「数値解析」レポート問題　　2016年度・後期

提出期限：*2017*年*2*月*3*日（金）

提出先は次のどちらでもよいです：

- 講義のときに講師に渡す（期末試験やフィードバックのときでもOKです）
- 講師の研究室（6号館705室）に提出する（不在の場合はドアにある封筒に入れて下さい）
- メールで送付する：karel(AT)math.kyoto-u.ac.jp（答案のスキャン，プログラムファイル，図など）

ファイルサイズが大きくメールで送付できない場合はご相談ください．USBメモリーなどで受けとります．

注：一部の問題のみ解いてもかまいません．

問題 1　ポアソン方程式に対する境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega & (1)\\ u &= u_D \qquad \text{on } \Gamma_D & (2)\\ \frac{\partial u}{\partial n} + ku &= \varphi_N \qquad \text{on } \Gamma_N & (3) \end{aligned}$$

を差分法で解くプログラムを作成せよ．

ただし，領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ について $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ となっており，Γ_N が空集合でない場合のみ考える．($\partial\Omega = \Gamma_D$ の場合はPandAに掲載のプログラムが扱っている．）なお，Ω を長方形領域に限ってもかまわない．

解析解が求まるようなデータ（$\Omega, f, u_D, k, \varphi_N$）を与えて，$h = 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$ など複数の差分幅に対しプログラムを実行し，適切なノルムで測った誤差を表にまとめ，得られた結果よりスキームのオーダーを推定せよ．

評価基準： 長方形領域の場合11点，一般領域（指定方法は任意）の場合17点．$\partial\Omega = \Gamma_N$ の場合も考慮されれば，3点を加点する（最大で20点）．

問題 2　熱方程式に対する初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f && \text{in } Q_T = \Omega \times (0,T), && (4)\\
u(x,t) &= u_D(x,t), && \text{for } x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), && (5)\\
u(x,0) &= u^0(x) && \text{for } x \in \Omega. && (6)
\end{aligned}
$$

を差分法の陰解法で解くプログラムを作成せよ．

ただし，$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を長方形領域または一般領域とし，陰解法のパラメータ $\gamma \in (0,1]$（講義ノート参照）をユーザーが指定できるようにする．

解析解が求まるようなデータ（Ω, T, f, u_D, u^0）を与えて，$\tau, h = 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$ など複数の差分幅に対しプログラムを実行し，適切なノルムで測った誤差を表にまとめ，得られた結果よりスキームのオーダーを推定せよ．この解析は $\gamma = \frac{1}{2}$ と $\gamma = 1$ について行う．

評価基準：長方形領域の場合 24 点，一般領域（指定方法は任意）の場合 30 点（最大で 30 点）．

問題 3　2 次元におけるポアソン方程式を解くための 9 点スキームに対して，離散版の最大値原理を述べて，証明せよ．(4 点)

問題 4　極座標で書かれたポアソン方程式を領域 $\Omega = \{(r,\theta);\ 0 < r < s(\theta),\ 0 < \theta < 2\pi\}$ で考える．新しい座標 $\rho = r/s(\theta), \phi = \theta$ で微分方程式を書き直し，正定値で対称な行列をもつ差分スキームを構成せよ．(6 点)

問題 5　次を示せ．(3 点)

(1) A はエルミート行列　$\Rightarrow$　$Sp(A) \subset \mathbb{R}$

(2) A は正定値行列　$\Leftrightarrow$　$Sp(A) \subset (0, +\infty)$

(3) A は半正定値行列　$\Rightarrow$　$Sp(A) \subset [0, +\infty)$

問題 6　1 次元の熱方程式に対する陽解法と陰解法の差分スキームを書き，近似解を対応する係数行列の固有ベクトルで展開するというフーリエの方法を用いてそれぞれのスキームの安定性を調べよ．(講義で波動方程式の安定性を調べるときに紹介された方法である．)（5 点）

問題 7　移流拡散方程式

$$
\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u = f
$$

を長方形領域 $\Omega = (0,2) \times (0,1)$ で考える．ただし，$\varepsilon = 10^{-4}$, $\boldsymbol{b} = (1,0)$, f を点 $(0.3, 0.5)$ におけ

る点源とする（すなわち，サポートが点 $(0.3, 0.5)$ にあり，Ω で積分すると 1 になるデルタ関数）.
境界条件は，y-軸と重なる $\partial\Omega$ の部分で Dirichlet 条件 $u = 0$，それ以外の境界で Neumann 条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ を課す.
この問題に対する差分スキームにおいて，移流項を前進差分と後退差分とで離散化し，風上差分の概念に基づいてそれぞれの差分スキームより得られた結果を比較せよ.（15 点）

問題 8 正方形領域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ におけるラプラス方程式 $\Delta u = 0$ の境界条件を次のように設定する：$y = 1, x \in [0,1]$ では $u(x,1) = x(1-x)$，それ以外の境界部分では $u = 0$ とする.
この問題に対する差分スキームより得られる連立一次方程式を以下の三つの方法で解き，それぞれの解法の差分幅 h が 0 に近づくときの振る舞いを比較せよ.

(1) 最適なパラメータ ω を用いた SOR 法

(2) 共役勾配法（CG 法）

(3) SSOR 前処理つきの CG 法

（講義で紹介されていない解法は各自で調べて下さい.）（15 点）

問題 9 方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ で $\frac{\partial u}{\partial x}$ の項を中心差分で離散化した差分スキーム（陽解法・陰解法とも）のフォン・ノイマン安定性を調べよ.（5 点）

問題 10 双曲型方程式に関するノートを自習し，以下のバーガース方程式の初期値問題に対して，不連続性曲線に沿って衝撃波の条件を満たす解を $t > 0$ において求めよ．解を特性曲線とともに図示せよ.

$$
\begin{aligned}
u_t + uu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\
u(x,0) &= g(x) && \text{for } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

$$
g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}
$$

次に，この問題を Engquist-Osher の方法などの差分法を用いて数値的に解き，得られた結果を解析解と比べよ.（解析解は 6 点，数値解は 8 点）