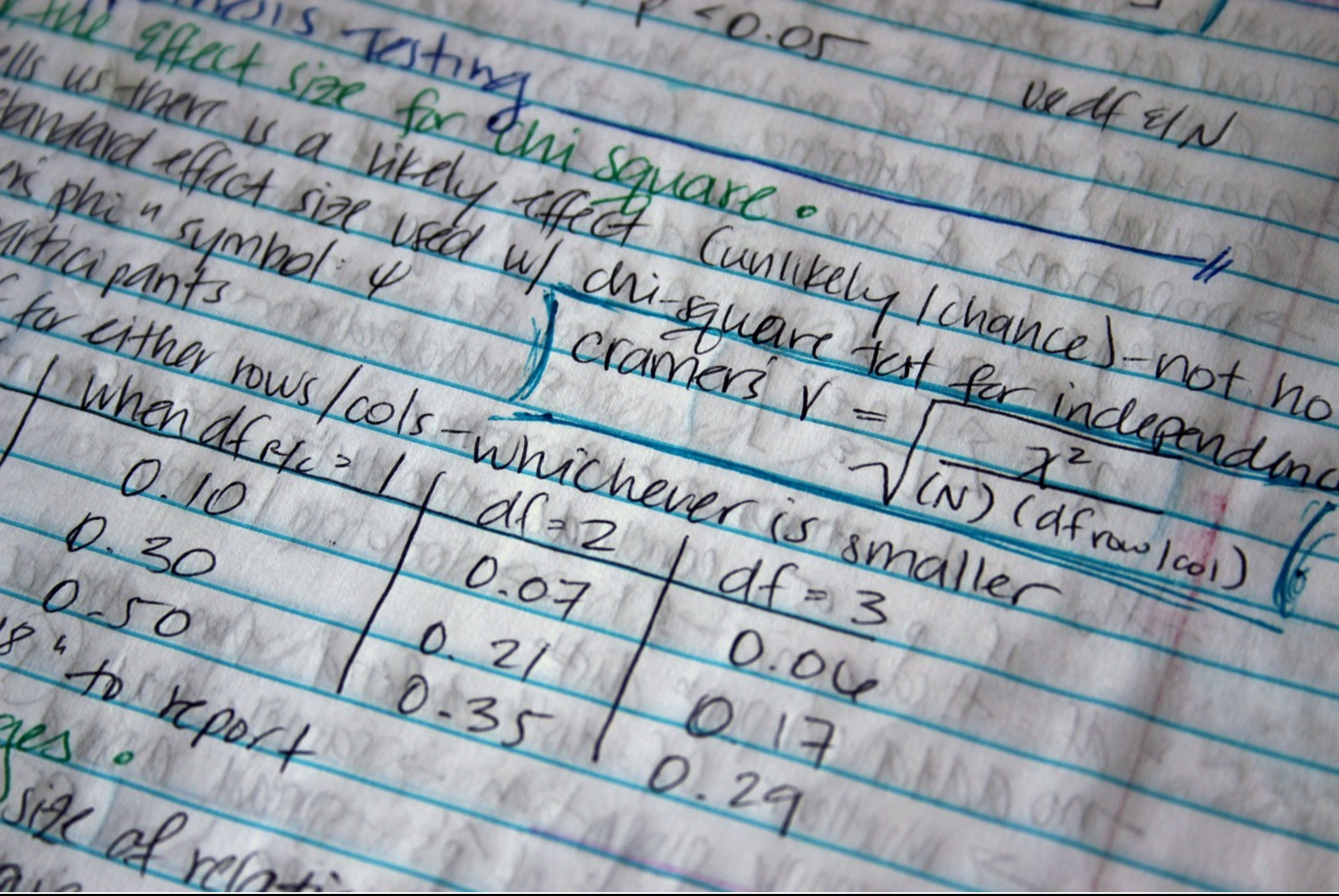

高等数学内容要点

辅导书

作者：Antigore
组织：跑步群
时间：2023-4-17
版本：0.1

目录

第 1 章 极限与连续

1.1 极限的概念

1.1.1 数列极限的概念

若当 $n \to \infty$ 时，x_n 无限趋向于常数 a，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

1.1.2 函数极限的概念

两类六种

定义 1.1

1. 若当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，或称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限，记作
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0).$$
2. 若当 $x \to x_0$ 时且 $x < x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，或称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记作
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0^-) \quad 或 \quad f(x_0^-) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A.$$
3. 若当 $x \to x_0$ 时且 $x < x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，或称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，记作
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0^+) \quad 或 \quad f(x_0^+) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A.$$
4. 若当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty) \quad 或 \quad f(\infty) = A.$$
5. 若当 $x \to \infty$ 且 $x < 0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限，记作
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to -\infty) \quad 或 \quad f(-\infty) = A.$$
6. 若当 $x \to \infty$ 且 $x > 0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限，记作
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to +\infty) \quad 或 \quad f(+\infty) = A.$$

♣

推论 1.1

1.

$$
\begin{aligned}
x \to x_0 &\quad\Longleftrightarrow\quad x\text{趋近于}x_0. \\
x \to x_0^- &\quad\Longleftrightarrow\quad x\text{趋近于}x_0,\text{且}x < x_0 \Longleftrightarrow x\text{从}x_0\text{的左侧趋近于}x_0. \\
x \to x_0^+ &\quad\Longleftrightarrow\quad x\text{趋近于}x_0,\text{且}x > x_0 \Longleftrightarrow x\text{从}x_0\text{的右侧趋近于}x_0. \\
x \to \infty &\quad\Longleftrightarrow\quad \|x\|\text{无限增大}. \\
x \to -\infty &\quad\Longleftrightarrow\quad \|x\|\text{无限增大，且}x < 0. \\
x \to +\infty &\quad\Longleftrightarrow\quad \|x\|\text{无限增大，且}x > 0.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
x \to x_0 &\quad\Longleftrightarrow\quad x \to x_0^-\text{或}x \to x_0^+. \\
x \to \infty &\quad\Longleftrightarrow\quad x \to \infty\text{或}x \to +\infty.
\end{aligned}
$$

♡

1.2 极限存在的充要条件

定理 1.1

1.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad (A\text{为常数}) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

2.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (A\text{为常数}) \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

♡

1.3 极限的性质

1.3.1 数列极限的性质

性质 （有界性）收敛数列必有界.
(若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则存在常数 $M > 0$，使得对于 $\forall n \in N^+$，有 $\|x_n\| \leqslant M$.)
性质（保号性）设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，若 $a > 0$ (或 $a < 0$)，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$ ($x_n < 0$)
.

推论 1.2

设 $\lim_{x\to\infty} x_n = a$，若当 $n > N$ 时，有 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），则 $a \geqslant 0$（或 $a \leqslant 0$）.

♡

1.3.2 函数极限的性质

性质（局部有界性）若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界 (即存在常数 $M > 0$ 及 $\delta > 0$，使得当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $|f(x)| \leqslant M$）.
性质 （局部保号性）设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，若 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

推论 1.3

设 $\lim_{f(x)} = A$，若点 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

♡