CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

- Định nghĩa đồ thị
- Một số thuật ngữ
- Đường đi và chu trình
- Đồ thị liên thông
- Một số dạng đồ thị đặc biệt
- Đồ thị phẳng

ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

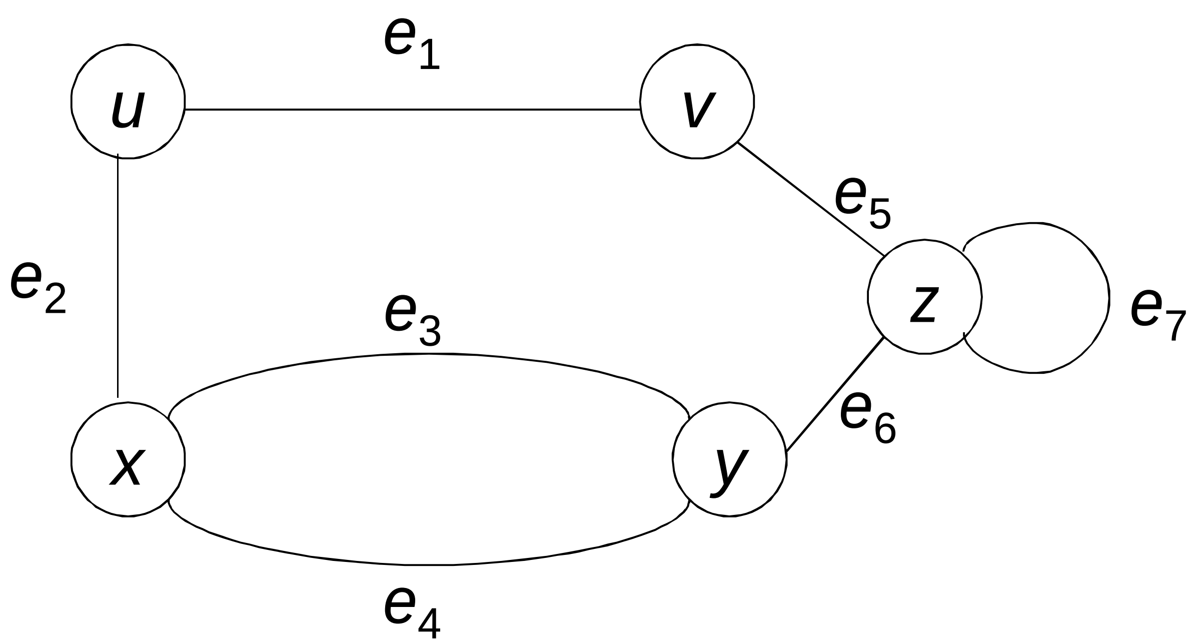
- Đồ thị vô hướng (undirected graph) $G = (V, E)$, gồm một tập V các đỉnh (vertice) và một họ E các cạnh (edge), mỗi cạnh $e = (u, v) \in E$ ứng với một cặp không có thứ tự các đỉnh $u, v \in V$
- Đồ thị có hướng (directed graph) $G = (V, E)$, gồm một tập V các đỉnh và một họ E các cạnh, mỗi cạnh $e = (u, v) \in E$ ứng với một cặp có thứ tự các đỉnh $u, v \in V$

ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Ví dụ 1: Đồ thị vô hướng: $V = \{u, v, x, y, z\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$e_3=(x, y)$
$e_4=(x, y)$
$e_7=(z, z)$

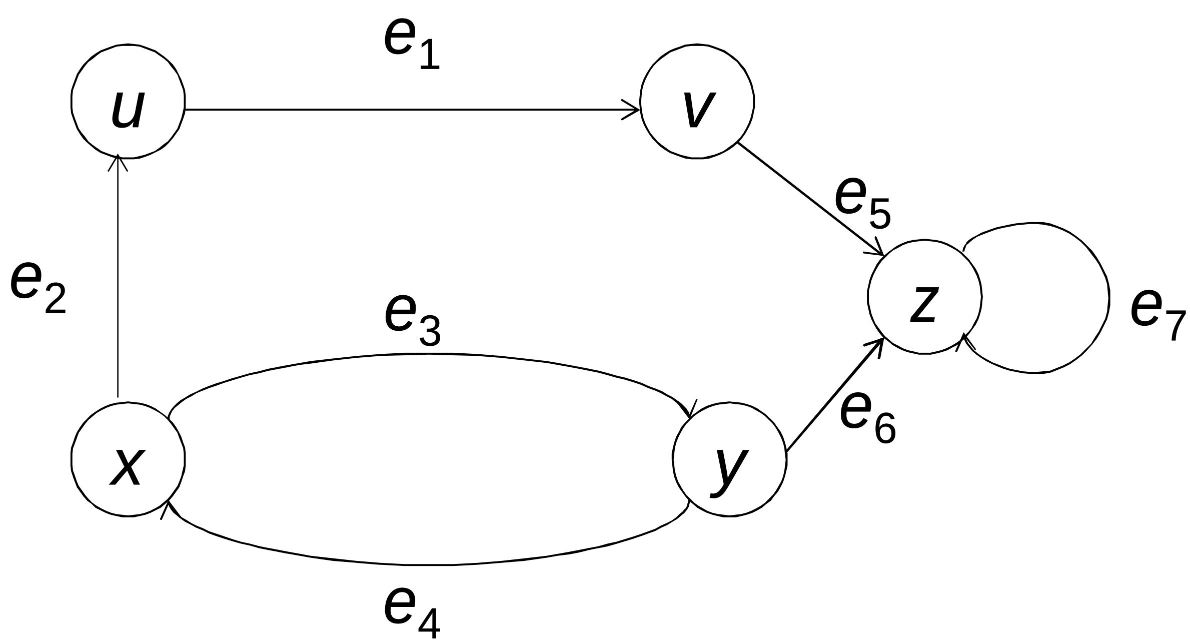


ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Ví dụ 2: Đồ thị có hướng: $V = \{u, v, x, y, z\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$e_3=(x, y)$
$e_4=(y, x)$
$e_7=(z, z)$



ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

- e_7 = (z, z) là cạnh khuyên
- e_3= (x, y) và e_4=(x, y) là hai cạnh song song
- Một đồ thị không có cạnh khuyên hoặc cạnh song song gọi là đơn đồ thị (simple graph), ngược lại gọi là đa đồ thị (multigraph)

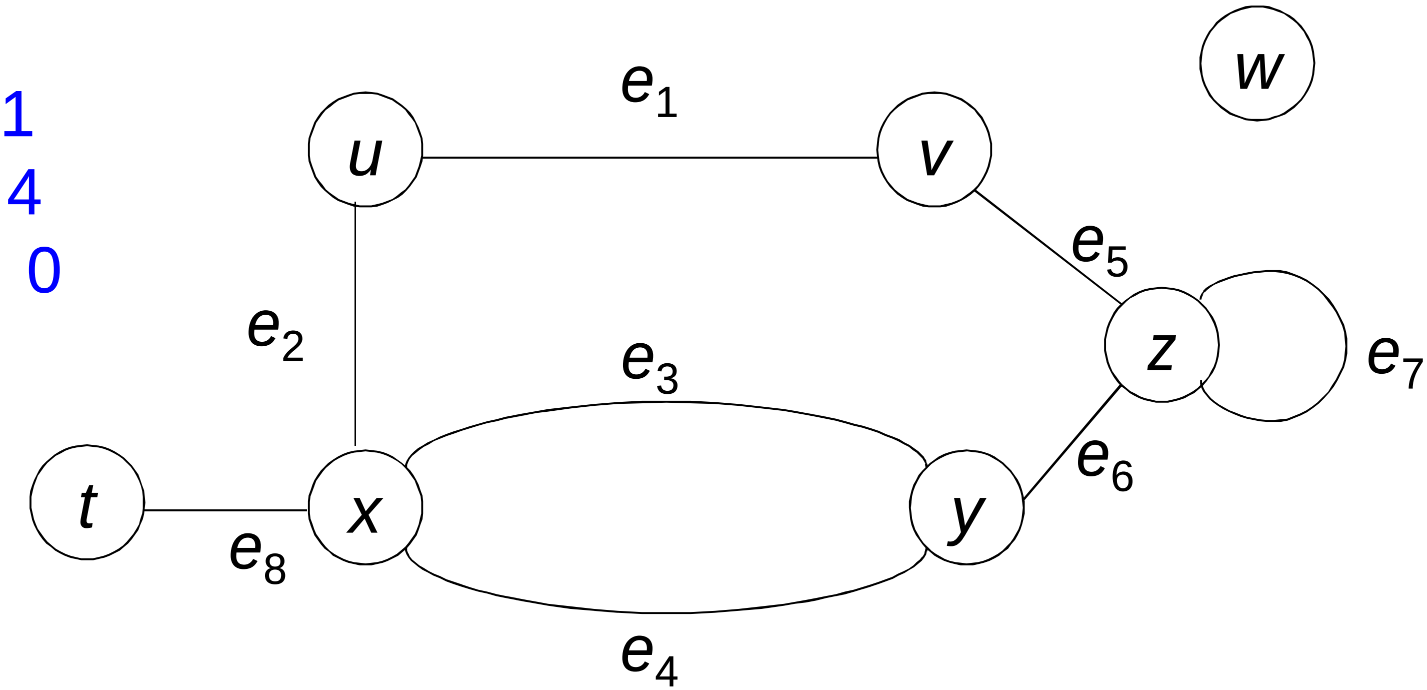
MỘT SỐ THUẬT NGỮ

- Đỉnh *u* và *v* là kề nhau (adjacent) nếu có cạnh *e* = (*u*, *v*), cạnh *e* gọi là liên thuộc với *u* và *v*
- Bậc (degree) của đỉnh *v* trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó, ký hiệu deg(*v*), đỉnh bậc 0 gọi là đỉnh cô lập, đỉnh bậc 1 gọi là đỉnh treo
- Bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh *v* trong đồ thị có hướng là số cạnh đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu $deg^{+}(v)$ ($deg^{-}(v)$)

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Ví dụ 3: Bậc của các đỉnh đồ thị vô hướng

$deg(t) = 1$
$deg(z) = 4$
$deg(w) = 0$



MỘT SỐ THUẬT NGỮ

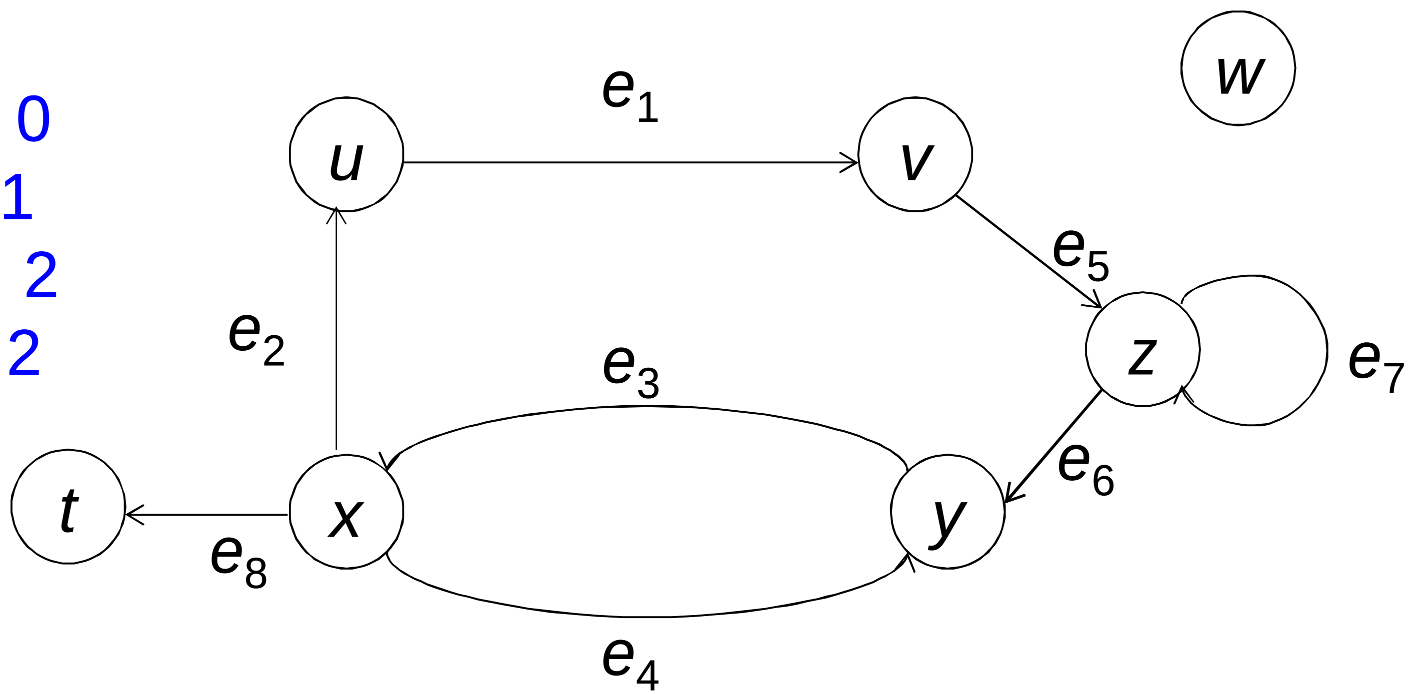
Ví dụ 4: Bán bậc của các đỉnh đồ thị có hướng

$deg^{+}(t) = 0$

$deg^{-}(t) = 1$

$deg^{+}(z) = 2$

$deg^{-}(z) = 2$



MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Định lý 1

G=(V, E) là đồ thị vô hướng m cạnh, thì

$$2m = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Chứng minh ?

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Chứng minh

- Mỗi cạnh e = (u, v) được tính một lần trong deg(u) và một lần trong deg(v)
- Suy ra $2m = \Sigma_{v \in V} deg(v)$

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Ví dụ 5

- Đồ thị G =(V, E), n đỉnh và mỗi đỉnh có bậc là 6 có bao nhiêu cạnh?
- Theo định lý $2m = \Sigma_{v \in V} deg(v) = n.6$ hay $2m=6n$
- Nên số cạnh $m = 3n$

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Hệ quả 1

- Trong một đồ thị vô hướng G =(V, E), số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là một số lẻ) là một số chẵn
- **Chứng minh?**

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Chứng minh

- Gọi O và U là tập các đỉnh bậc lẻ và bậc chẵn của G, thì

$$2m = \Sigma_{v\in V}deg(v) = \Sigma_{v\in O}deg(v) + \Sigma_{v\in U}deg(v)$$

- Do deg(v) chẵn với mọi $v\in U$ nên $\Sigma_{v\in U}deg(v) = 2k$
- Nên $2m = \Sigma_{v\in O}deg(v) + 2k$ hay $\Sigma_{v\in O}deg(v) = 2m - 2k$
- Vì mỗi deg(v), với $v\in O$, là lẻ và có |O| số như vậy, suy ra |O| là một số chẵn (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn)

MỘT SỐ THUẬT NGỮ

Định lý 2

- G=(V, E) là đồ thị có hướng, thì

$$|E| = \Sigma_{v \in V} deg^{+}(v) = \Sigma_{v \in V} deg^{-}(v)$$

Chứng minh

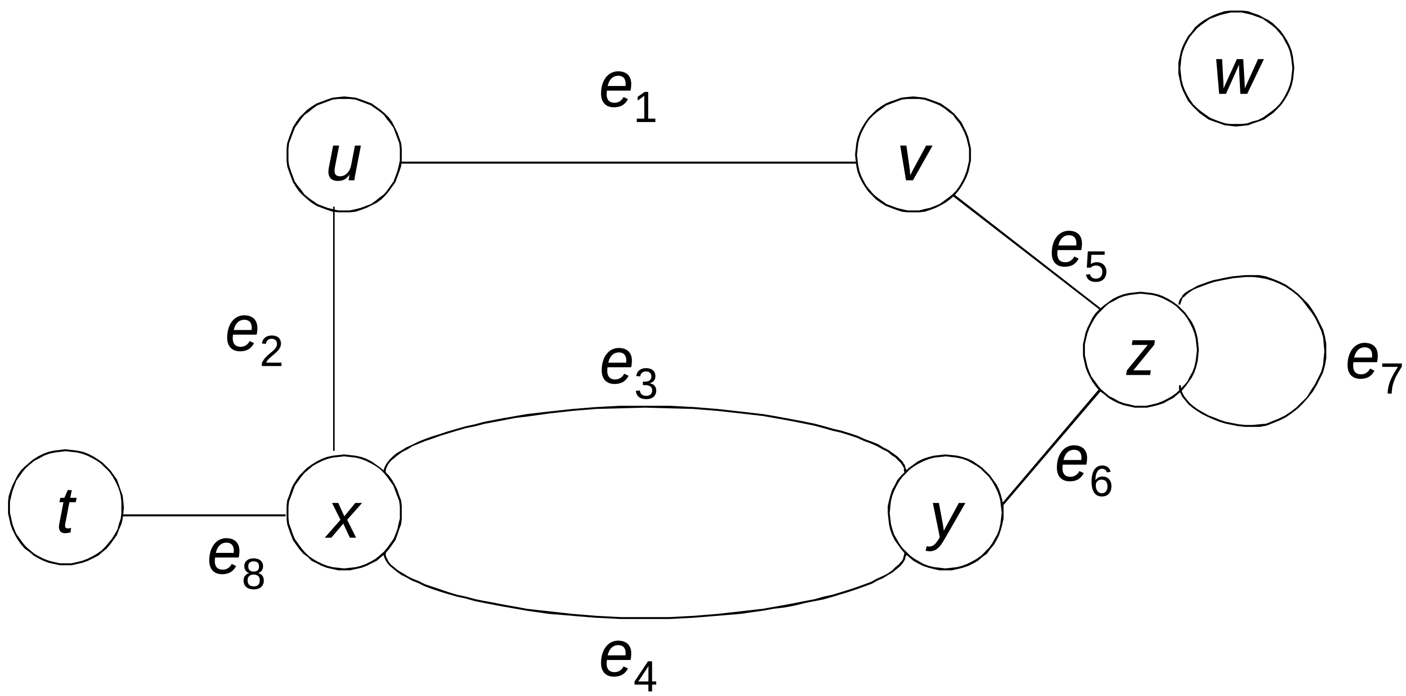
- Vì mỗi cung e=(u, w) chỉ được tính một lần trong bán bậc ra của u và một lần trong bán bậc vào của w nên có hệ thức trên

ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

- Đường đi độ dài n từ đỉnh x_0 đến đỉnh x_n trong một đồ thị là dãy $P = x_0, x_1, \ldots, x_n$ trong đó mỗi (x_i, x_{i+1}) là một cạnh
- Đường đi có đỉnh đầu x_0 trùng với đỉnh cuối x_n gọi là chu trình
- Đường đi hay chu trình gọi là đơn nếu không có cạnh (cung) lặp lại

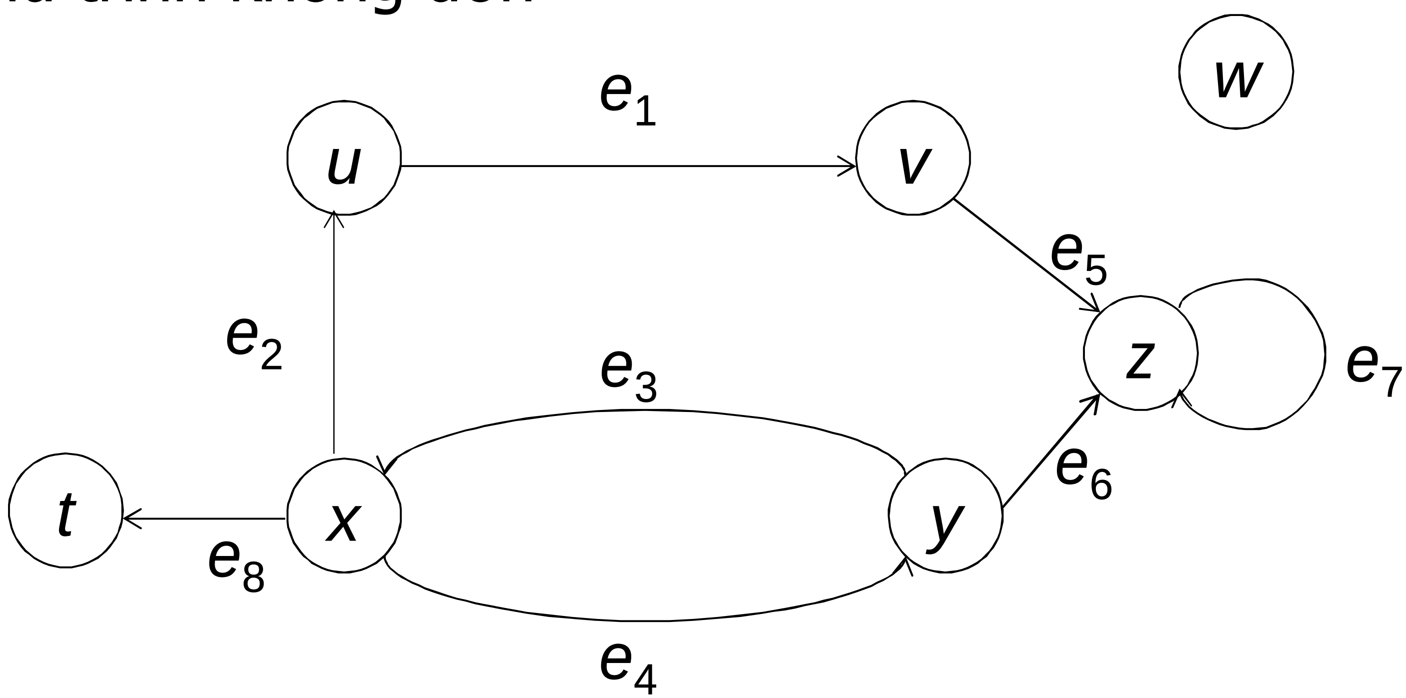
ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

Ví dụ 5: $P = u, v, z, y$ là một đường đi đơn và $C = u, v, z, y, x, u$ là một chu trình đơn



ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

Ví dụ 6: $P = x, u, v, z$ là một đường đi đơn và $C = x, y, x, y, x$ là một chu trình không đơn

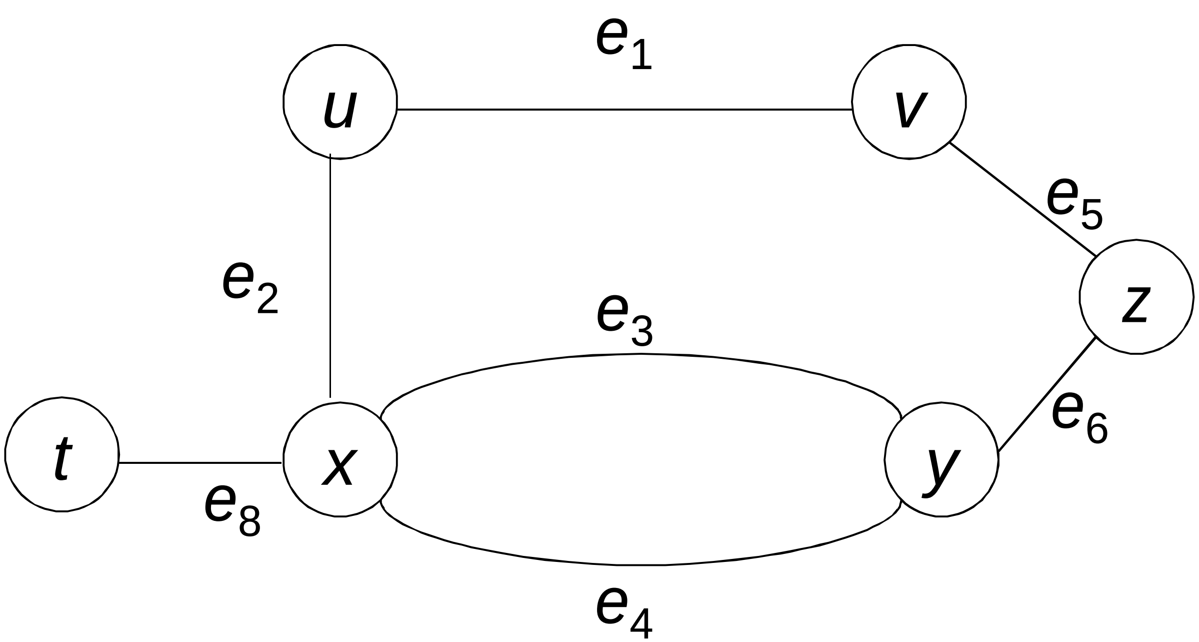


ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

- Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó

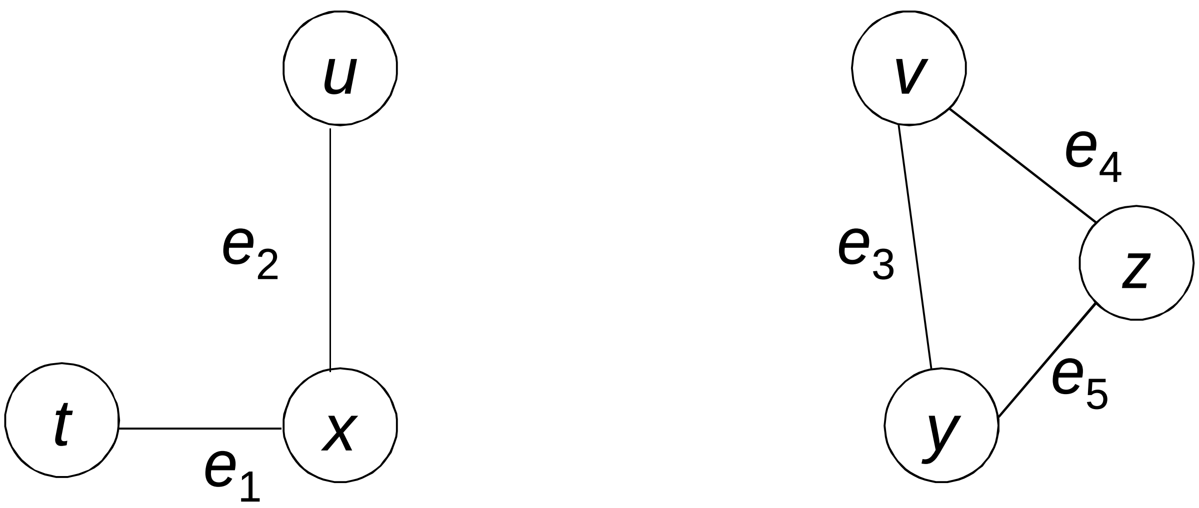
ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Ví dụ 7: Đồ thị vô hướng là liên thông



ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Ví dụ 8: Đồ thị vô hướng không liên thông



ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

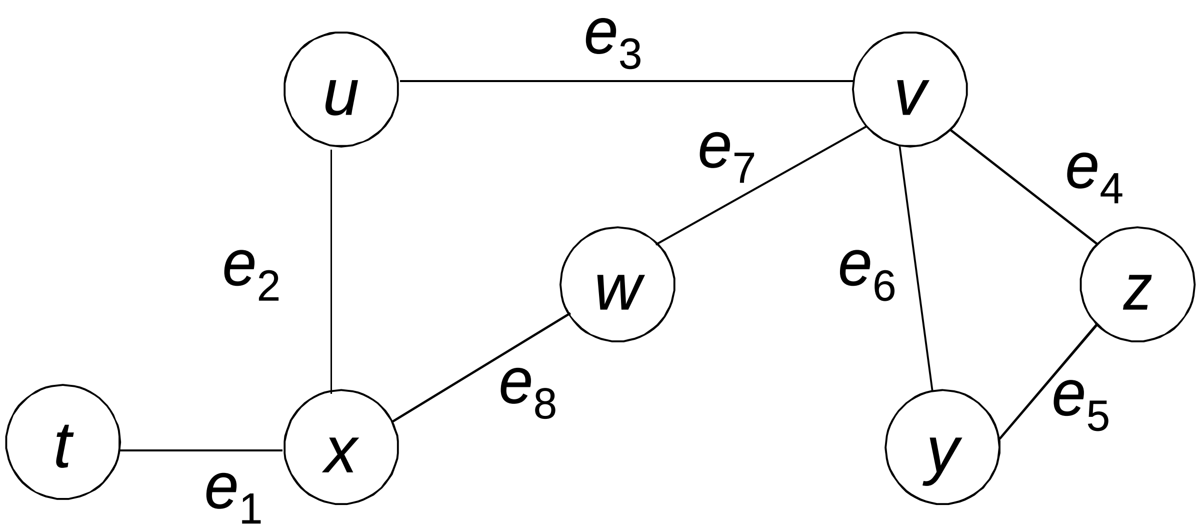
- Một đồ thị H=(W, F) được gọi là đồ thị con của đồ thị G=(V, E) nếu $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$
- Khi một đồ thị không liên thông, nó là bao gồm một số đồ thị con (thành phần) liên thông rời nhau và bậc của một đỉnh trong một thành phần bất kỳ cũng bằng bậc của đỉnh đó (trong đồ thị)

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

- Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh (branch vertex) nếu việc loại bỏ nó cùng với cạnh liên thuộc khỏi đồ thị thì làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị
- Cạnh e được gọi là cạnh cầu (bridge edge) nếu việc loại bỏ nó làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Ví dụ 9: Đỉnh x, v là các đỉnh rẽ nhánh, cạnh e_1 là cạnh cầu

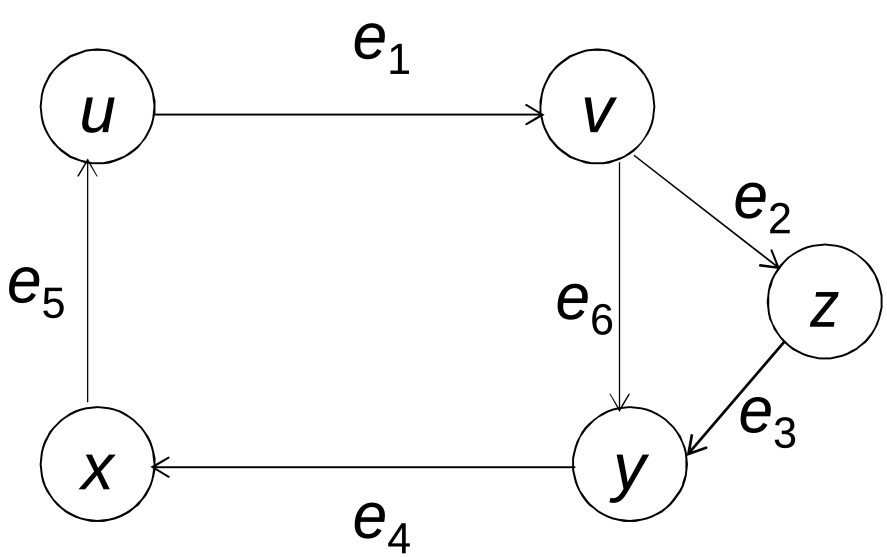


ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

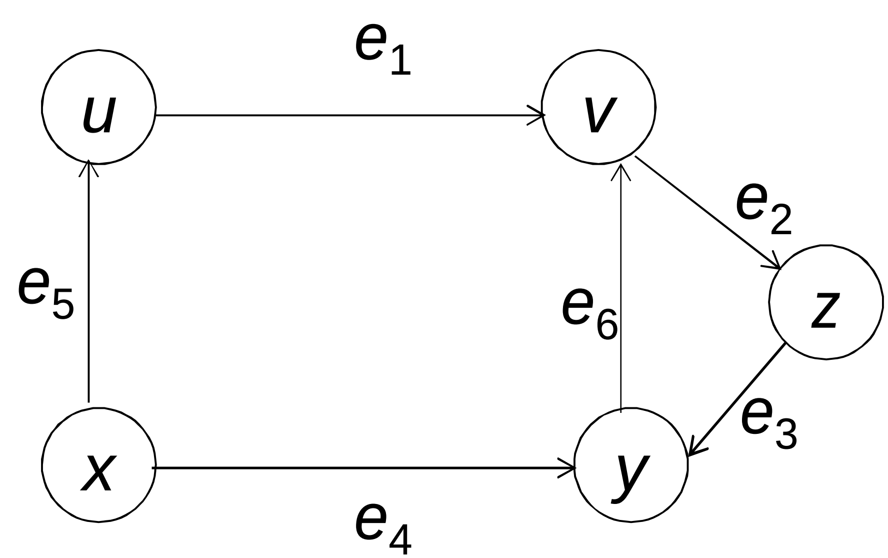
- Một đồ thị có hướng được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó
- Một đồ thị có hướng được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là liên thông

ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Ví dụ 10: G là liên thông mạnh, G′ là liên thông yếu (vì không có đường đi thừ z đến x)



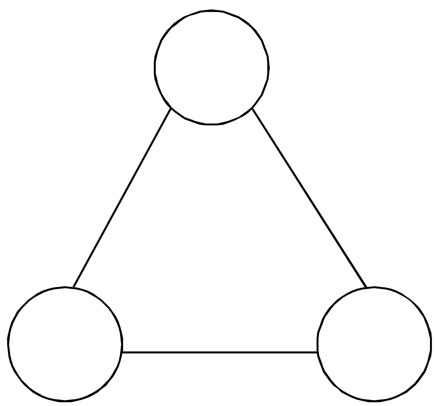
G



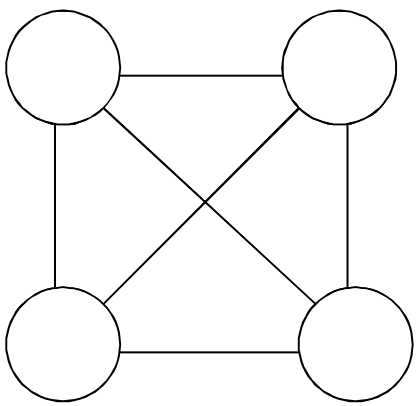
G’

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh luôn có cạnh



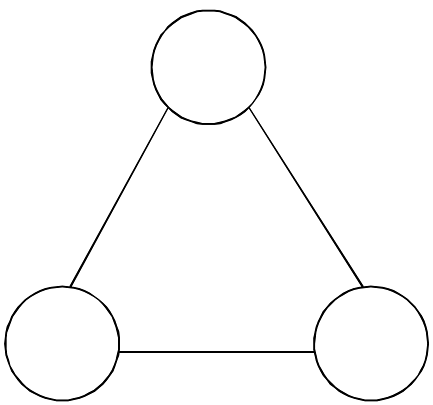
K_3



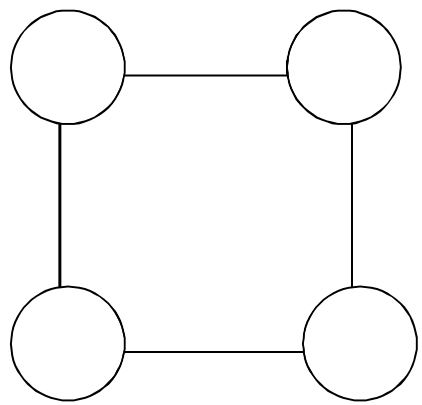
K_4

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị vòng C_n, $n \geq 3$, là đơn đồ thị n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và các cạnh là $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_n, v_1)$



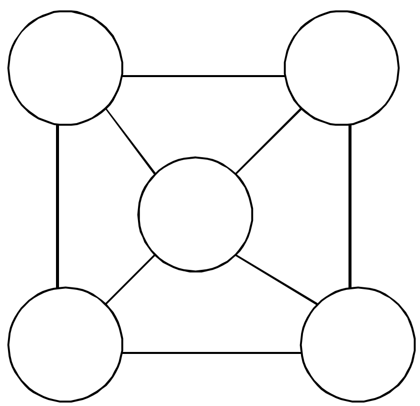
C_3



C_4

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

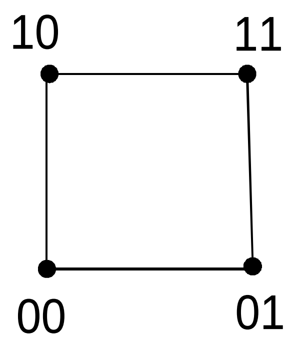
- Đồ thị bánh xe W_n, $n \geq 3$, là đồ thị thu đươc từ C_n bằng cách thêm vào một đỉnh mới nối với tất cả các đỉnh của C_n



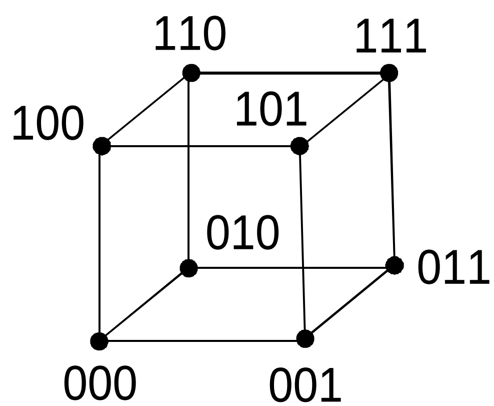
W_4

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị lập phương Q_n, là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n xâu nhị phân độ dài n (có 2^n đỉnh). Hai đỉnh là kề nhau nếu hai xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.



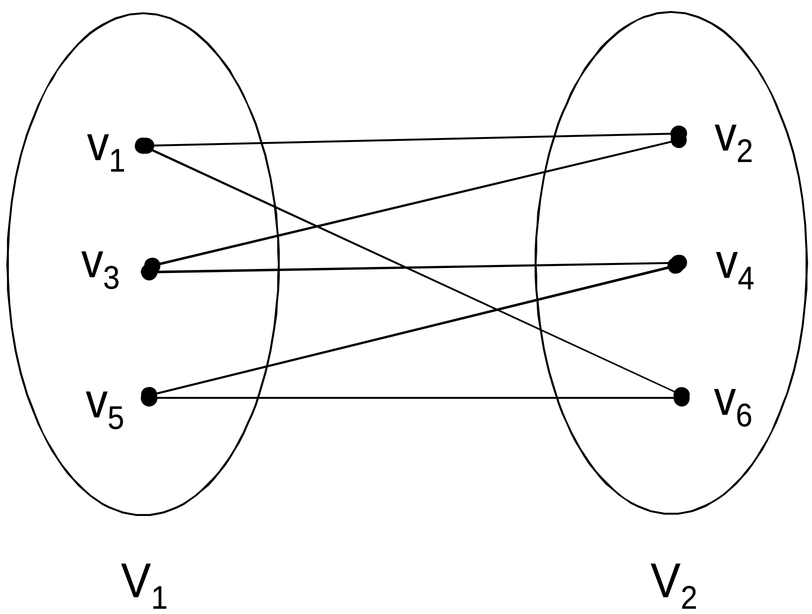
Q_2



Q_3

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị hai phía (phân đôi) G = (V, E) là một đơn đồ thị mà tập đỉnh V của nó có thể được phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của nó chỉ nối một đỉnh nào đó trong X với một đỉnh nào đó trong Y, ký hiệu G=(X∪Y, E)



MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

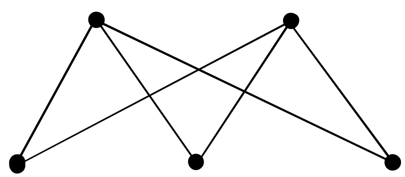
- **Lưu ý**: Khi xác định các tập X và Y để kiểm tra xem đồ thị G=(X∪Y, E) có hai phía hay không, cần lưu ý là nếu chọn v thuộc X thì các đỉnh kề với nó phải thuộc về Y

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

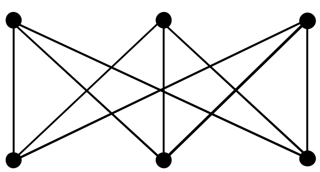
- **Định lý 3** Đơn đồ thị G =(V, E) là hai phía khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ
- Ví dụ: C_6 là hai phía, K_3 là không hai phía

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

- Đồ thị hai phía $G=(X \cup Y, E)$ với $|X|=m$ và $|Y|=n$ được gọi là đầy đủ, ký hiệu $K_{m,n}$ nếu mỗi đỉnh trong X được nối với mọi đỉnh trong Y



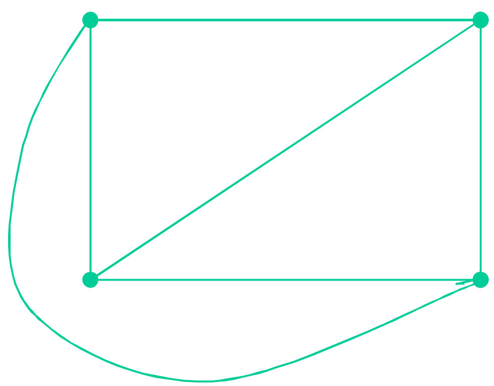
$K_{2,3}$

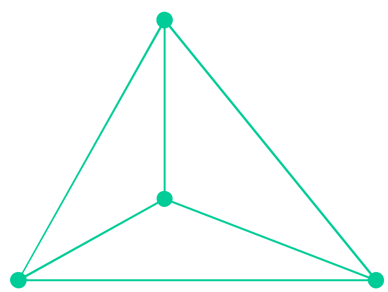


$K_{3,3}$

ĐỒ THỊ PHẲNG

- Một đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu nó có thể được vẽ trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau (trừ ở đỉnh), cách vẽ như vậy được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị

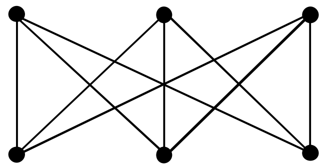




Các biểu diễn phẳng của k_4

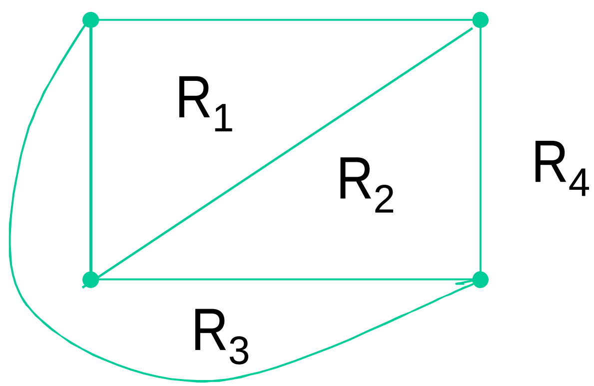
ĐỒ THỊ PHẲNG

- Chứng tỏ $K_{3,3}$ không phải là đồ thị phẳng



ĐỒ THỊ PHẲNG

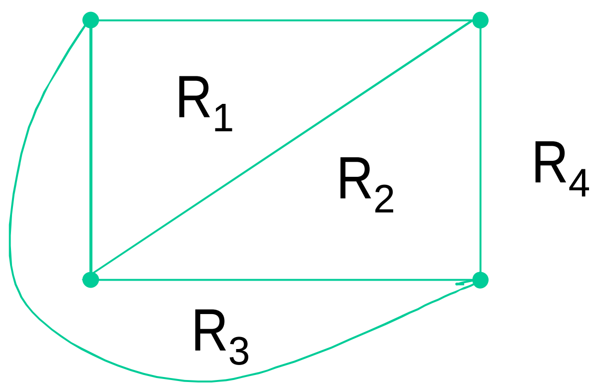
- Biểu diễn phẳng của một đồ thị chia mặt phẳng thành một số miền theo công thức Euler



ĐỒ THỊ PHẲNG

- **Định lý 4** (công thức Euler) Giả sử m, n tương ứng là số cạnh và đỉnh của một đơn đồ thị phẳng liên thông, khi đó số miền r mà biểu diễn phẳng của nó tạo ra thỏa mãn

$$r = m - n + 2$$



ĐỒ THỊ PHẲNG

- **Hệ quả 3** Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông m cạnh n đỉnh, $n \geq 3$ thì $m \leq 3n-6$
- **Ví dụ** K_5 có 5 đỉnh 10 cạnh không thỏa bất đẳng thức $m \leq 3n-6$ nên k_5 không phẳng

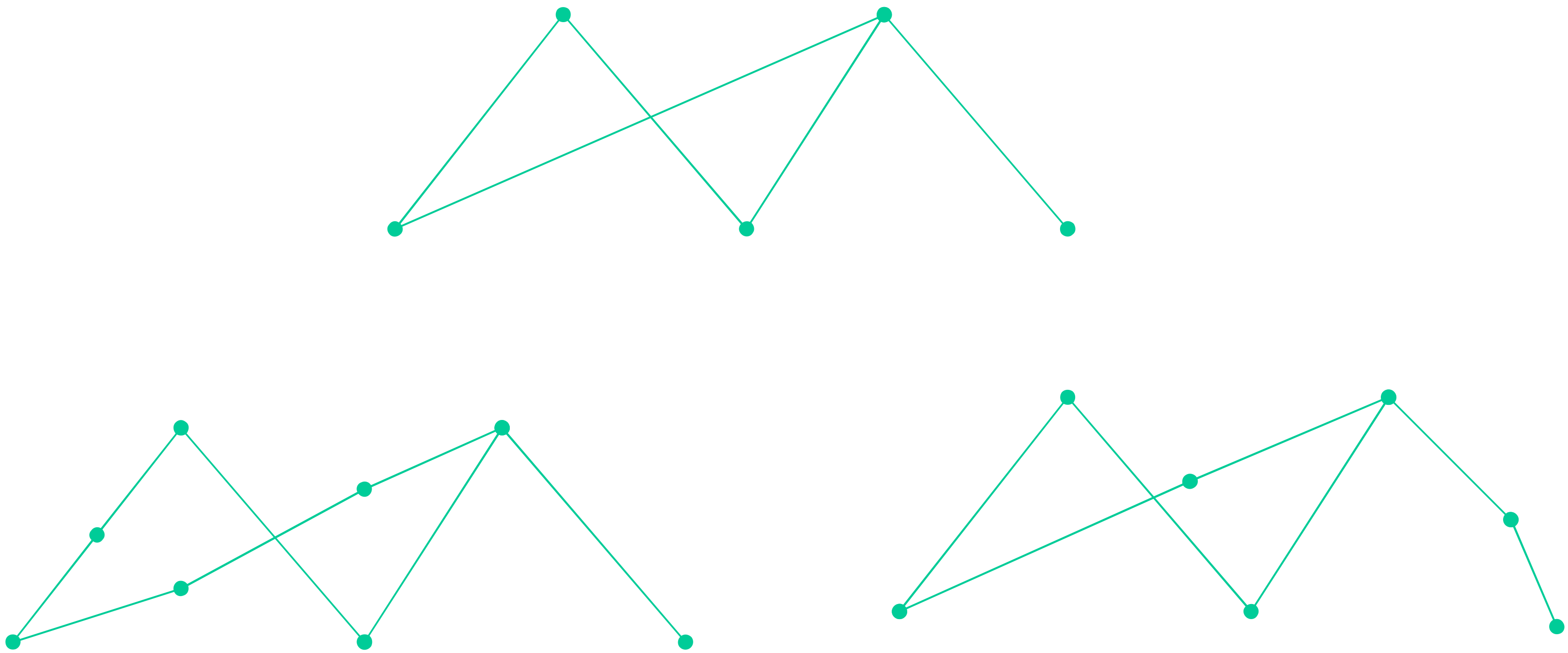
ĐỒ THỊ PHẲNG

- **Hệ quả 4** Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông m cạnh n đỉnh, n≥3 và không có chu trình độ dài 3 thì m ≤2n-4
- **Ví dụ** $K_{3,3}$ có 6 đỉnh 9 cạnh không thỏa bất đẳng thức m ≤2n-4 nên $K_{3,3}$ không phẳng

ĐỒ THỊ PHẲNG

- Nếu một đồ thị là phẳng, thì đồ thị mới có được bằng cách thay cạnh (u, v) bằng bằng 2 cạnh (u, w) và (w, v) cũng phẳng, phép thay thế như vậy được gọi là phép chia sơ cấp (chia cạnh)
- Hai đồ thị được gọi là đồng phôi (đồng cấu) nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép chia sơ cấp

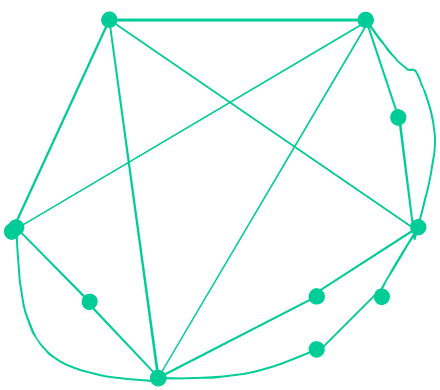
ĐỒ THỊ PHẲNG



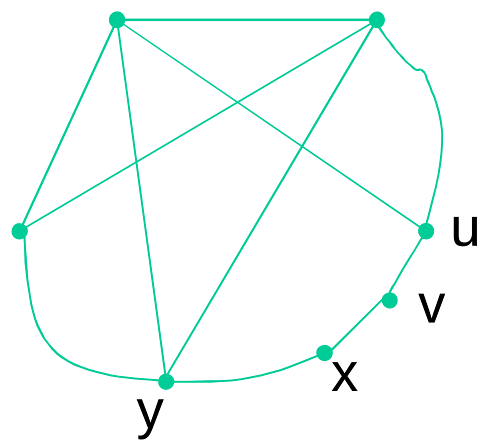
Các đồ thị đồng phôi

ĐỒ THỊ PHẲNG

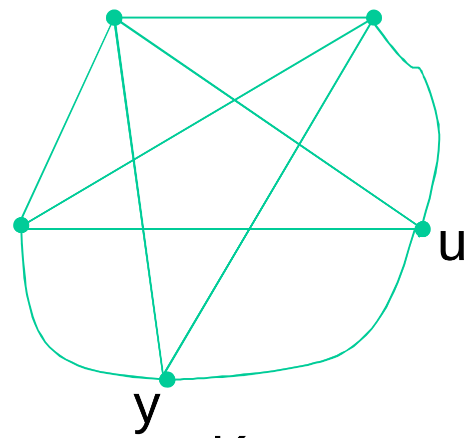
- **Định lý 5** (Kuratowski) Một đồ thị là không phẳng nếu nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $k_{3,3}$ hoặc k_5



G



H



K_5

G có đồ thị con H đồng cấu với K_5

BÀI TẬP VỀ NHÀ

- Đọc chương 1 sách Toán Rời Rạc của Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành. ĐHQG Hà Nội, 2002
- Làm bài tập (cho về nhà) của chương 1