算法设计与分析—入门篇

第三讲 分治法

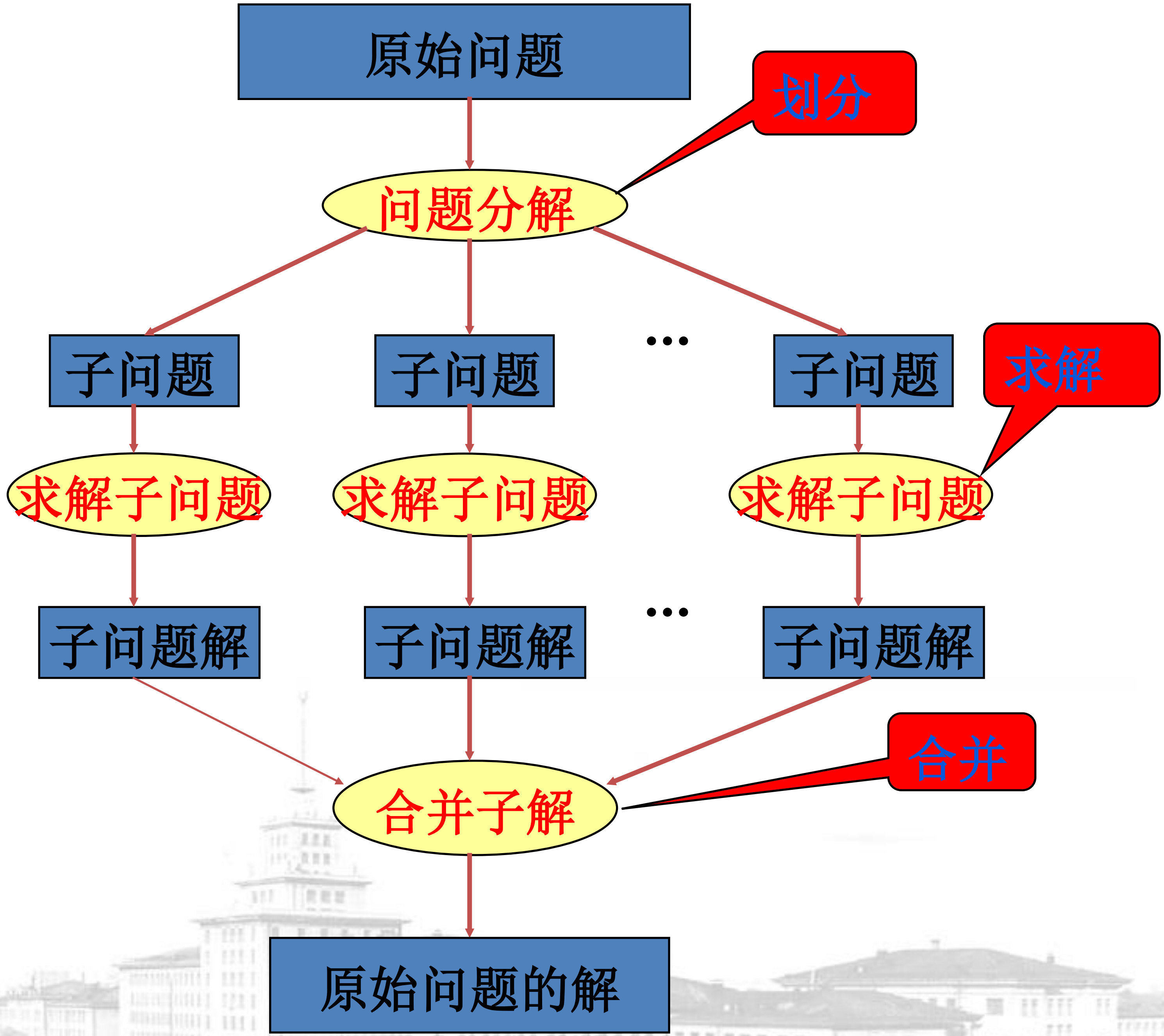
哈尔滨工业大学
王宏志
wangzh@hit.edu.cn
http://homepage.hit.edu.cn/pages/wang/

本讲内容

3.1 分治法
3.2 分治法的简单实例
3.3 元素选取问题的线性时间算法
3.4 快速傅里叶变换

分治算法的设计

- 设计过程分为三个阶段
  - 划分:整个问题划分为多个子问题
  - 求解:求解各子问题
    - 递归调用正设计的算法
  - 合并：合并子问题的解, 形成原始问题的解


原始问题
划分
问题分解
子问题
子问题
…
子问题
求解
求解子问题
求解子问题
求解子问题
子问题解
子问题解
…
子问题解
合并
合并子解
原始问题的解

分治算法的分析

- 分析过程
  - 建立递归方程
  - 求解
- 递归方程的建立方法
  - 设输入大小为n,$T(n)$为时间复杂性
  - 当$n<c$, $T(n)=\theta(1)$

- 划分阶段的时间复杂性
  - 划分问题为a个子问题。
  - 每个子问题大小为n/b。
  - 划分时间可直接得到=$D(n)$
- 递归求解阶段的时间复杂性
  - 递归调用
  - 求解时间= $aT(n/b)$
- 合并阶段的时间复杂性
  - 时间可以直接得到=$C(n)$

- 总之
  - $T(n)=\theta(1)$ if $n<c$
  - $T(n)=aT(n/b)+D(n)+C(n)$ if $n\geq c$
- 求解递归方程$T(n)$
  - 使用第二章的方法

本讲内容

3.1 分治法

3.2 分治法的简单实例

3.3 元素选取问题的线性时间算法

3.4 快速傅里叶变换

大整数乘法

输入：n位二进制整数X和Y

输出：X和Y的乘积

通常，计算$X*Y$时间复杂性位O(n^2)，我们给出一个复杂性为O($n^{1.59}$)的算法。

简单分治算法

	n/2位	n/2位
X=	A	B

	n/2位	n/2位
Y=	C	D

$$XY = (A2^{n/2} + B)(C2^{n/2} + D)$$
$$= AC2^{n} + (AD+BC)2^{n/2} + BD$$

算法

1. 划分产生A,B,C,D；
2. 计算n/2位乘法AC、AD、BC、BD；
3. 计算AD+BC；
4. AC左移n位，(AD+BC)左移n/2位；
5. 计算XY。

时间复杂性

$T(n)=4T(n/2)+\theta(n)$ $\quad$ $T(n)=\theta(n^2)$

算法的数学基础

	n/2位	n/2位
X=	A	B

	n/2位	n/2位
Y=	C	D

$$XY = (A2^{n/2} + B)(C2^{n/2} + D)$$

$$= AC2^{n} + (AD+BC)2^{n/2} + BD$$

$$AD+BC=(A+B)(C+D)-AC-BD$$

算法

1. 划分产生A,B,C,D;
2. 计算A-B和C-D;
3. 计算n/2位乘法AC、BD、(A+B)(C+D);
4. 计算(A+B)(C+D)-AC-BD;
5. AC左移n位，(A+B)(C+D)-AC-BD左移n/2位;
6. 计算XY

算法的分析

- 建立递归方程

$T(n)=\theta(1)$ if $n=1$

$T(n)=3T(n/2)+O(n)$ if $n>1$

- 使用Master定理

$T(n)=O(n^{\log 3})=O(n^{1.59})$

最大值和最小值

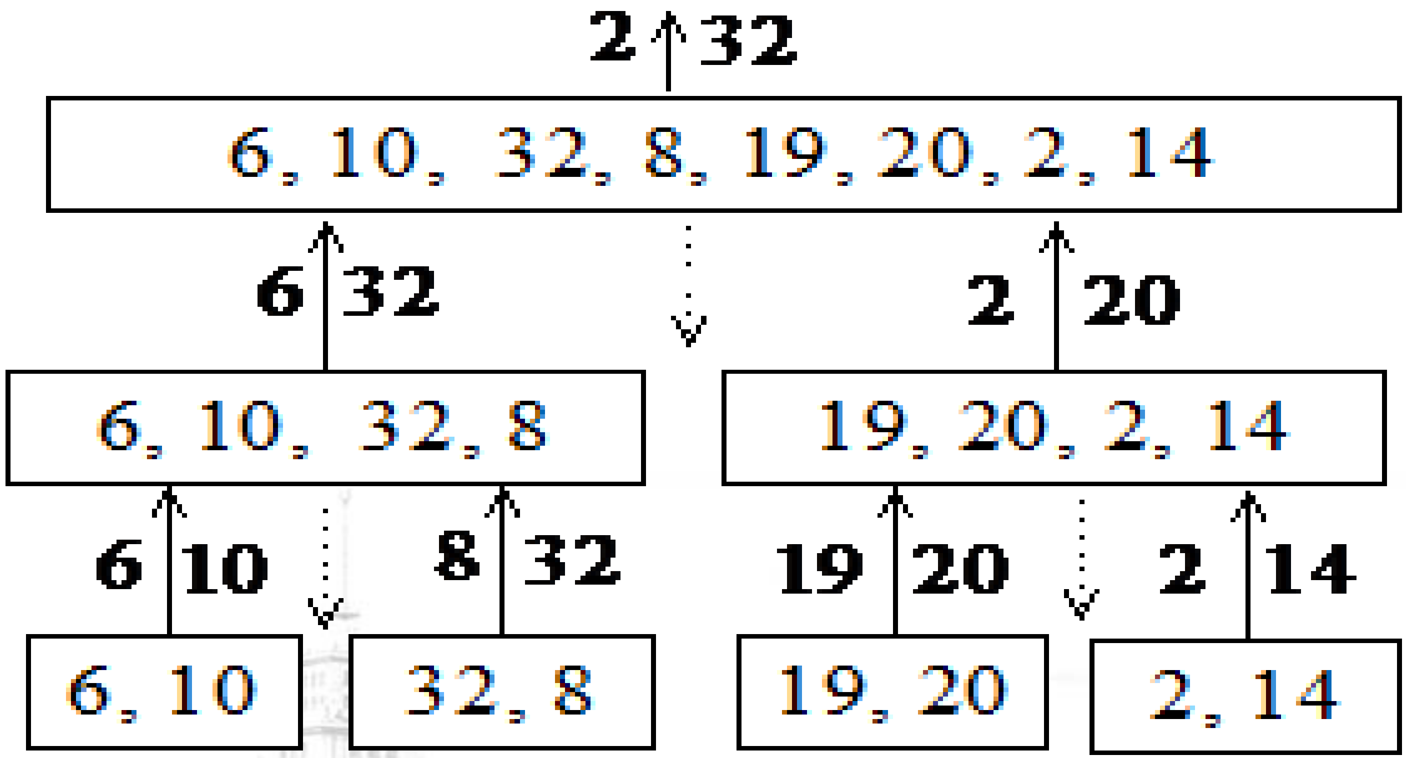
输入：数组$A[1,\ldots,n]$

输出：A中的max和min

通常，直接扫描需要$2n-2$次比较操作

我们给出一个仅需$\lceil 3n/2-2 \rceil$次比较操作的算法。

基本思想


2 32
6, 10, 32, 8, 19, 20, 2, 14
6 32
2 20
6, 10, 32, 8
19, 20, 2, 14
6 10
8 32
19 20
2 14
6, 10
32, 8
19, 20
2, 14

算法

算法MaxMin(A)

输入: 数组$A[i,\ldots,j]$

输出:数组$A[i,\ldots,j]$中的max和min

1. If j-i+1 =1 Then 输出$A[i]$,$A[i]$,算法结束
2. If j-i+1 =2 Then
3. If $A[i]$< A[j] Then输出$A[i]$,$A[j]$;算法结束
4. $k \leftarrow (j-i+1)/2$
5. $m_1,M_1 \leftarrow$MaxMin($A[i:k]$);
6. $m_2,M_2 \leftarrow$MaxMin($A[k+1:j]$);
7. $m \leftarrow \min(m_1,m_2)$;
8. $M \leftarrow \min(M_1,M_2)$;
9. 输出m,M

算法复杂性

$T(1)=0$

$T(2)=1$

$T(n)=2T(n/2)+2$

$=2^2T(n/2^2)+2^2+2$

$= \ldots$

$=2^{k-1}T(2)+2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^2+2$ $n=2^k$

$=2^{k-1}+ 2^k-1$

$=n/2+ n -1$

$=3n/2-1$

本讲内容

3.1 分治法

3.2 分治法的简单实例

3.3 元素选取问题的线性时间算法

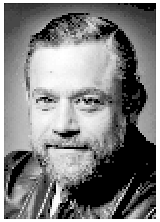
3.4 快速傅里叶变换

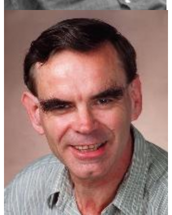
中位数问题定义

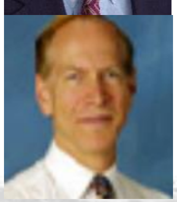
Input: 由n个数构成的多重集合X

Output: $x\in X$使得 $-1\leq |\{y\in X \mid y<x\}|-|\{y\in X \mid y>x\}| \leq 1$

中位数选取问题的复杂度







[Blum et al. *STOC*’72 & *JCSS*’73]

- A “shining” paper by five authors:
  - Manuel Blum (Turing Award 1995)
  - Robert W. Floyd (Turing Award 1978)
  - Vaughan R. Pratt
  - Ronald L. Rivest (Turing Award 2002)
  - Robert E. Tarjan (Turing Award 1986)
- 从n个数中选取中位数需要的比较操作的次数介于 **1.5*n***到 **5.43*n***之间

比较操作次数的上下界

- 上界
  - $3n + o(n)$ by Schonhage, Paterson, and Pippenger (*JCSS* 1975).
  - $2.95n$ by Dor and Zwick (*SODA* 1995, *SIAM Journal on Computing* 1999).
- 下界
  - $2n+o(n)$ by Bent and John (*STOC* 1985)
  - $(2+2^{-80})n$ by Dor and Zwick (*FOCS* 1996, *SIAM Journal on Discrete Math* 2001).

线性时间选择

– 本节讨论如何在$O(n)$时间内从n个不同的数中选取第i大的元素

– 中位数问题也就解决了，因为选取中位数即选择第$n/2$-大的元素

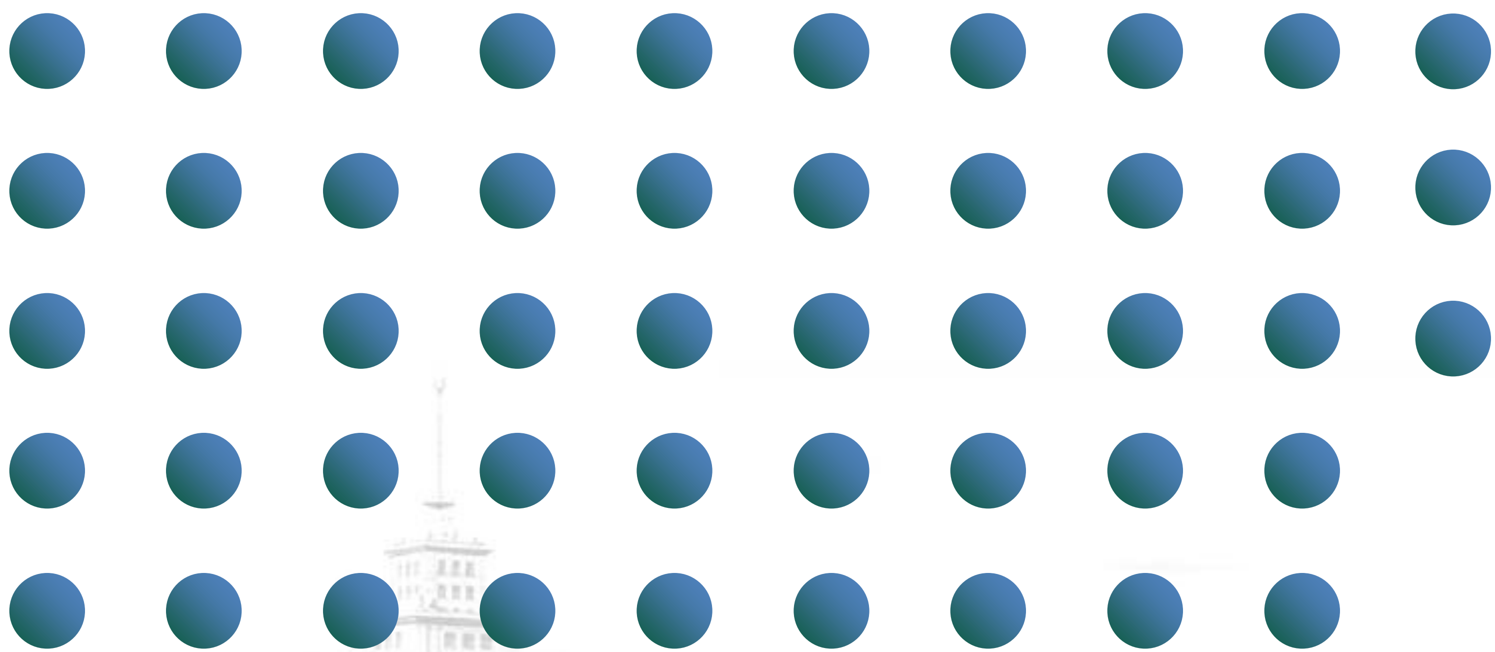
Input: n个(不同)数构成的集合X,整数i,其中$1 \le i \le n$

Output: $x \in X$使得X中恰有i-1个元素小于x

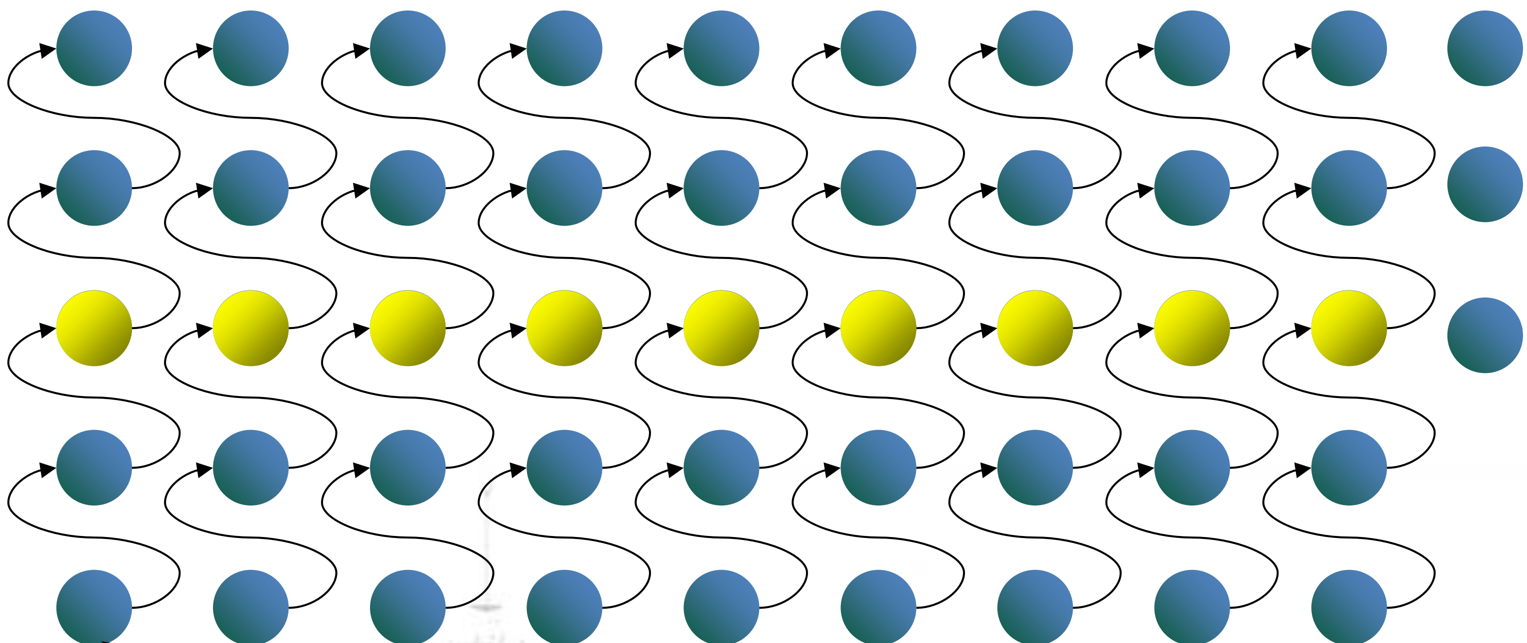
求解步骤

第一步： 分组，每组5个数

最后一组可能少于5个数

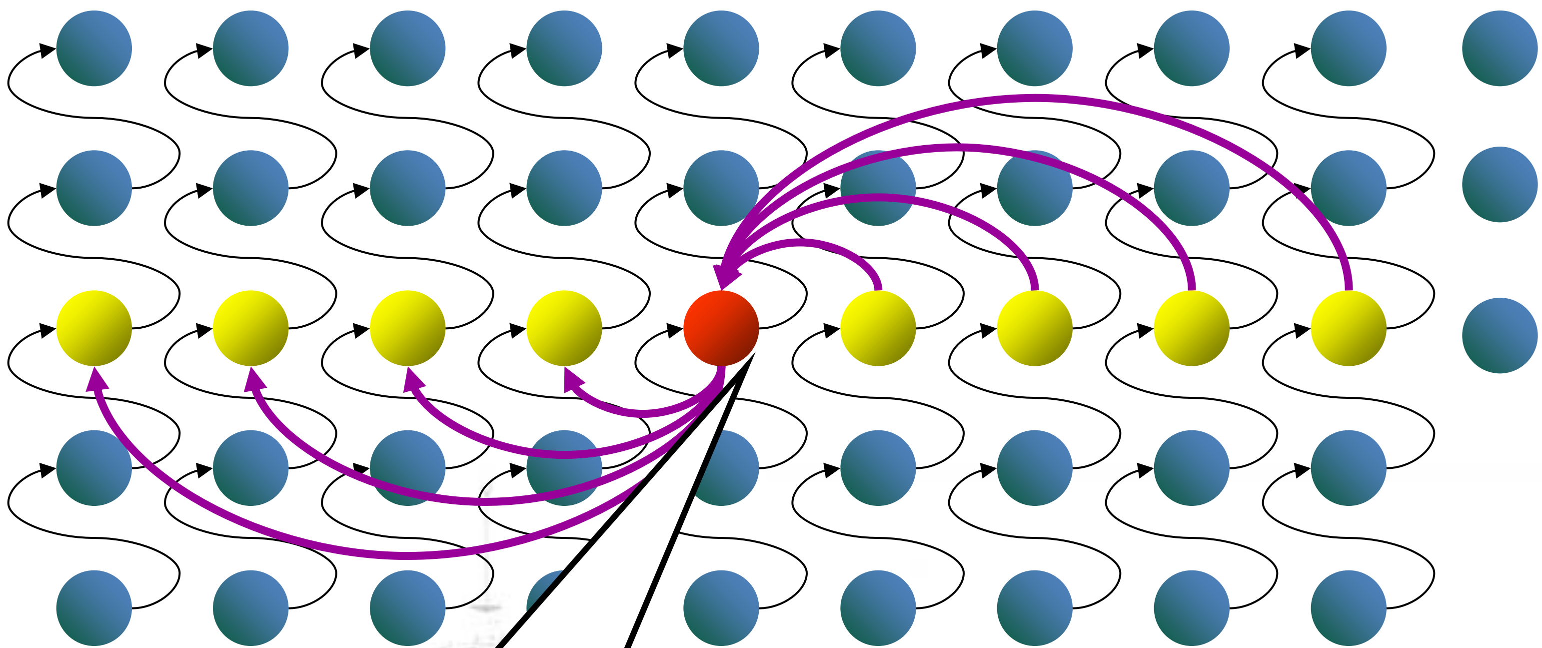


第二步：将每组数分别用InsertionSort排序选出每组元素的中位数



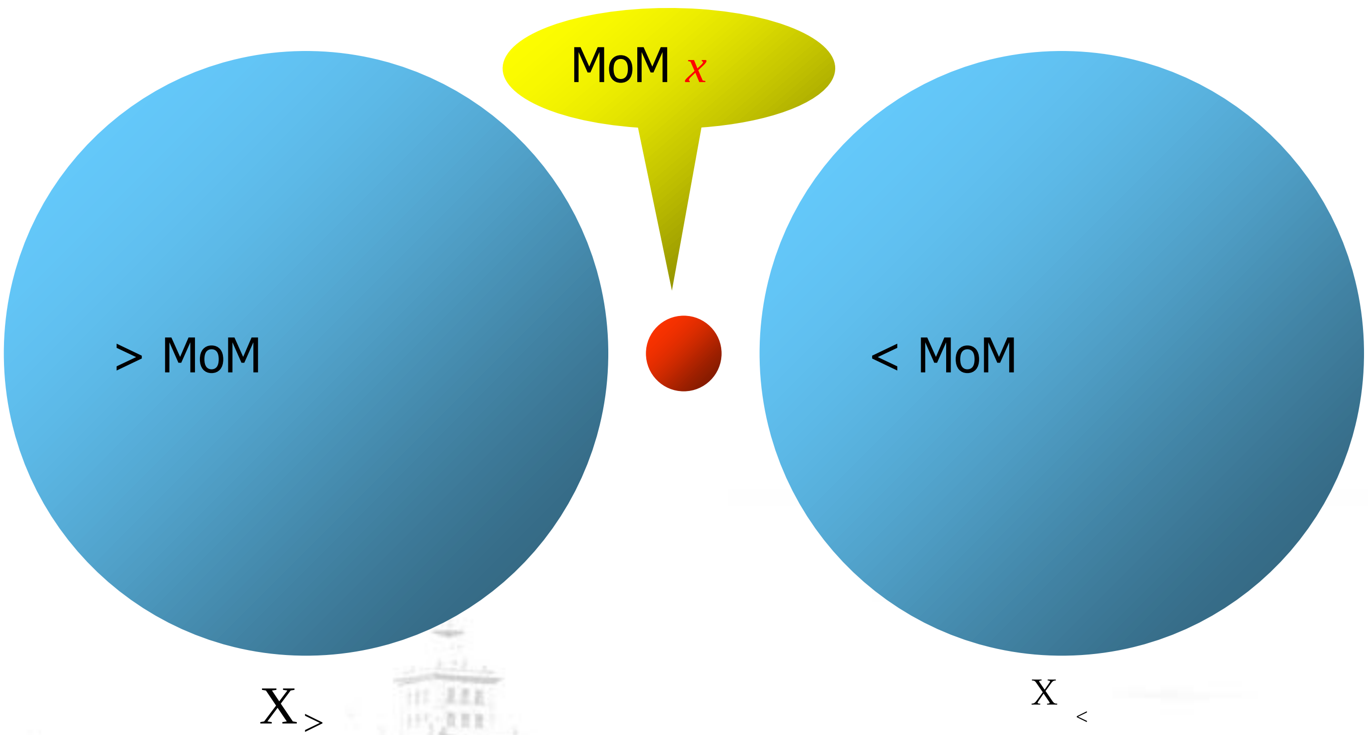
排序每组数时，比较操作的次数为5(5-1)/2=10次
总共需要$10*\lceil n/5 \rceil$次比较操作

第三步：递归调用算法求得这些中位数的中位数(MoM)



时间复杂性：$T(\lfloor n/5 \rfloor)$

第四步:用 MoM完成划分



时间复杂性$O(n)$

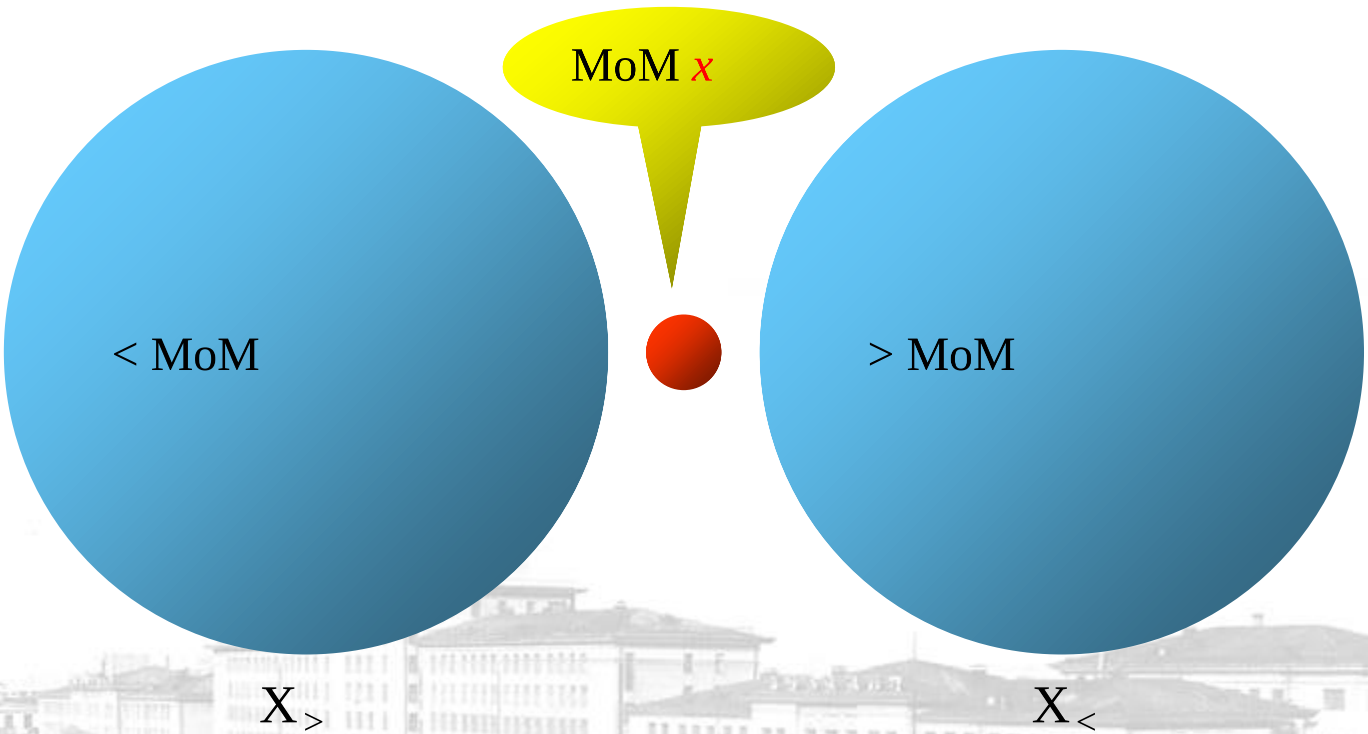
第五步:递归

设x是中位数的中位数(MoM),划分完成后其下标为*k*

如果$i=k$,则返回x

如果$i<k$,则在第一个部分递归选取第i-大的数

如果$i>k$,则在第三个部分递归选取第$(i-k)$-大的数



算法Select(*A*,*i*)

Input: 数组$A[1:n]$, $1\le i \le n$

Output: $A[1:n]$中的第i-大的数

```
for j←1  to  n/5                                          第一步
    InsertSort(A[(j-1)*5+1 : (j-1)*5+5]);                 第二步
    swap(A[j], A[[(j-1)*5+3]);
x ←Select(A[1: n/5],  n/10 );                             第三步
k ←partition(A[1:n], x);                                  第四步
if        k=i  then   return x;
else if  k>i  then   retrun Select(A[1:k-1],i);           第五步
else                 retrun Select(A[k+1:n],i-k);
```

算法分析

算法Select(A,i)

Input: 数组$A[1:n]$, $1\leq i \leq n$

Output: $A[1:n]$中的第i-大的数

1. for $j\leftarrow 1$ to $n/5$
2. InsertSort(A[(j-1)*5+1 : (j-1)*5+5]);
3. swap(A[j], A[[(j-1)*5+3]);
4. $x \leftarrow$Select(A[1: n/5], n/10);
5. $k \leftarrow$partition(A[1:n], x);
6. if $k=i$ then return x;
7. else if $k>i$ then retrun Select(A[1:k-1],i);
8. else retrun Select(A[k+1:n],i-k);

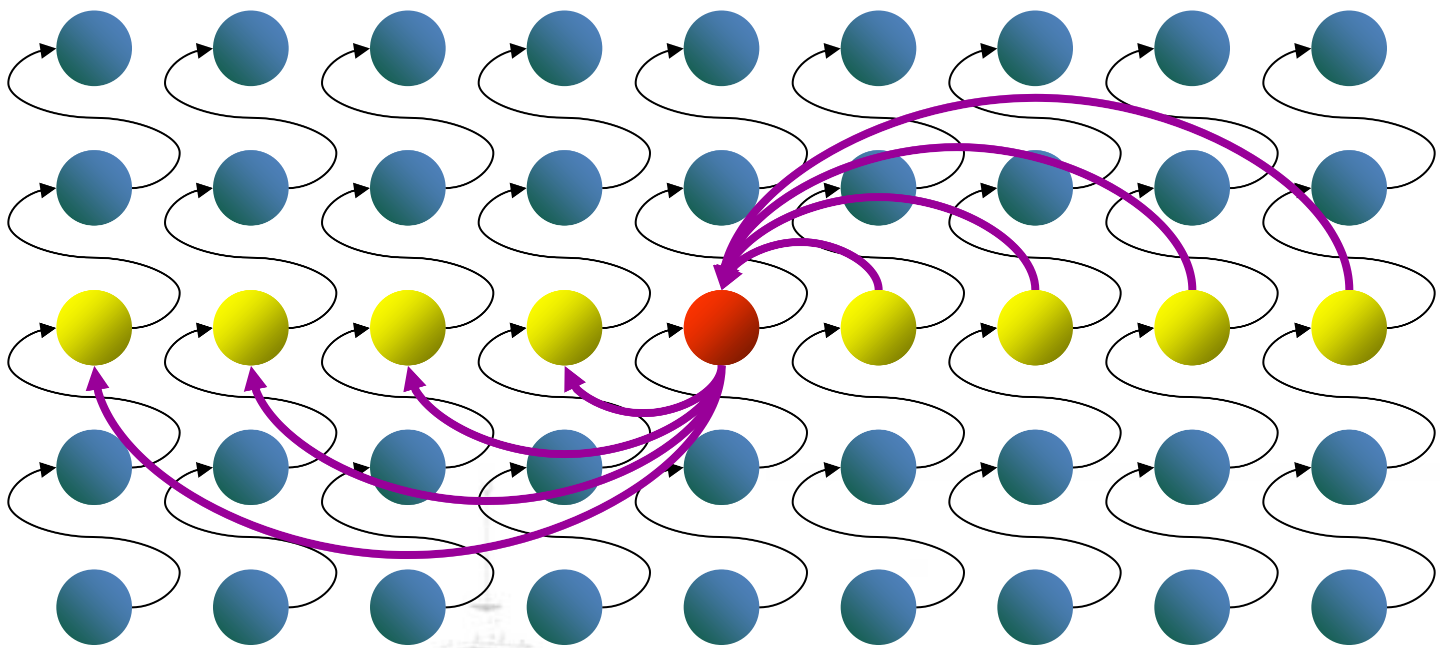
$\left.\right\}$ $O(n)$

$T(\lfloor n/5 \rfloor)$

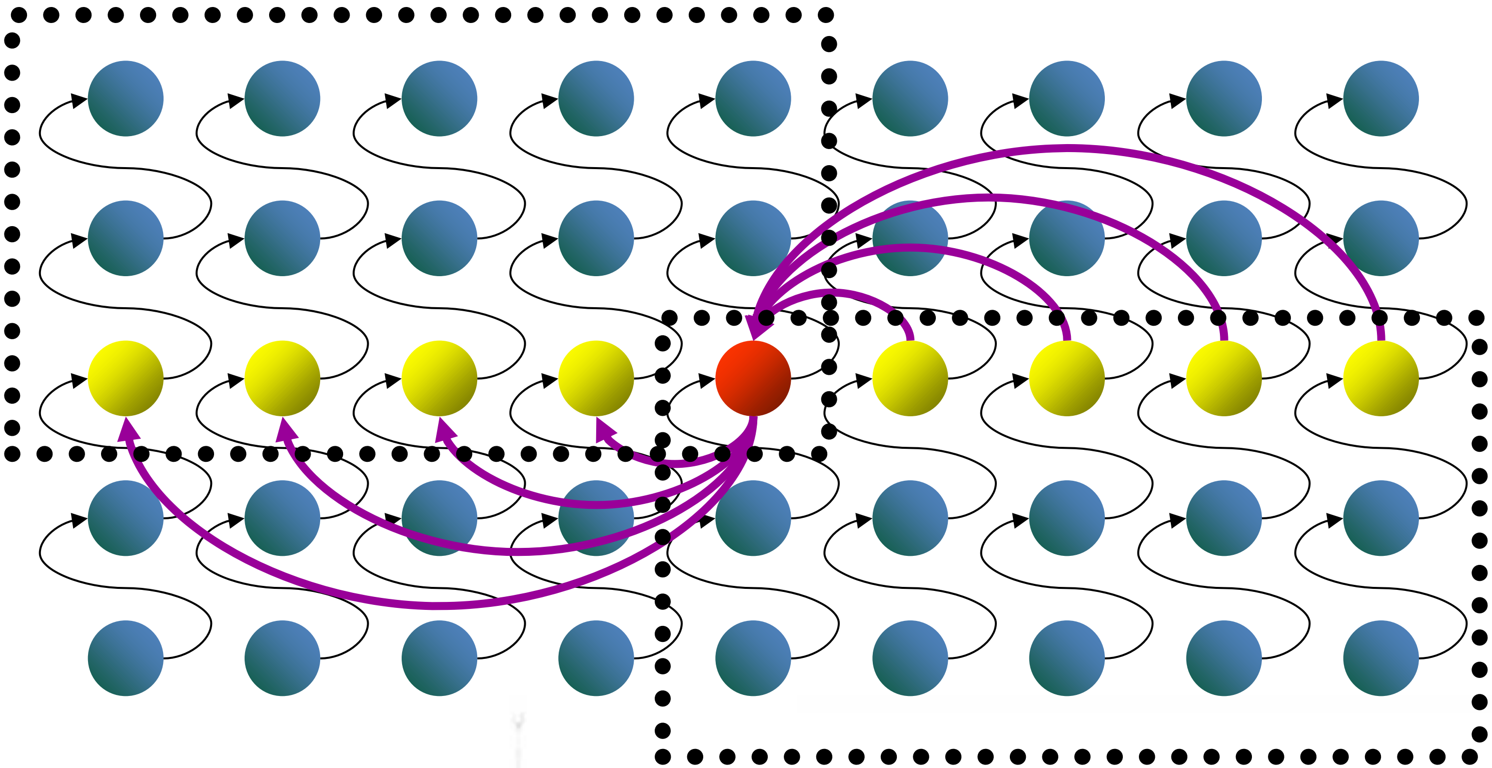
$O(n)$

???

观察第五步的处理过程



第五步至少删除了⌊3n/10⌋个数



n-⌊3n/10⌋≤ 7n/10+6

如果时间复杂度是输入规模的递增函数

则第五步的时间开销不超过$T(7n/10+6)$

$$T(n) \leq \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n \leq C \\ T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(7n/10+6) + \Theta(n) & \text{if } n > C \end{cases}$$

$$T(n)=O(n)$$

本讲内容

3.1 分治法
3.2 分治法的简单实例
3.3 元素选取问题的线性时间算法
3.4 快速傅里叶变换

问题定义

输入：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$，　$n=2^k$, a_i是实数 , $(0\leq i\leq n-1)$

输出：$A_0,A_1,\ldots,A_{n-1}$

$$A_j=\sum_{k=0}^{n} a_k e^{\frac{2jk\pi}{n}i}$$,其中$j=0,1,,\ldots,n-1$,

e是自然对数的底数，i是虚数单位

蛮力法利用定义计算每个A_j，时间复杂度为$\Theta(n^2)$

算法的数学基础

令 $\beta_n = e^{\frac{2\pi}{n} i}$

$$A_j = a_0 + a_1\beta_n^{\ j} + a_2\beta_n^{\ 2j} + \ldots + a_{n-1}\beta_n^{\ (n-1)j}$$

$$= [a_0 + a_2\beta_n^{\ 2j} + a_4\beta_n^{\ 4j} \ldots + a_{n-2}\beta_n^{\ (n-2)j}] + [a_1 + a_3\beta_n^{\ 2j} + a_5\beta_n^{\ 4j} \ldots + a_{n-1}\beta_n^{\ (n-2)j}]\ \beta_n^{\ j}$$

$$= \left[a_0 + a_2\beta_{n/2}^{j} + a_4\beta_{n/2}^{2j} + \ldots + a_{n-2}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j} \right] + \left[a_1 + a_3\beta_{n/2}^{j} + a_5\beta_{n/2}^{2j} + \ldots + a_{n-1}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j} \right] \beta_n^{j}$$

第一项内形如$a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-2}$的离散傅里叶变换

第二项内形如$a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1}$的离散傅里叶变换

令 $\beta_n = e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$$\boldsymbol{A_j = a_0 + a_1\beta_n^{\ j} + a_2\beta_n^{\ 2j} + \ldots + a_{n-1}\beta_n^{\ (n-1)j}} \qquad \boldsymbol{0 \le j \le n-1}$$

$$= \left[a_0 + a_2\beta_{n/2}^{j} + a_4\beta_{n/2}^{2j} + \ldots + a_{n-2}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j} \right] +$$

$$\left[a_1 + a_3\beta_{n/2}^{j} + a_5\beta_{n/2}^{2j} + \ldots + a_{n-1}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j} \right] \beta_n^j$$

$$\boldsymbol{B_j = a_0 + a_2\beta_{n/2}^{\ j} + a_4\beta_{n/2}^{\ 2j} + \ldots + a_{n-2}\beta_{n/2}^{\ ((n-2)/2)j}} \qquad \boldsymbol{0 \le j \le (n-2)/2}$$

$$\boldsymbol{C_j = a_1 + a_3\beta_{n/2}^{\ j} + a_5\beta_{n/2}^{\ 2j} + \ldots + a_{n-1}\beta_{n/2}^{\ ((n-2)/2)j}} \qquad \boldsymbol{0 \le j \le (n-2)/2}$$

$$\beta_{n/2}^{kj} = e^{\frac{2\pi i}{n/2}kj} = e^{\frac{2\pi i}{n/2}kj - 2k\pi i} = e^{\frac{2\pi i}{n/2}k(j-n/2)} = \beta_{n/2}^{k(j-n/2)}$$

分治算法过程

划分： 将输入拆分成$a_0,a_2,\ldots,a_{n\text{-}2}$和$a_1,a_3,\ldots,a_{n\text{-}1}$.

递归求解： 递归计算$a_0,a_2,\ldots,a_{n\text{-}2}$的变换$B_0,B_1,\ldots,B_{n/2\text{-}1}$

递归计算$a_1,a_3\ldots,a_{n\text{-}1}$的变换$C_0,C_1,\ldots,C_{n/2\text{-}1}$

合并： $A_j= B_j+C_j\cdot\beta_n^{\ j}$ $(j<n/2)$

$A_j=B_{j\text{-}n/2}+C_{j\text{-}n/2}\cdot\beta_n^{\ j}$ $(n/2\leq j<n\text{-}1)$

算法

算法FFT

输入：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$， $n=2^k$

输出： $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$的傅里叶变换$A_0,\ldots,A_{n-1}$

1. $\beta \leftarrow \exp(2\pi i/n)$;
2. If (n=2) Then
3. $\quad A_0 \leftarrow a_0+a_1$;
4. $\quad A_1 \leftarrow a_0-a_1$;
5. 输出A_0,A_1,算法结束；
6. $B_0,B_1,\ldots,B_{n/2-1} \leftarrow$FFT$(a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}, n/2)$;
7. $C_0,C_1,\ldots,C_{n/2-1} \leftarrow$FFT$(a_1,a_3,\ldots,a_{n-1}, n/2)$;
8. For j=0 To n/2-1
9. $\quad A_j \leftarrow B_j+C_j \cdot \beta^j$;
10. $\quad A_{j+n/2} \leftarrow B_j+C_j \cdot \beta^{j+n/2}$;
11. 输出$A_0,A_1,\ldots,A_{n-1}$,算法结束；

算法分析

$$T(n)=\Theta(1) \qquad \text{If} \quad n=2$$

$$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n) \qquad \text{If} \quad n>2$$

$$T(n)=\Theta(n \log n)$$