

**Q1.** (10+10=20 分)

1. 对于关键字集合  $\{3, 6, 9, 2, 4, 5, 13, -3\}$ , 其对应的二叉搜索树 (定义见 Topic\_5-1.pdf, 第 6 页) 的最大树高  $H_{max}$  为多少? 最小树高  $H_{min}$  为多少? 并分别画出一个树高为  $H_{max}$  和一个树高为  $H_{min}$  的二叉搜索树;
2. 对于关键字集合  $\{3, 6, 9, 2, 4, 5, 13, -3\}$ , 分别画出两个黑高不同的红黑树 (定义见 Topic\_5-1.pdf, 第 27 页), 并标明对应的黑高  $H_{black}$ 。

**Q2.** (5+10+5+ (3+3+4) =30 分)

1. 参考算法 INORDERTREEWALK (见 Topic\_5-1.pdf, 第 7 页), 并在其基础上修改, 得到算法 INORDERTREEWALK-LEAF (只输出叶子结点的关键字);
2. 考虑某个关键字  $k$ , 已知关键字  $k$  在算法 INORDERTREEWALK 的输出中出现且仅出现了 1 次, 且在 INORDERTREEWALK-LEAF 的输出中出现。现在请设计算法 TREESearch-SET( $x, k$ ) (给出伪代码), 输入为二叉搜索树的根节点  $root$  以及关键字  $k$ , 输出三个集合  $S_{path}$ ,  $S_{left}$ ,  $S_{right}$ , 其中  $S_{path}$  为算法 TREESearch( $x, k$ ) (见 Topic\_5-1.pdf, 第 12 页) 查找路径上的关键字集合,  $S_{left}$  为查找路径左边的关键字集合,  $S_{right}$  为查找路径右边的关键字集合 (例如, 对于下图 TREESearch-SET( $root, 9$ ) 的输出为  $S_{path} = \{8, 9, 10\}$ ,  $S_{left} = \{0, 1, 6\}$ ,  $S_{right} = \{12, 20, 52\}$ );

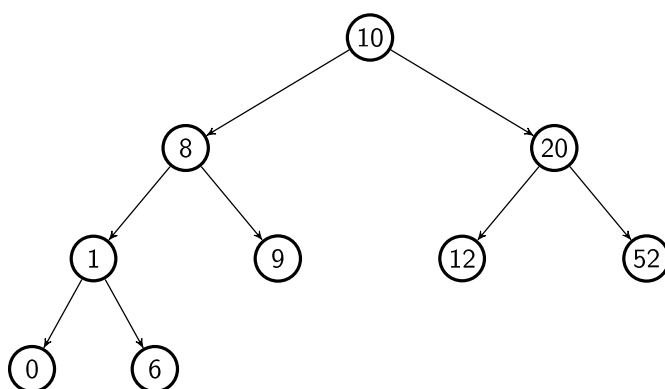


图 1: TREESearch-SET 示例

3. 对你设计的算法  $\text{TREESEARCH-SET}(x, k)$  的时间复杂度进行分析；
4. 已知  $S_{path}$ ,  $S_{left}$ ,  $S_{right}$  为算法  $\text{TREESEARCH-SET}(\text{root}, k)$  的输出，请问以下命题是否正确：

- $\forall a \in S_{left}, \forall b \in S_{right}, a \leq b.$
- $\forall a \in S_{left}, \forall b \in S_{right}, a \leq k \leq b.$
- $\forall a \in S_{left}, \forall b \in S_{right}, \forall c \in S_{path}, a \leq c \leq b.$

若正确，请简要证明；若不正确，请给出反例。

**Q3.** (15 分)

证明：任何一棵含  $n$  个结点的二叉搜索树可以通过  $O(n)$  次旋转，转变为其他任何一棵含  $n$  个结点的二叉搜索树。

**Q4.** (15 分)

假设用  $\text{RB-INSERT}$  将一个结点  $z$  插入一棵红黑树，紧接着又用  $\text{RB-DELETE}$  将它从树中删除。结果的红黑树与初始的红黑树是否一样？若一样，请证明；若不一样，请给出反例。

**Q5.** (20 分)

给出下图中的斐波那契堆调用  $\text{EXTRACT-MIN}$  后得到的斐波那契堆。

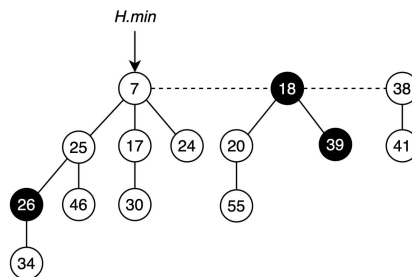


图 2: 斐波那契堆