数字信号处理大作业报告

漆耘含

2016011058

1　实验背景及基本原理

1.1　背景

多普勒效应是波源与观察者有相对运动时，观察者接收到波的频率与波源发出的频率并不相同的现象。例如：交通警察向行进中的车辆发射频率已知的超声波同时测量反射波的频率，根据反射波的频率变化的多少，就能知道车辆的速度；首个投入使用的卫星导航系统，子午仪卫星导航系统正是利用多普勒频移实现对地面接收机的定位。

1.2　多普勒效应基本原理

假设观察者的观测频率f和发射源的发射频率f_0的关系为：

$$f = (\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s})f_0$$

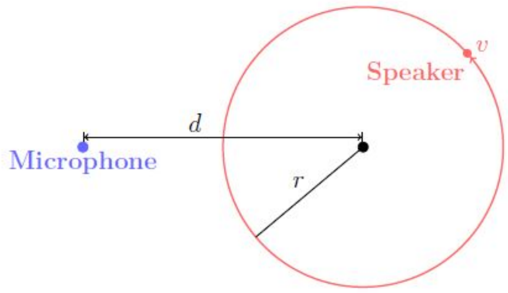
其中v为波在传播介质中的传播速率；v_0为观察者相对传播介质沿二者连线的运送速率，向源移动时符号为正；v_s为发射源相对传播介质沿二者连线的运动速率，远离观察者时符号取正。

2　问题1

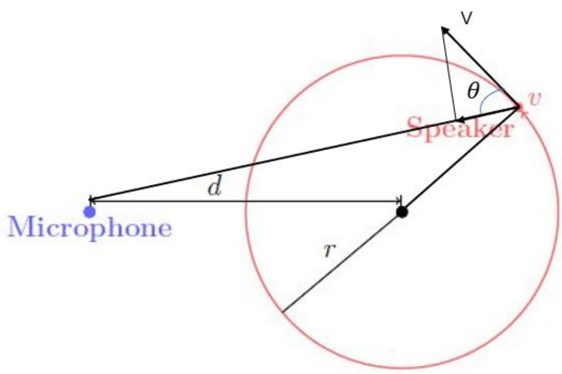
根据多普勒频移原理，思考扬声器在什么位置发出的声音被麦克风接收后的频率：a）最大，b）最小，c）等于播发频率。

2.1 分析

在二维空间中，扬声器在做匀速圆周运动，麦克风静止不动，扬声器会播发固定频率的正弦音，由于扬声器与麦克风之间存在相对运动，麦克风接收到的声音频率会发生变化。麦克风与扬声器的位置关系图如下：



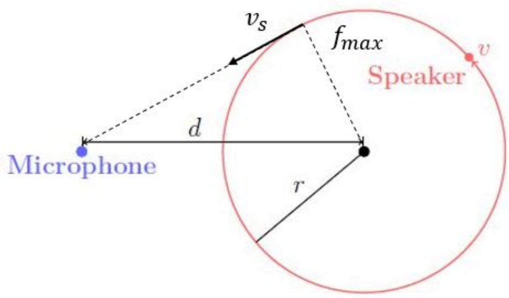
由上图可以看出，扬声器和麦克风之间的连线在不停地变化，扬声器的速度方向是圆的切线，麦克风静止不动，因此$v_0 = 0$，下面画出某一点的情形：



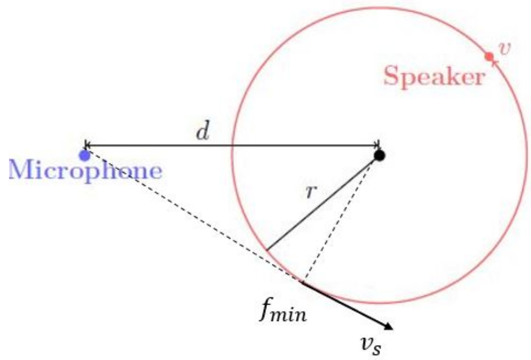
由此可以得出，在该点发出频率为f_0的单频信号，在麦克风处接收到的频率应该为：

$$f = \frac{v}{v - v_s \times cos\theta} f_0$$

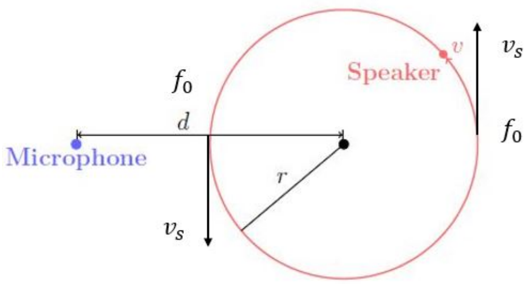
当$cos\theta = 1$的时候，f取得最大值，这时$\theta = 0$，$f = \frac{v}{v-v_s} f_0$,扬声器的速度方向与扬声器到麦克风的射线方向相同，具体的位置为过麦克风这点做圆的切线（取上边那条，因为扬声器是逆时针运动），如下图所示：



同理，当$cos\theta=-1$的时候，f取得最小值，这时$\theta=\pi$，$f=\frac{v}{v+v_s}f_0$,扬声器的速度方向与扬声器到麦克风的射线方向相反，具体如下图所示：



当$cos\theta=0$的时候，f的取值等于发射频率f_0，这时$\theta=\frac{\pi}{2}$，扬声器的速度方向与扬声器到麦克风的射线方向垂直，具体如下图：



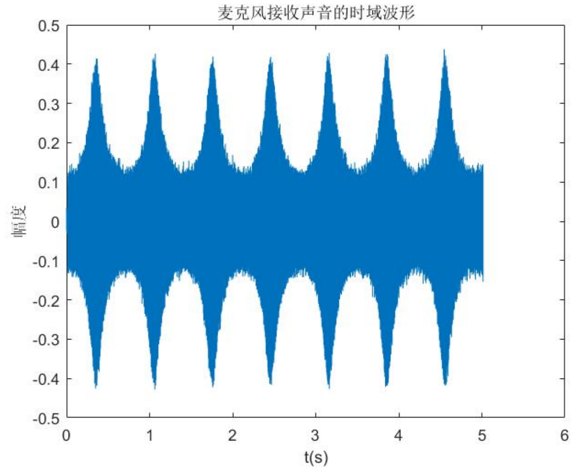
3 问题2

利用麦克风收到的声音，试着估计分析出整个实验环境的参数。包括

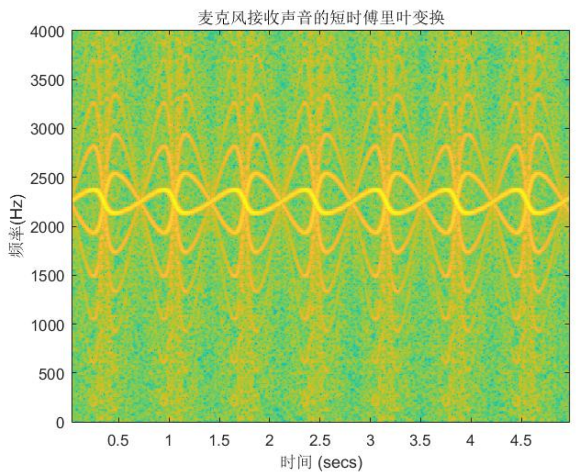
扬声器的运动速率、运动半径r和轨迹圆心到麦克风的距离d。

3.1 问题分析

麦克风收到的声音为sound.wav，采样率为8kHz，其时域波形为：

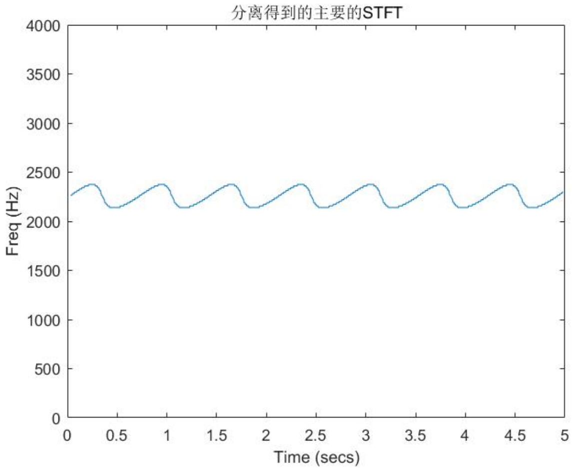


因为麦克风收到的声音是随时间变化的，而扬声器也是沿着轨迹圆进行周期匀速运动，因此其麦克风收到的声音的频率也是关于时间的周期函数，要想分析接收到的声音频率与时间的关系，应该采用短时傅里叶变换的方法来进行分析，因此对接收到的sound.wav进行短时傅里叶变换，得到如下图所示：

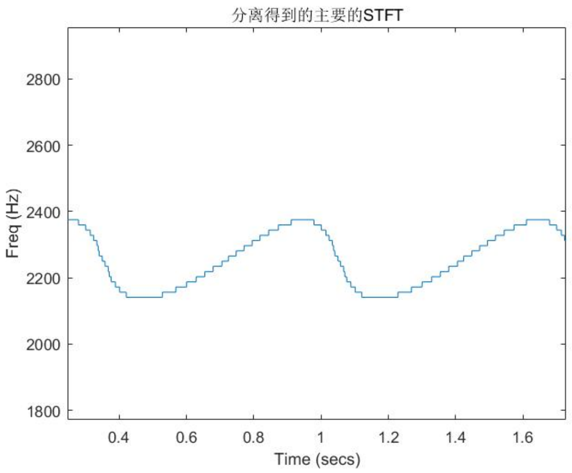


由时频图可以看出，其最主要的随时间变化的频率成分为一个周期函

数，将其分离得到如下图：



分离的编程方法为：得到时频图对应的矩阵，在每一列（即每一个时刻）找模最大的元素，并记下其对应的频率大小，然后绘制其主频率的图像，即上图。因为短时傅里叶变换分辨率的关系，画出的主频率成分的波形其实是一个阶梯图，将上图放大，得到：



在分析得到接收频率随时间变化的波形之后，下面就将计算各个参数：扬声器的运动速率v_s、运动半径r和轨迹圆心到麦克风的距离d。

3.2 求解扬声器速率

先求解扬声器的运动速率v_s，由问题1中的分析可知，当扬声器的速度

方向与扬声器、麦克风之间连线相平行的时候，接收到的频率为最大、小值，因此在主成分时频图中选取特殊值点：最大值点$f_{max} = 2375Hz$和最小值点$f_{min} = 2140.6Hz$，$f_0 = 2257.8Hz$带入公式:

$$f_{max} = \frac{v}{v - v_{s,max}} f_0$$

$$f_{min} = \frac{v}{v + v_{s,min}} f_0$$

可以得到$v_{s,max} = 16.7763Hz$和$v_{s,min} = 18.6131Hz$，理论上这两者的值应该完全相等，但因为分辨率等原因这两者的值计算出来是不相等的，因此取平均得到估计的$v_s = 17.7Hz$。将估计的v_s分别带入多普勒效应公式中，得到：

$f_{max,check} = \frac{v}{v - v_a verage} f_0 = \frac{340}{340-17.7} \times 2257.8 = 2381.8Hz$

误差为：$\eta = \frac{2381.8-2375}{2375} = 0.3\%$

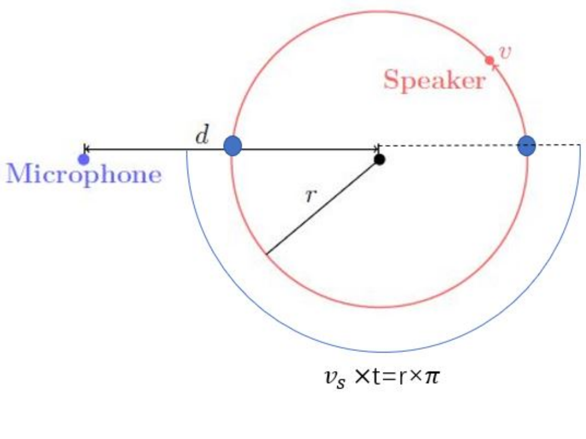
$f_{min,check} = \frac{v}{v + v_a verage} f_0 = \frac{340}{340+17.7} \times 2257.8 = 2146.1Hz$

误差为：$\eta = \frac{2146.1-2140.6}{2140.6} = 0.26\%$

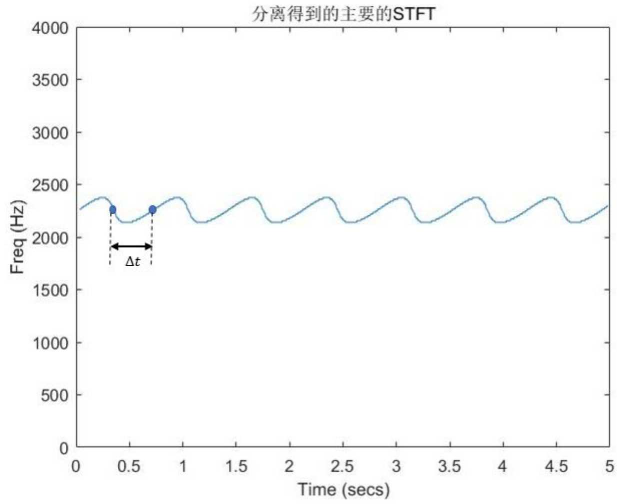
因为$f_{max,check}$和$f_{min,check}$的误差都在0.5%以内，因此在误差允许范围内，是符合要求的。

3.3 求解运动半径r

因为已经得到估计的v_s，因此选择两个特殊点：离麦克风最近和最远的圆上的两个点，因为在这两个位置上，麦克风收到的频率为$f = f_0$，具体如下图所示：



这两个点在时频图中的对应位置为如下图所示：

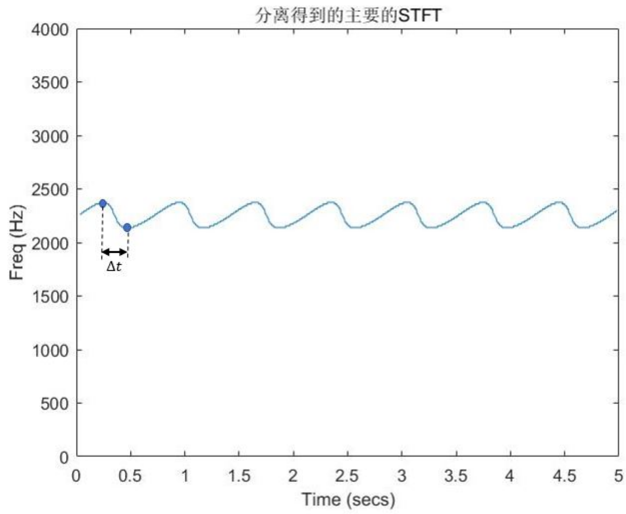


通过列出方程$v_s \times \triangle t = r \times \pi$，解得$r = 1.9728$

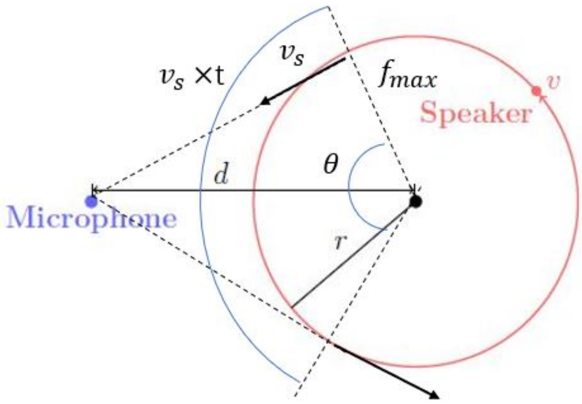
3.4 求解轨迹圆心到麦克风的距离d

因为已知轨迹半径r，因此选取与f_max和f_min两个点，先通过时频图得到从f_max点运动到f_min的时间，再计算出走过的距离（弧长），然后得到对应的圆心角度，再通过三角关系得到d。

在时频图中两点选取如下：



在麦克风与扬声器关系图中，具体情况如下图：



下面计算d，通过时频图得到$\triangle t = 0.2102s$，计算$\theta = \frac{v_s \times \triangle t}{r} = 1.8859rad$，因为相切，因此$d = \frac{r}{cos(\frac{\theta}{2})} = 3.3583$

3.5 小结

本小问主要是通过短时傅里叶变换对麦克风收到的信号进行处理，然后提取出有用的信息，最终得到$v_s = 17.7$，$r = 1.9728$，$d = 3.3583$，本小问的结果可以直接运行MATLAB程序“big_homework.m”得到。

4 问题3

基于多普勒频移原理，用若干个扬声器设计一个二维定位系统，让麦克风通过接收若干个扬声器的信号确定自己的位置和速度。请给出详细的设计方案，并从理论上阐明其可行性。

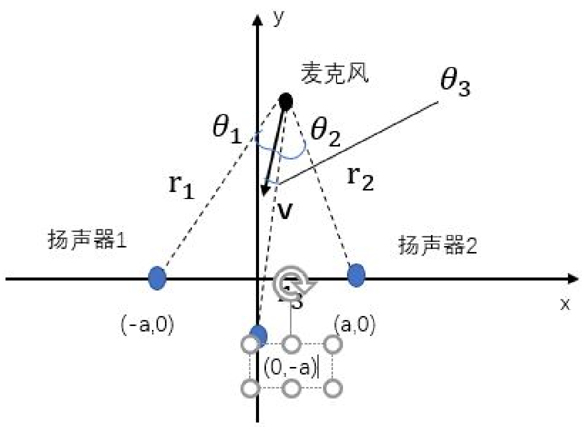
4.1 方案一

4.1.1 模型假设

在这个问题中，扬声器是固定不动的，麦克风是运动的，假设麦克风的速度为v_M，声速为$v = 340m/s$，因此根据多普勒效应，当某一个扬声器发出一个单频信号的时候，麦克风接收到的频率为：

$$f = \frac{v + v_M cos\theta}{v}$$

假设用三个固定的扬声器，某一麦克风在二维平面中运动，构建坐标系如下：



假设扬声器1发出以f_1为频率的单频信号，扬声器2发出以f_2为频率的单频信号，扬声器3发出以f_3为频率的单频信号则麦克风收到的频率分别为：

$$f_{receive,1} = \frac{v + v_M cos\theta_1}{v}$$

$$f_{receive,2} = \frac{v + v_M cos\theta_2}{v}$$

$$f_{receive,3} = \frac{v + v_M cos\theta_3}{v}$$

4.1.2 方案设计-确定位置

因为用的器件是扬声器和麦克风，扬声器没有接收器，无法收到反射回来的信号，因此不能利用超声波测距原理来确定麦克风与两个扬声器之间的距离。现在把发送信号的强度也考虑进去，假设扬声器1的发送信号功率为P_1，扬声器2的发送信号功率为P_2，扬声器3的发送信号功率为P_3，麦克风能够分辨出接收到的三个频率的接收功率：$P_{receive,1}$，$P_{receive,2}$，$P_{receive,3}$，根据自由空间路径损耗公式：

$$FSPL = (\frac{4\pi d}{\lambda})^2 = (\frac{4\pi df}{c})^2$$

其中c为光速，f为信号频率

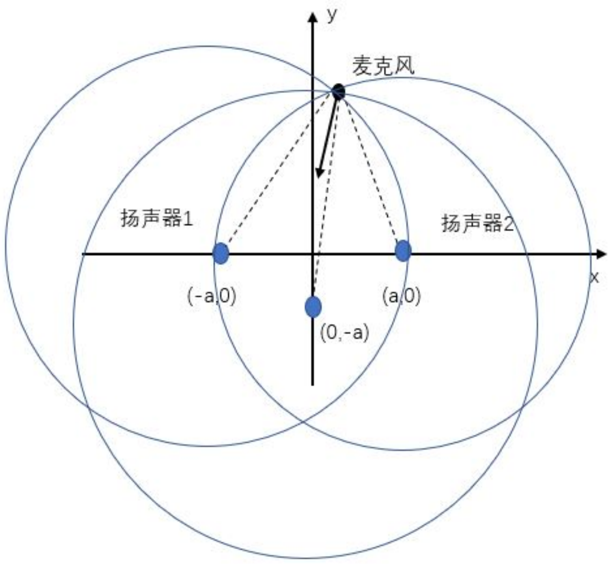
因此可以利用该公式，分别计算出麦克风到两个扬声器的距离：

$$\frac{P_{receive}}{P} = (\frac{\lambda}{4\pi d})^2 = \frac{1}{FSPL}$$

假设$\frac{P_{receive}}{P} = K$，因此解得:

$$d = \frac{c}{4\pi f\sqrt{K}}$$

在得到d_1，d_2，d_3（即麦克风到三个扬声器的距离）之后，麦克风的位置即为以扬声器1为圆心，半径为d_1的圆、以扬声器2为圆心，半径为d_2的圆、以扬声器3为圆心和半径为d_3的圆的交点处，如下图所示：



设麦克风所在坐标为(x,y),可以列出三个方程，如下：

$$(x+a)^2 + y^2 = d_1^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = d_2^2$$

$$x^2 + (y+a)^2 = d_3^2$$

因为有两个未知数，三个方程，因此是一个超定方程，因为已知三个圆必定交于一个点，因此用前两个方程，解得：

$$x = \frac{d_1^2 - d_2^2}{4a}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{[4a^2 - (d_1 - d_2)^2][(d_1 + d_2)^2 - 4a^2]}}{4a}$$

然后将两个解分别带入第三个方程，在误差允许范围内满足方程的解，即为麦克风的坐标。

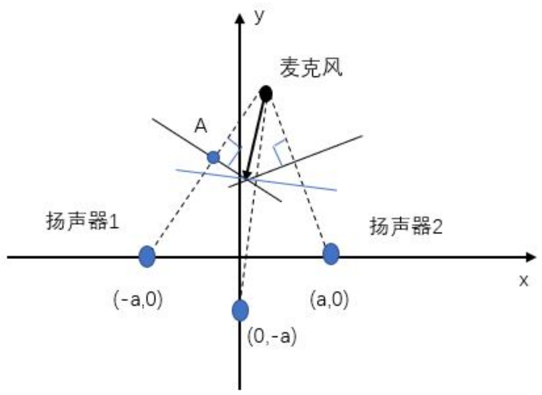
4.1.3 方案设计-确定速度

根据多普勒效应公式，可以解出麦克风沿麦克风-扬声器连线的速率分量：

$$v_{M,i} = \pm\frac{f_{receive} - f_i}{f_i}v$$

其中，$v_{M,i}$为麦克风沿第i个扬声器的速率分量$f_receive$为麦克风接收到的频率，f_i为第i个扬声器发出的频率,当麦克风向扬声器靠近的时候，为正。

麦克风的速度可以通过如下方法来确定：对于第i个扬声器，连接扬声器与麦克风，过麦克风这一点做线段与连线交于A点，线段A-麦克风的长度等于$v_{M,i}$，然后过A点做垂直于连线的线。所有的垂线肯定会相交于一个点，因为麦克风的速度只有一个方向一个大小，具体如下图所示：



由此可以得出麦克风运动的方向，然后列出方程可以求解出麦克风的运动速率。

4.1.4 模型分析

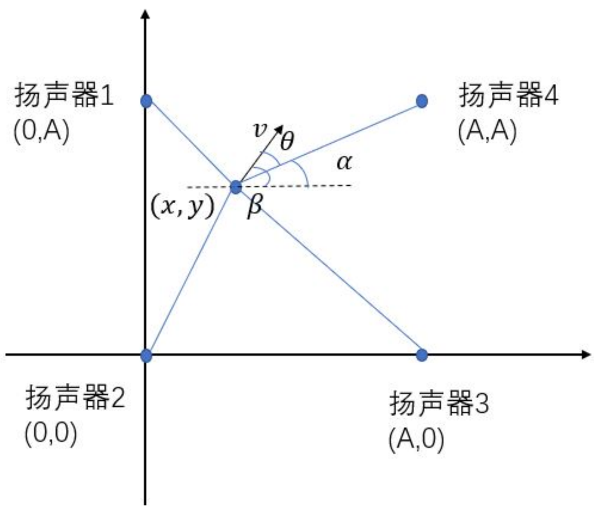
此模型应用了自由空间衰减模型，在高信噪比的时候，效果会很比较好，但在低信噪比的时候，强度的判断上会有比较大的误差，因此最后的预测效果会不太好。

4.2 方案二

本方案摒弃了自由空间传播模型，采用几何和多普勒频移定理相结合的问题。

4.2.1 方案分析

在二维平面中，要确定麦克风的位置和速度，一共有四个自由度，因此至少应该使用四个麦克风（上一个方案应用了自由空间传播模型，减少了自由度，因此只需要3个扬声器）。假设扬声器如下排布：



假设四个扬声器的坐标分别为(0,0)、(0,A)、(A,0)、(A,A)，麦克风所在位置为(x,y)，麦克风速度方向与水平面夹角取为β，某一扬声器与麦克风连线与水平线的夹角为α_i，麦克风速度沿着扬声器的方向的夹角为θ_i。扬声器发出的频率为f_i。

由上一个方案可知，可以通过对接收的信号进行短时傅里叶变换找到主要的四个频率，然后根据多普勒频移效应，可以解出麦克风沿着各个扬声器连线的速率大小v_i。

$$v_i = \pm\frac{f_{receive} - f_i}{f_i}v$$

其中，v_i为麦克风沿第i个扬声器的速率分量$f_receive$为麦克风接收到的频率，f_i为第i个扬声器发出的频率,当麦克风向扬声器靠近的时候，为正。

下面对第四个麦克风列出方程：

因为有麦克风和扬声器的坐标位置，因此可以计算出扬声器与麦克风连线与水平线的夹角大小$\alpha_i = arctan(\frac{A-y}{A-x})$，则麦克风速度沿着扬声器的方向的夹角为$\theta_i = \beta - \alpha_i = \beta - arctan(\frac{A-y}{A-x})$，因此有方程：

$$v_i = v \times cos\theta_i = v \times cos(\beta - arctan(\frac{A-y}{A-x}))$$

$$\frac{f_{receive} - f_4}{f_4} \times v = v \times cos(\beta - arctan(\frac{A-y}{A-x}))$$

然后其他每一个扬声器都可以列出一个方程：

对扬声器1：

$$\frac{f_{receive} - f_1}{f_1} \times v = v \times cos(\pi - \beta - arctan(\frac{A-y}{x-0}))$$

对扬声器2：

$$-\frac{f_{receive} - f_2}{f_2} \times v = v \times cos(arctan(\frac{y-0}{x-0}) - \beta)$$

对扬声器3：

$$-\frac{f_{receive} - f_2}{f_2} \times v = v \times cos(\pi - \beta - arctan(\frac{y-0}{A-x}))$$

一共四个方程，未知量为:x,y,v,θ，解出方程即得到解。但这个方程没有显示解，只能通过牛顿迭代法得到数值解。

4.2.2 模型小结

本模型的抗噪声能力比第一个模型好，不过该方法的解只能通过数值分析方法得到，没有显示解，不过精确性比较好。

5 大作业总结

本次大作业让我对多普勒效应有了初步的了解，并且对信号进行了实际的短时傅里叶变换，通过调整参数认识到短时傅里叶变换的分辨率问题；在第三问自主设计方案的时候，第一个方案是用了自由空间传播损耗模型，当时没有考虑到应用到实际中的情况，因为实际中会有很多噪声，在信噪比比较高的时候影响不大，不过在低信噪比的时候，影响还比较大，精确性不高。

第二个方案采用的是几何方法加多普勒效应，通过确定二维平面中有四个自由度，然后用四个方程来解，这样是比较精确的，不过因为是用数值计算，因此可能不是全局最优解。

第三问并没有实际仿真验证，不过试了一下加噪声之后的自由空间传播损耗，发现误差会很大，不过后面的就没有仿真了，这是本次大作业的一个遗憾，因为其他科目也有很多大作业，最近实在太忙，所以请见谅!