有限群的线性表示简介

陈航

November 24, 2023

摘要

群表示论是群结构研究中的重要工具，本文总结了一些有限群的线性表示的基本概念和命题，包括：群表示的定义、马斯克定理、Schur 定理、特征标的第一正交关系和第二正交关系、特征标维数的相关数量关系，诱导表示的定义、诱导特征标及类函数、Frobenius 互反律、Mackey 子群定理和诱导特征标不可约性的判定、Artin 定理和 Brauer 定理等。

关键词：群表示论，特征标，诱导表示

1 引言

群表示论是用具体的线性群（矩阵群）来描述群的理论，是研究群的有力的工具之一。至今已通过群表示论得到许多重要结果，如早期得到的 Burnside 定理（$p^a q^b$ 阶群可解），及在有限群结构理论中 Burnside 猜想中“奇数阶群是可解群”的证明和对有限单群分类问题解决的贡献 [?]。群表示论在许多学科中得到了广泛的应用和发展，如在结晶学、量子力学、量子化学中都作为强有力的工具。

研究群在某个集合上的作用是研究群结构的重要方法。由于域上的线性空间有很好的结构，且对线性空间上的可逆变换群（即同构于一般线性群）已有充分的研究，因此通过研究群在各个线性空间上的作用来研究群的结构是有效的方法，此即群表示论的研究范围。

本文将简述一些有限群的复线性表示中的基本性质，结论和定理。本文分为三个部分展开：第一部分将介绍群表示的定义和一些基本概念和性质，第二部分有关表示的特征标理论的相关内容，第三部分介绍诱导表示的一些结论。

本文主要参考 Jean-Pierre Serre 的著作 *Linear Representations of Finite Groups* [?]，也参考了丘维声著的《有限群和紧群的表示论》[?]。

2 群表示的基本概念和性质

定义 1 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，$\mathrm{GL}(V)$ 是 V 的自同构群，G 是一个有限群，一个 G 在 V 上的线性表示（*linear representation*）是 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个同态 ρ。称 V 是 G 的表示空间，或简单起见，称 V 是 G 的一个表示。ρ 将 G 中元素 s 映为 $\rho(s)$，记作 ρ_s。令 ρ_s 在 V 的一组基 $\{e_i\}$ 下的矩阵为 R_s，则也可理解群表示为群到可逆矩阵群上的同态。本文只考虑 $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ 的情况，且定义表示的维数为 V 的维数。

定义 2 ρ^1 和 ρ^2 是 G 在线性空间 V_1 和 V_2 上的线性表示。称 ρ^1 和 ρ^2 是同构 (*similar or isomorphic*) 的，若存在线性同构 $\tau : V_1 \to V_2$，使对 G 中任何元素 s 有 $\tau \circ \rho^1(s) = \rho^2(s) \circ \tau$。

从群代数的观点看，一个表示 ρ 定义了 G 到 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个同态，即定义了 G 在线性空间 V 上的作用，将这种作用线性延拓到 $\mathbb{C}[G]$ 上，即可将表示 V 视作 $\mathbb{C}[G]$-模。严谨地表述为，已知线性表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$，可以定义 V 上的 $\mathbb{C}[G]$-模结构如下，$f \in \mathbb{C}[G]$，f 可唯一表示为 $f = \sum_{s\in G} a_s s, a_s \in \mathbb{C}$，$v \in V$ 定义 $fv = \sum_{s\in G} a_s \rho_s(v)$。反之，若 V 上定义了 $\mathbb{C}[G]$-模结构，则可定义线性表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$，$\rho(s)(v) = sv$。这指出研究有限群的表示问题和研究群代数上的模的问题是一致的。

例 1 (正则表示) g 是群 G 的阶，V 是 g 维复线性空间，以 $\{e_s : s \in G\}$ 为其一组基 (即 $V = \mathbb{C}[G]$)。令 ρ_s 为将 e_t 映到 e_{st} 的 V 上的线性同构，则定义了一个维数为 g 的线性表示，称为 G 的正则表示 (*regular representation*)。

性质 1 令 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个线性表示。在线性空间 V 上任取内积 $(x|y)$, 定义新的内积 $(x|y)' = \sum_{s\in G}(\rho_s(x)|\rho_s(y))$ (容易验证此满足内积的条件)。对 G 中任何元素 $t, (\rho_t(x)|\rho_t(y))' = \sum_{s\in G}(\rho_s \circ \rho_t(x)|\rho_s \circ \rho_t(y)) = \sum_{s\in G}(\rho_s(x)|\rho_s(y)) = (x|y)'$。这表明在内积 $(\cdot|\cdot)'$ 下，对 G 中任何元素 t，ρ_t 均为保距变换，则可对角化且特征值模长均为 *1*。若取内积 $(\cdot|\cdot)'$ 下的一组标准正交基 $\{e_i\}$，则 ρ_t 对应的矩阵 R_t 是酉矩阵。

定义 3 令 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个线性表示，W 是 V 的一个子空间。若对任意 G 中的元素 s，W 是线性同构 ρ_s 下的不变子空间，则称 W 在 G 作用下是不动 (*stable or invariant*) 的。此时，定义 $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$ 为 $\rho^W(s) = \rho_s|_W$，则 ρ^W 是 G 在 W 上的一个线性表示。W 叫做 V 的一个子表示 (*subrepresentation*)。

定理 1 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 在 V 上的一个线性表示，W 是 V 的一个子表示. 则存在 W 的补空间 W^0 在 G 的作用下是不动的, 写作 $V = W \bigoplus W^0$, 称表示 V 是表示 W 和 W^0 的直和 (*direct sum*)。

事实上，在性质1中定义的内积 $(\rho_t(x)|\rho_t(y))'$ 中，取 W^0 为 W 的正交补空间 $W^\perp$, 容易验证 $W^\perp$ 在 G 的作用下是不变的。

因此，对于群 G 的一个表示 V，若其有非平凡子表示 W，可将 V 分解为 $W \bigoplus W^0$。若 W 或 W^0 还有其非平凡子表示，可继续作此分解。这也说明 $\mathbb{C}[G]$-模 V 是半单的。则有如下的定义和定理。

定义 4 表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 称为不可约的，若不存在 V 的不平凡子空间在 G 作用下是不动的。

定理 2 (*Maschke's theorem*) 每个表示可以表示为不可约的表示的直和。

3 特征标理论

在这部分中，将说明表示的特征标函数作为群 G 上一类特殊的类函数，唯一决定了该表示。通过讨论特征标，可以得到表示的诸多性质，是群表示论中的一个关键理论。

$\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 在 V 上的一个线性表示，R_s 为其在 V 的一组基 $\{e_i\}$ 下的矩阵，设 R_s 的矩阵元素为 $r_{ij}(s)$。则 r_{ij} 定义了 G 上的复值函数，且由矩阵乘法，满足关系 $r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) \cdot r_{jk}(s)$。

定义 G 上复值函数构成的线性空间上的内积 $(\phi|\psi) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\phi(s)\overline{\psi(s)}$。同时定义双线性函数 $<\phi,\psi>= \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\phi(s)\psi(s^{-1}) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\phi(s^{-1})\psi(s) = (\phi|\check{\psi})$，其中 $\check{\psi}(s) = \overline{\psi(s)}$。

定义 5 $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 在 V 上的一个线性表示，定义 G 上复数值函数 $\chi_\rho: G \to \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) = Tr(\rho_s), s \in G$, 称这样的 χ_ρ 为表示 ρ 的特征标 (*character*)。不可约表示的特征标称为不可约特征标。

注 1 由性质*1*可知，ρ_s 均是可对角化的，则 $\chi_\rho(s)$ 为其特征根之和。若将表示写成矩阵形式，则 $\chi_\rho(s) = \sum_{i=1}^n r_{ii}(s)$。

根据以上的定义和观察，容易得到如下的性质。

命题 1 χ 是 G 上表示 ρ 的特征标，则其满足以下性质：

(1) $\chi(1) = n$，其中 n 是表示 ρ 的维数。

(2) $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi_(s)}$，任意 $s \in G$。即 $\chi = \check{\chi}$。

(3) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$，任意 $s, t \in G$。

命题 2 $\rho^1: G \to \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G \to \mathrm{GL}(V_1)$ 是 G 的两个线性表示，χ_1 和 χ_2 分别是其特征标，则 $V_1 \bigoplus V_2$ 的特征标为 $\chi = \chi_1 + \chi_2$。

定理2表明，任意表示均可分解为不可约表示的和，则上述命题说明，任意表示的特征标都可分解为不可约特征标的整系数线性组合。即当 $V = \bigoplus_{i=1}^h m_i W_i$ 时，$\phi = \sum_{i=1}^h m_i\chi_i$，其中 ϕ 是表示 V 的特征标，χ_i 是不可约表示 W_i 的特征标。

定义 6 称 G 上的函数为类函数 (*class function*)，当其满足命题*1*中条件 (*3*) 时，即在同一共轭类上取相同值。G 的所有类函数构成 $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{C}(G)$，且 $\mathcal{C}(G)$ 的维数恰为共轭类的个数。

3.1 特征标的正交性

命题 3 (*Schur's lemma*) $\rho^1: G \to \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G \to \mathrm{GL}(V_2)$ 是 G 的两个不可约表示。$f: V_1 \to V_2$ 是线性映射，且对任意 $s \in G$ 成立

$$f \circ \rho_s^1 = \rho_s^2 \circ f \tag{1}$$

则必为以下情况：

(1) ρ^1 和 ρ^2 不同构，则 $f = 0$。

(2) $V_1 = V_2$ 且 $\rho^1 = \rho^2$，则 $f = \lambda id_V$，$\lambda \in \mathbb{C}$。

若用模的语言，Schur 引理可表述为：

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_1,V_2)=\begin{cases}1, & \rho^1 \text{ 和 } \rho^2 \text{ 同构}\\ 0, & \rho^1 \text{ 和 } \rho^2 \text{ 不同构}\end{cases} \tag{2}$$

因此，定义 $<V_1,V_2>=\dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_1,V_2)$ 与在后文中所定义的特征标上的内积是一致的。

Schur 引理结论简洁，证明简单，但是提供了有关不可约表示的重要性质，是特征标标理论的基础。

推论 1 *$\rho^1: G\to \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $\rho^2: G\to \mathrm{GL}(V_1)$ 是 G 的两个不可约表示。对任意 V_1 到 V_2 的线性映射 h，定义 $h^0=\frac{1}{g}\sum_{s\in G}(\rho_s^2)^{-1}h\rho_s^1$。则*

(1) 若 ρ^1 和 ρ^2 不同构，则 $h^0=0$。

(2) $V_1=V_2$ 且 $\rho^1=\rho^2$，则 $f=\frac{1}{n}Tr(h)id_V$，其中 $n=\dim V_1$。

容易验证 h^0 满足等式1，应用 Schur 引理，可立刻得到以上结果。若在一组基下，ρ_s^1，ρ_s^2 矩阵形式分别为 $r_{ij}^1(s)$，$r_{ij}^2(s)$。h 的矩阵形式为 (x_{ij})，则可计算得 h^0 的矩阵形式 (x_{ij}^0)，其中 $x_{ji}^0=\frac{1}{g}\sum_{s,k_1,k_2}r_{jk_2}^2(s^{-1})x_{k_2k_1}r_{k_1i}^1(s)$。将此代入推论中情况（1）（2），由于对任意 h 成立，可得以下推论。

推论 2 *(1) 在情况（1），有*

$$\frac{1}{g}\sum_{s\in G}r_{i_2j_2}^2(s^{-1})r_{j_1i_1}^1(s)=0,\forall i_1,j_1,i_2,j_2$$

(2) 在情况（2），有

$$\frac{1}{g}\sum_{s\in G}r_{i_2j_2}(s^{-1})r_{j_1i_1}(s)=\frac{1}{n}\delta_{i_1i_2}\delta_{j_1j_2}$$

回忆在 G 的函数空间定义的双线性函数，即上述结论可改写为 ρ^1 和 ρ^2 不同构的不可约表示时，$<r_{i_2j_2}^2,r_{j_1i_1}^1>=0$。$\rho$ 为不可约表示时，$<r_{i_2j_2},r_{j_1i_1}>=\frac{1}{n}\delta_{i_1i_2}\delta_{j_1j_2}$。若取性质1中定义的内积下的标准正交基，则 $(r_{ij}(s))$ 是酉矩阵，则有 $r_{ij}(s^{-1})=\overline{r_{ij}(s)}$，即 $r_{ij}=\check{r_{ji}}$。此时，$(r_{i_2j_2}^2|r_{i_1j_1}^1)=0$，$(r_{i_2j_2}|r_{i_1j_1})=<r_{i_2j_2},r_{j_1i_1}>=\frac{1}{n}\delta_{i_1i_2}\delta_{j_1j_2}$。注意到 G 的函数空间作为复线性空间是 g 维的，而在后文中将说明 G 的不可约表示维数的平方和为 g，那么所有不可约表示在这种基下矩阵元的线性函数 r_{ij}^k 是此线性空间的一组正交基。

将 $\chi=\sum_{s\in G}r_{ii}$ 带入上述式子，注意到命题1中性质（2），可得如下定理。

定理 3 *若 χ，χ' 是两不可约特征标。则当两表示同构时，$(\chi,\chi')=1$；则当两表示不同构时，$(\chi,\chi')=0$。*

即不可约特征标是 G 的函数空间中的一组单位长度的正交向量，这称为第一正交关系。特征标是类函数，在后文中还将说明不可约特征标是 G 的类函数空间的一组标准正交基，且一类函数是特征标当且仅当其为不可约特征标的整系数线性组合。

由线性空间的性质，不可约特征标的正交性蕴含了其为一组线性无关的向量。由命题2得，表示可分解为不可约表示的直和对应特征标可分解为不可约特征标的一种线性组合。又由其线性无关性可知，这种特征标的分解是唯一的，则

表示分解为不可约表示的方式在同构意义下是唯一的。同时，上述分析表明，已知特征标的分解，便可得到表示分解为不可约表示中某个不可约（同构意义下）表示的个数，即不可约特征标在线性组合中的系数，并可通过正交关系计算内积得出。同时，这样的对应关系也给出了不可约表示的判别方法。这体现特征标唯一决定了表示。在下述定理中将严格说明这些事实。

定理 4 V 是 G 的线性表示，特征标为 ϕ。V 可分解为不可约表示的直和，$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$。则若 W 是一个不可约表示，$W_1, \ldots, W_k$ 中同构于 W 的表示的个数为 $(\phi|\chi)$。

推论 *3* W 是一个不可约表示，同构于 W 的 W_i 数目和分解方式无关。称作 W 出现在 V 中的重数。

推论 *4* 特征标相同的表示是同构的。

推论 5 $V = \bigoplus_{i=1}^{h} m_i W_i$，则 $(\phi|\phi) = \sum_{i=1}^{h} m_i^2$，其中 ϕ 是表示 V 的特征标，χ_i 是互不同构不可约表示 W_i 的特征标。

通过以上定理，可以得到以下简洁的判断不可约表示的方法。

定理 5 ϕ 是表示 V 特征标，则 $(\phi|\phi)$ 是正整数且 V 不可约当且仅当 $(\phi|\phi) = 1$。

以下考察 G 的类函数空间 $\mathcal{C}(G)$，类函数空间作为函数空间的子空间，则前述在函数空间中定义的内积诱导了其上的内积。在定理3中给出特征标的正交性，可进一步得到特征标是类函数空间的标准正交基。

命题 4 f 是 G 上的一个类函数，$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 是 G 的一个线性表示，定义 V 上的线性映射 $\rho_f = \sum_{s\in G} f(t)\rho_s$。若 V 是 n 维不可约表示，特征标为 χ。则 $\rho_f = \lambda id_V$，其中 $\lambda = \frac{g}{n}(f|\overline{\chi})$。

ρ_f 满足 Schur 引理的条件，则上述结论可通过 Schur 引理直接得出。上述命题表明，类函数和不可约特征标共轭的内积可以通过 ρ_f 给出。特别的，若类函数 f 和所有不可约特征标的共轭均垂直，则 $\rho_f = 0$ 对所有不可约表示 ρ 成立，再由直和分解，对所有线性表示 ρ 成立。取 ρ 为正则表示，可计算得 $\rho_f(e_1) = \sum_{s\in G} f(s)e_s$，此时 $\rho_f = 0$ 当且仅当 $f = 0$。因此，可得出不可约特征标构成类函数空间的一组基，同时已知类函数空间的维数为共轭类的数量，则可知不可约特征标的数量恰为共轭类的数量。

定理 6 不可约特征标是类函数空间的一组标准正交基。

定理 7 G 的不可约特征标个数为 G 的共轭类个数。

通过定理6，计算类函数空间中的另一组基 f_s 表示为不可约特征标的线性组合，其中 $f_s(t) = 1$，若 s 和 t 共轭（记作 $s \sim t$），$f_s(t) = 0$，若 s 和 t 不共轭（记作 $s \nsim t$）。即 $f_s = \sum_{i=1}^{h} (f_s|\chi_i)\chi_i = \frac{c(s)}{g}\overline{\chi_i(s)}$，则可以得到以下命题，称为不可约特征标的第二正交性。由下文中特征标表的矩阵，乘以对角矩阵 $D = |G|^{-1/2} diag\{\sqrt{C_1}, \sqrt{C_2}, \cdots, \sqrt{C_h}\}$，其中 C_i 是第 i 个共轭类的阶，由上述定理6可知，结果为酉矩阵，亦可得到该结果。

命题 5

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)\overline{\chi_i(t)} = \begin{cases} 0, & s \nsim t \\ |C_G(s)|, & s \sim t \end{cases}$$

设 G 是有限群，共轭类为 $C_1, \cdots, C_h$。在每个共轭类中取一个代表元素 t_i。设 $\chi_1, \cdots, \chi_h$ 是 G 的全部互异不可约特征标。则可写出一个方阵 $W = (\chi_i(t_j))$，称为 G 的特征标表。

通过上述定理3，6得到的结论，和下面对不可约特征标维数的一些性质，如命题7，8，可以较方便地得出一些低阶群的特征标表。以下举例置换群 S_4 的特征标表。同时，虽然在一般情况下特征标表不能唯一决定群结构，但是可以反应群中的诸多信息。

	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
χ_0	1	1	1	1	1
ϵ	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ	3	1	-1	0	-1
$\epsilon\psi$	3	-1	-1	0	1

表 1: S_4 的特征标表

3.2 特征标的维数

正则表示完全给出了群 G 的结构，则可以预期研究正则表示及其特征标，可以得到有关群 G 表示的一些性质。由正则表示的定义，代入定理4和其推论，可得到以下的命题及推论。

命题 6 r_G 是正则表示的特征标，则

$$r_G(1) = g, r_G(s) = 0, s \neq 1$$

其中 g 是 G 的阶。

推论 6 *(1)* $(r_G|r_G) = g$

(2) $(r_G|\chi_i) = n_i$。其中，χ_i 是不可约表示 W_i 的特征标，$\dim W_i = n_i$。

推论 7 每个不可约表示 W_i 包含于正则表示中的重数为其维数 n_i。

推论 8 *(1)* $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g$

(2) $\sum_{i=1}^{h} n_i\chi_i(s) = 0, s \neq 1$

由推论8中给出的 n_i 的数量关系，和推论2中得到的复值函数 r_{ij} 的正交关系，可知当基取性质1中的标准正交基时，不可约表示 W_k 矩阵形式设为 $R^k(s) = (r_{ij}^k(s)), s \in G, k = 1, \cdots, h$，那么 r_{ij}^k 是 G 的函数空间的一组正交基。因此，将映射 $\prod_{i=1}^{h} \rho_i : G \to \prod_{i=1}^{h} M_{n_i}(\mathbb{C}), s \mapsto \prod_{i=1}^{h} R^i(s)$ 线性延拓为 $\widetilde{\rho} : \mathbb{C} \to \prod_{i=1}^{h} M_{n_i}(\mathbb{C})$，比较维数，即可知 $\widetilde{\rho}$ 是 $\mathbb{C}$ 代数的同构。这也是半单代数中的一般性质。

通过诱导表示的相关性质还可得到以下关于 n_i 的命题。

命题 7 A 是 G 的正规 *abel* 子群，则 G 的任一不可约表示 ρ 的维数 n 满足 $n|[G:A]$。

推论 9 C 是 G 的中心，则 G 的任一不可约表示 ρ 的维数 n 满足 $n|[G:C]$。

命题 8 A 是 G 的 *abel* 子群，则 G 的任一不可约表示 ρ 的维数 n 满足 $n \leq [G:A]$

4 诱导表示

H 是 G 的一个子群，将线性表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 限制（restrict）在 H 上，自然地可以得到 H 的表示 $\rho_H : G \to \mathrm{GL}(V)$，$\rho_H = \rho|H$。反过来，也可以通过 H 的一个线性表示诱导出 G 的一个线性表示。若 W 是 $\rho_H : G \to \mathrm{GL}(V)$ 的子表示，则 $\rho_s W$ 只和左陪集 sH 有关。那么，若 $\sigma \in G/H$，$s \in \sigma$，定义 $W_\sigma = \rho_s W$，与 s 的选取无关。并且由 W_σ 的定义可知，$\bigoplus\limits_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ 在 G 的作用下是不变的，因此有以下的定义。

定义 7 称 G 的表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 为被 H 的表示 $\theta : G \to \mathrm{GL}(V)$ 诱导（*induced*）出，当 $V = \bigoplus\limits_{\sigma \in G/H} W_\sigma$

视 G 的表示 V 为 $\mathbb{C}[G]$ 模，则其限制在 H 上，即为视 V 为 $\mathbb{C}[H]$ 模，设为 $\mathrm{Res}_H V$，当 H 明确时，也可简写为 $\mathrm{Res}(V)$。从这种角度，上述定义7中 W 的诱导表示 V 可简洁表示为 $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$，这同时体现了诱导表示的存在性和唯一性，将 $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ 记作 $\mathrm{Ind}_H^G(W)$，当 H 和 G 明确时，也可简记为 $\mathrm{Ind}(W)$。

定理 8 (W,θ) 是 H 的一个表示，则存在 G 的表示 (V,ρ) 由 (W,θ) 诱导出，且 (V,ρ) 在同构意义下是唯一的。

命题 9 W 是 $\mathbb{C}[G]$ 模 V 的 $\mathbb{C}[H]$ 子模，可将 W 到 V 的嵌入映射线性延拓为 $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ 到 V 的映射 i。

则 V 由 W 诱导得出，当且仅当 $i : \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W \longrightarrow V$ 是同构。

由张量积的性质可得以下命题。

命题 10 E 是 $\mathbb{C}[H]$ 模，则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[H]}(W, \mathrm{Res}E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathrm{Ind}W, E)$。

此命题体现了 Res 和 Ind 的某种对偶性，将会在下文继续说明。

命题 11 诱导具有传递性：$\mathrm{Ind}_G^K(\mathrm{Ind}_H^G(W)) \cong \mathrm{Ind}_H^K(W)$。

已知 V 的一组 $\mathbb{C}$ 基，可自然得到 $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ 的一组 $\mathbb{C}$ 基。从而可以进一步计算得表示 W 的矩阵形式和诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ 的矩阵形式之间的关联，以及两者特征标的联系。

命题 12 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 是 $\mathbb{C}[H]$ 模 W 的一组 $\mathbb{C}$ 基，则 $s_1 \otimes w_1, \cdots, s_1 \otimes w_m, \cdots, s_r \otimes w_1, \cdots, s_r \otimes w_m$ 是 $\mathbb{C}[G]$ 模 $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ 的一组 $\mathbb{C}$ 基，其中 $\{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$ 是 $G\backslash H$ 的一个代表元集合。

命题 13 $\mathbb{C}[H]$ 模 W 给出的 H 的表示在 $\mathbb{C}$ 基 $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 下的矩阵为 R_H，则诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G(W)$ 即 $\mathbb{C}[G]$ 模 $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$ 在相应基 $s_1 \otimes w_1, \cdots, s_1 \otimes w_m, \cdots, s_r \otimes w_1, \cdots, s_r \otimes w_m$ 下的矩阵为:

$$R_G(s) = \begin{pmatrix} \tilde{R_H}(s_1^{-1}ss_1) & \tilde{R_H}(s_1^{-1}ss_2) & \cdots & \tilde{R_H}(s_1^{-1}ss_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{R_H}(s_r^{-1}ss_1) & \tilde{R_H}(s_r^{-1}ss_2) & \cdots & \tilde{R_H}(s_r^{-1}ss_r) \end{pmatrix}$$

其中

$$\tilde{R_H} = \begin{cases} R_H(x) & , x \in H \\ 0 & , x \notin H \end{cases}$$

因此，诱导表示的特征标有以下形式。称其为诱导特征标。

定理 9 设 (V, ρ) 为 (W, θ) 所诱导的表示，χ_ρ 和 χ_θ 为对应的特征标。则对 G 中元素 s 有

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ s_i^{-1} s s_i \in H}}^{r} \chi_\theta(s_i^{-1} s s_i) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1} s t \in H}} \chi_\theta(t^{-1} s t)$$

其中，h 为 H 的阶。

定义 8 f 是 H 上的一个类函数，定义

$$f' = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1} s t \in H}} f(t^{-1} s t), h = |H|$$

为其的诱导类函数，记作 $\mathrm{Ind}_H^G(f)$ 或 $\mathrm{Ind}(f)$。

诱导类函数有以下性质。

命题 14 *(1)* $\mathrm{Ind}(f)$ 是 G 上的类函数。

(2) (V, ρ) 为 (W, θ) 所诱导的表示，χ_ρ 和 χ_θ 为对应的特征标，则 $\chi_\rho = \mathrm{Ind}(\chi_\theta)$。

由等式2和特征标的正交性，可得 $< \phi_1, \phi_2 >_G = < V_1, V_2 >_G$，给出了特征标的内积和表示的 $\mathbb{C}[G]$ 模同态空间维数的关系。结合命题10可得，H 的特征标 ψ 和 G 的特征标 ϕ 有对偶关系 $< \psi, \mathrm{Res}\phi >_H = < \mathrm{Ind}\psi, \phi >_G$。由于类函数均是特征标的线性组合，则可得到以下 Frobenius 互反律。Frobenius 互反律是将诱导特征标与限制特征标联系起来的重要公式，体现了 Ind 和 Res 的对偶特性。

定理 10（*Frobenius reciprocity*）若 ψ 是 H 上的类函数，ϕ 是 G 上的类函数，则

$$< \psi, \mathrm{Res}\phi >_H = < \mathrm{Ind}\psi, \phi >_G$$

以下将讨论对诱导表示的限制的刻画。H 是 G 的一个子群，$\rho : H \to GL(W)$ 是 H 的一个线性表示，$V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$ 是其所对应的在 G 上的诱导表示。K 是 G 的另一个子群，以下将给出 $\mathrm{Res}_K \mathrm{Ind}_H^G(W)$ 的表达。

对 G 中元素 s，定义 $H_s = sHs^{-1} \cap K$，定义 H_s 上的表示 $\rho^s(x) = \rho(s^{-1} x s)$。则 $\rho^s : H_s \to GL(w)$ 是群 $H_s \in K$ 上的线性表示，记为 W_s。在上述定义中，H_s，ρ^s 只和 s 所在的双陪集有关，即当 $H s_1 K = H s_2 K$ 时，$H_{s_1} = H_{s_2}$，$\rho^{s_1} = \rho^{s_2}$，则可不产生误会地写作 $s \in K \backslash G / H$。对 $\mathrm{Res}_K \mathrm{Ind}_H^G(W)$ 有如下的 Mackey 子群定理。

命题 15（*Mackey* 子群定理）表示 $\mathrm{Res}_K \mathrm{Ind}_H^G(W)$ 同构于 $\bigoplus_{s \in K \backslash G / H} \mathrm{Ind}_{H_s}^K(W_s)$

由 Frobenius 互反律，将上述命题运用于 $H = K$ 的情况，可以得出 Mackey 的诱导特征标不可约性的判定。

命题 16（*Mackey's irreducibility criterion*）诱导表示 $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$ 不可约的充要条件为：

(1) W 不可约。

(2) 对任意 $s \in G \setminus H$，两表示 ρ_s 和 $\mathrm{Res}_s(\rho)$ 不相交。

其中，两表示 V_1, V_2 不相交指其不含相同的不可约部分，即 $< V_1, V_2 >_H = 0$。事实上，由 Frobenius 互反律，$< V, V >_G = < W, \mathrm{Res}_H V >$，再由 Mackey 子群定理分解 $\mathrm{Res}_H V = \bigoplus_{s \in H\setminus G/H} \mathrm{Ind}_{H_s}^H(W_s)$，即可得到上述命题。

注意到，当 H 是 G 的正规子群时，$H_s = H$，则有以下推论。

推论 10 H 是 G 的正规子群，诱导表示 $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$ 不可约的充要条件为 ρ 不可约且不同构于任意共轭 $\rho^s, s \notin H$。

以下列举有关诱导表示的另两个定理供参考。

定理 11 (*Artin* 定理) 群 G 的每个特征标都是由 G 的循环子群所诱导的表示的特征标的有理系数线性组合。

定理 12 (*Brauer* 定理) 群 G 的每一个特征标是由 G 的初等子群所诱导的表示的特征标的整系数线性组合。p 是一个素数，一个群 H 被称为 p-初等的，若其为一个阶与 p 互素的循环群和一个 p-群的直积。G 的一个子群是初等的，当其对某个素数 p 是 p-初等的。

5 小结

本文从群表示的定义出发，指出其与群代数上的模的等价关系，并表明其半单性，即每个表示可分解为不可约表示的直和。在特征标理论中，定义 G 的函数空间的内积，在 Schur 引理的基础上，可以得到不可约特征标的第一正交性，这指出了特征标唯一决定了表示，且表示的不可约表示直和分解的唯一性以及判定不可约表示的一个方法。进一步地，不可约表示还构成类函数空间的一组标准正交基，称为第二正交性，则不可约特征标的数目为共轭类数目，和另一些数量关系。通过研究正则表示和诱导表示，可以得到关于不可约特征标维数的一些关系。为探究群与其子群表示的关系，引入诱导表示和限制的概念，以及给出其在群代数的观点下用张量积和模的语言的直接表达形式。从而可计算得出诱导特征标的形式。通过张量积的性质，得到诱导算子 Ind 和限制算子 Res 的某种对偶性，又由特征标理论的相关内容，可将此对偶性进一步推广，得出 Frobenius 互反律。讨论诱导表示在子群上的限制，给出了 Mackey 子群定理和其关于诱导表示不可约性的判定。最后列举了 Artin 定理和 Brauer 定理。

本文仅介绍了有关群表示理论的最基本的概念和性质，有关群表示论的近代发展，如模表示理论等并未提及。