BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

- Các khái niệm
- Thuật toán Dijkstra
- Thuật toán Floyd-Warshall

CÁC KHÁI NIỆM

- Cho đồ thị G=(V, E) có trọng số, |V|=n, |E|=m
  - Nếu $(u, v) \in E$ thì $w(u, v) = \alpha < \infty$
  - Ngược lại $(u, v) \notin E$ thì coi $w(u, v) = \infty$
  - Trọng số của đường đi $P=v_0, v_1, \ldots v_k$ là $w(P)=\Sigma_{i=1, k} w(v_{i-1}, v_i)$

CÁC KHÁI NIỆM

- Trọng số của đường đi ngắn nhất từ u đến v là

- $d(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p)\}, & \text{nếu có đường đi p từ u đến v} \\ \infty & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

- Một đường đi p từ u đến v mà w(p)=d(u, v) gọi là đường đi ngắn nhất từ u đến v (cũng gọi d(u, v) là khoảng cách từ u đến v)

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

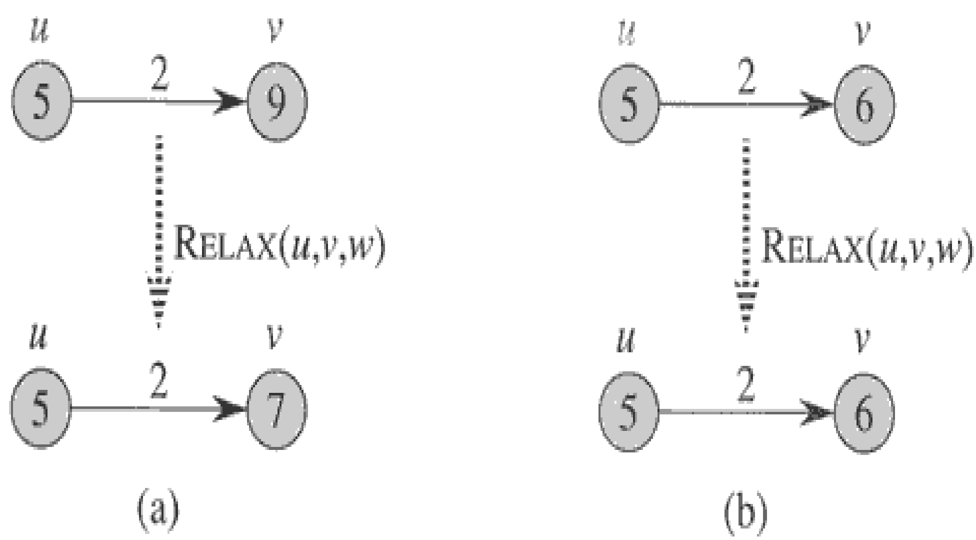
- **Bài toán:** Tìm các đường đi ngắn nhất từ một đỉnh s đến mọi đỉnh khác trong một đồ thị có trọng số không âm

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

Ý tưởng

- Ký hiệu d[v] là một cận trên của d(s,v), thuật toán kiểm tra và giảm d[v] cho đến khi d[v]=d(s, v)
  - Nếu d[v]>d[u]+w(u,v) thì làm tốt cận trên d[v] bằng cách gán d[v]= d[u]+w(u,v) (gọi là relaxation)
  - Nếu d[v] đã tốt nhất thì đưa v vào trong tập S = {v $\in$V | d[v] =d(s, v)}, lúc này d[v] là độ dài đường đi ngắn nhất từ s đến v

THUẬT TOÁN DIJKSTRA



Nếu d[v]>d[u]+w(u,v)

thì gán d[v]= d[u]+w(u,v)

Figure 24.3 Relaxation of an edge (u, v) with weight $w(u, v) = 2$. The shortest-path estimate of each vertex is shown within the vertex. **(a)** Because $d[v] > d[u] + w(u, v)$ prior to relaxation, the value of $d[v]$ decreases. **(b)** Here, $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$ before the relaxation step, and so $d[v]$ is unchanged by relaxation.

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

$\text{RELAX}(u, v, w)$

$\textbf{if } d[v] > d[u] + w(u, v)$

$\quad \textbf{then } d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\qquad \pi[v] \leftarrow u$

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
    S ← Ø
    Q ← V[G]
    while Q ≠ Ø
        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
            S ← S ∪ {u}
            for each vertex v ∈ Adj[u]
                do RELAX(u, v, w)
```

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

for each vertex $v \in V[G]$

  do $d[v] \leftarrow \infty$

    $\pi[v] \leftarrow$ NIL

$d[s] \leftarrow 0$

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

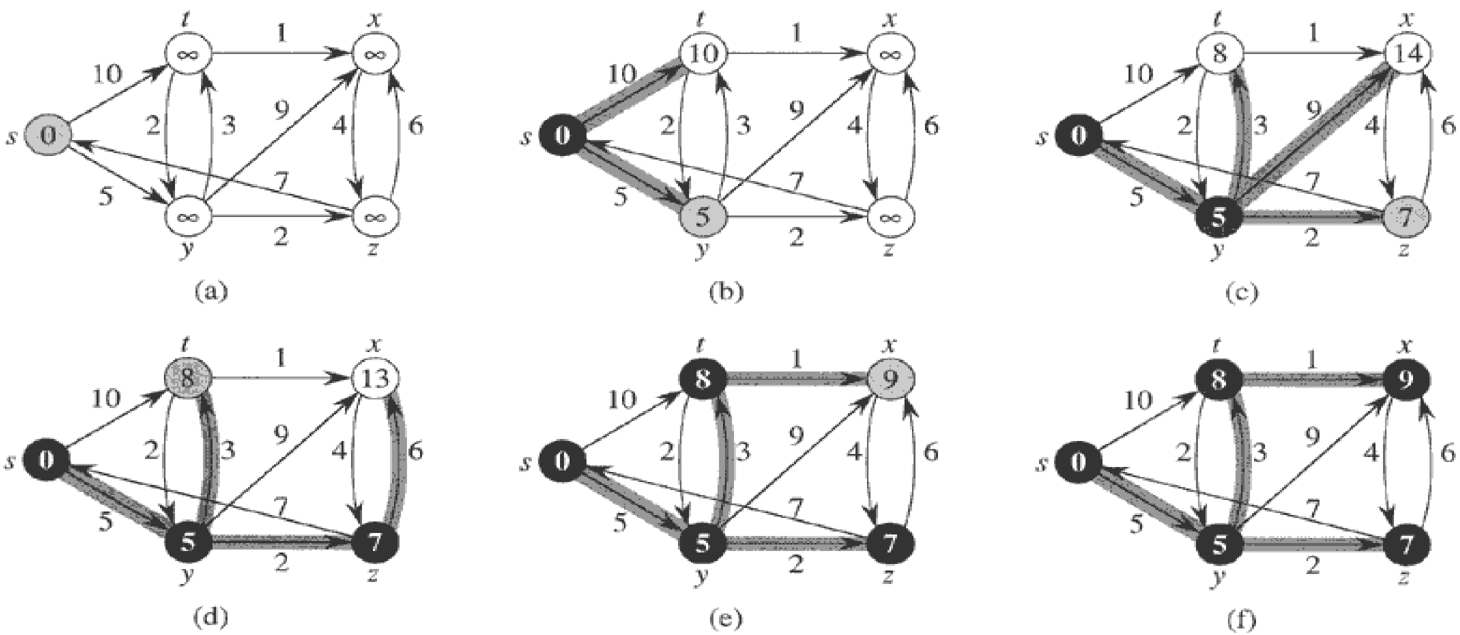


Figure 24.6 The execution of Dijkstra's algorithm. The source s is the leftmost vertex. The shortest-path estimates are shown within the vertices, and shaded edges indicate predecessor values. Black vertices are in the set S, and white vertices are in the min-priority queue $Q = V - S$. **(a)** The situation just before the first iteration of the **while** loop of lines 4–8. The shaded vertex has the minimum d value and is chosen as vertex u in line 5. **(b)–(f)** The situation after each successive iteration of the **while** loop. The shaded vertex in each part is chosen as vertex u in line 5 of the next iteration. The d and π values shown in part (f) are the final values.

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

- **Định lý 1**: Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất từ đỉnh xuất phát đến tất cả các đỉnh còn lại trên đồ thị

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

- Tổng chi phí EXTRACT-MIN là O(VlgV)
- Mỗi u được đưa vào S đúng một lần, mỗi cạnh kề trong Adj[u] được kiểm tra đúng một lần, số lần kiểm tra tất cả các cạnh kề như vậy là |E|
- Thời gian xử lý của RELAX là O(1)
- Vậy tổng chi phí là O(VlgV) +O(E)

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- **Bài toán:** Tìm các đường đi ngắn nhất giữ mọi cặp đỉnh của đồ thị G= (V, E)

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

Ý tưởng

- Giả sử các đỉnh của G được đánh số từ 1 đến n
- Gọi P là đường đi ngắn nhất từ đỉnh i đến đỉnh j qua k đỉnh trung gian trong tập {1, 2, ..., k}

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

Ý tưởng

- Lưu ý: P đi qua đỉnh trung gian m có nghĩa là đỉnh m đã được xét đến khi tìm đường đi ngắn nhất P từ i đến j nhưng m có thể thuộc hoặc không thuộc P

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- **Ý tưởng**
  - Nếu k $\notin$ P, thì đường đi ngắn nhất qua k đỉnh trong {1,.., k} cũng là đường đi ngắn nhất qua k-1 đỉnh trong {1, 2,.., k-1}
  - Nếu k $\in$ P thì P được chia làm 2 đoạn P_1, P_2 đi qua k-1 đỉnh trung gian trong {1, 2, ..., k-1}

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

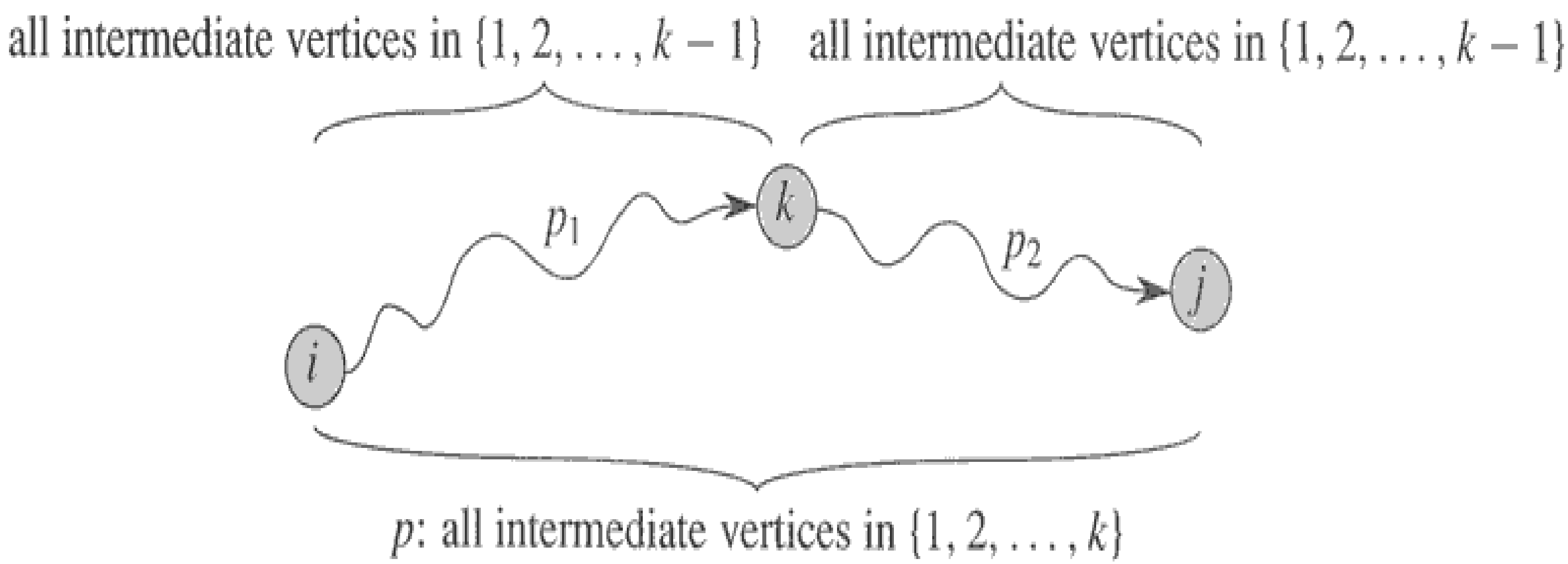


Figure 25.3 Path p is a shortest path from vertex i to vertex j, and k is the highest-numbered intermediate vertex of p. Path p_1, the portion of path p from vertex i to vertex k, has all intermediate vertices in the set $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. The same holds for path p_2 from vertex k to vertex j.

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Gọi $d_{ij}^{(k)}$ là độ dài đường đi ngắn nhất P từ i đến j, qua k đỉnh trung gian
- Khi k = 0, P= cạnh (i, j), $d_{ij}^{(0)} = w(i, j)$, như vậy:
- $$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w(i,j), & \text{nếu } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) \end{cases} \qquad (*)$$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Ma trận $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ là ma trận khoảng cách (độ dài đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh i và j
- Vậy $d_{ij}^{(n)} = d_{ij}$, $\forall$ i, j=1,…, n
- Giải thuật tính $d_{ij}^{(1)}$, $d_{ij}^{(2)}$, …, $d_{ij}^{(n-1)}$ và $d_{ij}^{(n)}$ qua một vòng lặp k=1, 2, …, n

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

Floyd-Warshall(G, W) // π_{ij} là đỉnh trước j (sau i)

$n \leftarrow$ rows[W[G]]

$D \leftarrow W$

for $i \leftarrow 1$ to n

    do for $j \leftarrow 1$ to n

        do if $w(i, j) < \infty$ **then** $\pi_{ij} \leftarrow j$ **else** $\pi_{ij} \leftarrow 0$

for $k \leftarrow 1$ to n

    do for $i \leftarrow 1$ to n

        do for $j \leftarrow 1$ to n

            do if $d_{ij} > d_{ik} + d_{kj}$

                then $d_{ij} \leftarrow d_{ik} + d_{kj}$

                    $\pi_{ij} \leftarrow \pi_{ik}$

return D

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

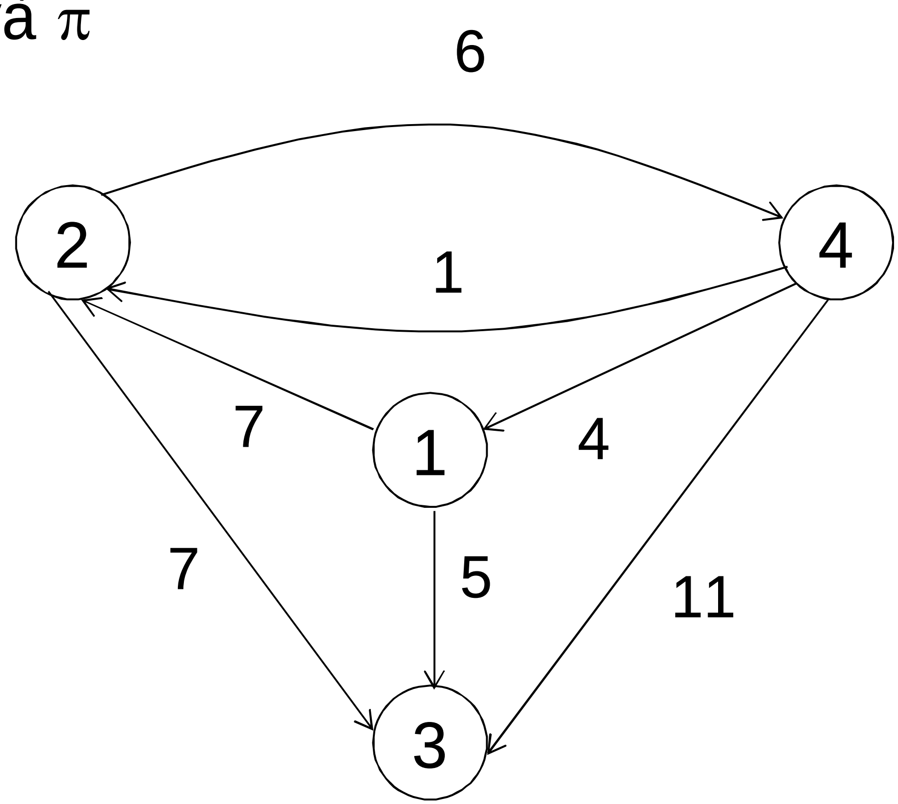
- **Định lý 2**: Thuật toán Floyd-Warshall cho ma trận $D^{(n)}$ là ma trận khoảng cách nhỏ nhất của mọi cặp đỉnh của đồ thị

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Độ phức tạp thuật toán $T(n) = O(n^3)$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

Tính D và π



THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 0 $D^{(0)}$ $\pi^{(0)}$

∞	7	5	∞
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	11	∞

0	2	3	0
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	3	0

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 1 $D^{(1)}$ $\pi^{(1)}$

∞	7	5	∞
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	9	∞

0	2	3	0
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	1	0

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 2 $D^{(2)}$ $\pi^{(2)}$

∞	7	5	13
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	8	7

0	2	3	2
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	2	2

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 3 $D^{(3)}$ $\pi^{(3)}$

∞	7	5	13
∞	∞	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	8	7

0	2	3	2
0	0	3	4
0	0	0	0
1	2	2	2

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

k= 4 $D^{(4)}$ $\pi^{(4)}$

17	7	5	13
10	7	7	6
∞	∞	∞	∞
4	1	8	7

2	2	3	2
4	4	3	4
0	0	0	0
1	2	2	2

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Để tìm đường đi ngắn nhất từ i đến j, sử dụng công thức truy hồi:
- i, π_{ij}, $\pi_{\pi_{ij}\, j}$, …, j

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Ví dụ: $d(1, 4) = D^{(4)}_{1,4} = 13$ nên
  - $1 \rightarrow \pi_{1,4} = 2 \rightarrow \pi_{2,4} = 4$
  - Đường đi ngắn nhất $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Đồ thị có hướng sẽ liên thông mạnh nếu mọi phần tử không thuộc đường chéo chính trong ma trận khoảng cách có giá trị hữu hạn
- Nếu $D^{(n)}_{ii} < \infty$ thì đồ thị có chu trình chứa đỉnh i

THUẬT TOÁN FLOYD-WARSHALL

- Để tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị vô hướng thì thay thế cạnh e=(u, v) bởi hai cạnh có hướng (u, v) và (v, u) có cùng trọng số với e