并行HW1

1. 4.2 ①~~固定负载~~

由 $T_n = \left(\frac{CN^3}{n} + \frac{bN^2}{\sqrt{n}}\right)s$

$T_1 = CN^3 s$

得 $f=0$. $W = W_s + W_p$.

其中 $W_s = 0$, $W_p = (CN^3)s = W$

额外开销 $W_o = \left(\frac{bN^2}{\sqrt{n}}\right)s$

① 固定负载，由 Amdahl定律.

$$S = \frac{n}{1+\frac{nW_o}{W}} = \frac{n}{1+n\cdot\frac{bN^2}{CN^3\cdot\sqrt{n}}} = \frac{CNn}{b\sqrt{n}+CN}$$

当 $n\to\infty$ 时, $S = \frac{CN}{b}\sqrt{n}$

故固定负载具有 $\sqrt{n}$ 加速度.

② 固定时间, 由 Gustafson 定律.

$$S = \frac{n}{1+\frac{W_o}{W}} = \frac{n}{1+\frac{bN^2}{CN^3\cdot\sqrt{n}}} = \frac{CNn\sqrt{n}}{CN\sqrt{n}+b}$$

当 $n\to\infty$ 时, $S=n$.

故固定时间具有线性加速度.

4.11. 在P个处理器上: $S = \frac{P}{1+f(P-1)} = P-1$

$$f = \frac{1}{P-1}$$

$$W_s = \frac{1}{P-1}W.$$

2. 用 PRAM-CRCW 模型: 使用 n^2 个处理器.

```
① copy A[1...n] to B[1...n]  //O(1)
② for i=1 to n par-do
      if B[i]=true then
         for j=i+1 to n par-do
            B[j] = false
         end for
      endif
   end for
③ for i=1 to n par-do
      if B[i]=true then
         return i
      endif
   end for
```

解释: 对于任何一个找到了的值为true的B[i], 把数组中排在B[i]后的值都赋为false, 由于n^2个处理器并行, 时间复杂度为O(1), 最后只剩首个true, 找到需O(1)

若用 PRAM-CREW, 则 B[i] = false 不能同时写, 则需 O(n) 时间。

3. 显然，对于只有1个点的图，算法正确．

用数学归纳法，假设对于n个点的图，算法正确．

即 $c'(n) \neq c'(1)$ ，n个点的有向环时

不妨设对(n+1)点的环，考虑第(n+1)个点．．

其中 $c'(1)$ 到 $c'(n-1)$ 与n个点有向环的情况对应，不会重复．

for $i = n$

$k_1 = c(n)$ 和 $c(n+1)$ 的最低不同二进制位．

$c'(n) = 2\times k_1 + c(n)_{k_1}$

end for

对 $i = n+1$

$k_2 = c(n+1)$ 和 $c(1)$ 的最低不同二进制位

$c'(n+1) = 2\times k_2 + c(n+1)_{k_2}$

① $k_1 = k_2$，由于 $c(n)_{k_1} = c(n)_{k_2} \neq c(n+1)_{k_2}$

故 $c'(n) \neq c'(n+1)$，而由于 $c(1)$、$c(n+1)$、$c(n)$ 满足 形如 0xxxx、1xxxx、0xxxx 格式

所以 $c(1)$ 和 $c(n)$ 最低不同二进制位不为 k_1，

又∵ $c(n+1)_k = 0$或1，$c(1)_k = 0$或1．

所以 $c'(1) \neq c'(n)$ 且 $c'(1) \neq c'(n+1)$

② $k_1 \neq k_2$．由于 $c(n)_{k_1} = 0$或1

$c(n+1)_{k_2} = 0$或1．

所以 $c'(n) = 2k_1 + c(n)_{k_1} \neq 2k_2 + c(n)_{k_2} = c'(n+1)$

1) 若 $c(1)$ 和 $c(2)$ 的最低不同二进制位为 k_2，

则 由于 $c(1)_{k_2} \neq c(n+1)_{k_2}$．

所以 $c'(1) \neq c'(n+1)$

2) 若 $c(1)$ 和 $c(2)$ 的最低不同二进制位不为 k_2

则易知 $c'(1) \neq c'(n+1)$

综上，证得算法正确性．

在n个处理器下，时间复杂度为 $O(1)$，工作量为 $O(n)$