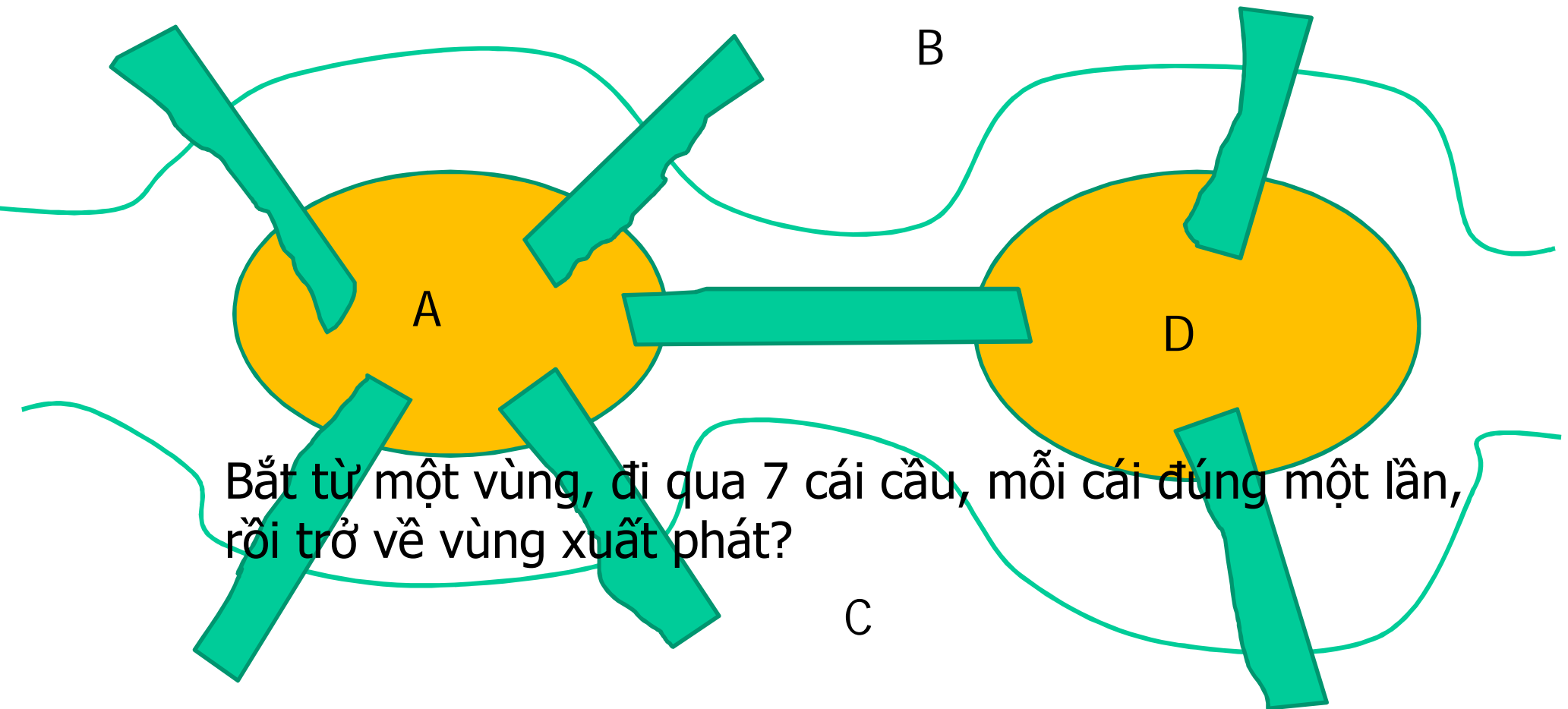


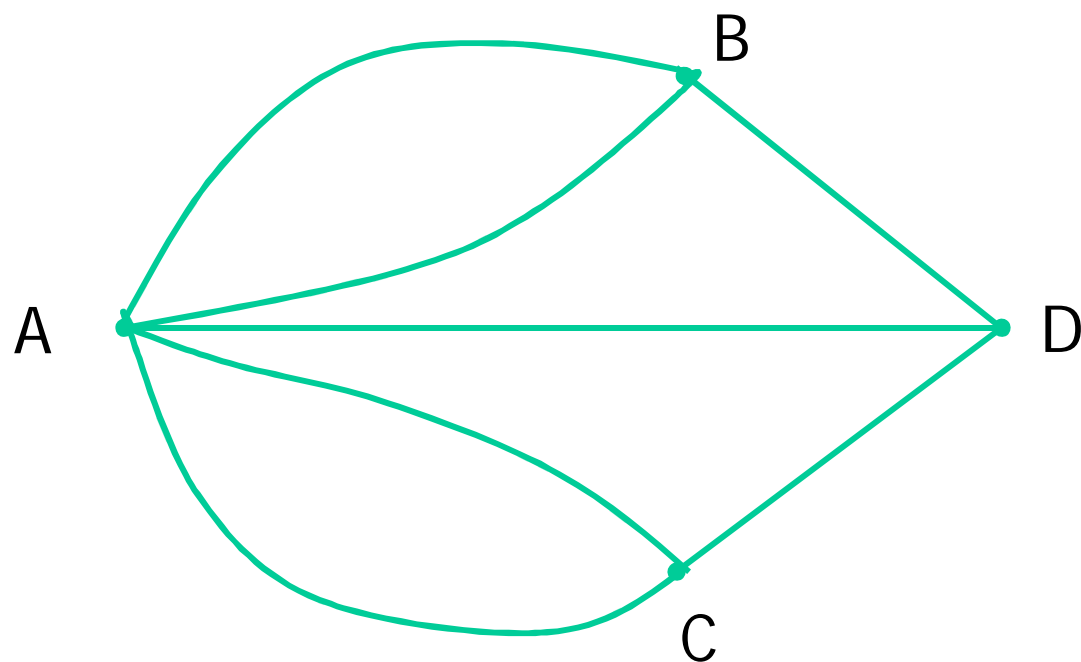
ĐỒ THỊ EULER VÀ HAMILTON

- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton
- <http://www.mediafire.com/?nm5pqb53d64d9fa>

ĐỒ THỊ EULER



ĐỒ THỊ EULER

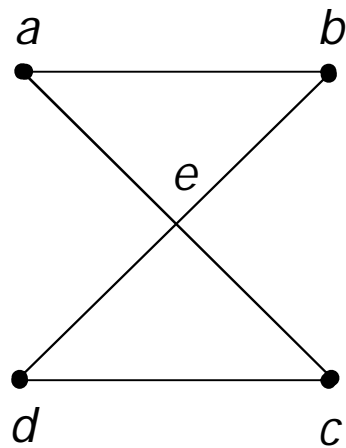


Bài toán không có lời giải

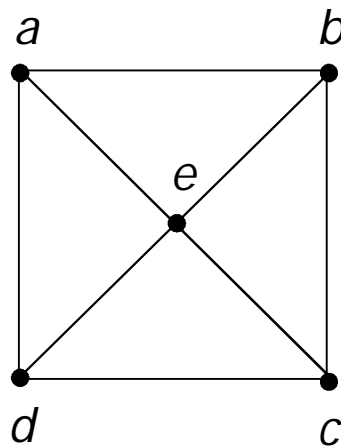
ĐỒ THỊ EULER

- Đường đi đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần gọi là đường đi Euler
- Chu trình đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần gọi là chu trình Euler
- Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler và gọi là đồ thị nửa Euler nếu nó có đường đi Euler

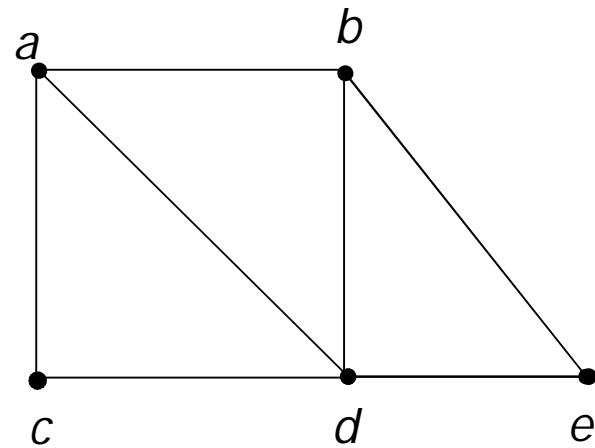
ĐỒ THỊ EULER



G_1



G_2



G_3

- G_1 có chu trình Euler, ví dụ a, e, c, d, e, b, a
- G_3 có đường đi Euler a, c, d, e, b, d, a, b nhưng không có chu trình Euler
- G_2 không có đường đi và chu trình Euler

ĐỒ THỊ EULER

- Một đồ thị Euler là nửa Euler (tại sao?)
- **Định lý 1:** Đồ thị vô hướng liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn
- **Chứng minh?**

ĐỒ THỊ EULER

- Giả sử G là đồ thị Euler
 - Gọi C là chu trình Euler trong G
 - Xét đỉnh v bất kỳ của G , giả sử C đi qua nó k lần
 - Vì mỗi lần C đi qua v có duy nhất một cặp cạnh vào và ra khỏi v thuộc chu trình \Rightarrow có $2k$ cạnh kề với v nên $\deg(v)=2k$ (chẵn)

ĐỒ THỊ EULER

- Giả sử $\deg(v)$ chẵn với mọi v trong G , chu trình Euler trong G được xây dựng như sau:
 - Bắt đầu từ 1 đỉnh u đi theo các cạnh một cách tùy ý nhưng **không lặp lại cạnh nào đã đi qua** cho đến khi không thể đi tiếp được nữa phải dừng ở đỉnh w , **lúc này mọi cạnh tới w đã đi qua** (vì ngược lại sẽ có cạnh ra khỏi w chưa đi qua)
 - Rõ ràng $w \equiv u$, vì nếu $w \neq u$ thì **số lần tới w nhiều hơn số lần ra khỏi w là 1** nên $\deg(w)$ lẻ trái với giả thiết, vậy ta có chu trình $C = u, v, \dots, z, u$

ĐỒ THỊ EULER

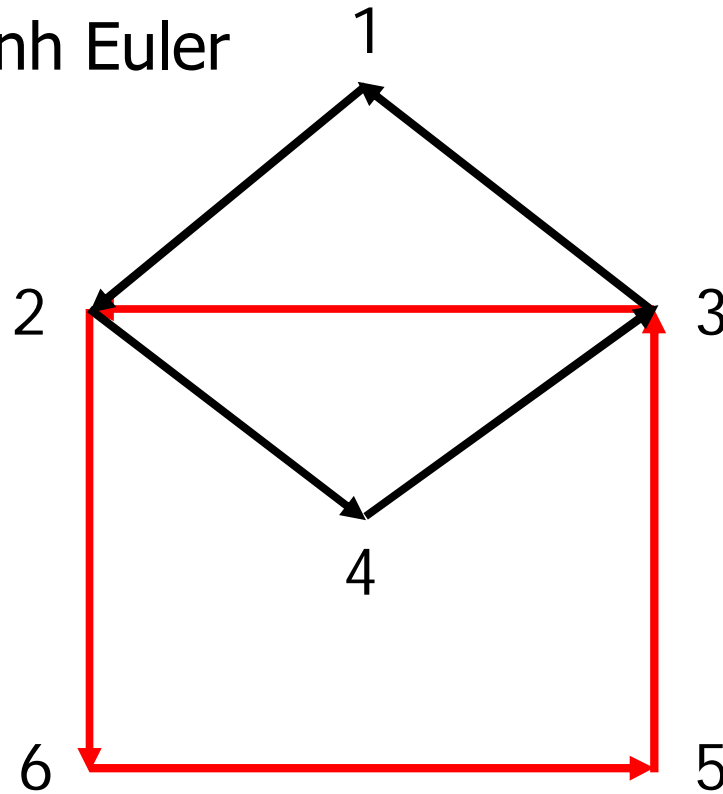
- Nếu mọi cạnh của G thuộc chu trình thì C là chu trình Euler
- Ngược lại gọi s là một đỉnh trong chu trình này **liên thuộc với 1 cạnh mà C chưa đi qua** (s tồn tại do G liên thông)

ĐỒ THỊ EULER

- Mở rộng (breakout) C thành chu trình lớn hơn bằng cách **khởi hành lại từ s** , đi theo chu trình C cho đến khi hoàn tất nó tại s , rồi tiếp tục **đi theo cạnh liên thuộc với s mà chu trình cũ chưa đi qua** nói trên cho đến khi phải dừng lại, ta được một chu trình mới chứa chu trình cũ
- Cứ tiếp tục quá trình “**thành lập và mở rộng chu trình**” cho đến khi thu được chu trình C không thể mở rộng hơn được nữa (do G hữu hạn, điều này sẽ xảy ra khi không còn cạnh nào liên thuộc với một đỉnh trong C mà chưa được đi qua)

ĐỒ THỊ EULER

Xây dựng chu trình Euler



ĐỒ THỊ EULER

- Gọi $e = (x, y)$ là một cạnh bất kỳ của G , vì G liên thông nên có đường đi u, u_1, u_2, \dots, x từ u đến x
- Cạnh (u, u_1) phải thuộc chu trình C (vì không còn cạnh nào tới u chưa đi qua), suy ra u_1 thuộc chu trình C
- Tương tự (u_1, u_2) thuộc chu trình nên u_2 thuộc chu trình, cứ tiếp tục ta suy ra x thuộc chu trình C

ĐỒ THỊ EULER

- Vì mọi cạnh đi qua x đều thuộc chu trình C nên $e = (x, y)$ thuộc chu trình C
- Vì vậy C là một chu trình Euler và do đó G là đồ thị Euler

ĐỒ THỊ EULER

- Thuật toán Flor: Xuất phát từ một đỉnh u bất kỳ của đồ thị, đi theo các cạnh của nó một cách tùy ý, và đảm bảo 2 qui tắc sau:
 - Xóa bỏ cạnh đã đi qua và đồng thời xóa bỏ cả những đỉnh cô lập được tạo thành
 - Ở mỗi bước, chỉ đi qua cạnh cầu khi không còn lựa chọn nào khác

ĐỒ THỊ EULER

Euler_Cycle(G) // dựa trên thuật toán Flor

```
1  S  $\leftarrow$   $\emptyset$ ; C  $\leftarrow$   $\emptyset$ ; u  $\leftarrow$  Select(V[G]); Push(S, u)
2  While S  $\neq$   $\emptyset$ 
3    do x  $\leftarrow$  Top(S)
4      if Adj[x]  $\neq$   $\emptyset$ 
5        then y  $\leftarrow$  First(Adj[x])
6          Push(S,y)
7          Adj[x]  $\leftarrow$  Adj[x] - {y}
8          Adj[y]  $\leftarrow$  Adj[y] - {x}
9        else x  $\leftarrow$  Pop(S)
10       Push(C, x)
```

ĐỒ THỊ EULER

- Độ phức tạp của thuật toán Euler_Cycle là $O(m)$, m là số cạnh của đồ thị

ĐỒ THỊ EULER

- **Hệ quả 1:** Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ
- Chứng minh?

ĐỒ THỊ EULER

- Chứng minh hệ quả:
 - Nếu G không có đỉnh bậc lẻ thì nó là đồ thị Euler nên nó là nửa Euler
 - Nếu G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ là u và v thì tạo đồ thị H bằng cách thêm vào G đỉnh w và 2 cạnh (w, u) , (w, v) . Khi đó H là Euler, nên có chu trình Euler C . Xoá bỏ khỏi chu trình này đỉnh w và hai cạnh (w, u) , (w, v) ta có đường đi Euler

ĐỒ THỊ EULER

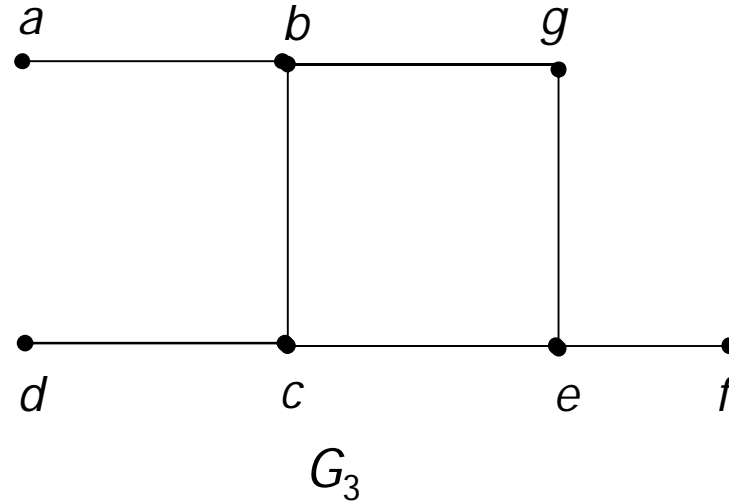
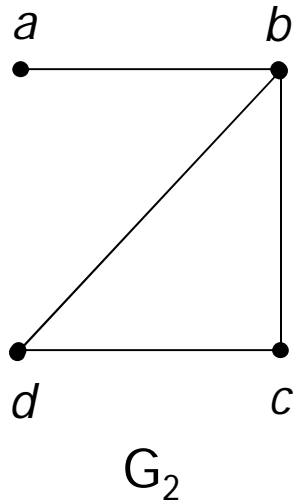
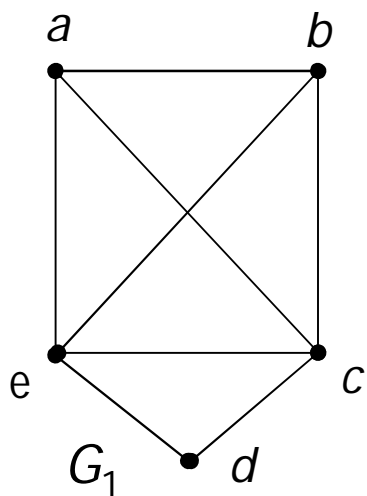
- **Định lý 2** Đồ thị có hướng liên thông mạnh G là đồ thị Euler khi và chỉ khi

$$\deg^+(v) = \deg^-(v) \text{ với mọi } v \text{ của } G$$

ĐỒ THỊ HAMILTON

- Đường đi **qua tất cả các đỉnh** của đồ thị, mỗi đỉnh **đúng một lần** gọi là đường đi Hamilton
- Chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là chu trình Hamilton
- Đồ thị được gọi là **đồ thị Hamilton** nếu nó có **chu trình Hamilton** và gọi là đồ thị **nửa Hamilton** nếu nó có **đường đi Hamilton**

ĐỒ THỊ HAMILTON



G_1 có chu trình Hamilton a, b, c, d, e, a

G_2 không có chu trình Hamilton nhưng có đường đi Hamilton: a, b, c, d

G_3 không có chu trình và đường đi Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

Lưu ý

- Chưa có điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Hamilton (bài toán mở)
- Chỉ có một số điều kiện đủ
- Chưa có thuật giải hiệu quả để xây dựng chu trình Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

Qui tắc tìm chu trình Hamilton

- Nếu một đỉnh của G có $\deg(v) \leq 1$ thì G không có chu trình Hamilton
- Nếu x có bậc 2 thì cả hai cạnh tới x (kề x) đều thuộc chu trình Hamilton
- Chu trình Hamilton không chứa chu trình con thực sự nào

ĐỒ THỊ HAMILTON

- Mọi đồ thị K_n , $n \geq 3$ đều có chu trình Hamilton
- Cho đồ thị G , giả sử G có k đỉnh mà nếu xóa k đỉnh này cùng với các cạnh liên kết với chúng thì đồ thị nhận được có **hơn k thành phần**. Chứng minh G không có chu trình Hamilton?

ĐỒ THỊ HAMILTON

- **Định lý 3** (Dirak 1952) Đơn đồ thị vô hướng G với $n > 2$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $n/2$ là đồ thị Hamilton
- **Định lý 4** (Dirak tổng quát) Giả sử G là đồ thị có hướng liên thông mạnh với n đỉnh. Nếu

$\deg^+(v) \geq n/2$ và $\deg^-(v) \geq n/2$ với mọi v
thì G là đồ thị Hamilton

ĐỒ THỊ HAMILTON

Hamilton_Cycle(G, k, v_0) //Tìm đỉnh $x[k]$ trong n đỉnh của G

```
1  for  $y \in \text{Adj}[x[k-1]]$ 
2      do if  $k=n$  and  $y=v_0$ 
3          then print( $v_0, x[1], \dots, x[n-1], v_0$ ) // $x[0]=v_0$ 
4          else if  $\text{unvisited}[y]=\text{true}$ 
5              then  $x[k] \leftarrow y$ 
6                   $\text{unvisited}[y] \leftarrow \text{false}$ 
7                  Hamilton_Cycle( $G, k+1, v_0$ )
8                   $\text{unvisited}[y] \leftarrow \text{true}$ 
```

ĐỒ THỊ HAMILTON

Lưu ý:

- Giải thuật $\text{Hamilton_Cycle}(G, k, v_0)$ tìm tất cả các chu trình Hamilton của G
- Trước khi thực hiện GT cần gán $\text{unvisited}[y] = \text{true}$ với mọi $v \in V[G]$ và $x[0] = v_0$ là đỉnh đầu của các chu trình

ĐỒ THỊ HAMILTON

- Độ phức tạp thuật toán Hamilton_Cycle là $O(n!)$, n là số đỉnh của đồ thị