

# 随机过程大作业报告

漆耘含

2016011058

## 1 大作业内容简述

本次大作业是用两种方法（周期图方法与MUSIC方法）对随机过程 $x(t)$ 进行进行频谱分析，下面是具体的题目：

随机过程 $X(t) = 10 \sin(0.34\pi t + \theta_1) + 5 \sin(0.36\pi t + \theta_2) + e(t)$   $t=1,2,\dots,64$ ； $e(t)$ 是零均值、方差为1的白噪声； $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 是 $[0,2\pi]$ 均匀分布的随机变量， $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 与 $e(t)$ 三者互相独立。请用50次样本分析下面问题：

- 1) 给出周期图方法与MUSIC方法对两个频率的估计值，比较它们对这两个频率的分辨能力；
- 2) 改变噪声功率，分析信噪比对两种方法频率分辨能力的影响；
- 3) 改变两个正弦波分量的相对强度，分析信号分量相对强度对两种方法频率能力的影响；

本次大作业能够让我们对谱分析有更深入的理解，通过周期图谱估计和MUSIC方法的对比，让我们了解两种方法的分辨能力，同时通过改变参数的方法，对影响谱分析的因素进行分析。

## 2 原理分析

本部分将主要阐述并分析周期图方法和MUSIC方法背后的原理

### 2.1 周期图谱估计方法原理

由维纳-辛钦（Bochner-Khinchine）定理可以知道，自相关函数 $R(\tau)$ 与

平均功率密度 $S(\omega)$ 是一对傅里叶变换对，变换公式如下：

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2)$$

上面公式是连续的，下面是对离散序列（进行采样）的傅里叶变换对：

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) e^{-j\omega n} \quad (3)$$

$$R(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (4)$$

离散序列的自相关函数是有周期性的

周期图谱估计方法： $\{X_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ 宽平稳， $E\{X_k\} = 0$ ，周期图谱估计为

$$S(\omega) = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n X_k e^{-j\omega k} \right|^2 \quad (5)$$

有两种方法，第一种是对 $n$ 点序列求DFT，再求模平方；第二种是等效为估计 $R(\tau)$ ，再做DFT

## 2.2 MUSIC方法原理

MUSIC算法叫做多信号分类算法（Multiple Signal Classification），MUSIC算法的基本思想是将任意阵列输出数据的协方差矩阵进行特征值分解，从而得到与信号分量相对应的信号子空间与信号分量相正交的噪声子空间，然后利用这两个子空间的正交性来估计信号的参数。原理如下：

假设信号数学模型为：

$$X(t) = A(\theta)S(t) + N(t) \quad (6)$$

其中， $A_\theta$ 是导向矢量， $N(t)$ 是噪声矢量， $S(t)$ 是发射信号。根据协方差公式，可以得到如下表达式：

$$R = E\{x(t)x^H(t)\} \quad (7)$$

这个表示接收信号的协方差矩阵，因为接受的信号 $X(t)$ 是一个产生的信号 $S(t)$ 与噪声的一个线性组合（信号与噪声相互独立），将（4）带入（5）中，得到

$$R_s = E[XX^H] = AE(SS^H)A^H + \delta^2 I = AR_s A^H + \delta^2 I \quad (8)$$

$R_S$ 是信号 $S(t)$ 的协方差矩阵，由于信号与噪声相互独立，对 $R$ 进行特征值分解，得：

$$R = U_S \sigma_S U_S^H + U_N \sigma_N U_N^H \quad (9)$$

其中，具体的分解方法是对矩阵 $R_S$ 进行特征值分解，得到 $N$ 个特征值，对这 $N$ 个特征值从大到小排序，前 $M$ 个值对应 $\sigma_S$ 的对角线元素（特征值）， $U_S$ 是相应的特征值对应的特征向量组成的矩阵，即这个矩阵里面的向量张成了信号空间，同理，第 $M+1$ 到 $N$ 特征值对应 $\sigma_N$ 的对角线的值（特征值）， $U_N$ 是噪声空间中的特征向量。这样构造出来的信号的特征向量和噪声部分的特征向量是正交的（因为属于不同特征值的特征方程），同时信号的导向矢量 $A_\theta$ 与噪声子空间正交，即 $a^H(\theta)U_N = 0$ 。

上面是理想情况，实际接收的信号 $X(t)$ 是离散的，即

$$R = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X X^H \quad (10)$$

对 $R$ 进行特征分解，得到 $\sigma_S$ 和 $\sigma_N$ ，因为这时的信号与噪声不是完全正交的，因此需要采用最小优化搜索来进行估计（找到一个 $\theta$ ，使 $a^H(\theta)$ 与 $V_N$ 最接近正交），即：

$$\theta_{MUSIC} = \arg \min_{\theta} a^H(\theta) V_N V_N^H a(\theta) \quad (11)$$

谱估计公式为：

$$P_{MUSIC} = \frac{1}{a^H(\theta) V_N V_N^H a(\theta)} \quad (12)$$

下面具体说一下本次大作业中的MUSIC流程：

1. 生成50个样本序列，对每一个样本序列求自协方差矩阵得到 $R_x$ ；
2. 对协方差矩阵进行SVD分解，得到特征向量与特征值；
3. 对特征值从大到小排序，取第1-K个特征值为信号空间的特征值，取第(k+1)-N个特征值为噪声空间的特征值，并由分解得到的特征向量矩阵分离出噪声的特征矩阵 $V_n$ ；

4. 生成 $a(\theta)$ ，然后进行最小优化搜索，即： $P_{MUSIC} = \frac{1}{a^H(\theta) V_N V_N^H a(\theta)}$ ；

5. 最后画出MUSIC图像。

需要说明的是，这里的 $a(\theta)$ 是一个向量，形式如下：

$$a(\theta) = \{1, e^{-j\omega}, e^{-2j\omega}, \dots, e^{-(M-1)j\omega}\} \quad (13)$$

即相当于是每一个频点上的分量，计算得到的 $P_{MUSIC}$ 即为对应频点上的值。

### 3 第一题

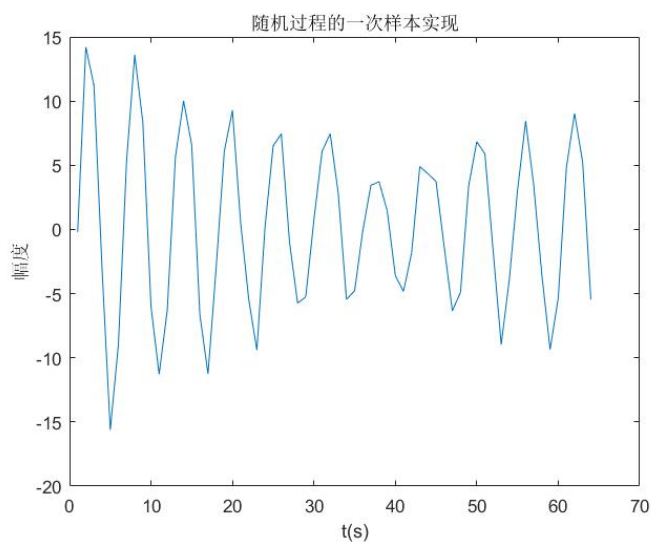
#### 3.1 解题思路

题目中要求用50次样本来分析下面的问题，因此先统一生成50条样本，保存在一个矩阵中，每一行为一条样本，因为要求 $t=1,2,3,\dots,64$ ，因此一个样本长度为64，采样率 $f_s$ 为1Hz，然后分别输入周期图方法和MUSIC方法进行运算，最后得到结果。

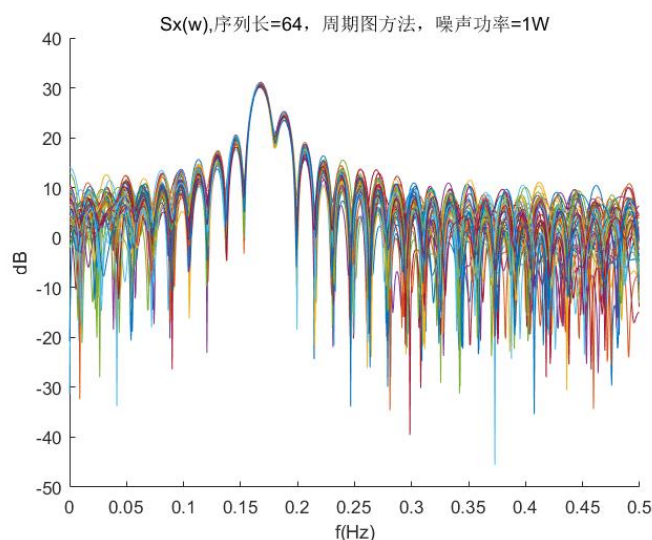
#### 3.2 周期图谱估计方法

周期图方法有两种方法：第一种是对 $n$ 点序列求DFT，再求模平方；第二种是等效为估计 $R(\tau)$ ，再做DFT。我选择的方法是第一种方法。

编程方法：先生成样本，然后通过快速傅里叶变换fft得到频域波形（注意：fft得到的波形是对称的，两边为低频，中间为高频，因此要观察频谱，需要fftshift一下），然后再模平方，取左半边（低频[左边]到高频[中间]），最后在绘制出 $S(\omega)$



下面对每一次样本计算一个 $S_X$ ，将他们绘制在同一个图上，得到如下图：



由上图可以看出，随机过程的样本的功率主要分布在 $f=0.16$ 和 $f=0.19$ 之间，有两个比较明显的高峰，通过先验得到随机过程的主要两个频率为 $f_1=0.17$ 和 $f_2=0.18$ ，理想情况下的 $S_X$ 应该是应该有两个峰，分别在 $f=0.17$ 和 $0.18$ 处，实际画出来的是有两个峰，不过非主峰的值也比较大，不能很好地辨别是否是频率所在。同时，因为生成的是随机信号，每一次运行程序得到的 $S_X$ 是不一样的，有的可以得到两个峰，有的却只有一个峰，效果不太稳定。

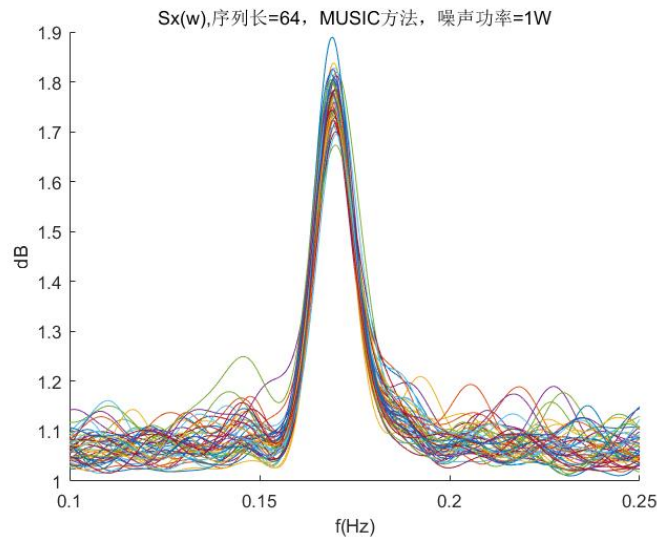
### 3.3 MUSIC方法

MUSIC方法对数据的预处理是一样的，都是生成50条样本数据。通过前面对MUSIC方法原理的解析，用matlab对该方法进行实现，具体效果如下：

从图片中可以看出，该过程的主要功率集中在 $f=0.15$ 和 $f=0.18$ 之间，峰值比较明显，但只有一个峰，没有达到分辨出两个峰的精度，相对于周期图来说分辨精度较低

### 3.4 小结

从上面两种方法来看，都估计出了两个频率的所在的大致范围，周期图能分辨出两个频率所在的大致位置，但噪声干扰比较大，并且不太稳定；



MUSIC方法不能得到精确的两个峰，分辨精度也比较低（相对于周期图来说）。下面分析一下效果不好的原因：一是因为采样频率是1Hz，适当提高采样频率（增多采样点数）会提高功率谱的分辨精度。二是因为噪声的干扰。三是因为两个频率的幅度的相对大小，因为如果两个频率间隔很小，而一个频率的功率很大，另一个频率的功率很小，小功率的可能会被覆盖，因此就引出了后面两个问题，以及延伸研究。

## 4 第二题

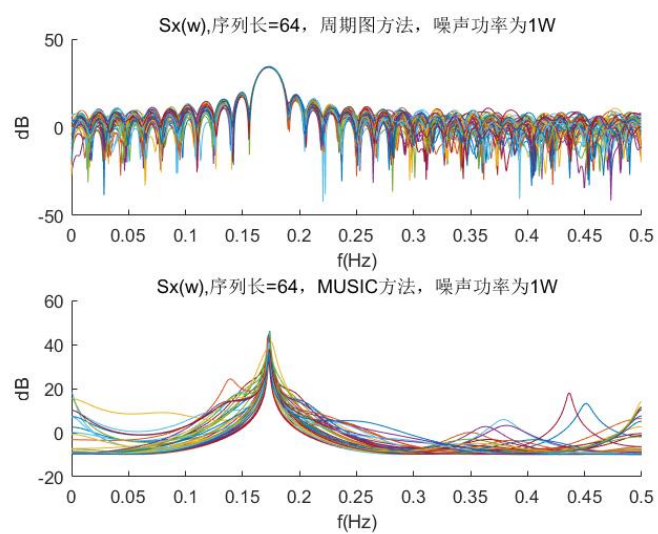
研究问题：改变功率噪声，研究信噪比对频率的影响

### 4.1 解题思路

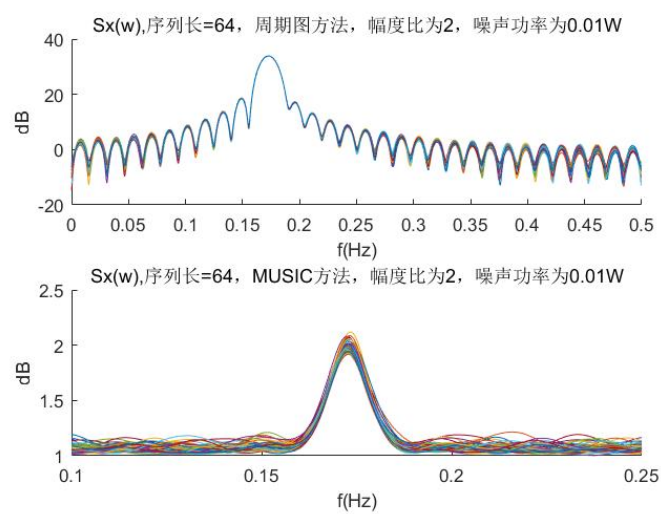
在生成噪声信号的时候，是用的randn函数，生成的是均值为0，方差为1的噪声，想要改变噪声功率，则先对其进行fft，然后进行改变功率，最后ifft得到改变功率后的时域波形。

### 4.2 改变噪声功率

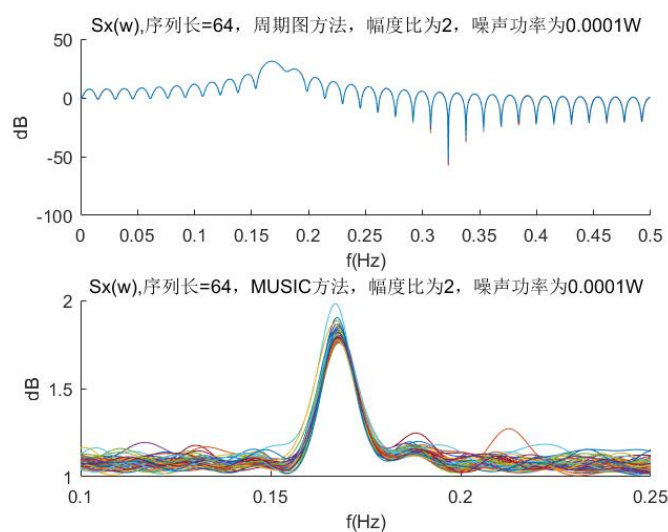
噪声功率为1W:



噪声功率为0.01W:



噪声功率为0.0001W:



### 4.3 小结

通过上面的几张图可以看出，当信噪比增大（噪声功率减弱，信号功率不变）的时候，周期图法和MUSIC方法的效果（分辨精度）都有所提升，周期图法在低信噪比的时候，噪声较多，干扰较大，在高信噪比的情况下，非主要频率成分干扰较小，且波形比较稳定；MUSIC方法在低信噪比的时候，不能分辨出两个频率分量，只能给出一个大概的区间，当高信噪比的时候，能够得到两个峰，可见当信噪比提升的情况下，MUSIC方法的效果得到了提升。

## 5 第三题

题目：改变两个正弦波分量的相对强度，分析信号分量相对强度对两种方法频率分辨能力的影响。

### 5.1 解题思路

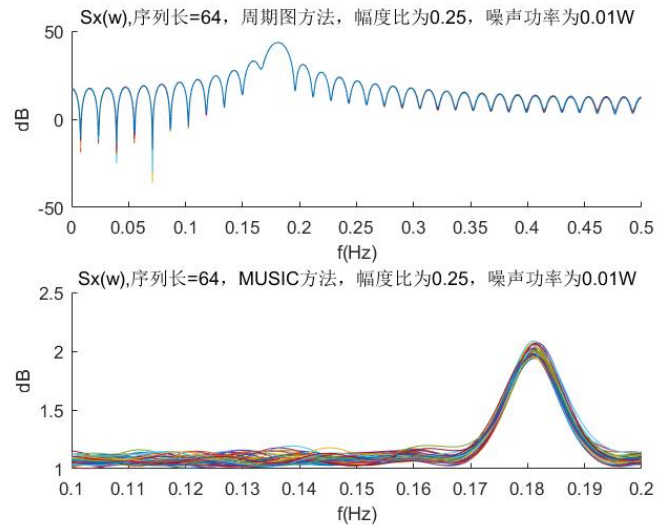
固定频率 $f_1=0.17\text{Hz}$ 的幅度值，改变 $f_2=0.18\text{Hz}$ 分量的幅度值，观察 $S_X$ 的形状



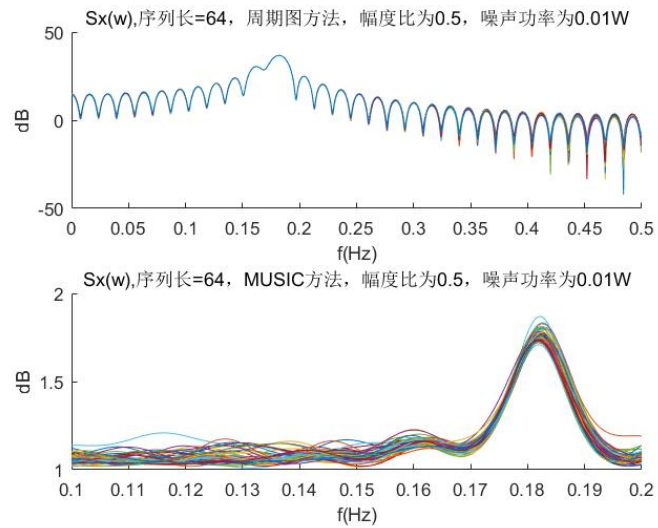
## 5.2 改变正弦分量的相对强度

将噪声功率设置为0.01W，排除掉噪声的干扰。

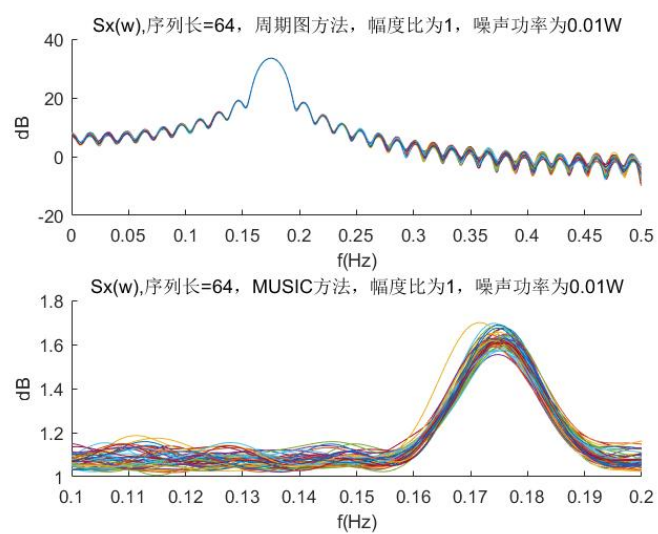
幅度比为0.25:



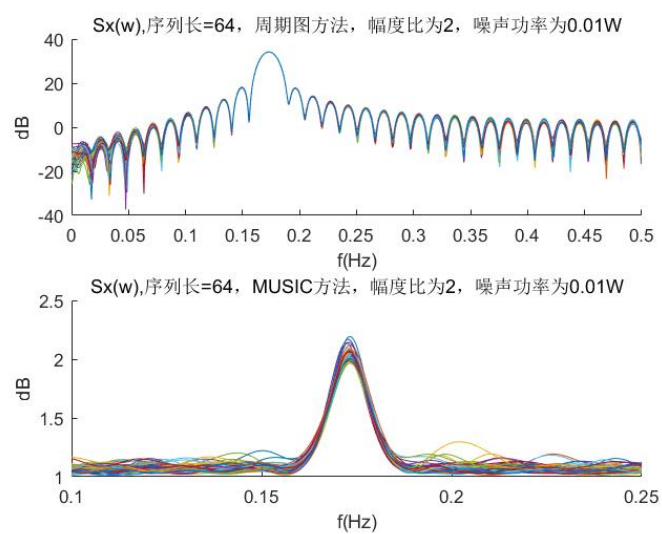
幅度比为0.5:



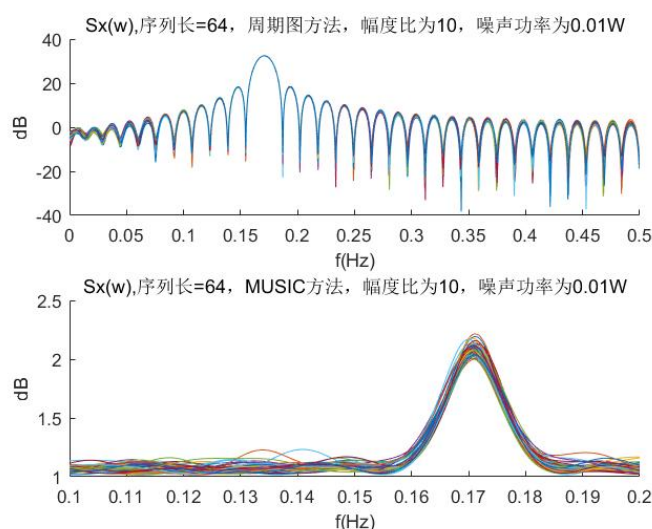
幅度比为1:



幅度比为2:



幅度比为10:



通过上面的图形可以看出，当改变幅度相对比的时候，在幅度比适当的时候，周期图法是可以分辨出两个频率的，但当幅度比达到10的时候，功率较小的那一个频率和其他的峰区别不大，不能很好地判断是否是频率分量；对于MUSIC法来说，和周期图法类似，但MUSIC只能大致分辨出一个区间，可以看到当幅度比在改变的时候，最大值对应的频率从0.17Hz变到了0.18Hz，这是在变化的，但没有同时很好地分辨出两个频率所在。

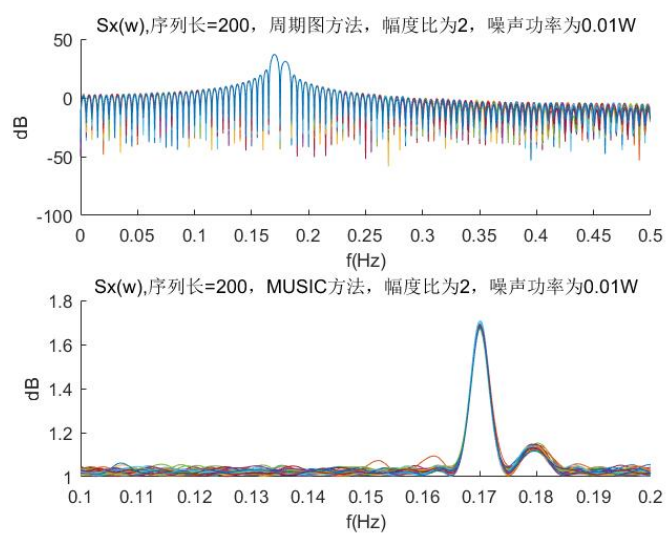
## 6 延伸研究

通过前面三个问题可以看出，虽然能看到有两个频率分量，但分辨精度并不高，只能大致分辨出频率所在的区间，不能很精确地进行分辨频率所在，因此在前述方法上进行一些提升和改进。

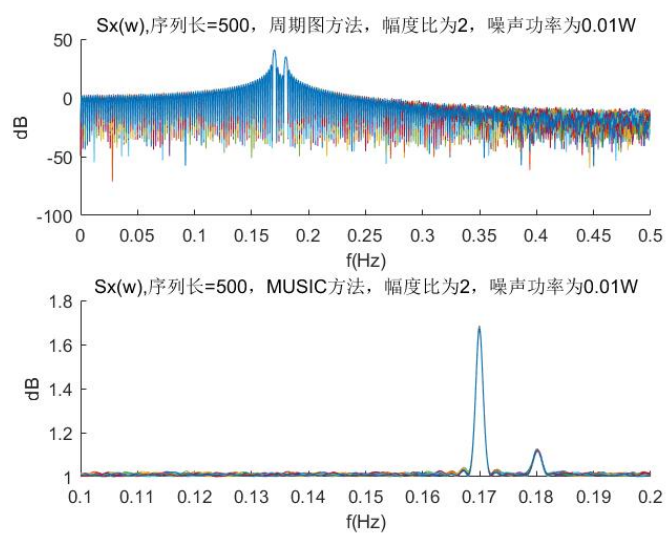
### 6.1 增长采样序列

固定采样频率 $f_s=1\text{Hz}$ ，增长采样时长，下面画出不同采样时长下的结果（噪声功率为0.01W，幅度比为2）：

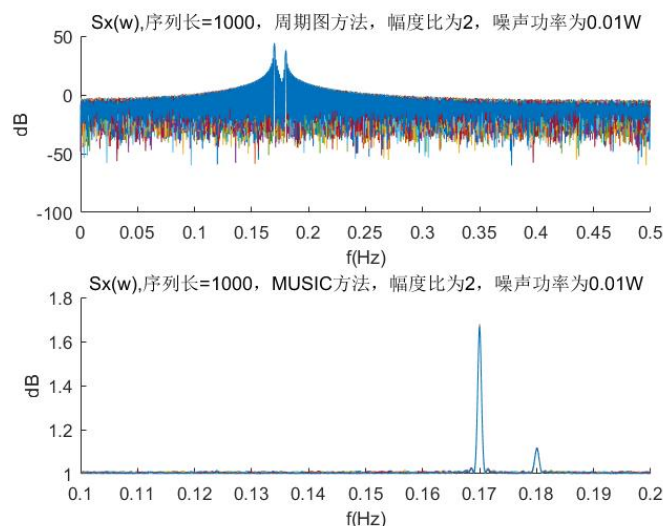
序列长度为200：



序列长度为500:



序列长度为1000:



通过上述不同序列长度的 $S_x$ 来看, 当采样长度增长之后, 能够提升显著周期图法和MUSIC法的分辨精度, 几乎精确地指明频率分量所在地方!

## 7 总结

通过本次大作业, 让我了解到对随机过程谱分析的基本方法, 也了解到周期图方法和MUSIC方法背后的基本原理。

周期图方法其实是有偏估计, 当数据样本增大的时候, 方差趋于一个不为0的值, 这是周期图方法的一个缺点, 但周期图方法的分辨精度是比较高的。同时, 当采样序列比较少的时候, 分辨精度并不高, 当采样序列增长的时候, 分辨精度逐渐增高。在周期图法的基础上, 还有窗周期图法等改进方法。在周期图法中用到fft, 当fft的采样点数比较少的时候, 绘制出来的 $S_x$ 曲线是一条折线, 而当采样点数增多之后,  $S_x$ 的图像就更接近真实情况, 这是因为采样点数比较少的时候, 不能很好地反应 $S_x$ 的图像, 当采样点数增多, 根据信号与系统的知识, 在频域采样, 就相当于在时域对序列进行周期延拓, 当采样频率 $F$ 等于序列长度时, 时域延拓是没有重叠的, 当采样频率进一步增高的时候, 在时域需要在一个周期序列后面补0, 这样才能保证频域有足够多的采样频点, 因此 $S_x$ 才会有更精确的图像。这次大作业也把信号与系统的知识与随机过程联系起来, 融会贯通!

MUSIC方法是特征结构的子空间方法，对序列的谱分析来说，是计算每一个频点上的值，当是阵列的时候，是计算每一个入射角度对应的值，但两者的原理是差不多的。当序列长度增加的时候，它的分辨率逐渐提升。MUSIC算法在特定的条件下具有很高的分辨力，估计精度及稳定性，它主要是应用于阵列的波达方向的估计。

这次大作业让我更加熟练地MATLAB编程，同时将上课的内容进行仿真，理论与实践结合，对相关知识的理解更加深刻，收获良多！

## 参考文献

- [1] 李刚. 随机过程讲义第四讲
- [2] 王娟, 薛光, 王素真,等. 多重信号分类(MUSIC)算法的研究分析[J]. 大众科技, 2008(1):46-48.

big\_homework1.m

```

1  clear;
2  clc;
3  Ts = 1;
4  t = 1:1:1000;
5  t_50 = zeros(50,length(t));
6
7  for i = 1:1:50                                %产生个随机样
      本50
8      t_50(i,1:length(t))= t(1:end);
9  end
10 sita = random( 'unif',0,1,50,2)*2*pi;  %生成两个0-2的随机
      相位pi
11 e = randn(50,length(t));  %产生功率为1的的噪声W
12 e_fft = fft(e)*10(-1);  %转到频域进行功率调整
13 e = ifft(e_fft);  %从频域转回时域
14 w = [0.34*pi 0.36*pi]; %产生两个频率
15 A = [10 5];  %产生两个信号的幅度
16 x = A(1)*sin(w(1)*t_50+sita(1)) + A(2)*sin(w(2)*t_50+
      sita(2))+e;
17 figure;  %画一个生成的随机样本
18 plot(t,x(1,:));
19 title随机过程的一次样本实现("");
20 xlabel("t(s)");
21 ylabel幅度("");
22
23 Sx = (abs(fft(x',2000)).^2)/length(t); %得到Sx
24 fs = 2000;  %的采样个数fft
25 f = ((0:999)/2000);  %生成频率坐标
26 sx = Sx';  %是一列为一个样本的, 因此转置一下方便处理Sxfft
27 figure;  %画, 序列长Sx, 周期图方法, 噪声功率=64=1W
28 hold on;  %画在同一张图上

```

```

29 xlabel(" f(Hz)");
30 ylabel(" dB");
31 title(" Sx(w)序列长, 周期图方法, 噪声功率,=64=0.0001W");
32 for i = 1:1:50
33     plot(f,10*log10(sx(i,1:fs/2)));
34 end
35
36 figure;hold on;
37 title(" Sx(w)序列长, ,=64方法, 噪声功率MUSIC=0.0001W");
38 xlabel(" f(Hz)");
39 ylabel(" dB");
40 for i = 1:1:50
41     test = x(i,:)';
42     [s_width,s_length] = size(test);
43     Rx = test*test';
44     [V,D] = eig(Rx);
45     D = diag(D);
46     [D,pin]=sort(D,'descend');
47     Vn = V(:,pin(6:s_width,1));
48     w = 0.1:0.0001:0.2;
49     len = [0:length(t)-1]';
50     A_theta = exp(-1j*len*2*pi*w);
51     p_all = diag(A_theta'*A_theta)./diag(A_theta'*Vn*Vn'*
        A_theta);
52     p(i,:)=p_all;
53     plot(w,abs(p_all));
54 end
55
56 figure; %下面的操作是将周期图方法和方法MUSIC
57 subplot(2,1,1),hold on; %画在同一张图中(subplot)
58 xlabel(" f(Hz)");

```



```

59 ylabel("dB");
60 title("Sx(w)序列长, 周期图方法, 幅度比为, 噪声功率
    为,=100020.01W");
61 % title("Sx(w)序列长, 周期图方法, 噪声功率为,=640.0001W");
62 for i = 1:1:50
63     plot(f,10*log10(sx(i,1:fs/2)));
64 end
65
66 %将方法画在第二张图上MUSIC
67 subplot(2,1,2),hold on;
68 xlabel("f(Hz)");
69 ylabel("dB");
70 title("Sx(w)序列长, ,=1000方法, 幅度比为, 噪声功率
    为MUSIC20.01W");
71 % title("Sx(w)序列长, ,=64方法, 噪声功率为MUSIC0.0001W");
72 for i = 1:1:50
73     plot(w,abs(p(i,:)));
74 end

```