Problem 1. 已知：

$$\Pr\Big[\sup_{t\in T}\sum_{k=1}^{\infty}|X_{\pi_k(t)}-X_{\pi_{k-1}(t)}| > C\cdot u\cdot \sup\sum_{k=1}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}\cdot d(\pi_k(t),\pi_{k-1}(t))\Big] \le 2\cdot e^{-u^2}$$

$$\cancel{X_t = X_T - X_{T_0} = \sum_{k=1}^{\infty}(X_{\pi_k(t)} - X_{\pi_{k-1}(t)})}$$

令 $S = C\cdot \sup_{t\in T}\sum_{k\ge 1}2^{\frac{k}{2}}d(\pi_k(t),\pi_{k-1}(t))$

则 $\cancel{\Pr[\sup_{t\in T}|X_T - X_{T_0}| > uS] \le 2e^{-u^2}}$

$\cancel{E[\sup_{t\in T}X_T] = E[\sup}$

$$E[\sup_{t\in T}X_t] = E[\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})] + E[X_{t_0}]$$ 其中 $E[X_{t_0}] = t_0$.

$$E[\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})] = \int_0^{\infty}P(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0}) > u)\,du.$$

$$P(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0}) \ge u) \le \sum_{t\in T}P(X_t - X_{t_0} \ge u)$$

$$X_t - X_{t_0} = X_t - X_{\pi_1(t)} + X_{\pi_1(t)} - X_{t_0}$$ 令 $\pi_0(t) = t_0$.

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(X_{\pi_k(t)} - X_{\pi_{k-1}(t)})$$

根据$\pi_k(t)$的定义.

$$\cancel{d(t,T_n)}\ d(t,\pi_k(t)) = d(t,T_k) = \inf_{s\in T_k}d(t,s)$$

$$E[\sup_{t\in T}X_t] \le 2S$$
$$= 2C\cdot\sup_{t\in T}\sum_{k=1}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}d(\pi_k(t),\pi_{k-1}(t))$$

又根据三角不等式：

$$d(\pi_k(t),\pi_{k-1}(t)) \le d(t,\pi_k(t)) + d(t,\pi_{k-1}(t))$$
$$\le d(t,T_k) + d(t,T_{k-1})$$

故有：
$$S \le \sup_{t\in T}\sum_{k=1}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}[d(t,T_k) + d(t,T_{k-1})]$$
$$\le 4\sup_{t\in T}\sum_{k=0}^{\infty}2^{\frac{k}{2}}d(t,T_k)$$

由三角不等式得 $d(\pi_k(t), \pi_{k-1}(t)) \le d(t, \pi_k(t)) + d(t, \pi_{k-1}(t))$

$$\le d(t, T_k) + d(t, T_{k-1})$$

所以 $\cancel{S \le 2 \sup_{t\in T} \sum_{k\ge 0} 2^{\frac{k}{2}} d(t, T_n)}$

$2^{\frac{1}{2}}[d(t,T_1)+d(t,T_0)]$

$2^{1}[d(t,T_1)+d(t,T_2)]$

$$S \le \sup_{t\in T} \sum_{k\ge 1} 2^{\frac{k}{2}} [d(t,T_k) + d(t,T_{k-1})].$$

$$\le 2 \sup_{t\in T} \sum_{k\ge 0} 2^{\frac{k}{2}} d(t, T_k)$$

$$\Rightarrow E \sup_{t\in T} X_t \le 2 \sup_t \sum_{n\ge 0} 2^{\frac{n}{2}} d(t, T_n)$$

$\cancel{2^{\frac{0}{2}} d(t,T_0)}$

又 $\because d(t, T_k) = \inf_{s\in T_n} d(t,s)$

$2 \quad 2^1 + 2^{\frac{1}{2}}$

$2^{\frac{3}{2}} > 2^1 + 2^{\frac{1}{2}}$

$2^1 > 2^{\frac{1}{2}} + 1.$

$$\therefore E \sup_{t\in T} X_t \le 2 \sup_t \sum_{k\ge 0} 2^{\frac{k}{2}} d(t, T_k).$$

$$E\left[\sup_{t\in T} X_t\right] \le 4 \sup_t \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} d(t, T_k).$$

又 $\because d(t, T_k) = \inf_{s\in T_k} d(t, s)$

$$\therefore E[\sup_{t\in T} X_t] \le 4 \sup_{t\in T} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} d(t, T_k).$$

$$E[\sup_{t\in T} X_t] \le O(\gamma_2(T, d))$$

Problem 2. 对于 m 个子句，n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

设计算法为：每个变量随机地以 $\frac{1}{2}$ 的概率设置为1，或以 $\frac{1}{2}$ 的概率设置为0，

下面证明期望：

定义随机变量 $Y_i = I\{子句i是满足的\}$，$i=1,2,\cdots,m$.

1° 若不存在一个文字及其否定同时存在于同一子句，

则

$Pr\{子句i不满足\} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$Pr\{子句i被满足\} = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$E[Y_i] = \frac{7}{8}$

设 Y 为赋值满足的子句总数.

有 $Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m$.

$$E[Y] = E[\sum_{i=1}^{m} Y_i] = \sum_{i=1}^{m} E[Y_i] = \sum_{i=1}^{m} \frac{7}{8} = \frac{7}{8}m.$$

算法复杂度为 $O(n)$

2° 若存在同时有一个文字及其否定的子句

则 $E[Y_i] = 1$.

$$E[Y] = E[\sum_{i=1}^{m} Y_i] \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{7}{8} = \frac{7}{8}m.$$

Problem 3. m 个子句，n 个变量，其中 $3 \leq n \leq 3m$.

对于1个字句，共有 $(2^3-1)\cdot 2^{n-3}$ 种赋值满足使之成立.

相对地，有 2^{n-3} 种赋值使之不能成立.

而对于 n 个变量，总的可能赋值数为 2^n 种.

（反证）设对于 $m \leq 7$，不存在一种赋值使得所有子句成立

则所有 2^n 种赋值都不能使此字句成立.

但是每个子句对应不成立的赋值数只有 2^{n-3} 种（且相互可能重复）

那么最多的不成立赋值数 $2^{n-3} \times m \leq 7 \times 2^{n-3} < 2^n$，矛盾.

综上，对于 $m \leq 7$，存在一种赋值使所有子句成立.

Problem 4. 设 Y 为运行一次后输出的赋值满足的子句数，k' 为不大于 $\frac{7}{8}m$ 的最大正整数.

$k' \leq \frac{7m}{8} - \frac{1}{8}$

$Y \sim B(m, \frac{7}{8})$ $\mu = \frac{7}{8}m$ $\sigma = \frac{7}{64}m$.

根据切比雪夫不等式：$P(|Y-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ 令 $k = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{7m}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{7m}}$

则有 $P(|Y - \frac{7}{8}m| \geq \frac{1}{8}) \leq \frac{1}{7m}$

$P(Y \leq \frac{7}{8}m - \frac{1}{8}) \leq P(|Y - \frac{7}{8}m| \geq \frac{1}{8}) \leq \frac{1}{7m}$

$P(Y > k') \geq P(Y > \frac{7m}{8} - \frac{1}{8}) \geq 1 - \frac{1}{7m} = \frac{7m-1}{7m}$

设 X 为运行算法直至第一次出现赋值到满足 $\frac{7}{8}m$ 个子句的运行次数

由几何分布的期望

$$E[X] = \frac{1}{P(Y>k')} \leq \frac{7m}{7m-1} < 8m.$$ 得证.

Problem 5. 设有m个子句，共n个变量.

用变量 y_i 表示第i个子句是否被满足

对于第k个子句 s_k，其中取"是"的变量集合记为 s_k^+

取"非"的变量集合记为 s_k^-

则线性规划可写为：

$$\max \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in s_k^+} x_j + \sum_{j\in s_k^-} (1-x_j) \geq y_i$$

$$x_1, \cdots, x_n \in \{0,1\}$$

$$y_1, \cdots, y_m \in \{0,1\}.$$

Problem 6. 进一步松弛 problem 5 中的线性规划.

$$\max \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in s_k^+} x_j + \sum_{j\in s_k^-} (1-x_j) \geq y_i$$

$$0 \leq y_i \leq 1 \qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \qquad j=1,\cdots,n.$$

设计算法为：与problem 2 相似，对每个变量随机赋值0或1即可.

下面证明其近似比为0.6：不妨令子句 k 中的所有变量都取"是"，即属于 s_k^+

则 $\Pr(\text{子句}k\text{满足}) = 1-\prod_i (1-x_i) \geq 1-\left(\frac{\sum(1-x_i)}{|k|}\right)^{|k|}$ （k为子句k中的变量数）

$$\geq 1-\left(1-\frac{y_k}{|k|}\right)^{|k|} \geq \left(1-\left(1-\frac{1}{|k|}\right)^{|k|}\right)\cdot y_k.$$

对于不全取"是"的情况可用 x_i 代替 $(1-x_i)$

$$E\left(\sum y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\text{子句}i\text{满足}) \geq \sum\left(1-\left(1-\frac{1}{|k|}\right)^{|k|}\right) y_k \geq \beta\cdot opt.$$

$$\beta = 1-\left(1-\frac{1}{|k|}\right)^{|k|} \text{ 则 } \lim_{k\to\infty} \beta = 1-\frac{1}{e} > 0.6$$

Problem 7. 对 $\forall f_i \in H$，$R_{emp}(f_i) \in [0,1]$.

由Hoeffding不等式：$\Pr[R(f)-R_{emp}(f) \geq \varepsilon] \leq e^{-2m^2\varepsilon^2}$.

$$\Pr[\exists f\in H: R(f)-R_{emp}(f)\geq\varepsilon] = P\left(\bigcup_{f\in H}\{R(f)-R_{emp}(f)\geq\varepsilon\}\right)$$

$$\leq \sum_{f\in H} (R(f)-R_{emp}(f)\geq\varepsilon)$$

$$\leq |H|\cdot e^{-2m\varepsilon^2}$$

等价于：$\Pr[\forall f\in H: R(f)-R_{emp}(f)<\varepsilon] \geq 1-|H|e^{-2m\varepsilon^2}$

令 $\eta = |H|e^{-2m\varepsilon^2}$，则：$\Pr[\forall f\in H: R(f)-R_{emp}(f)<\varepsilon] \geq 1-\eta$

即至少有概率 $(1-\eta)$ 使得 $\sup(R(f)-R_{emp}(f)) \leq \sqrt{\frac{1}{2m}(\ln|H|-\ln\eta)}$

Problem 8. $Z_t = E[A \mid Y_1, \cdots, Y_t]$. Y_t 表示顶点 t 的邻点集

要证明对所有的 t, 有 $E[Z_t \mid Y_1, \cdots, Y_{t-1}] = Z_{t-1}$

$$E[Z_t \mid Y_1, \cdots, Y_{t-1}] = \sum_{\text{所有}G} P(G \mid Y_1, \cdots, Y_{t-1}) E[A \mid G]$$

其中 $P(G \mid Y_1, \cdots, Y_{t-1})$ 是在给定 $Y_1, \cdots, Y_{t-1}$ 的条件下, 图 G 出现的概率.

Y_t 与 $Y_1, \cdots, Y_{t-1}$ 独立, 因此 $E[A \mid G]$ 与 X_t 独立

$$\begin{aligned} E[Z_t \mid Y_1, \cdots, Y_{t-1}] &= E[E[A \mid G] \mid Y_1, Y_2, \cdots, Y_{t-1}] \\ &= E[A \mid Y_1, \cdots, Y_{t-1}] \\ &= Z_{t-1} \end{aligned}$$

因此, Z_t 是一个鞅.

Problem 9. 证明: $\Pr(|A - E[A]| \geq c\sqrt{n}) \leq 2e^{-\frac{c^2}{2}}$.

~~Y_i 独立同分~~ $|A(y_1, y_2, \cdots y_i, \cdots y_n) - A(y_1, y_2, \cdots y_i', \cdots y_n)| \leq 1$.

即对于 Y_i 的邻点集改变时, 若删除一个邻点 (等于删除一条边), 则图的染色数不变, 若增加一个邻点 (即增加一条边), 则染色数最多增加 1 (即给该点染上一种新颜色).

$\cancel{P(|A - EA| \geq c\sqrt{n})}$

由 McDiarmid 不等式:

$\cancel{P(A - EA \geq c\sqrt{n}) \leq e^{-\frac{2c^2 n}{1 \cdot n}} = 2e^{-\frac{c^2}{2}}}$

$$P(|A - EA| \geq c\sqrt{n}) \leq 2e^{-\frac{2c^2 n}{n}} \leq 2e^{-\frac{c^2}{2}}$$