)=16T(\frac{n}{4})+n!$

$\log_4 16=2$

∵ $n!$ 不能找到多项式渐近

∴ 不能用主定理

⑪ $T(n)=\sqrt{2}T(\frac{n}{2})+\lg n$　可以用主定理

$\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$.　情况(1)

对于 $g(n)=n^{\frac{1}{3}}-\lg n$

$g'(n)=\frac{1}{3}n^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{n}$　当 $n<3$ 时 $g'(n)<0$

$n>3$ 时 $g'(n)>0$

又∵ $g(3)=3^{\frac{1}{3}}-\lg 3>0$

∴ 对于 $c=1$ $n_0=2$ $n\geqslant n_0$ 有.

$0<f(n)=\lg n<c\times n^{\frac{1}{3}}$ 恒成立 $\lg n=O(n^{\frac{1}{3}})$

即.存在 $\varepsilon=\frac{1}{6}$ 使得 $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$

$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^{\frac{1}{2}})$

⑫ $T(n)=3T(\frac{n}{2})+\sqrt{n}$　可以用主定理

$1<\log_2 3<2$　情况①

$n=n^{\frac{1}{2}}$

对于 $\varepsilon=\log_2 3-\frac{1}{2}>0$ 有

$f(n)=n^{\frac{1}{2}}=O(n^{\log_2 3-(\log_2 3-\frac{1}{2})})$

∴ $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

$=\Theta(n^{\log_2 3})$

⑬ $T(n)=3T(\frac{n}{3})+\sqrt{n}$. 可以用主定理

$\log_3 3=1>\frac{1}{2}$　情况①

存在 $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$, 使得

$f(n)=\sqrt{n}=O(n^{\log_3 3-\frac{1}{2}})$

$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

$=\Theta(n)$

⑭ $T(n)=4T(\frac{n}{2})+cn$, $n\geq 0$

$\log_2 4=2$

对于$\varepsilon=1>0$，$c_0=c+1$有.

$0<f(n)=cn<c_0 n$

$f(n)=O(n^{\log_2 4-\varepsilon})=O(n)$

$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^2)$

⑮ $T(n)=3T(\frac{n}{4})+n\lg n$.   可以用主定理情况③

$0<\log_4 3<1$ $f(n)=n\lg n$.

存在$\varepsilon=1-\log_4 3>0$ $n_0=5$. $n\geq n_0$

$c_0=1$

有

$f(n)=n\lg n>n=c_0\cdot n$, >0

即有 $f(n)=\Omega(n)=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$

对于 $n_0=5$ $c_1=\frac{7}{8}$

有 $af(\frac{n}{b})=3f(\frac{n}{4})=\frac{3n}{4}\lg\frac{n}{4}<\frac{3n}{4}\lg n$

$<\frac{7n}{8}\lg n$

$=c_1 f(n)$

$af(\frac{n}{b})\leq cf(n)$ 对 $c_1=\frac{7}{8}$, $n\geq 5$成立

即有 $T(n)=\Theta(f(n))$

$=\Theta(n\lg n)$

⑯ $T(n)=3T(\frac{n}{3})+\frac{n}{2}$. 可以用主定理情况②

$\log_3 3=1$

$\because f(n)=\frac{n}{2}=O(n)=O(n^{\log_3 3})$

$\therefore T(n)=\Theta(n\lg n)$

⑰ $T(n)=6T(\frac{n}{3})+n^2\lg n$

$1<\log_3 6<2$

$\because O(n^2\lg n)>O(n^2)$

令 $\varepsilon=2-\log_3 6$，则

$f(n)=n^2\lg n=\Omega(n^{\log_3 6+2-\log_3 6})$

$af(\frac{n}{b})=6f(\frac{n}{3})=6\cdot\frac{n^2}{9}\lg\frac{n}{3}$

$cf(n)=cn^2\lg n$

对于 $n_0=2, c=\frac{8}{9}$，对 $n\geq n_0$ 有 $af(\frac{n}{b})=\frac{2n^2}{3}\lg\frac{n}{3}$

$<\frac{2n^2}{3}\lg n<cf(n)$

即有 $T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n^2\lg n)$

⑱ $T(n)=4T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\lg n}$.

$\log_2 4=2$. 可以使用主定理情况1

$\because O(\frac{n}{\lg n})<O(n)$

$f(n)=O(n^1)$

令 $\varepsilon=1$ $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$

$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})=\Theta(n^2)$

⑲ $T(n)=64T(\frac{n}{8})-n^2\lg n$.

由于主定理要求 $f(n)$ 需大于0.

故不能使用主定理.

⑳ $T(n)=7T(\frac{n}{3})+n^2$.

$1<\log_3 7<2$. 令 $\varepsilon=2-\log_3 7>0$.

使得 $f(n)=\Omega(n^2)=\Omega(n^{\log_3 7+2-\log_3 7})$

又∵ 有 $c=\frac{8}{9}$ 使得当 $n\geq n_0=1$ 时有.

$af(\frac{n}{b})=7f(\frac{n}{3})=7\times\frac{n^2}{9}<\frac{8}{9}n^2=cf(n)$ 成立

故由主定理情况③得

$T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n^2)$

㉑ $T(n)=4T(\frac{n}{2})+\lg n$.

$\log_2 4=2$.

∵ $O(\lg n)<O(n)$

∴ 在主定理的3种情况中没有对应

情况，不能用主定理

㉒ $T(n)=T(\frac{n}{2})+n(2-\cos n)$

$\log_2 1=0.$

$\cos n\in[-1,1]$ $2-\cos n\in[1,3]$

$n\leq n(2-\cos n)\leq 3n.$

渐近上界为 $O(3n)$ 渐近下界为 $O(n)$

存在 $\varepsilon=1$ 令 $f(n)=O(n^{\log_b a+\varepsilon})=O(n)$

$af(\frac{n}{b})=f(\frac{n}{2})=\frac{n}{2}(2-\cos\frac{n}{2})\leq\frac{3}{2}n.$

$cf(n)=cn(2-\cos n)\geq cn$

要使 $af(\frac{n}{b})\leq cf(n)$

即 $1-\frac{1}{2}\cos\frac{n}{2}\leq c(2-\cos n)$

又∵不管 n_0 取多少

对于形如 $n=2m\pi$ $m\in N$

$n>n_0$ 的n来说

$af(\frac{n}{b})=\frac{3}{2}n$ $cf(n)=n$

$af(\frac{n}{b})>cf(n)$ 不满足主定理情况(3)

即不能用主定理判断.

㉓ $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n\lg\lg n.$

$\log_2 2=1.$ $O(n\lg n\lg\lg n)>O(n)$

找不到具体的 $\varepsilon>0$，使得

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

但由于此式也不满足主定理

情况①和②.

所以用不了主定理.

㉔ $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n(\lg\lg n)^r, r\neq 0.$ (2

$\log_2 2=1$

由于 $O(n(\lg\lg n)^r) > O(n)$

又∵无法找到具体的 $\varepsilon>0$ 使得

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

∴用不了主定理

㉕ $T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\frac{(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n}$

$s\neq 0$

由于 $O(\lg n)<O(n)$

∴ $O(\lg\lg n)<O(\lg n)$

$\log_2 2=1$

∴ $O(n\frac{(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n})>O(n)=O(n^{\log_b a})$

无法找到具体的 $\varepsilon>0$ 使得

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

∴用不了主定理.

(2)

7式：$T(n)=2T(\frac{n}{2})+\frac{n}{\lg n}$

23式：$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\lg n\lg\lg n$

24式：$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n(\lg\lg n)^r \quad r\neq 0$

25式：$T(n)=2T(\frac{n}{2})+n\frac{(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n} \quad s\neq 0$

对7式 $\frac{n}{\lg n}=(\lg^{(0)}n)^1\cdot(\lg^{(1)}n)^{-1}$

$e=(1,-1)$

对23式 $n\lg n\lg\lg n=(\lg^{(0)}n)^1\cdot(\lg^{(1)}n)^1\cdot(\lg^{(2)}n)^1$

$e=(1,1,1)$

对24式 $n(\lg\lg n)^r=(\lg^{(0)}n)^1\cdot(\lg^{(2)}n)^r$

$e=(1,0,r)$

对25式 $n\frac{(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n}=(\lg^{(0)}n)^1\cdot(\lg^{(1)}n)^{-1}\cdot(\lg^{(2)}n)^{-1}\cdot(\lg^{(3)}n)^s$

$e=(1,-1,-1,s)$

求T(n)渐近阶：

①对7式： e没有除首项外不为(-1)的项

$cord(e)=1+1=2$

$cpow(e)=0.$

$\alpha=\log_2 2=1 \quad \alpha>cpow(e)>-1$

$T(n)=\theta(\frac{n}{\lg n}\cdot\lg^{(1)}n\cdot\lg^{(2)}n)$

$=\theta(n\lg\lg n)$

② 对23式

e_1 就不为(-1)

$cord(e)=1$ $cpow(e)=e_1=1$

$\alpha=\log_2 2=1$ $\alpha=e_0$ $cpow(e)>-1$

$$T(n)=\theta(n\lg n\lg\lg n\cdot\prod_{i=1}^{1}\lg^{(i)}n)$$

$$=\theta(n(\lg n)^2\lg\lg n)$$

③ 对24式

e_1 不为(-1)

$cord(e)=1$ $cpow(e)=e_1=0$

$\alpha=\log_2 2=1$ $\alpha=e_0$ $cpow(e)>-1$

$$T(n)=\theta(n(\lg\lg n)^r\cdot\lg^{(1)}n)$$

$$=\theta(n\lg n(\lg\lg n)^r)$$

④ 对25式

e_3 为首个不为(-1)的项

$cord(e)=3$ $cpow(e)=e_3=s$

$\alpha=\log_2 2=1$ $\alpha=e_0$

1° $cpow(e)=s>-1$ 时

$$T(n)=\theta(n\frac{(\lg\lg\lg n)^s}{\lg n\lg\lg n}\cdot\lg^{(1)}n\cdot\lg^{(2)}n\cdot\lg^{(3)}n)$$

$$=\theta(n(\lg\lg\lg n)^{s+1})$$

2° $cpow(e)=s<-1$ 时.

$$T(n)=\theta(n^{\alpha})=\theta(n)$$

Q4.(1) 首先构建给定n时，f、S_n相互的映射，再证明这两个算法分别为$\tilde{F}_n$到S_n、S_n到$\tilde{F}_n$的双射且两个算法互为逆映射。

不妨设n有$p_0, p_1, \cdots, p_m$共(m+1)个正奇因子

其中$p_0、p_1 \cdots 、p_m$互不相等

$1 \le p_0 < p_1 < \cdots < p_m \le n$

且 $n = p_i q_i \quad i \in [0, m], i \in N$

则 $2n = 2p_i q_i = p_i \cdot 2q_i = p_i \cdot s_i$

此时p_i必为奇数，$s_i = 2q_i$必为偶数

对于$n = \sum_{i=a}^{b} i$ 根据等差数列求和公式有：

$$n = \frac{(a+b)(b-a+1)}{2}$$

由于 $a \ge 1$ 可知 $(b-a+1) < (a+b)$

则有 $(a+b)(b-a+1) = 2n$.

那么我们的映射规则如下：

① 已知n，给定$f \in \tilde{F}_n$，求出$t = \frac{2n}{f}$，

易知 f、t 一个为奇一个为偶

由对$n = \sum_{i=a}^{b} i$的分析，$a+b > (b-a+1)$

令 $a+b = \max\{f, t\} = \max\{f, \frac{2n}{f}\}$

$b-a+1 = \min\{f, t\} = \min\{f, \frac{2n}{f}\}$

则
$$\begin{cases} a = \dfrac{\max\{f, \frac{2n}{f}\} - \min\{f, \frac{2n}{f}\} + 1}{2} \\ b = \dfrac{f + \frac{2n}{f} - 1}{2} = \dfrac{f^2 + 2n - f}{2f} \end{cases}$$

所以我们输出的对应$\langle a, b \rangle \in S_n$即为

$$\left\langle \frac{\max\{f, \frac{2n}{f}\} - \min\{f, \frac{2n}{f}\} + 1}{2}, \frac{f^2 + 2n - f}{2f} \right\rangle$$

由f和n的唯一性，可知对任意f，这样求出的$\langle a,b\rangle$唯一。由f为奇，易知求出的a、b都为正整数，且大于等于1

对$\forall\ f_1、f_2\in F_n$ $f_1\neq f_2$，不可能使得对应$\langle a_1,b_1\rangle=\langle a_2,b_2\rangle$，反证如下：

若$b_1=b_2$，则有$f_1+\frac{2n}{f_1}=f_2+\frac{2n}{f_2}$

解得$f_1-f_2=0$或$f_1f_2=2n$

又$\because f_1、f_2$不相等且均为奇数，所以两者均不成立。

由此证得不存在两个不同的$f_1、f_2\in F_n$，映射到S_n中同一组$\langle a,b\rangle$上.

(反证) 假设存在$\langle a_w,b_w\rangle\in S_n$，但不能由$f\in F_n$由上述算法映射得到.

则由$\frac{(a_w+b_w)(b_w-a_w+1)}{2}=n$，

(a_w+b_w)、(b_w-a_w+1)一奇一偶可知.

(a_w+b_w)、(b_w-a_w+1)中的奇数必为n的正奇因子

这一组 这一奇数必对应n中的P_k

把P_k代入我们的算法可得$q_k=\frac{2n}{P_k}$.

也与(a_w+b_w)、(b_w-a_w+1)中的偶数对应，所以假设不成立

综上，已知n，$f\in F_n$到$\langle a,b\rangle\in S_n$的映射构建完成，并证明了$F_n$到$S_n$的映射为一个双射.

所以从 $\widetilde{F}_n$ 到 S_n 的一一映射的算法为:

已知 n、f

$t \leftarrow \frac{2n}{f}$

$k_1 \leftarrow \max\{t, f\}$

$k_2 \leftarrow \min\{t, f\}$

$a \leftarrow (k_1-k_2+1)/2$

$b \leftarrow (k_1+k_2-1)/2$

输出 $\langle a, b\rangle$

② 已知 n,给定 $\langle a, b\rangle \in S_n$

由对从 a 到 b 公差为1的等差数列的分析可知:$(a+b)>(b-a+1)$

且一个为奇一个为偶

输出对应的 $f \in \widetilde{F}_n$ 即为输出 $(a+b)$、$(b-a+1)$ 中的奇数即可.

下面证明:对于同样的 $\langle a, b\rangle$,只有1个对应的 f

由 f 为 $(a+b)$、$(b-a+1)$ 中的奇数可知,只可能有1个 f。若有2个对应的 f $(f_1、f_2)$,两者必相等,故假设不成立。

下面证明:不存在两个不同的 $\langle a_1, b_1\rangle$,$\langle a_2, b_2\rangle \in S_n$,映射到 F_n 的同一个 f 上.

(反证)假设存在满足条件的 $\langle a_1, b_1\rangle$ $\langle a_2, b_2\rangle$

则 $a_1+b_1=a_2+b_2$ 成立

或 $a_1+b_1=b_2-a_2+1$ 成立

在前一种情况下,也必有 $b_1-a_1+1=b_2-a_2+1$ 成立

则可解得 $a_1=a_2$,$b_1=b_2$(舍)

在后一种情况下,必有

$a_2+b_2 = b_1-a_2+1$ 成立.

解得 $a_1=a_2$,$b_1=b_2$(舍)

~~综上~~,故假设不成立.

综上,可证明从 S_n 到 $\widetilde{F}_n$ 的映射为双射.

表述为:

$t_1 \leftarrow a_0+b$

$t_2 \leftarrow b-a+1$

if $2 \nmid t_1$, $f \leftarrow t_1$

else $f \leftarrow t_2$

输出 f.

③ 由上述步骤容易看出,这里从 S_n 到 $\widetilde{F}_n$、从 $\widetilde{F}_n$ 到 S_n 中 $\langle a, b\rangle$、f 都是一一对应,互为逆映射

(2) 算法1的正确性:　　($令a_1<a_2<\cdots<a_k$)

以 $n=2^{k_0}\times a_1^{k_1}\times a_2^{k_2}\times\cdots\times a_m^{k_m}$ 为例

其中 $a_1\cdots a_k$ 为奇数，上式为质因数分解式.

令 $n_1=a_1^{k_1}\times a_2^{k_2}\times\cdots\times a_m^{k_m}$

由数论知识知 n_1 的正因子数=每一奇因子的幂加一相乘

即 n_1 的正因子数 = n_1 的正奇因子数

$=(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$

由 $n=2^{k_0}\times n_1$ 可知

n 的奇因子数 = n_1 的正因子数 $=(k_1+1)\cdots(k_m+1)$

所以算法1中: ① while $2|n$ do

$n\leftarrow\frac{n}{2}$;

表示若 n 为奇, 不作改变; 若 n 为偶则反复除以2直至为奇,

此时新的 n 即为 n_1

② 从 $S\leftarrow1$; 到 $P\leftarrow P+1$; end; 语句,

是在检测 n_1 是否有大于3小于 $\sqrt{n_1}$ 的因子, 若有则反复除以该因子至新的 n 中不含该因子.

同时求出其幂 e, 令 $S=(e+1)S$.

等同于求解 $(k_1+1)(k_2+1)\cdots$

③ 遍历完 $\sqrt{n_1}$ 以下的因子后.

若所有因子都已找到, 则 $n=1$, 此时的

$S=(k_1+1)\cdots(k_m+1)$ 即为所求

n 的正奇因子数.

若 $n\neq1$, 说明存在比 $\sqrt{n_1}$ 大的奇因子,

并且只可能有1个这样的因子且其幂为1

因此

所以

最坏

(3)

(4)

2023.10.10

因此需要把这个 $(i+1)$ 倍补上

所以有 $s \leftarrow 2s$ 来得到最终的 s。

最坏时间复杂度：

$$m = \lceil \lg n \rceil + 1 \quad \Theta(2^{\frac{m}{2}})$$

(3) ① 能够断言.

② 能够断言

(4) 没写完.