Chern-Weil 理论读书报告

陈航

December 3, 2023

1 联络和曲率的定义

ζ 是光滑流形 M 上的光滑 n 维复向量丛，τ 是 M 的切丛，定义 $\tau_{\mathbb{C}}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\tau, \mathbb{C})$ 为 M 复化对偶切丛. $\mathrm{C}^\infty(\tau_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta)$ 是两复向量丛做复张量积后的光滑截面的向量空间.

定义 1 *ζ 上的一个联络是一个 $\mathbb{C}$—线性映射*

$$\nabla : \mathrm{C}^\infty(\zeta) \to \mathrm{C}^\infty(\tau_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta)$$

且对 $s \in \mathrm{C}^\infty(\zeta)$ 和 $f \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ 满足 Leibniz 法则

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

$\nabla(s)$ 称为 s 的协变导数.

联络满足以下的基本性质：

(1) 联络 ∇ 是一个局部算子，即若 $x \in M$, s 在 x 的一个邻域内为零，则 $\nabla(s)$ 在 s 的一个邻域内为零，即 $\nabla(s)$ 只和 s 在局部的取值有关.

(2) 由上条性质，则可写出 ∇ 的局部公式. U 是 M 的一个开集，在其上 τ 有局部平凡化，$s_1, \ldots, s_n$ 是 $\tau|_U$ 的一组基，则有唯一的表示 $\nabla(s_i) = \sum_j \omega_{ij} \otimes s_j$，其中 $[\omega_{ij}]$ 是任何 U 上复光滑 1—形式构成的 $n \times n$ 矩阵.

(3) ∇_1 和 ∇_1 都是联络，则 $g\nabla_1 + (1-g)\nabla_2$ 是联络，即联络空间有凸性，其中 g 是 M 上的一个光滑函数.

(4) 由上条性质，则可通过单位分解定理构造任何仿紧空间的联络，那么任何仿紧空间都存在联络.

(5) 联络可做拉回. 若 $g : M' \to M$ 光滑映射，$\zeta' = g^*\zeta$. 在一个 τ 有局部平凡化的开集 $U \subset M$ 上，∇ 的局部公式为 $\nabla(s_i) = \sum_j \omega_{ij} \otimes s_j$. $U' \subset M'$ 满足 $g(U') \subset U$，则 $s'_i = g^* s_i$ 是 $\tau|_{U'}$ 的一组基，$\omega'_{ij} = g^*\omega_{ij}$ 是 U' 上的一形式，则 $g^*\nabla$ 定义为 $g^*\nabla(s_i) = \sum_j \omega'_{ij} \otimes s'_j$. 需要验证此定义是良定的，即不依赖于基 s_i 的选取，这是由于 Leibniz 法则条件中每一项都和拉回交换.

引理 1 *取定 ∇，有唯一的 $\mathbb{C}$ 线性映射*

$$\widehat{\nabla} : \mathrm{C}^\infty(\tau_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta) \to \mathrm{C}^\infty(\wedge^2 \tau_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta)$$

且对 $s \in \mathrm{C}^\infty(\zeta)$ 和 1-形式 θ 满足 Leibniz 法则

$$\widehat{\nabla}(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s - \theta \wedge \nabla(s)$$

且 $\widehat{\nabla}$ 满足 $\widehat{\nabla}(f(\theta \otimes s)) = df \wedge (\theta \otimes s) - f\widehat{\nabla}(\theta \otimes s)$.

唯一性和构造是显然的（由 Leibniz 公式，$\widehat{\nabla}(\theta_1 \otimes s_1 + \cdots + \theta_n \otimes s_n) = \sum(d\theta_i \otimes s_i - \theta_i \wedge \nabla(s_i)))$，只需验证是良定的.

定义 2 *复合* $K = K_\nabla = \widehat{\nabla} \circ \nabla$ *是函数线性的，则是向量丛* $\mathrm{Hom}(\zeta, \wedge^2 \tau_{\mathbb{C}}^* \zeta) = \mathrm{Hom}(\zeta, \zeta) \otimes \wedge^2 \tau_{\mathbb{C}}^*$ *的光滑截面，称为联络* ∇ *的曲率张量.*

K 的局部公式为

$$K(s_i) = \widehat{\nabla}(\sum \omega_{ij} \otimes s_j) = \sum \Omega_{ij} \otimes s_j \tag{1}$$

其中 $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$. 若写作矩阵形式，$\Omega = [\Omega_{ij}], \omega = [\omega_{ij}]$, 则

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega \tag{2}$$

2 不变多项式定义的示性类

定义 3 $M_n(\mathbb{C})$ *上的不变多项式，是一个多项式* $P : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *满足* $P(XY) = P(YX)$*，或等价的* $P(TXT^{-1}) = P(X)$

上述两条件等价是由于 P 是多项式和连续性.

由 Ω 的定义（1），若 P 是不变多项式，则 $P(\Omega)$ 和基选取无关，则可定义一个全局外形式 $P(K)$. 若 P 是 r 次齐次多项式，则 $P(K) \in \mathrm{C}^\infty(\wedge^{2r} \tau_{\mathbb{C}}^*)$，一般情况下，由多项式环上的分次结构，$P(K) \in \mathrm{C}^\infty(\wedge^{\oplus} \tau_{\mathbb{C}}^*)$. 不变多项式的定义可以推广为幂级数 $P = P_0 + P_1 + P_2 \ldots$，其中 P_r 是 r 次其次不变多项式. 且 $P(K)$ 总是良好定义的，由于 $P_r(K) \in \mathrm{C}^\infty(\wedge^{2r} \tau_{\mathbb{C}}^*)$，这是有限和.

引理 2 P *是不变多项式或者幂级数，则外形式* $P(K)$ *是闭的.*

证明 $P(A) = P([A_{ij}])$，则定义 $P'(A) = [\delta P / \delta A_{ij}]$. 则 $P'(A)$ 与 A 交换，论证如下. 考虑 $P((I + tE_{ij})A) = P(A(I + tE_{ij}))$，对 t 求导得 $\sum_k A_{ik}(\delta P / \delta A_{jk}) = \sum_k (\delta P / \delta A_{kj}) A_{kj}$，即 $P'(A)A = AP'(A)$. Ω 是局部的曲率矩阵，则 $d(\Omega) = \sum (\delta P / \delta \Omega_{ij}) = \mathrm{Tr}(P'(\Omega)\Omega)$. 由（2），可得 $d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega$.

$$\begin{aligned}
d(\Omega) &= \mathrm{Tr}(P'(\Omega)\Omega) \\
&= \mathrm{Tr}(P'(\Omega)\Omega \wedge (\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega)) \\
&= \mathrm{Tr}(P'(\Omega)\Omega \wedge (\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega)) \\
&= \mathrm{Tr}((P'(\Omega)\Omega \wedge \omega) \wedge \Omega - \Omega \wedge (P'(\Omega)\Omega \wedge \omega)))
\end{aligned}$$

由于 Ω 中的元素是 2 阶微分算子，则上式为 0. □

由于外形式 $P(K)$ 是闭的，则定义了上同调类 $\mathrm{H}^{\oplus}(M; \mathbb{C}) = \oplus \mathrm{H}^i(M; \mathbb{C})$ 中的一个类. 下面说明这个类和联络的选取无关.

推论 1 *上同调类* $(P(K)) = (P(K_\nabla))$ *独立于* ∇ *的选取.*

证明 如果 ∇_1 和 ∇_2 是两个 ζ 上的联络. 考虑 $M' = M \times \mathbb{R}$，$\pi : M' \to M$ 向第一个分量投影，$i_t : M \to m'$ 为 $m \mapsto (m, t)$. 定义 M' 上的联络 $\nabla = t\pi^*(\nabla_1) + (1-t)\pi^*(\nabla_2)$. 则 $\nabla_1 = i_1^* \nabla$，$\nabla_2 = i_0^* \nabla$，则 $P(K_{\nabla_1}) = i_1^* P(K_\nabla)$，$P(K_{\nabla_2}) = i_0^* P(K_\nabla)$. 由于 i_0, i_1 同伦，则命题得证. □

因此，P 定义了一个向量丛的上同调示性类，与联络选取无关. 若已知 $f : M \to M'$，在 M 上取定联络 ∇，拉回得到 M' 上的联络 ∇'，则 $P(K_{\nabla'}) = f * P(K_\nabla)$，满足上同调示性类的拉回条件. 但已知所有复向量丛的示性类是 Chern 类的多项式，下面讨论不变多项式定义的示性类和 Chern 类的关系.

3 度量和 Chern 类

我们首先写出一些不变多项式的事实. A 是一个矩阵, 设 $\sigma_i(A)$ 是 A 的特征值的 i 次基本齐次多项式. 特征多项式 $\det(1+tA) = a + t\sigma_1(A) + \cdots + t^n\sigma_n(A)$. 则任何不变多项式可以写作 $\sigma_i(A)$ 的多项式. 而我们将在后续说明 σ_i 对应的示性类就是 Chern 类 c_i.

为进一步构造，我们需要引入度量和 Levi-Civita 联络的概念和事实，列举如下：

1. 若 ζ 是一个实向量丛，其上有一个欧式度量. 一个联络 ∇ 与度量相符，若对任意两截面 s, s'，$d < s, s' > = < \nabla s, s' > + < s, \nabla s' >$.

2. U 是一个坐标领域. $s_1, \ldots, s_n$ 是 ζ 在上面限制的一组正交截面基，则 ∇ 在其上的局部表示 $\nabla(s_i) = \sum \omega_{ij} \otimes s_j$ 满足 $[\omega_{ij}]$ 是反对称的.

3. 下面考虑对偶切丛 τ^*. 一个 τ^* 上的联络 ∇ 被称为对称的，如果复合 $\mathrm{C}^\infty(\tau^*) \xrightarrow{\nabla} \mathrm{C}^\infty(\tau^* \otimes \tau^*) \xrightarrow{\wedge} \mathrm{C}^\infty(\wedge^2\tau^*)$ 是微分算子 d. 这等价于对任意光滑函数 $f, \nabla(df) \in \mathrm{C}^\infty(\tau^* \otimes \tau^*)$ 是对称张量. 特别地, 若 $\nabla(dx^k) = \sum \Gamma^k_{ij} dx^i \otimes dx^j$ 则 Christoffel 符号 Γ^k_{ij} 是 i, j 对称的.

4. 给定黎曼度量，τ^* 上有唯一和度量相符的对称联络，此联络被称为 Levi-Civita 联络.

以下对一个二位定向黎曼流形进行具体计算. 取定局部正交基截面 θ_1, θ_2 为 1 形式，设联络和曲率对应的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ -\Omega_{12} & 0 \end{bmatrix}$，其中 $\Omega_{12} = d\omega_{12}$，且和正交基选取无关. 被称为定向去买的 Gauss-Bonnet2 形式. $\Omega_{12} = K(-d\theta_1 \wedge d\theta_2)$，$K$ 为高斯曲率，与定向无关.

则可通过示性类证明以下著名定理，在证明过程中可以窥见之前由曲率构造的示性类和 Chern 类的关系.

定理 1 *对于任何闭定向黎曼曲面，积分 $\int\int \Omega_1 2 = 2\pi e[M]$.*

证明　任何定向带欧式度量的 2 维向量丛上有自然的复结构. s_1, s_2 是局部的与定向相符的有序正交截面，则定义自然复结构 $Js_1 = s_2$. 则一个联络 $\nabla s_1 = \omega_{12} \otimes s_2, \nabla s_2 = -\omega_{12} \otimes s_1$，可理解为复联络 $\nabla s_1 = i\omega_{12} \otimes s_1$，对应的局部矩阵为 $[i\omega_{12}]$ 和 $[i\Omega_{12}]$. $\mathrm{Tr}[i\Omega_{12}] = i\Omega_{12}$ 给出了不变多项式 σ_1 对应的上同调示形类，则总是 Chern 类 $c_1(\zeta) = e(\zeta)$ 的常数 a 倍. 对球面计算得，$a = 2\pi i$. □

定理 2 *ζ 是复向量丛，上面有联络 ∇，则上同调类 $(\sigma_r(K_\nabla)) = (2\pi i)^r c_r(\zeta)$. 上述论证说明 $(\sigma_1(K_\nabla)) = 2\pi i c_1(\zeta)$. 以下的证明主要用到 Chern 类满足的上同调示性类的公理性质. 定义不变多项式 $\underline{c}$ 为 $\underline{c}(A) = \det(I + A/2\pi i)$. 下面说明 $\underline{c}$ 定义的示性类满足 Whitney 求和公式. ζ_1, ζ_2 是两向量丛，上面有联络 ∇_1, ∇_2，则显然 ζ_1, ζ_2 上可定义联络 ∇ 为 ∇_1, ∇_2 的 Whitney 和，则对应的局部矩阵为 $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_1, \Omega)$. 则 $\underline{c}(\Omega) = \underline{c}(\Omega_1)\underline{c}(\Omega_2)$，即 $\underline{c}(K) = \underline{c}(K)\underline{c}(K)$. 由于对线丛 $\underline{c}(K) = c(\zeta)$，则由标准论证，$\underline{c}(K) = c(\zeta)$ 对一切向量丛成立.*

推论 2 *对任何实向量丛 ζ, de Rham 上同调类 $\sigma_{2k}(K)$ 代表的上同调类是 $(2\pi)^{2k}P_k(\zeta)$. 且 $\sigma_{2k+1}(K)$ 为上边缘链.*

推论 3 *对任何实或复向量丛 ζ，其上有平坦联络，则有理数系数的 Pontrjatan 或 Chern 类为 0.*