钱伟长：《格林函数法和变分法在电磁场中的应用》.

附录二：矢量空间 线性算子 231

附录三：并矢分析

附录一

附录四：Dirac 符号

矢量代数和矢量分析

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{qrk} = \delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jq}$

§ A1 矢量加法

矢量是按平行四边形定律进行加减运算的，任一个三度空间的矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以唯一地用三个不同平面的已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的线性组合来表示．即

$$\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{a} + B\boldsymbol{b} + C\boldsymbol{c} \tag{A1.1}$$

其中 A, B, C 为常数，式右方三项分别代表 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 方向的三个分量．在特殊情况下，这三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 可以表示三个相互垂交的单位矢量，设用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 来表示这三个按右手定则相互垂交的一套单位矢量．于是有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{A1.2}$$

其中 x, y, z 为 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 三个单位矢量方向的分量，而 $\boldsymbol{r}$ 的量值为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{A1.3}$$

§ A2 矢量乘法

矢量乘法有两种，一种称为**内乘**，其积称为**内积**；另一种称为**外乘**，其积称为**外积**．内积是标量，亦称**标积**，用·表示，有时也称**点积**．外积是另一矢量，亦称**矢积**，用∧表示，有时也称**叉积**．

标积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\theta_{ab} \tag{A2.1}$$

其中 θ_{ab} 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两矢量间的夹角（图 A1）．

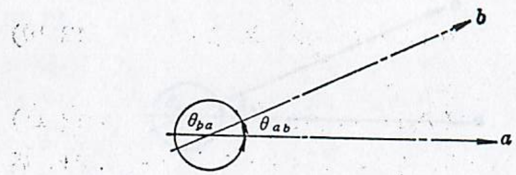

图 A1

因为

$$\cos\theta_{ba} = \cos(2\pi - \theta_{ab}) = \cos\theta_{ab} \tag{A2.2}$$

所以

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{A2.3}$$

这里应该指出，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$，则 $\boldsymbol{a} = 0$，或 $\boldsymbol{b} = 0$，或 $\cos\theta_{ab} = 0$，后者表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直．

设

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} \tag{A2.4}$$

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{A2.5}$$

这是因为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1, \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0 \tag{A2.6}$$

于是有

$$ab\cos\theta_{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{A2.7}$$

其中

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \tag{A2.8}$$

矢积是另一矢量，这个矢量垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 两矢量所共有的平面，其正的方向按 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的右手螺旋规则决定（在图 A1 上，该

矢量应该垂直纸面，指向读者)。设 $\boldsymbol{n}$ 为在该矢量方向的单位矢量，所以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}$ 组成一个右手系统。**矢积**为

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(ab\sin\theta_{ab})\boldsymbol{n} \tag{A2.9}$$

由于

$$\sin\theta_{ba}=\sin(2\pi-\theta_{ab})=-\sin\theta_{ab} \tag{A2.10}$$

所以有

$$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \tag{A2.11}$$

应该指出，如果 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=0$，或 $\boldsymbol{b}=0$，或 $\sin\theta_{ab}=0$，后者指出 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相互平行。

也应指出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\\&\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\qquad \boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{k}=0\end{aligned} \tag{A2.12}$$

所以，有

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\wedge(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix} \tag{A2.13}$$

或 $\boldsymbol{n}$ 表示矢积所指方向的单位矢量，

$$(ab\sin\theta_{ab})\boldsymbol{n}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k} \tag{A2.14}$$

从上式两边求标积，得

$$\boxed{\sin^2\theta_{ab}=\frac{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)}} \tag{A2.15}$$

这里还应该指出 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 这个矢积的大小等于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 二个矢量所组成的平行四边形的面积，其方向和单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 一致，

∧表示×乘.

§ A3 三矢乘积

三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的乘积，也有两种，其一为**三矢标积** $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$，另一为**三矢矢积** $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$。前者代表 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 三个矢量组成的平行六面体的体积。很易证明

$$\begin{aligned}\text{六面体体积}&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b})\\&=-(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\cdots\\&=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\cdots\end{aligned} \tag{A3.1}$$

所以，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})$ 按 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的次序循环置换时，其结果不变。当 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=0$ 时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 必为同一平面上的矢量。

我们也很易证明下列有关三矢矢积的关系式

$$\boxed{\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c}}=-\boldsymbol{c}\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\cdots \tag{A3.2}$$

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=\cdots \tag{A3.3}$$

§ A4 四矢乘积

四个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 的乘积也有两种：即标积 $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})$ 和矢积 $(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})$。很易证明下列结果：

(i)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{a}\cdot\{\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})\}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned} \tag{A4.1}$$

(iia)
$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} \tag{A4.2}$$

(iib)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})&=-(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d})\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\\&=-(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{A4.3}$$

根据(A4.2)、(A4.3)式，我们有

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{A4.4}$$

但是，从(A3.1)式，我们求得

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) \tag{A4.5a}$$

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) \tag{A4.5b}$$

$$(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) \tag{A4.5c}$$

$$(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}) \tag{A4.5d}$$

于是(A4.4)式给出

$$\boldsymbol{d}=\frac{(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})}$$

这就证明了：只要 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\neq 0$，或只要 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不在同一平面上，则任一矢量 $\boldsymbol{d}$ 可以分解为在 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 方向内的三分量；而且这种分解是唯一的。 $y=x^2$ $x^2-y=0$

$\mathrm{grad}V=(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y})(x^2-y)=(2x,-1)$

§ A5 矢量分析

标量函数 V 的梯度 ∇V

标量函数 V 在空间某点 P 上的梯度为

$$\mathrm{grad}\,V=\nabla V=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V=\frac{\partial V}{\partial n}\boldsymbol{n} \tag{A5.1}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为在空间 P 点上垂交于 $V=$ 常数这个曲面的法线单位矢量。

矢量的散度 它是由下式在 P 点上定义的：

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}=\lim_{\tau\to 0}\left\{\iint_S \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right\}/\tau \tag{A5.2}$$

其中 S 为 P 点附近环绕 P 点的某一单联通闭合曲面，τ 为这个曲面所包围的体积。$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为 S 上的某一微分曲面单元，其大小为 $\mathrm{d}S$，其方向为曲面上该点的外法线方向。从(A5.2)式可以证明

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{A5.3}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}.$$

所以，矢量 $\boldsymbol{F}$ 在某点 P 的散度是该点的一个标量。

矢量的旋度 它是由下式在 P 点上定义的

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}=\lim_{S\to 0}\left\{\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right\}\Big/S \tag{A5.4}$$

其中 Γ 是环绕 P 点的某一简单闭合曲线，这个闭合曲线环有一个平面面积 S，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为一矢量，其长度为 $\mathrm{d}l$，其方向和 Γ 上的切线一致。Γ 上的积分以逆时针方向为正。根据这个定义，我们可以证明

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F}=\nabla\wedge\boldsymbol{F} \tag{A5.5}$$

梯度、散度、旋度的恒等式 现将常用的梯度、散度、旋度的恒等式列出如下：

$$\nabla(UV)=U\nabla V+V\nabla U \tag{A5.6a}$$

$$\nabla\cdot(U\boldsymbol{F})=U\nabla\cdot\boldsymbol{F}+(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)U \tag{A5.6b}$$

$$\nabla\wedge(U\boldsymbol{F})=U\nabla\wedge\boldsymbol{F}+(\nabla U)\wedge\boldsymbol{F} \tag{A5.6c}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{G})=\boldsymbol{G}\cdot(\nabla\wedge\boldsymbol{F})-\boldsymbol{F}\cdot(\nabla\wedge\boldsymbol{G}) \tag{A5.6d}$$

$$\nabla\wedge(\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{G})=\boldsymbol{F}(\nabla\cdot\boldsymbol{G})-(\nabla\cdot\boldsymbol{F})\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G} \tag{A5.6e}$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}\quad(\nabla^2=\nabla\cdot\nabla) \tag{A5.6f}$$

$$\nabla(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G})=(\boldsymbol{F}\cdot\nabla)\boldsymbol{G}+(\boldsymbol{G}\cdot\nabla)\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{G})+\boldsymbol{G}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{F}) \tag{A5.6g}$$

§ A6 各种积分定理

高斯散度定理 它可以写成

$$\iiint_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\tau=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{A6.1}$$

其中 S 为体积 τ 的表面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为以外法线为方向的微元矢量。(A6.1)式可以从 $\boldsymbol{F}$ 的散度的定义证明。

斯托克斯定理　它可以写成

$$\iint_S (\nabla\wedge\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{A6.2}$$

其中曲面 S 的外包闭合曲线为 Γ，它可以从 curl $\boldsymbol{F}$ 的定义证明。

格林定理　设 U, V 是两个单值的位函数，它们都是标量，把高斯散度定理用在下列矢量上

$$\boldsymbol{F}=U\nabla V \tag{A6.3}$$

即得

$$\begin{aligned}\iint(U\nabla V)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iiint\nabla\cdot(U\nabla V)\mathrm{d}\tau\\&=\iiint\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}\tau+\iiint U\nabla^2V\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{A6.4}$$

同样，用

$$\boldsymbol{F}=V\nabla U \tag{A6.5}$$

有

$$\iint(V\nabla U)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\nabla U\cdot\nabla V\mathrm{d}\tau+\iiint V\nabla^2U\mathrm{d}\tau \tag{A6.6}$$

从(A6.4)式中减去(A6.6)式，得

$$\iint(U\nabla V-V\nabla U)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint(U\nabla^2V-V\nabla^2U)\mathrm{d}\tau \tag{A6.7}$$

(A6.4)或(A6.7)式都称为格林定理。

当 $U=V$ 时，(A6.4)式的特例可以写成

$$\iint U\nabla U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint(\nabla U)^2\mathrm{d}\tau+\iiint U\nabla^2U\mathrm{d}\tau \tag{A6.8}$$

当 $\nabla^2U=\nabla^2V=0$ 时，(A6.7)式给出

$$\iint U\nabla V\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint V\nabla U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{A6.9}$$

这就是格林倒逆定理(Green's Reciprocal Theorem)。

正规函数的柯西定理　设 $f(z)$ 是 z 的正规函数，其中

$$z=x+jy\qquad j=\sqrt{-1} \tag{A6.10}$$

于是

$$f(z)=U(x,y)+jV(x,y) \tag{A6.11}$$

其中 $U(x,y)$, $V(x,y)$ 是 x, y 的实函数，它们的一阶导数假定是存在的，并满足柯西关系式

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\qquad\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial V}{\partial x} \tag{A6.12}$$

柯西定理可以写成：对正规函数 $f(z)$ 而言

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{A6.13}$$

其 Γ 为任一闭合环线。

证明如下：在斯托克斯定理(A6.2)式中，我们把 $\boldsymbol{F}$ 写成

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j} \tag{A6.14}$$

于是，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\boldsymbol{k} \tag{A6.15}$$

所以，$\boldsymbol{F}$ 的旋度可以写成

$$\nabla\wedge\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\boldsymbol{i}-\frac{\partial F_y}{\partial x}\boldsymbol{j} \tag{A6.16}$$

而

$$(\nabla\wedge\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\quad[(\boldsymbol{i}\wedge\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{k})=0] \tag{A6.17}$$

最后，从 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\mathrm{d}y$，我们求得

$$\iint_S\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Gamma(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y) \tag{A6.18}$$

但是

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma}(U + jV)(\mathrm{d}x + j\mathrm{d}y)$$
$$= \int_{\Gamma}(U\mathrm{d}x - V\mathrm{d}y) + j\int_{\Gamma}(V\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y) \tag{A6.19}$$

在利用了(A6.18)式后，即得

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = -\iint_{S}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+ \iint_{S}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{A6.20}$$

根据柯西关系式，我们立刻就证明了柯西定理(A6.13)式。

附 录 二

矢量空间、线性算子

§B1 矢量空间

在处理许多物理问题时，抽象的矢量空间，越来越受到人们的重视。在物理系统中，常常可以用**状态矢量**来表示该系统的状态，而且这种表示是唯一的，状态变了，状态矢量也应相应的变化。

状态矢量既是抽象的量，它们对同一物理系统有不同的描述方法，特别是不同的坐标系统就有不同的状态矢量的描述。所以，我们常常须要说明，这个状态矢量是在什么坐标系中表示的。

现在让我们用简谐振动系统来说明这个状态矢量的问题。简谐振动系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{B1.1}$$

其解为

$$x(t) = x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{k/m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \tag{B1.2}$$

其中 $x(0)$，$\dot{x}(0)$分别代表初始位置和初始速度。这指出本系统一定要有两个状态矢量才能完整地描述这一系统的状态。很易看到，除了 x 外，还有 $\dot{x}$，都是状态矢量。在习惯上，我们用 x（位置）和 $y = m\dot{x}$（动量）这两个量来表示简谐振动系统的状态。

于是$(B1.1)$式也可以写成

$$\dot{y}+kx=0 \qquad \dot{x}-\frac{1}{m}y=0 \tag{B1.3}$$

也可以用矩阵形式写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{m}\\ -k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \tag{B1.4}$$

这里可以看到，两项列矩阵

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

是用x, y坐标来表示的状态矩阵。而另一个两项列矩阵也是表示同一系统的状态矩阵的又一表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}$$

2×2矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{m}\\ -k & 0\end{bmatrix}$$

是一个转换矩阵，它把这个简谐振动系统从一种状态矩阵（即x, y）转换成另一种状态矩阵（即$\dot{x}$, $\dot{y}$）。

从$(B1.2)$式，我们可以求得

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=x(0)\cos\omega t+\frac{y(0)}{m\omega}\sin\omega t\\ y(t)&=m\dot{x}(t)=-m\omega x(0)\sin\omega t+y(0)\cos\omega t\end{aligned}\right\} \tag{B1.5}$$

其中$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。$(B1.5)$式用矩阵表示时可以写成

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \frac{1}{m\omega}\sin\omega t\\ -m\omega\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix} \tag{B1.6}$$

这就引出了另一种状态矢量表达式。

上面的例子是一种两维的矢量空间，我们将在下面引进n维的矢量空间。

最常见的是通常三维空间的矢量空间。例如，在卡氏坐标$OXYZ$系中一点的位置可以用矢量$\boldsymbol{r}$表示：

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{B1.7}$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$是OX、OY、OZ轴向的单位矢量，它们被称为**基矢**。它们定义了以此为基的坐标系，其中x、y、z是这一点的坐标。基矢$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$是线性无关的，假如$\boldsymbol{r}=0$，则$x=y=z=0$，基矢的数目就是空间的维数。

矢量$\boldsymbol{r}$的长度定义为

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \tag{B1.8}$$

为了说明$(B1.8)$式的运算，我们可以采用矢量的标积或内积，我们有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0\\ &\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\end{aligned} \tag{B1.9}$$

于是

$$\begin{aligned}r^2=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}&=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\ &=x^2+y^2+z^2\end{aligned} \tag{B1.10}$$

$(B1.9)$式中的第一行诸式，代表$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$**正交性**；其第二行诸式代表$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$的**正则性**（即单位矢量的特性），亦称**归一性**或**正规性**。这两种特性合在一起被称为**正交正则性**，或**正交归一性**。所以，有时称$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$组成一个**正交正则系**，或**正交归一系**。

上述分析可以推广至n维系统，n有限但是任意整数：

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i x_i \tag{B1.11}$$

设$\boldsymbol{u}_i (i=1, 2, \cdots n)$是$n$维矢量空间中的一组基矢，$x_i$为矢量$\boldsymbol{x}$在该基础上的分量。

矢量$\boldsymbol{x}$的长度定义为

$$x^2=\sum^n |x_i|^2 \qquad (B1.12)$$

为了说明 (B1.12) 式的运算过程，我们引进对偶空间 (Dual Space) 的观念。对于 u_i 基础中的任一矢量 x，必在对偶空间(用基矢 u_i^+ 组成)中有一矢量 x^+ 和它对偶。

$$x^+=\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i u_i^+ \qquad (B1.13)$$

其中 $\tilde{x}_i$ 是 x_i 的复共轭数，而且

$$u_i^+ u_j=\delta_{ij} \qquad (B1.14)$$

δ_{ij} 是狄喇克 δ 函数

$$\delta_{ij}=1 \quad (当\ i=j); \quad \delta_{ij}=0 \quad (当\ i\neq j) \qquad (B1.15)$$

(B1.13) 式定义了在 n 维矢量空间中，复矢量的标积。如果 (B1.14)式成立，则 u_i^+, u_i 组成双正交正则基础(Bi-orthonormal basis)，(B1.14)式也称双正交正则条件。

如果对于一切 i 而言，$u_i^+=u_i$，则这个基础称为正交正则的，而(B1.14)式称为正交正则条件。这时 (B1.14) 式表示(1) u_i 是单位矢量，或 $u_iu_i=1$，(2) u_i，u_j 对 $i\neq j$ 时，互相正交，即对 $i\neq j$ 时，$u_iu_j=0$。

一般说来，矢量 x 的长度的平方是由下列乘积给出

$$x^+x=\sum_{i,j=1}^n \tilde{x}_i u_i^+ u_j x_j=\sum_{i,j=1}^n \tilde{x}_i \delta_{ij} x_j=\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \qquad (B1.16)$$

u_i 是独立的，其证明如下：

设

$$x=\sum_{i=1}^n u_i x_i=0 \qquad (B1.17)$$

则

$$u_j^+ x=\sum_{i=1}^n u_j^+ u_i x_i=\sum_{i=1}^n \delta_{ji} x_i=x_j=0 \qquad (B1.18)$$

这就证明 u_i 的独立性。

必须指出，矢量的乘法次序不能交换。x^+y 和 yx^+ 很不一样，前者是一个标量，后者则为**并矢**，并矢将在下面另节讨论。

下面证明**展开定理**

在(B1.11a)上前乘 u_j^+，得

$$u_j^+x=\sum_{i=1}^n u_j^+ u_i x_i=\sum_{i=1}^n \delta_{ji} x_i=x_j \qquad (B1.19)$$

把(B1.19)式的结果 x_j 代入(B1.11)，得

$$x=\sum_{j=1}^n u_j x_j=\sum_{j=1}^n u_j u_j^+ x=\left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^+\right) x \qquad (B1.20)$$

这就指出在任一矢量 x 上乘 $\sum_{j=1}^n u_j u_j^+$ 后并不改变 x。所以

$$\sum_{j=1}^n u_j u_j^+=1 \qquad (B1.21)$$

$|n\rangle\langle n|=1$

这就是展开定理所要求的基础。

矢量 x 上乘一常量，和两个矢量 x，y 相加的运算如下

$$\alpha x=\sum_{i=1}^n u_i(\alpha x_i) \qquad (B1.22)$$

$$x+y=\sum_{i=1}^n u_i x_i+\sum_{i=1}^n u_i y_i=\sum_{i=1}^n u_i(x_i+y_i) \qquad (B1.23)$$

§B2 线性算子

在矢量空间中，把某一矢量 x 转换为另一矢量 y 的算子 $\mathscr{L}$ 称为线性算子

$$y=\mathscr{L}x \qquad (B2.1)$$

在 x 和 y 已给的条件下，$\mathscr{L}$ 是可以决定的。

$\mathscr{L}$ 的线性是由下列关系表达的

$$\mathscr{L}(x+y)=\mathscr{L}x+\mathscr{L}y \qquad (B2.2)$$

$$\mathscr{L}(\alpha x)=\alpha\mathscr{L}x \qquad (B2.3)$$

其 α 为任意标量。

设 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{M}$ 为两种线性算子，而且

$$\mathscr{L}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \tag{B2.4}$$

$$\mathscr{M}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z} \tag{B2.5}$$

把 $\boldsymbol{x}$ 直接转换为 $\boldsymbol{z}$ 的合成算子 $\mathscr{M}$ 也是线性的；它等于 $\mathscr{M}\mathscr{L}$。

$$\boldsymbol{z}=\mathscr{M}\boldsymbol{y}=\mathscr{M}\mathscr{L}\boldsymbol{x} \tag{B2.6}$$

§ B3 特征矢量和特征值

设有一线性算子 $\mathscr{L}$ 和一矢量 $\boldsymbol{x}$(不等于零)满足下述关系

$$\mathscr{L}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \tag{B3.1}$$

其中 λ 为一常数。我们说：如果把线性算子 $\mathscr{L}$ 作用在矢量 $\boldsymbol{x}$ 上，给出常数 λ 乘这个矢量，则 $\boldsymbol{x}$ 称算子 $\mathscr{L}$ 的特征矢量，λ 为算子 $\mathscr{L}$ 的特征值。我们也可以说，某一特征矢量对应着 $\mathscr{L}$ 的一个特征值 λ。反之，$\mathscr{L}$ 的某一特征值 λ 对应着一个特征矢量 $\boldsymbol{x}$。

§ B4 对偶空间的线性算子

设

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i x_i \tag{B4.1}$$

则在对偶空间的有关矢量为

$$\boldsymbol{x}^{+}=\sum^{n}\bar{x}_i\boldsymbol{u}_i^{+} \tag{B4.2}$$

根据定义

$$\boldsymbol{y}=\mathscr{L}\boldsymbol{x} \tag{B4.3}$$

我们可以写成(用矩阵表示)

$$y=Lx \tag{B4.4}$$

或用张量表示，可以写成

$$y_i=\sum_i L_{ij}x_j \tag{B4.5}$$

于是，有转置张量

$$\bar{y}_i=\sum_j\bar{x}_j\bar{L}_{ij} \tag{B4.6}$$

其结果证明可以采用下列符号

$$\boldsymbol{y}^{+}=\boldsymbol{x}^{+}\mathscr{L}^{+} \tag{B4.7}$$

所以，根据(B4.2)和(B4.6)式

$$\boldsymbol{y}^{+}=\sum_i\bar{y}_i\boldsymbol{u}_i^{+}=\sum_{ji}\bar{x}_j\bar{L}_{ij}\boldsymbol{u}_i^{+}=\sum_{i,j}\bar{x}_i\bar{L}_{ji}\boldsymbol{u}_j^{+} \tag{B4.8}$$

根据 $\mathscr{L}$ 的定义，有

$$\mathscr{L}\boldsymbol{u}_i=\sum_j\boldsymbol{u}_j L_{ji} \tag{B4.9}$$

从上式，得

$$\boldsymbol{u}_i^{+}\mathscr{L}^{+}=\sum_j\bar{L}_{ji}\boldsymbol{u}_j^{+} \tag{B4.10}$$

把(B4.10)式代入(B4.8)式，化为

$$\boldsymbol{y}^{+}=\sum_i\bar{x}_i\boldsymbol{u}_i^{+}\mathscr{L}^{+} \tag{B4.11}$$

利用(B4.9)式，我们有

$$\mathscr{L}\sum_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^{+}=\sum\mathscr{L}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^{+}=\sum_{i,j}\boldsymbol{u}_j L_{ji}\boldsymbol{u}_i^{+} \tag{B4.12}$$

但(B1.21)式给出 $\sum\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i^{+}=1$，于是上式化为

$$\mathscr{L}=\sum_{i,j}\boldsymbol{u}_i L_{ij}\boldsymbol{u}_j^{+} \tag{B4.13}$$

所以，从上式导得

$$\mathscr{L}^{+}=\sum_{ij}\boldsymbol{u}_j\bar{L}_{ij}\boldsymbol{u}_i^{+}=\sum\boldsymbol{u}_i\bar{L}_{ji}\boldsymbol{u}_j^{+} \tag{B4.14}$$

如果称厄密转置矩阵 L_{ij}^{+} 为

$$L_{ij}^{+}=\bar{L}_{ji} \tag{B4.15}$$

最后得

$$\mathscr{L}^{+}=\sum\boldsymbol{u}_i L_{ij}^{+}\boldsymbol{u}_j \tag{B4.16}$$

这里指出在对偶空间中，矢量 $\boldsymbol{y}^{+}$ 和线性算子 $\mathscr{L}^{+}$ 的关系和在矢量空间中，矢量 $\boldsymbol{y}$ 和线性算子 $\mathscr{L}$ 的关系是相同的。

$$\boldsymbol{y}^{+}(=\bar{y}_1,\ \bar{y}_2\cdots\bar{y}_n)$$

是矢量 $\boldsymbol{y}^+$ 的单行矩阵符号，L^+ 是线性算子 $\mathscr{L}^+$ 的矩阵符号，$\boldsymbol{y}(=y_1, y_2\cdots y_n)$ 是矢量 $\boldsymbol{y}$ 的单列矩阵，L 是线性算子 $\mathscr{L}$ 的矩阵符号.

必须指出，我们还有关系

$$\boldsymbol{y}^+\mathscr{L}\boldsymbol{x}=(\mathscr{L}^+\boldsymbol{y})^+\boldsymbol{x} \tag{B4.17}$$

这个关系在 E_n 中的一切 $\boldsymbol{xy}$ 都适用. 本式也可以看作为 $\mathscr{L}^+$ 的定义，它也被称为**伴随算子**(adjoint operator).

从(B4.15)式，我们再度换算，得

$$L_{ij}=\bar{L}^+_{ji} \tag{B4.18}$$

它同样可以用来定义 $\bar{L}^+_{ji}$ 的.

§B5 连续系统的线性算子

在前两节中，我们研究了矢量空间的线性算子，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 矢量的分量都是离散的，即 x_i，y_i 的 i 在 E_n 中取 n 个离散值，$\mathscr{L}$ 这个线性算子也是离散的，它的分量 L_{ij} 也是离散的，有 $n\times n$ 个值.

在连续系统中，我们有 $f(x)$、$g(x)$ 等都是 x 的连续函数，和(B2.1)式相类似的线性转换也可以用线性算子表示

$$g(x)=\mathscr{L}f(x) \tag{B5.1}$$

在矢量空间，$\mathscr{L}$ 这个算子是带着对 i 求和的过程（见(B4.5)式），而在连续系统里，$\mathscr{L}$ 则是一个积分过程. 例如(B5.1)式可以写成

$$g(x)=\int l(x, x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{B5.2}$$

其中 $l(x, x')$ 被称为算子 $\mathscr{L}$ 的**核**(Kernel). 有一种核特殊受人重视，即满足

$$f(x)=\int\delta(x, x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{B5.3}$$

的核 $\delta(x, x')$，它是一个符号函数，有时称为**狄喇克函数**(Dirac function). 这里必须指出，δ 函数不是一般常见的函数，它在

一切点上并不一定有定值.

和(B4.17)式一样，在连续系统中也有伴随算子 $\mathscr{L}^+$. (B4.17)式相似的连续系统关系可以写成

$$\int\bar{f}(x)\mathscr{L}g(x)\mathrm{d}x=\int\overline{\mathscr{L}^+f(x)}\,g(x)\mathrm{d}x \tag{B5.4}$$

如果 $\mathscr{L}^+=\mathscr{L}$，则 $\mathscr{L}$ 被称为**自伴算子**或**厄密算子**. 如果

实对称矩阵的本征值为实.

$$\mathscr{L}f(x)=\int l(x, x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{B5.5}$$

则

$$\int\bar{f}(x)\mathscr{L}g(x)\mathrm{d}x=\iint\bar{f}(x)l(x, x')g(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x' \tag{B5.6}$$

它可以写成

$$\begin{aligned}\int\bar{f}(x)\mathscr{L}g(x)\mathrm{d}x&=\iint\overline{\overline{l(x, x')}f(x)}g(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\\&=\int\left[\int\overline{\overline{l(x', x)}f(x')\mathrm{d}x'}\right]g(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{B5.7}$$

所以，对于任意 $f(x)$ 而言，有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^+f(x)&=\int l^+(x, x')f(x')\mathrm{d}x'\\&=\int\overline{l(x', x)}f(x')\mathrm{d}x'\end{aligned} \tag{B5.8}$$

这就证明

$$l^+(x, x')=\overline{l(x', x)} \tag{B5.9}$$

它和离散空间矢量的(B4.15)式相同.

转置线性算子

算子 $\mathscr{L}$ 的转置算子 $\mathscr{L}^T$ 是根据下式决定的

$$\int\phi(x)\mathscr{L}\psi(x)\mathrm{d}x=\int[\mathscr{L}^T\phi(x)]\psi(x)\mathrm{d}x \tag{B5.10}$$

转置算子 $\mathscr{L}^T$ 是和 $\mathscr{L}^+$ 有简单关系的，因为

$$\overline{\mathscr{L}^+f(x)}=\bar{\varphi}^+\overline{f(x)} \tag{B5.11}$$

从(B5.4)和(B5.10)式，我们有

$$\overline{\mathscr{L}}^{+}=\mathscr{L}^{T} \tag{B5.12}$$

所以，伴随算子是转置算子的共轭复数。假如$\mathscr{L}$是实数，则两者相等。所以，当$\mathscr{L}$是厄密算子时，$\mathscr{L}^{T}=\overline{\mathscr{L}}$。当算子$\mathscr{L}$和它的转换算子$\mathscr{L}^{T}$相等时，即$\mathscr{L}^{T}=\mathscr{L}$时，$\mathscr{L}$一定是对称的。

特征函数的正交性

设$\mathscr{L}$为厄密算子，其特征值是实数，而相关的特征函数必相互正交。设

$$\mathscr{L}^{+}=\mathscr{L} \tag{B5.13}$$

设特征函数$f(x)$和$g(x)$的特征值分别为λ和μ，于是我们有

$$\mathscr{L}f(x)=\lambda f(x),\quad \mathscr{L}g(x)=\mu g(x) \tag{B5.14}$$

从此，可以证明

$$\int\bar{f}\mathscr{L}f\mathrm{d}x=\lambda\int\bar{f}f\mathrm{d}x \tag{B5.15a}$$

$$\int\bar{f}\mathscr{L}f\mathrm{d}x=\int\overline{\mathscr{L}^{+}f}f\mathrm{d}x=\int\overline{\mathscr{L}f}f\mathrm{d}x=\bar{\lambda}\int\bar{f}f\mathrm{d}x \tag{B5.15b}$$

所以有

$$\lambda=\bar{\lambda} \tag{B5.16}$$

相同地

$$\int\bar{f}\mathscr{L}g\mathrm{d}x=\mu\int\bar{f}g\mathrm{d}x \tag{B5.17a}$$

$$\int\bar{f}\mathscr{L}g\mathrm{d}x=\int\overline{\mathscr{L}^{+}f}g\mathrm{d}x=\int\overline{\mathscr{L}f}\cdot g\mathrm{d}x=\lambda^{**}\int\bar{f}g\mathrm{d}x \tag{B5.17b}$$

所以有

$$(\lambda-\mu)\int\bar{f}g\mathrm{d}x=0 \tag{B5.18}$$

但$\lambda\neq\mu$，所以，证明了f，g的正交条件

$$\int\bar{f}g\mathrm{d}x=0 \tag{B5.19}$$

§B6 狄喇克函数

前面已经介绍过狄喇克函数，现在将从正交正则函数族$\phi_n(x)$[在(a, b)间]来说明这个函数。

$f(x)$在(a, b)间可以展开为$\phi_n(x)$的级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(x) \tag{B6.1}$$

我们有正交正则条件

$$\int_a^b\bar{\phi}_m(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x=(\phi_m,\ \phi_n)=\delta_{nm} \tag{B6.2}$$

而且

$$a_n=\int_a^b f(x)\bar{\phi}_n(x)\mathrm{d}x \tag{B6.3}$$

所以，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f(x')\bar{\phi}_n(x')\phi_n(x)\mathrm{d}x' \tag{B6.4}$$

我们定义一个辅助函数$\delta_\gamma(x, x')$

$$\delta_\gamma(x,\ x')\equiv\delta_\gamma(x'-x)=\sum_{n=0}^{\gamma}\bar{\phi}_n(x')\phi_n(x) \tag{B6.5}$$

于是(B6.4)式可以写成

$$f(x)=\lim_{\gamma\to\infty}\sum_{n=0}^{\gamma}\int_a^b f(x')\bar{\phi}_n(x')\phi_n(x)\mathrm{d}x' \tag{B6.6}$$

现在把和号和积分号的次序调换，上式写成

$$f(x)=\lim_{\gamma\to\infty}\int_a^b f(x')\delta_\gamma(x'-x)\mathrm{d}x' \tag{B6.7}$$

其极限为

$$f(x)=\int_a^b f(x')\delta(x'-x)\mathrm{d}x' \tag{B6.8}$$

其中

$$\delta(x'-x)=\lim_{\gamma\to\infty}\delta_\gamma(x'-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\phi}_n(x')\phi_n(x) \tag{B6.9}$$

$\delta(x'-x)$这个定义比前面的定义更一般，因为，根据这个定义，即使 $f(x)$有间断时，也是适用的。$\delta(x'-x)$也可以定义如下：

$$\delta(x'-x)=\begin{cases}0 & -\infty\leqslant x'<x \quad x>x'\geqslant\infty\\ \infty & x'=x\end{cases} \tag{B6.10}$$

更正确些，可以把 $\delta(x'-x)$看作为一个冲量函数．如图 $B1$

$$\delta(x'-x)=\lim_{\epsilon\to 0}\begin{cases}0 & -\infty\leqslant x'\leqslant x-\epsilon \quad \epsilon+x\leqslant x'\leqslant\infty\\ \dfrac{1}{2\epsilon} & x-\epsilon\leqslant x'\leqslant x+\epsilon\end{cases} \tag{B6.11}$$

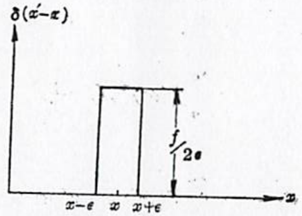

图 $B1$ 狄喇克 δ 函数

$\delta(x-x')$用三角函数表示时，可以用($B6.9$)．特征函数为

$$\phi_n=\frac{1}{(2l)^{1/2}}\exp\left(i\frac{\pi n x}{l}\right) \quad (-l\leqslant x\leqslant l) \tag{B6.12}$$

n是正整数或负整数．采用($B6.9$)式后，得

$$\delta(x'-x)=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{\pi}{l}(x'-x)n\right]$$

$$=\frac{i}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{l}(x'-x)n \tag{B6.13}$$

在连续系统中，我们可以有

$$\phi(k,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \qquad \bar{\phi}(k',x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik'x} \tag{B6.14}$$

它们都已正则化，于是，根据定义

$$\delta(k'-k)=\int\bar{\phi}(k',x)\phi(k,x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i(k'-k)x}\mathrm{d}x \tag{B6.15}$$

对于 E_3 中的 $\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$，有

$$\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{B6.16}$$

对于球坐标而言，($B6.16$)可以写成

$$\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})]\cdot k^2\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\beta \tag{B6.17}$$

对 $\delta(x)$ 做 Fourier 变换，再变回，

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int\delta(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}$$

$$\delta(x)=f(x)=\int F(k)e^{ikx}dk$$

$$\therefore\ \delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}dx.$$

附录三

并矢分析

C1 并矢的定义

并矢是两个矢量的乘积，它既非内积，或标积，又非外积，或矢积。内积是标量，外积是矢量，其方向垂直于相乘的两矢量所决定的平面。并矢是两个矢量并列存在量，其英文为 Dyad。我国物理学家萨本栋曾用并矢分析电路闻名于三十年代，著有《并矢电路分析》，在美国出版。

设在空间 E_3 中有两个矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，其基矢为 $\boldsymbol{u}_i$

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{u}_i x_i \qquad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{u}_i y_i \tag{C1.1}$$

并矢的定义是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{xy}$

$$\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{xy}=(\boldsymbol{u}_1x_1+\boldsymbol{u}_2x_2+\boldsymbol{u}_3x_3)(\boldsymbol{u}_1y_1+\boldsymbol{u}_2y_2+\boldsymbol{u}_3y_3) \tag{C1.2}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是一个两秩的张量，其分量为 $A_{ij}=x_iy_j$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{xy}&=\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1x_1y_1+\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2x_1y_2+\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3x_1y_3\\&\quad+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1x_2y_1+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2x_2y_2+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3x_2y_3\\&\quad+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1x_3y_1+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_2x_3y_2+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3x_3y_3\\&=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_jx_iy_j\end{aligned} \tag{C1.3}$$

很易看到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{xy}$ 并不等于 $\boldsymbol{yx}$。

我们在下面将指出，任何并矢可以写成三个并矢之和。例

如，设有并矢 $\boldsymbol{B}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1\alpha&+\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2\beta+\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3\gamma\\ \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1\alpha'&+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2\beta'+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3\gamma'\\ \boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_1\alpha''&+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_2\beta''+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3\gamma''\end{aligned} \tag{C1.4}$$

我们可以把它写成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{y}\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{z}\boldsymbol{u}_3 \tag{C1.5}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 为三个矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{u}_1\alpha+\boldsymbol{u}_2\alpha'+\boldsymbol{u}_3\alpha''\\ \boldsymbol{y}&=\boldsymbol{u}_1\beta+\boldsymbol{u}_2\beta'+\boldsymbol{u}_3\beta''\\ \boldsymbol{z}&=\boldsymbol{u}_1\gamma+\boldsymbol{u}_2\gamma'+\boldsymbol{u}_3\gamma''\end{aligned} \tag{C1.6}$$

同样 $\boldsymbol{B}$ 也可以写成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{q}+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{r} \tag{C1.7}$$

其中 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ 为三个矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}&=\boldsymbol{u}_1\alpha+\boldsymbol{u}_2\beta+\boldsymbol{u}_3\gamma\\ \boldsymbol{q}&=\boldsymbol{u}_1\alpha'+\boldsymbol{u}_2\beta'+\boldsymbol{u}_3\gamma'\\ \boldsymbol{r}&=\boldsymbol{u}_1\alpha''+\boldsymbol{u}_2\beta''+\boldsymbol{u}_3\gamma''\end{aligned} \tag{C1.8}$$

其实 $\boldsymbol{B}$ 总能写成三个并矢之和，如

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{du}+\boldsymbol{ev}+\boldsymbol{fw} \tag{C1.9}$$

在一般的情况下，并矢服从分配律

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\cdots)(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}+\cdots)\\&=\boldsymbol{xp}+\boldsymbol{xq}+\cdots+\boldsymbol{yp}+\boldsymbol{yq}+\cdots+\boldsymbol{zp}+\boldsymbol{zq}+\cdots\end{aligned} \tag{C1.10}$$

C2 并矢和矢量的外积和内积

设 $\boldsymbol{A}$ 为并矢如(C1.3)式，$\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$为矢量，我们称 $\boldsymbol{A}$ 的右方受 $\boldsymbol{p}$ 的乘积为后乘，如 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{p}$ 相似；称 $\boldsymbol{A}$ 的左方受 $\boldsymbol{p}$ 的乘积为前乘，如 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{A}$。

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{xy}$，则我们有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p})=\alpha\boldsymbol{x} \tag{C2.1}$$

$$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{p})=\boldsymbol{x}\boldsymbol{r} \quad 其中\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{p} \tag{C2.2}$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{y} \tag{C2.3}$$

$$\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{s}\boldsymbol{y} \quad 其中\ \boldsymbol{s}=\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{x} \tag{C2.4}$$

其中 $\alpha=(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p})$，$\beta=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})$ 都是标量，所以 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ 都是矢量。$\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{x})$ 都是矢量，$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{A}$ 都是并矢。

设 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ 为三个基矢，

$$\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_1=0,\quad \boldsymbol{u}_2\wedge\boldsymbol{u}_2=0,\quad \boldsymbol{u}_3\wedge\boldsymbol{u}_3=0,$$

$$\boldsymbol{u}_1\wedge\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{w}_3,\quad \boldsymbol{u}_2\wedge\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{w}_1\quad \boldsymbol{u}_3\wedge\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{w}_2 \tag{C2.5}$$

我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{p}&=(\boldsymbol{u}_1y_1+\boldsymbol{u}_2y_2+\boldsymbol{u}_3y_3)\wedge(\boldsymbol{u}_1p_1+\boldsymbol{u}_2p_2+\boldsymbol{u}_3p_3)\\&=\boldsymbol{w}_1(y_2p_3-y_3p_2)+\boldsymbol{w}_2(y_3p_1-y_1p_3)\\&\quad+\boldsymbol{w}_3(y_1p_2-y_2p_1)\end{aligned} \tag{C2.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{x}&=(\boldsymbol{u}_1p_1+\boldsymbol{u}_2p_2+\boldsymbol{u}_3p_3)\wedge(\boldsymbol{u}_1x_1+\boldsymbol{u}_2x_2+\boldsymbol{u}_3x_3)\\&=\boldsymbol{w}_1(p_2x_3-p_3x_2)+\boldsymbol{w}_2(p_3x_1-p_1x_3)\\&\quad+\boldsymbol{w}_3(p_1x_2-p_2x_1)\end{aligned} \tag{C2.7}$$

$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p}=y_1p_1+y_2p_2+y_3p_3=\alpha \tag{C2.8}$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=\beta \tag{C2.9}$$

C3 两个并矢恒等的条件

设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为两个任意矢量，则两个并矢 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 恒等的充要条件为

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} \tag{C3.1}$$

或

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} \tag{C3.2}$$

或

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{y} \tag{C3.3}$$

C4 单位并矢

单位并矢（Unit Dyad）亦称归本因素或幂等矩阵（idem factor），有时也称单位张量或恒等并矢。

单位并矢的定义为：如果对任意矢量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{x} \tag{C4.1}$$

则 $\boldsymbol{I}$ 称为单位并矢。

C5 两个并矢的内积

两个并矢 $\boldsymbol{xy}$ 和 $\boldsymbol{pq}$ 的内积为另一并矢

$$(\boldsymbol{xy})\cdot(\boldsymbol{pq})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{xq} \tag{C5.1}$$

$$(\boldsymbol{pq})\cdot(\boldsymbol{xy})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{py} \tag{C5.2}$$

$\boldsymbol{xq}$ 和 $\boldsymbol{py}$ 都是并矢，$(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{p})$ 和 $(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x})$ 都是标量。

C6 有关单位并矢的两个定理

（1）单位并矢和某一并矢的内积，仍为该并矢

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B} \tag{C6.1}$$

设 $\boldsymbol{r}$ 为一矢量；根据（C3.1）式，有

$$(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{I}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{r} \tag{C6.2}$$

单位并矢 $\boldsymbol{I}$ 的式子应该是

$$\boldsymbol{I}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_i \tag{C6.3}$$

其系数行列式为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

（2）定理：设 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

证明：因为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，所以根据（C4.1）式，有

$$r(A\cdot B)=r\cdot I=r \tag{C6.4}$$

于是，在上式两侧后乘 A，得内积

$$r(A\cdot B)\cdot A=r\cdot A \tag{C6.5}$$

这是任意矢量 r 都适用的。

但是，因为

$$(A\cdot B)\cdot A=A\cdot(B\cdot A) \tag{C6.6}$$

所以，从(C6.5)式，得

$$r(A\cdot B)\cdot A=(r\cdot A)(B\cdot A)=r\cdot A \tag{C6.7}$$

或即证明对任意 r 而言，

$$B\cdot A=I \tag{C6.8}$$

C7 倒并矢或倒易并矢

当两个并矢，其内积为单位并矢时，称为倒并矢，或倒易并矢。设

$$A\cdot B\cdot=I \tag{C7.1}$$

则

$$A=B^{-1} \tag{C7.2}$$

$$\text{或}\quad B=A^{-1} \tag{C7.3}$$

A^{-1} 为 A 的倒并矢，B^{-1} 为 B 的倒并矢。

C8 转置并矢

两个矢量的乘法次序相互转置时，得转置并矢，设原并矢 A 为

$$A=xy \tag{C8.1}$$

则其转置并矢 A^T 可以写成

$$A^T=yx \tag{C8.2}$$

根据上述定义，我们有

$$s\cdot(xy)=(s\cdot x)y=(x\cdot s)y=y(x\cdot s)=(yx)\cdot s \tag{C8.3}$$

其中利用了矢量 s 和 x 的内积和次序无关的性质，即(A2.31)式。在利用了(C8.1)和(C8.2)式，即转置并矢的定义以后，得

$$s\cdot A=A^T\cdot s \tag{C8.4}$$

同样，我们有

$$A\cdot s=s\cdot A^T \tag{C8.5}$$

$B=xp+yq+zr$ 的转置并矢为

$$B^T=px+qy+rz \tag{C8.6}$$

如果 $B=B^T$，则称 B 为对称并矢。

C9 ∇ 算子对并矢的运算

∇ 的定义为

$$\nabla=\sum^3 u_i\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{C9.1}$$

∇ 对并矢 B 的运算，有内积和外积两种

$$\nabla\cdot B=\sum^3 u_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}B \tag{C9.2}$$

$$\nabla\wedge B=\sum_{i=1}^3 u_i\wedge\frac{\partial}{\partial x_i}B \tag{C9.3}$$

设 B 为

$$B=xu_1+yu_2+zu_3 \tag{C9.4}$$

则

$$\nabla\wedge B=(\nabla\wedge x)u_1+(\nabla\wedge y)u_2+(\nabla\wedge z)u_3 \tag{C9.5}$$

$$\nabla\cdot B=(\nabla\cdot x)u_1+(\nabla\cdot y)u_2+(\nabla\cdot z)u_3 \tag{C9.6}$$

如果我们用矢量恒等式

$$\nabla\wedge\nabla\wedge=\nabla\nabla-\nabla^2 \tag{C9.7}$$

其中

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{C9.8}$$

根据(C9.5)、(C9.6)式，我们有

$$\nabla\wedge\nabla\wedge B=\nabla(\nabla\cdot B)-(\nabla\cdot\nabla)B \tag{C9.9}$$

其中

$$(\nabla\cdot\nabla)B=\nabla^2B \qquad (C9.10)$$

在下面，我们有许多并矢分析的公式，读者是不难证明的

(1) $(x\wedge y)\cdot B=x\cdot(y\wedge B)$ (C9.11)

(2) $(B\wedge x)\cdot y=B\cdot(x\wedge y)$ (C9.12)

(3) $(x\cdot B)\cdot y=x\cdot(B\cdot y)=x\cdot B\cdot y$ (C9.13)

(4) $(x\cdot B)\wedge y=x\cdot(B\wedge y)=x\cdot B\wedge y$ (C9.14)

(5) $(x\wedge B)\cdot y=x\wedge(B\cdot y)=x\wedge B\cdot y$ (C9.15)

(6) $(x\wedge B)\wedge y=x\wedge(B\wedge y)=x\wedge B\wedge y$ (C9.16)

(7) $I\wedge x=x\wedge I$ (C9.17)

(8) $(I\wedge x)\cdot y=x\wedge y$ (C9.18)

(9) $x\cdot(I\wedge y)=x\wedge y$ (C9.19)

(10) $I\wedge(x\wedge y)=(x\wedge y)\wedge I=yx-xy$ (C9.20)

(11) $(I\wedge x)B=x\wedge B$ (C9.21)

(12) $B\cdot(I\wedge x)=B\wedge x$ (C9.22)

(13) $(x\cdot B)\cdot C=x\cdot(B\cdot C)=x\cdot B\cdot C$ (C9.23)

(14) $(x\wedge B)\cdot C=x\wedge(B\cdot C)=x\wedge B\cdot C$ (C9.24)

(15) $(B\cdot C)\cdot x=B\cdot(C\cdot x)=B\cdot C\cdot x$ (C9.25)

(16) $(B\cdot C)\wedge x=B\cdot(C\wedge x)=B\cdot C\wedge x$ (C9.26)

(17) $(B\wedge x)\cdot C=B\cdot x\wedge C$ (C9.27)

(18) $(B\cdot D)\cdot C=B\cdot(D\cdot C)=B\cdot D\cdot C$ (C9.28)

附录四

狄喇克记号

D1　狄喇克记号介绍

狄喇克记号 (Dirac Notation) 是附录二中有关基矢的简化记号，它们是狄喇克在他的《量子力学原理》(Principles of Quantum Mechanics，第三版，牛津大学出版社，1947)中引用的。它以简捷闻名，为许多理论物理学者使用。它有两个基本记号表示两种基矢：

(1) 基矢 u_i

用$|i\rangle$表示，称基开脱矢量(Base ket vectors)，或简称开脱基矢 (base kets)，物理学名词把 ket 译成刃，也有人把它译成右态矢，或右矢。我们采用译音，右者指基矢，一般置于线性算子右侧之意。

(2) 对偶空间中的基矢 $u_i^\dagger$

用$\langle i|$表示，称基勃拉矢量(Base bra vector)，或简称勃拉基矢(base bras)，物理学名词把 bra 译成"刁"，也有人把它译成左态矢，或左矢。我们采用译音，左者指对偶基矢一般置于线性算子左侧之意。

勃拉(bra)开脱(ket)合在一起便是勃拉开脱 (braket)，即括弧之意。

(3) 用基矢 u_i 和对偶基矢 $u_i^\dagger$

用基矢 u_i 和对偶基矢 $u_i^\dagger$ 所表示的展开定理(B1.21)式。

$$1=\sum_i u_i u_i^\dagger \qquad (D1.1)$$

可以用狄喇克记号写成

$$1=|i\rangle\langle i| \qquad (D1.2)$$

而 u_i、u_i' 的双正交正则条件(B1.14)式

$$u_i^\dagger u_j=\delta_{ij} \qquad (D1.3)$$

可以用狄喇克记号写成

$$\langle i|j\rangle=\delta_{ij} \qquad (D1.4)$$

在 $\langle i|$ 和 $|i\rangle$ 相并时，原来应该有两条竖线，但在连写时，略去了一条，只留下一条竖线如(D1.4)式。

这里必须指出，我们在狄喇克记号中引用了哑标求和的原则，如(D1.2)式中，i 和 i 重复出现，它们是哑标，(D1.2)式的右侧代表 $i=1, 2, 3$ 重复相加，即略去了 $\sum\limits_{i=1}^{3}$ 的求和号，或

$$|i\rangle\langle i|=\sum_{i=1}^{3}|i\rangle\langle i|=|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|+|3\rangle\langle 3| \qquad (D1.5)$$

(4) $|i\rangle$ 和 $\langle i|$ 的狄喇克记号

$|i\rangle$ 和 $\langle i|$ 是基矢 u_i 和对偶基矢 $u_i^\dagger$ 的狄喇克记号，同样 $|x\rangle$ 和 $\langle x|$ 是任意矢量 x 和任意对偶矢量 x^+ 的狄喇克记号。

于是，在基矢记号中，我们有

$$x=\sum_i u_i x_i \qquad (D1.6)$$

在狄喇克记号中，我们可以把(D1.6)式写成

$$|x\rangle=|i\rangle\langle i|x\rangle \qquad (D1.7)$$

它可以从(D1.2)式上右乘 $|x\rangle$ 求得。从(D1.7)式可以看到，由于基矢 $u_i=|i\rangle$，所以有(B1.19)式，即

$$x_i=\langle i|x\rangle \quad 或即 \quad x_i=u_i^\dagger x \qquad (D1.8)$$

同样，在基矢记号中的(B1.13)式，即

$$x^+=\sum_i \bar{x}_i u_i^\dagger \qquad (D1.9)$$

可以在狄喇克记号中表示如下：

$$\langle x|=\langle x|i\rangle\langle i| \qquad (D1.10)$$

从(D1.9)、(D1.10)式中很易看到(利用(D1.8))

$$\bar{x}_i=\langle x|i\rangle=\overline{\langle i|x\rangle} \qquad (D1.11)$$

D2 基矢的改变

用老的记号表示，基矢 u_i 用变换矩阵 t (或 t_{ij})变为新的基矢 v_j 时，写成

$$v_j=\sum_i u_i t_{ij} \qquad (D2.1)$$

但用狄喇克记号时，我们可以将基矢 v_j 用开脱基矢 $|j\rangle$ 表示，把 $|j\rangle$ 从右侧乘在(D1.2)式上，即得

$$|j\rangle=|i\rangle\langle i|j\rangle \qquad (D2.2)$$

这里很易看到 $|i\rangle$ 代表(D2.1)式的 u_i，$\langle i|j\rangle$ 代表变换矩阵 t_{ij}，(D2.2)式中右侧的 i 是重复用记号，它表示是由 $i=1, 2, 3$ 求和的。(D2.2)式是(D2.1)式的狄喇克记号表达式，这里应该指出，不同基的基矢，并未用不同的字母表示，如 u_i，v_i，w_i 等。而用不同的角标 i，j，k 等记号，写成 $|i\rangle$，$|j\rangle$，$|k\rangle$ 等来表示的。同一基的 n 个不同基矢可以用 i，i'，i'' 等记号，写成 $|i\rangle$，$|i'\rangle$，$|i''\rangle$ 来表示。

对于对偶空间的基矢 $u_i^\dagger$ 用变换矩阵 $\bar{t}_{ij}$ 变为新的基矢 $v_j^\dagger$，用老的记号表示时写成

$$v_j^\dagger=\sum_i \bar{t}_{ij} u_i^\dagger \qquad (D2.3)$$

但用狄喇克记号表示时，可以写成

$$\langle j|=\overline{\langle i|j\rangle}\langle i|=\langle j|i\rangle\langle i| \qquad (D2.4)$$

它也可以把$\langle j|$从左侧乘$(D1.2)$式而求得。

把$|j\rangle\langle j|$从左侧乘在$(D1.7)$上，得

$$|x\rangle = |j\rangle\langle j|x\rangle = |j\rangle\langle j|i\rangle\langle i|x\rangle \qquad (D2.5)$$

这就指出，把任意开脱$|x\rangle$的i基中各分量$\langle i|x\rangle$变为j基中的各分量时，用公式

$$\langle j|x\rangle = \langle j|i\rangle\langle i|x\rangle \qquad (D2.6)$$

同样，$(D2.6)$式的复共轭给出

$$\overline{\langle j|x\rangle} = \overline{\langle i|x\rangle}\ \overline{\langle j|i\rangle} = \langle x|i\rangle\langle i|j\rangle \qquad (D2.7)$$

这是从勃拉$\langle x|$的i基中的分量导出开脱$|x\rangle$在j基中复分量的公式。

D3 线性算子的狄喇克记号

在老的记号中，线性算子$\mathscr{L}$可以用厄密转置矩阵$L_{ii'}$写成$(B4.13)$，或

$$\mathscr{L} = \sum_{i,i'} u_i L_{ii'} u_{i'} \qquad (D3.1)$$

但在$\mathscr{L}$左右双方都使用了$(D1.2)$式后，得

$$\mathscr{L} = |i\rangle\langle i|\mathscr{L}|i'\rangle\langle i'| \qquad (D3.2)$$

这里若把$(D3.1)$和$(D3.2)$式相比，很易证明转置矩阵为

$$L_{ii'} = \langle i|\mathscr{L}|i'\rangle \qquad (D3.3)$$

同样，用老的记号，算子$\mathscr{L}$的共轭转置算子或厄密伴算子$\mathscr{L}^+$可以写成

$$\mathscr{L}^+ = \sum_{i,i'} u_i \bar{L}_{i'i} u_{i'}^* = \sum_{i,i'} u_i L_{ii'}^+ u_{i'}^* \qquad (D3.4)$$

其狄喇克记号可以由下列表示

$$\mathscr{L}^+ = |i\rangle\langle i|\mathscr{L}^+|i'\rangle\langle i'| \qquad (D3.5)$$

把$(D3.4)$、$(D3.5)$式相比，得

$$\langle i|\mathscr{L}^+|i'\rangle = \overline{\langle i'|\mathscr{L}|i\rangle} \qquad (D3.6)$$

这里应该指出，如果$\mathscr{L}$是一个恒等算子$\mathscr{I}$ (Identity

Operator)，则利用$(D1.2)$式，得

$$\mathscr{I} = |i\rangle\langle i|\mathscr{I}|i'\rangle\langle i'| = |i\rangle\langle i|i'\rangle\langle i'|$$
$$= |i\rangle\delta_{ii'}\langle i'| = |i\rangle\langle i| \qquad (D3.7)$$

这和$(D1.2)$式是一致的。

在老的记号中，算子$\mathscr{L}$作用在任意矢量x时，可以写成

$$\mathscr{L}x = \sum_{i,i'} u_i L_{ii'} x_{i'} \qquad (D3.8)$$

用狄喇克记号，算子$\mathscr{L}$作用在任意开脱 ket$|x\rangle$上时，可以写成

$$\mathscr{L}|x\rangle = |i\rangle\langle i|\mathscr{L}|i'\rangle\langle i'|x\rangle \qquad (D3.9)$$

$(D3.8)$式的厄密伴算子式为

$$\langle x|\mathscr{L}^+ = \langle x|i\rangle\langle i|\mathscr{L}^+|i'\rangle\langle i'|$$
$$= \overline{\langle i|x\rangle\langle i'|\mathscr{L}^+|i\rangle}\langle i'| \qquad (D3.10)$$

这也可以直接从$(D3.9)$求得。

D4 特征矢量和特征值

在老的记号中，设有

$$\mathscr{L}u_l = l u_l \qquad (D4.1)$$

则称算子$\mathscr{L}$的特征矢量u_l属于特征值l。用狄喇克记号，$(D4.1)$式应写成

$$\mathscr{L}|l\rangle = |l\rangle l \qquad (D4.2)$$

于是，对任意基i而言，

$$\mathscr{L}|i'\rangle\langle i'|l\rangle = |i'\rangle\langle i'|l\rangle l \qquad (D4.3)$$

而且更进一步

$$|i\rangle\langle i|\mathscr{L}|i'\rangle\langle i'|l\rangle = |i\rangle\langle i||i'\rangle\langle i'|l\rangle l \qquad (D4.4)$$

所以有

$$\langle i|\mathscr{L}|i'\rangle\langle i'|l\rangle = \langle i|i'\rangle\langle i'|l\rangle l = \langle i|l\rangle l \qquad (D4.5)$$

这是一个特征值l的矩阵方程，从这个方程，我们求算特征值l。

D5 一个算子的谱表示

如果在基 l 中的一个线性算子 $\mathscr{L}$ 的基矢 u_l 都是算子 $\mathscr{L}$ 的特征矢量，则用老的记号，有

$$\mathscr{L}=\sum_l u_l l u_l \tag{D5.1}$$

这是算子 $\mathscr{L}$ 的谱表示式。用狄喇克记号，(D5.1)式可以写成

$$\mathscr{L}=|l\rangle l\langle l| \tag{D5.2}$$

用其它基 i 来表示 $\mathscr{L}$ 时，就可以写成

$$\mathscr{L}=|i\rangle\langle i|l\rangle l\langle l|i'\rangle\langle i'| \tag{D5.3}$$

于是，在这个基中，$\mathscr{L}^n$ 的表达式可以写成

$$\mathscr{L}^n=|i\rangle\langle i|l\rangle l^n\langle l|i'\rangle\langle i| \tag{D5.4}$$

一般讲来，在这个基中，$\mathscr{L}$ 的任一函数 $f(\mathscr{L})$ 都可以写成

$$f(\mathscr{L})=|i\rangle\langle i|l\rangle f(l)\langle l|i'\rangle\langle i'| \tag{D5.5}$$

D6 厄密算子的诸定理

为了说明使用狄喇克记号的运算优秀性，让我们用它来证明一些厄密算子的有关定理。

当线性算子 $\mathscr{H}$ 满足条件 $\mathscr{H}=\mathscr{H}^+$ 时，这个算子称为厄密算子(Hemitian Operator)。

定理一　厄密算子的特征值必为实数

证明

根据特征方程的定义，设厄密算子 $\mathscr{H}$ 的特征矢量为 u_h，有关特征值为 h，于是

$$\mathscr{H}|h\rangle=|h\rangle h \tag{D6.1}$$

等式两边都从左方乘勃拉 $\langle h|$，得

$$\langle h|\mathscr{H}|h\rangle=\langle h|h\rangle h=h \tag{D6.2}$$

因为 $\mathscr{H}=\mathscr{H}^+$，我们有

$$\langle h|\mathscr{H}|h\rangle=\langle h|\mathscr{H}^+|h\rangle=\overline{\langle h|\mathscr{H}|h\rangle}=\bar{h} \tag{D6.3}$$

(D6.2)和(D6.3)式的左边相等，所以其右边也相等

$$\bar{h}=h \tag{D6.4}$$

这就证明了定理。

定理二　两个厄密算子都能用相同的夭正变换（或单式变换 Unitary Transformation）化为对角线的充要条件是它们都能对易(Commute)

(1) 设有两个厄密算子 $\mathscr{H}$，和 $\mathscr{I}$，

$$\mathscr{H}=|\lambda\rangle h(\lambda)\langle\lambda| \quad \mathscr{I}=|\lambda\rangle f(\lambda)\langle\lambda| \tag{D6.5}$$

则有

$$\mathscr{H}\mathscr{I}=\mathscr{I}\mathscr{H} \tag{D6.6}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{H}\mathscr{I}&=|\lambda\rangle h(\lambda)\langle\lambda|\lambda'\rangle f(\lambda')\langle\lambda'|\\&=|\lambda\rangle h(\lambda)f(\lambda)\langle\lambda|=|\lambda\rangle f(\lambda)h(\lambda)\langle\lambda|\end{aligned} \tag{D6.7}$$

这是因为

$$h(\lambda)\langle\lambda|\lambda'\rangle f(\lambda')\langle\lambda'|=h(\lambda)f(\lambda)\langle\lambda \tag{D6.8}$$

同样道理

$$f(\lambda)h(\lambda)\langle\lambda|=f(\lambda)\langle\lambda|\lambda'\rangle h(\lambda')\langle\lambda'| \tag{D6.9}$$

所以(D6.7)式可以写成

$$\mathscr{H}\mathscr{I}=|\lambda\rangle f(\lambda)\langle\lambda|\lambda'\rangle h(\lambda')\langle\lambda'|=\mathscr{I}\mathscr{H} \tag{D6.10}$$

这就完成了证明。

(2) 设有两个厄密算子 $\mathscr{H}$，$\mathscr{I}$，它们满足

$$\mathscr{H}\mathscr{I}=\mathscr{I}\mathscr{H} \tag{D6.11}$$

则我们必有一基 λ，使

$$\mathscr{H}=|\lambda\rangle h(\lambda)\langle\lambda| \quad \mathscr{I}=|\lambda\rangle f(\lambda)\langle\lambda| \tag{D6.12}$$

证明　设 h 是 $\mathscr{H}$ 的非简并的特征值，则

$$\mathscr{H}|h\rangle=|h\rangle h \tag{D6.13}$$

于是，根据(D6.11)式，有

$$\mathscr{H}\mathscr{J}|h\rangle = \mathscr{J}\mathscr{H}|h\rangle = \mathscr{J}|h\rangle h \qquad (D6.14)$$

但是，这指出$\mathscr{J}|h\rangle$是$\mathscr{H}$的一个特征开脱，它必属于特征值h，所以$\mathscr{J}|h\rangle$是$|h\rangle$的多重值。于是

$$\mathscr{J}|h\rangle = |h\rangle f(h) \qquad (D6.15)$$

设h是$\mathscr{H}$的一个简并的特征值，与它对应的特征开脱用λ标明，即

$$\mathscr{H}|h, \lambda\rangle = |h, \lambda\rangle h \qquad (D6.16)$$

或

$$\mathscr{H} = |h, \lambda\rangle h\langle h, \lambda| \qquad (D6.17)$$

于是，我们取

$$\mathscr{J} = |h, \lambda\rangle\langle h, \lambda|\mathscr{J}|h', \lambda'\rangle\langle h'\lambda'| \qquad (D6.18)$$

从($D6.18$)和($D6.17$)式，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{J}\mathscr{H} &= |h, \lambda\rangle\langle h, \lambda|\mathscr{J}|h', \lambda'\rangle\langle h'\lambda'|h\lambda\rangle h\langle h, \lambda| \\ &= |h, \lambda\rangle\langle h\lambda|\mathscr{J}|h', \lambda'\rangle h'\langle h'\lambda'| \qquad (D6.19)\end{aligned}$$

又用($D6.17$)式，得

$$\mathscr{H}\mathscr{J} = |h, \lambda\rangle h\langle h, \lambda|\mathscr{J} \qquad (D6.20)$$

在($D6.19$)和($D6.20$)式上左右分别乘$\langle h, \lambda|$和$|h'\lambda'\rangle$，得

$$\begin{aligned}\langle h, \lambda|\mathscr{J}\mathscr{H}|h', \lambda'\rangle &= \langle h, \lambda|h, \lambda\rangle \\ &\quad\cdot\langle h\lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle h'\langle h'\lambda'|h'\lambda'\rangle \\ &= \langle h, \lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle h' \\ &= h'\langle h, \lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle \qquad (D6.21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle h\lambda|\mathscr{H}\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle &= \langle h, \lambda|h\lambda\rangle h\langle h\lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle \\ &= h\langle h\lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle \qquad (D6.22)\end{aligned}$$

两式相减，得

$$\begin{aligned}&\langle h\lambda|\mathscr{H}\mathscr{J} - \mathscr{J}\mathscr{H}|h'\lambda'\rangle \\ &= (h-h')\langle h\lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle = 0 \qquad (D6.23)\end{aligned}$$

这就指出，如果$\langle h\lambda|\mathscr{J}|h'\lambda'\rangle$不等于零，则$h'$必等于$h$；所以($D6.18$)式可以写成

$$\mathscr{J} = |h\lambda\rangle\langle h\lambda|\mathscr{J}|h\lambda'\rangle\langle h\lambda'| \qquad (D6.24)$$

现在寻找$\mathscr{J}$的特征开脱中也同时是$\mathscr{H}$的特征开脱的那些特征开脱。

$\mathscr{J}$的特征开脱满足

$$\mathscr{J}|h, j\rangle = |h, j\rangle j \qquad (D6.25)$$

而且

$$|h, j\rangle = |h, \lambda\rangle\langle h, \lambda|h, j\rangle \qquad (D6.26)$$

$$\langle h\lambda|\mathscr{J}|h, \lambda'\rangle\langle h, \lambda'|h, j\rangle = \langle h, \lambda|h, j\rangle j \qquad (D6.27)$$

我们可以从($D6.27$)式中求解$\langle h, \lambda|h, j\rangle$和$j$，从而求$|h, j\rangle$。这就直接证明了$|h, f\rangle$既是$\mathscr{H}$的特征开脱，又是$\mathscr{J}$的特征开脱。根据定义，有

$$\mathscr{J}|h, j\rangle|h, j\rangle j \qquad (D6.28)$$

还有

$$\begin{aligned}\mathscr{H}|h, j\rangle &= \mathscr{H}|h, \lambda\rangle\langle h, \lambda|h, j\rangle \\ &= |h, \lambda\rangle h\langle h, \lambda|h, j\rangle = h|h, j\rangle \qquad (D6.29)\end{aligned}$$

这就完全证明了定理二。

当线性算子集$\mathscr{H}$，$\mathscr{J}$，$\mathscr{N}$，$\mathscr{L}$等具有非简并的共特征开脱(Simultanous Eigenkets)时，称为**对易观察算子的完全集**(A Complete set of Commuting Observables)。这种完全集的特征开脱，除了绝对值等于一的一个复数乘子外，是完全可以唯一地决定的。

若$\mathscr{H}$已经对角性化了，则和$\mathscr{H}$可以对易的一个算子$\mathscr{J}$是很易使它对角性化的。所以，当$\mathscr{H}$是非简并的，则$\mathscr{J}$自动地是对角化的；而当$\mathscr{H}$是简并的时，$\mathscr{J}$对$\mathscr{H}$的每一特征值，可以用一个$n\times n$矩阵表示，这里的n是$\mathscr{H}$所具有的等值特征值的个数。我们只须使这个$n\times n$矩阵对角性化。