MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

- Bài toán tô màu đồ thị
- Bài toán gép cặp

BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

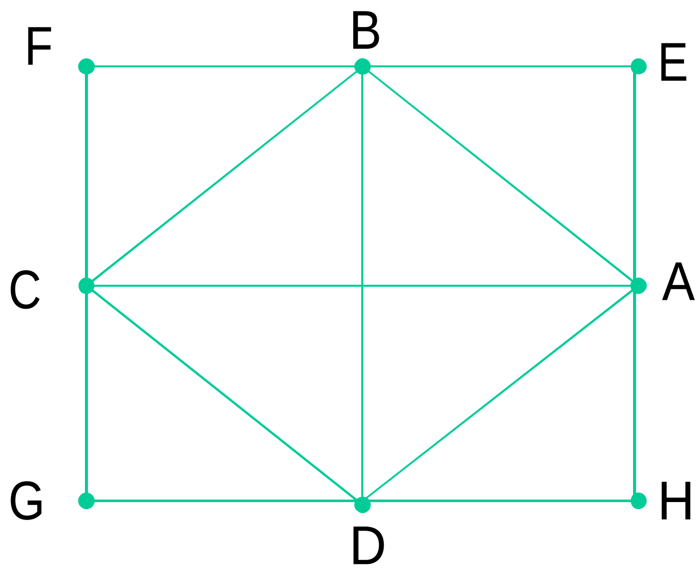
- Khái niệm và tính chất
- Giải thuật tô màu
- Ví dụ áp dụng

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- Cho một đồ thị G, tô màu G là gán cho mỗi đỉnh của G một màu sao cho 2 đỉnh kề nhau là không cùng màu
- **Bài toán**: Tìm cách tô màu cho đồ thị G sao cho số màu được sử dụng là ít nhất
- Số màu ít nhất để tô màu đồ thị G gọi là sắc số (chromatic number) của G, ký hiệu là χ(G)

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

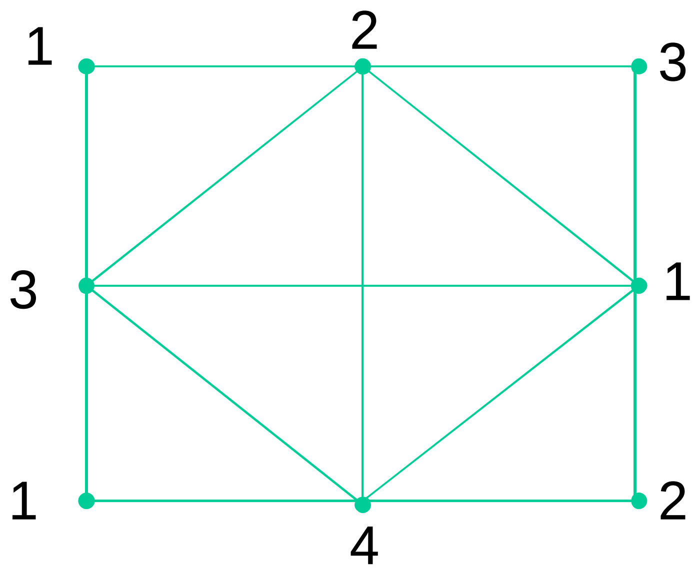
- **Ví dụ:** Tìm sắc số (số màu) của đồ thị



4 đỉnh A, B, C, D là đôi một kề nhau nên phải được tô 4 màu khác nhau, các đỉnh còn lại có thể chọn tô 1 trong 4 màu này

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- Có thể gán số màu cho G như sau (χ(G) =4)

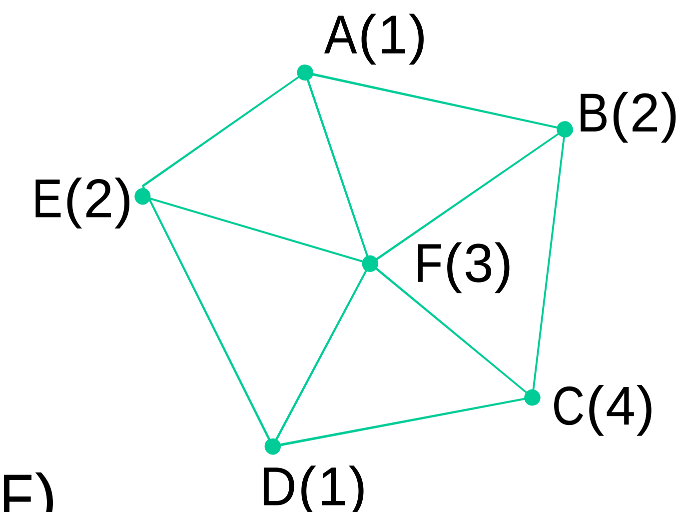


KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- **Định lý 1** Nếu G chứa đồ thị con đẳng hình với K_m thì $\chi(G) \geq m$
- Chứng minh (hiển nhiên)

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- Ví dụ: Tìm sắc số của G



- G chứa K_3 (ABF)
- Gán A, B, F các màu 1, 2, 3, khi đó E có thể gán màu 2, D màu 1 và C màu 4, vậy $\chi(G)=4$

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- **Định lý 2** Một đơn đồ thị có thể tô bằng 2 màu nếu nó không có chu trình lẻ

Chứng minh

  - Nếu một đơn đồ thị có thể tô bằng 2 màu thì rõ ràng không thể có chu trình lẽ, vì nếu ngược lại để tô các đỉnh trên chu trình lẻ cần ít nhất 3 màu

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- **Chứng minh**
  - Giả sử đơn đồ thị G không có chu trình lẻ (không mất tính tổng quát có thể coi G là liên thông), chọn một đỉnh v_0 của G và tô các đỉnh của G bằng 2 màu như sau:
  - Với mỗi đỉnh x, nếu có một đường đi chiều dài chẵn đến v_0 thì tô màu 0 cho x, nếu ngược lại tô màu 1 cho x
  - Vì mỗi đỉnh x không có 2 đường cùng có độ dài chẵn (lẻ) đến v_0 (do trong G không có chu trình lẻ) nên cách tô này là duy nhất

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- **Định lý 3** Với mỗi số nguyên dương k có một đồ thị không chứa K_3 có sắc số bằng k

Chứng minh (qui nạp)

- Trường hợp k=1 hiển nhiên đúng
- Giả sử có G_k không chứa K_3 có sắc số bằng $k \geq 1$, xây dựng G_{k+1} gồm k bản sao của G_k
- Thêm vào n^k_k đỉnh mới (n_k là số đỉnh của G_k) tương ứng với n^k_k bộ (v_1, v_2, ..., v_k), với v_i là một đỉnh của bản sao thứ i của G_k
- Mỗi đỉnh mới được nối với các v_i trong các bản sao thứ i của G_k, rõ ràng G_{k+1} không chứa K_3 và dễ thấy $\chi(G_{k+1})=k+1$

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- **Định lý 4** Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô bằng 5 màu
- Chứng minh (bài tập)

KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT

- **Giả thuyết 4 màu** (Appel, Haken) Sắc số của một đồ thị phẳng là không lớn hơn bốn
- Định lý được Appel, Haken chứng minh (rất phức tạp) có dựa trên chương trình máy tính

GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Mỗi lần tô một số đỉnh nhiều nhất không kề nhau cùng một màu
- Khởi đầu tập các đỉnh được tô và tập các màu dùng để tô là rỗng

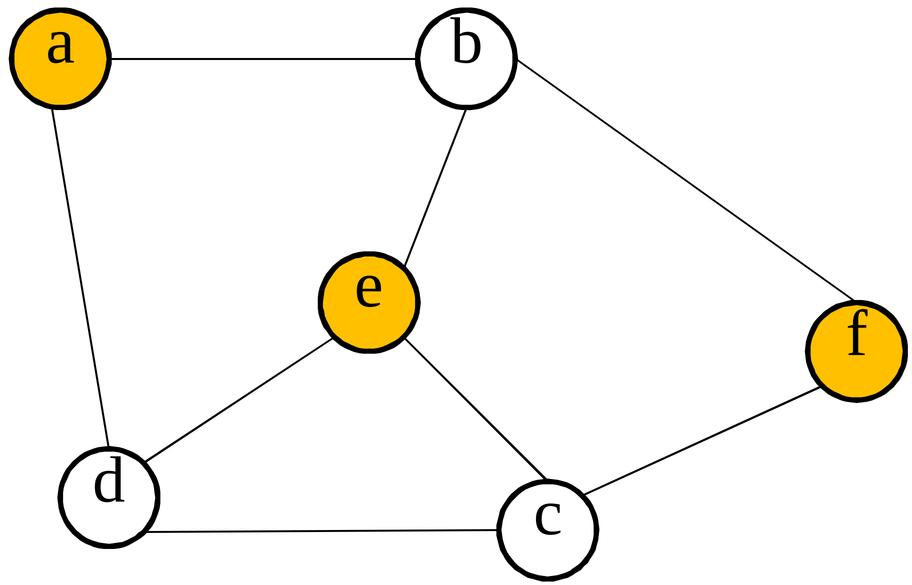
GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

Greedy(G) //Tìm một tập nhiều đỉnh nhất có thể tô cùng một màu

```
Newclr ← Ø
for each uncolored vertex v of G do
    if v is not adjacent to any vertex in Newclr
        then Newclr ← Newclr∪{v}
return Newclr
```

GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Sau khi thực hiện Greedy(G), Newclr={a, e, f} có thể tô cùng một màu



GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

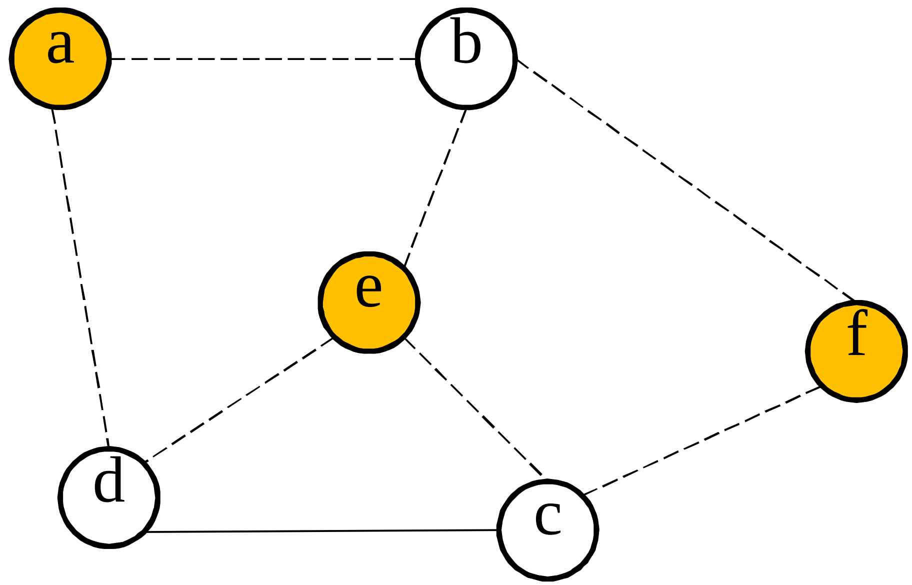
```
ColoringGraph(G)
C ← Ø; N ← Ø
while V[G] ≠ Ø  do
        C ← Greedy(G)
        Coloring every v in C the same color k∉N
        V[G] ← V[G]-C
        N ← N∪{k}
return N   // tập màu ít nhất có thể tô
```

GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Kích thước đầu vào là số đỉnh n trong V[G]
- Thời gian chạy của Greedy(G) là O(n) (thao tác cơ bản)
- Thời gian các lệnh 4 và 5 không quá O(n)
- Vậy $T(n)=O(n^2)$

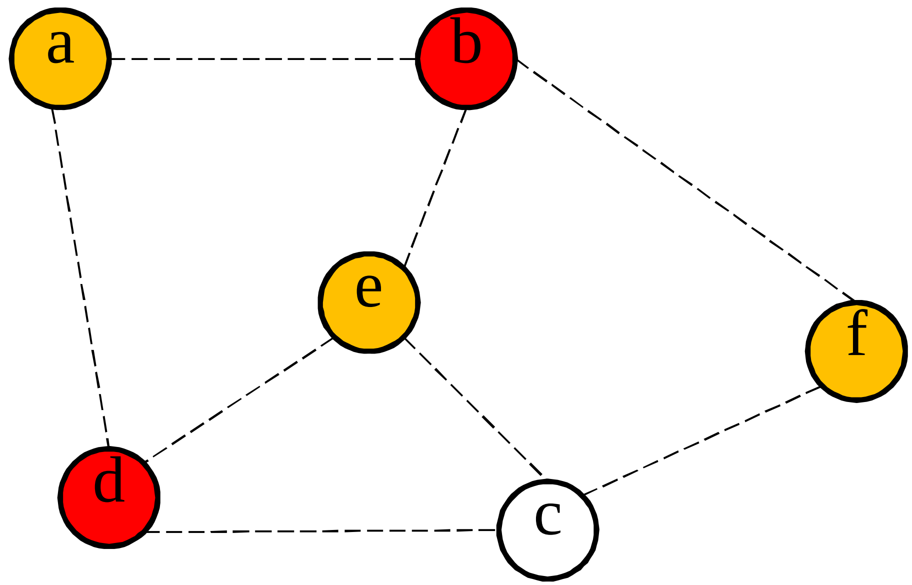
GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Sau khi thực hiện Greedy(G) lần đầu (k là màu vàng)



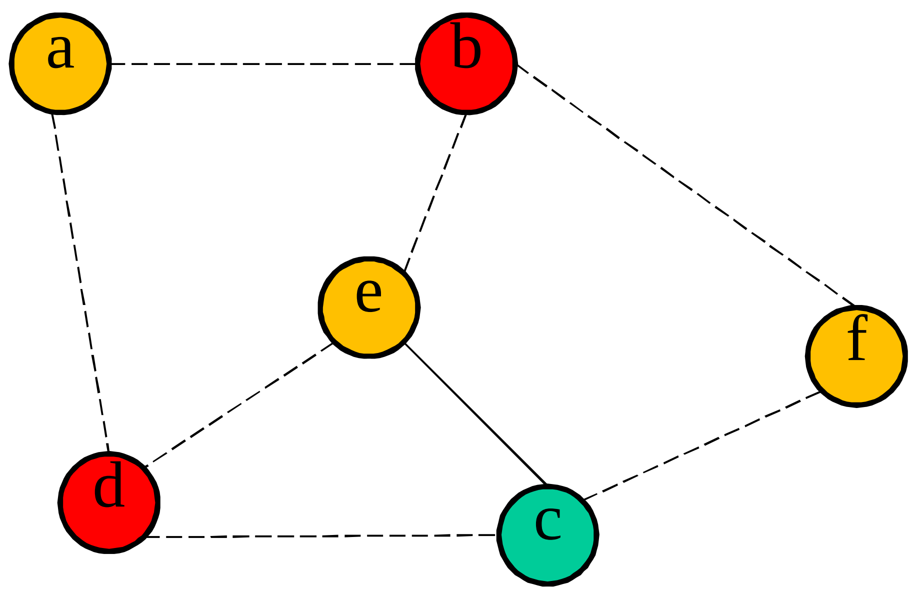
GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Sau khi thực hiện Greedy(G) lần 2 (k là màu đỏ)



GIẢI THUẬT TÔ MÀU ĐỒ THỊ

- Sau khi thực hiện Greedy(G) lần 3 (k là màu xanh)



VÍ DỤ ÁP DỤNG

- Lập lịch thi: Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào có 2 môn thi cùng một lúc
- Phân chia tần số: Các kênh truyền hình từ số m đến n được phân chia cho các đài truyền hình ở Bắc Mỹ sao cho không có hai đài phát nào cách nhau không quá 150 dặm lại có cùng một kênh

BÀI TOÁN GÉP CẶP

- Khái niệm và bài toán
- Phương pháp giải
- Ví dụ áp dụng

KHÁI NIỆM VÀ BÀI TOÁN

- Cho một đồ thị hai phía $G=(L \cup R, E)$ một bộ gép cặp M của G là một tập con của E sao cho không có 2 cạnh cùng có một đỉnh chung
- **Bài toán**: Cho $G=(L \cup R, E)$, tìm một bộ gép cặp M lớn nhất của G

KHÁI NIỆM VÀ BÀI TOÁN

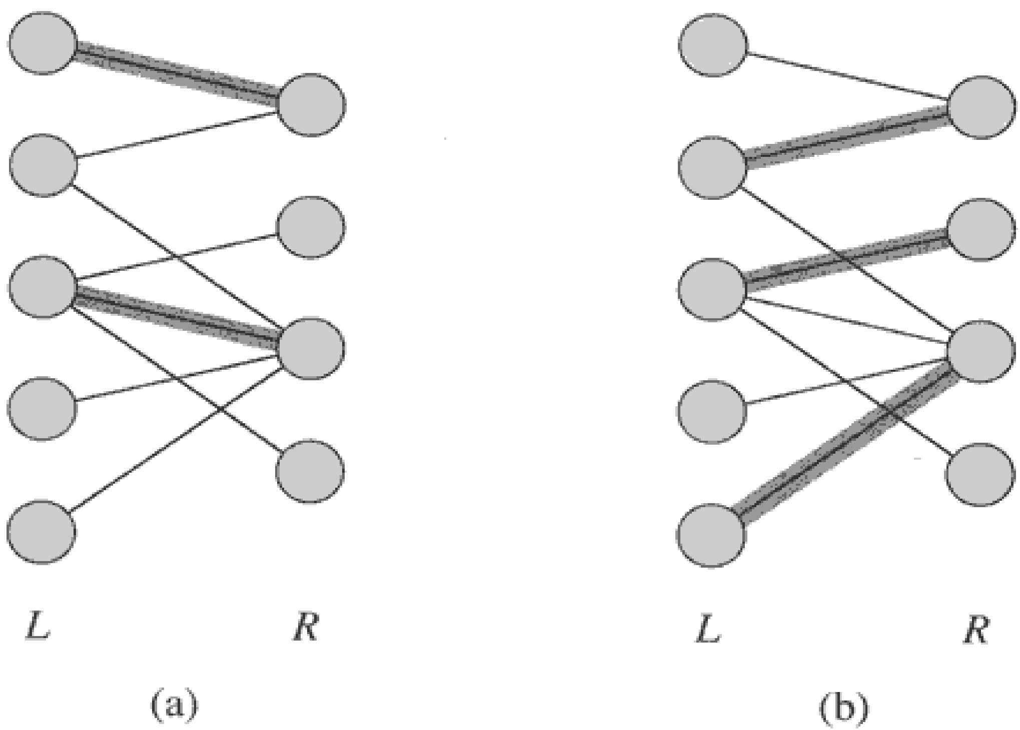


Figure 26.7 A bipartite graph $G = (V, E)$ with vertex partition $V = L \cup R$. **(a)** A matching with cardinality 2. **(b)** A maximum matching with cardinality 3.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng giải thuật tìm luồng cực đại Ford-Fulkerson để tìm bộ gép tối đại M của G

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Định nghĩa luồng mạng $G'=(V', E')$ tương ứng của $G=(L\cup R, E)$ như sau:
- Thêm vào G hai đỉnh nguồn và đích mới s và t và đặt $V'=V\cup\{s, t\}$ và tạo tập các cạnh định hướng E′ là

$$E'=\{(s, u): u\in L\}$$

$$\cup \{(u, v): u\in L, v \in R \text{ và } (u, v) \in E\}$$

$$\cup \{(v, t): v\in R\}$$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Gán khả năng thông qua của tất cả các cạnh của G′ là 1
- Thực hiện giải thuật Ford-Fulkerson trên G′ thu được luồng cực đại, các cạnh có luồng bằng 1 thuộc bộ gép tối đại M

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

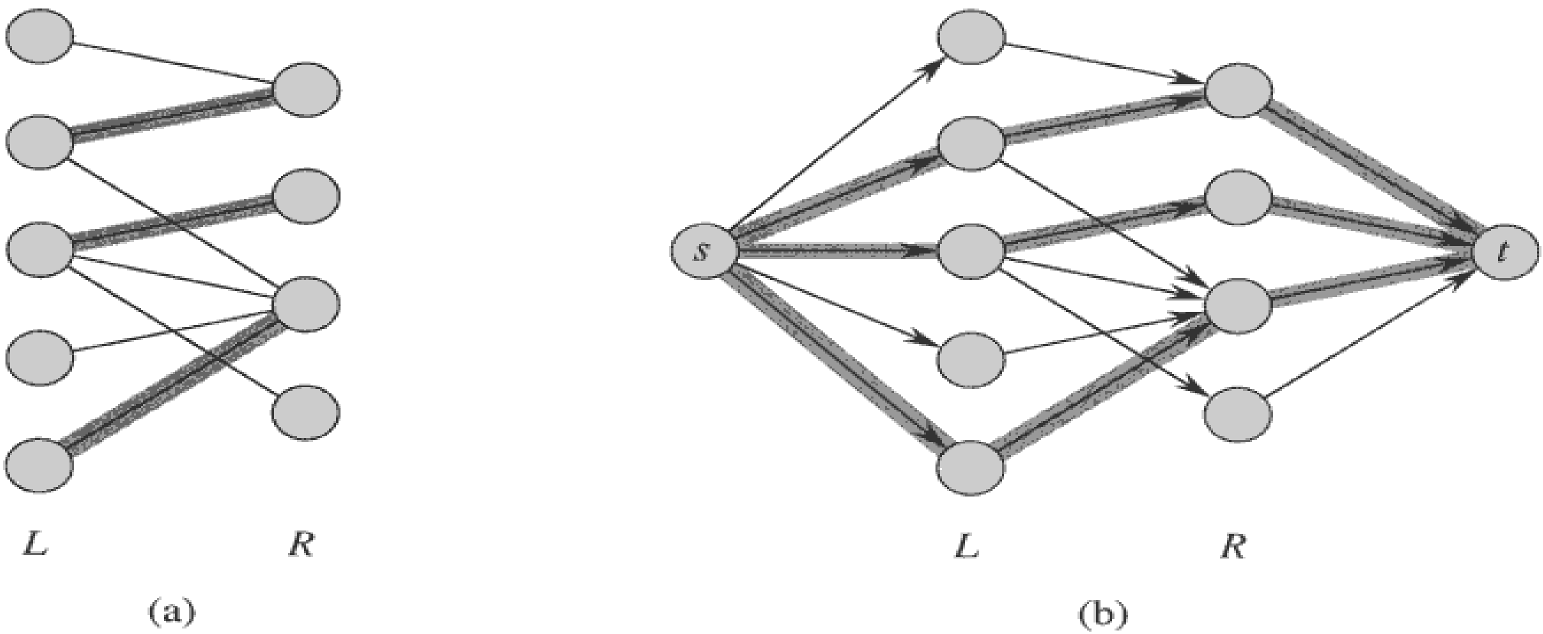


Figure 26.8 The flow network corresponding to a bipartite graph. **(a)** The bipartite graph $G = (V, E)$ with vertex partition $V = L \cup R$ from Figure 26.7. A maximum matching is shown by shaded edges. **(b)** The corresponding flow network G' with a maximum flow shown. Each edge has unit capacity. Shaded edges have a flow of 1, and all other edges carry no flow. The shaded edges from L to R correspond to those in a maximum matching of the bipartite graph.

VÍ DỤ ÁP DỤNG

- Một ứng dụng của bài toán gép cặp: Có thể coi L là tập các máy, R là tập các tác vụ được các máy thực hiện đồng thời
- Một cạnh (u, v) trong M biểu diễn máy u thực hiện tác vụ v
- Bộ gép tối đại M cho biết số tác vụ nhiều nhất được thực hiện đồng thời trên từng máy riêng biệt