

## §1 变分法简介

作为数学的一个分支，变分法的诞生，是现实世界许多现象不断探索的结果，人们可以追寻到这样一个轨迹：

约翰·伯努利（Johann Bernoulli, 1667—1748）1696 年向全欧洲数学家挑战，提出一个难题：“设在垂直平面内有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑至较低点，不计摩擦，问沿着什么曲线下滑，时间最短？”

这就是著名的“最速降线”问题（The Brachistochrone Problem）。它的难处在于和普通的极大极小值求法不同，它是要求出一个未知函数（曲线），来满足所给的条件。这问题的新颖和别出心裁引起了很大兴趣，罗比塔（Guillaume Francois Antonie de l'Hospital 1661—1704）、雅可比·伯努利（Jacob Bernoulli 1654—1705）、莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716）和牛顿（Isaac Newton 1642—1727）都得到了解答。约翰的解法比较漂亮，而雅可布的解法虽然麻烦与费劲，却更为一般化。后来欧拉（Euler Leonhard, 1707—1783）和拉格朗日（Lagrange, Joseph Louis, 1736—1813）发明了这一类问题的普遍解法，从而确立了数学的一个新分支——变分学。

有趣的是，在 1690 年约翰·伯努利的哥哥雅可比·伯努利曾提出著名的悬链线问题（The Hanging Chain Problem）向数学界征求答案，即，固定项链的两端，在重力场中让它自然垂下，问项链的曲线方程是什么。在大自然中，除了悬垂的项链外，我们还可以观察到吊桥上方的悬垂钢索，挂着水珠的蜘蛛网，以及两根电线杆之间所架设的电线，这些都是悬链线（catenary）。

伽利略（Galileo, 1564—1642）比贝努利更早注意到悬链线，他猜测悬链线是抛物线，从外表看的确象，但实际上不是。惠更斯（Huygens, 1629—1695）在 1646 年（当时 17 岁），经由物理的论证，得知伽利略的猜测不对，但那时，他也求不出答案。到 1691 年，也就是雅可比·伯努利提出悬链线问题的第二年，莱布尼兹、惠更斯（以 62 岁）与约翰·伯努利各自得到了正确答案，所用方法是诞生不久的微积分，具体说是把问题转化为求解一个二阶常微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

解此方程并适当选取参数，得

$$y = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax}) \quad (1)$$

即为悬链线。

悬链线问题本身和变分法并没有关系，然而这和最速降线问题一样都是贝努利兄弟间的相互争强好胜、不断争吵的导火索，虽然雅可比·贝努利在解决悬链线问题时略占下风，但他随后所证明的“悬挂于两个固定点之间的同一条项链，在所有可能的形状中，以悬链线的重心最低，具有最小势能”，算是扳回了一局，俩兄弟扯平了！之所以提到悬链线问题，有两方面考虑，其一，这是有关数学史上著名的贝努利家族内的一个趣闻，而这是一个在变分法乃至整个数学物理领域有着巨大贡献的家族，其二，有关悬链线的得几个结论，可以用变

分法来证明！

现实中很多现象可以表达为泛函极小问题，我们称之为变分问题。求解方法通常有两种：古典变分法和最优控制论。我们这儿要介绍的基本属于古典变分法的范畴。

## 1.1 变分法的基本概念

### 1.1.1 泛函的概念

设  $S$  为一函数集合，若对于每一个函数  $x(t) \in S$  有一个实数  $J$  与之对应，则称  $J$  是定义在  $S$  上的泛函，记作  $J(x(t))$ 。 $S$  称为  $J$  的容许函数集。

例如，在  $[x_0, x_1]$  上光滑曲线  $y(x)$  的长度可定义为

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2)$$

考虑几个具体曲线，取  $x_0 = 0, x_1 = 1$ ，

若  $y(x) = x$ ，则

$$J(y(x)) = J(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2}$$

若  $y(x)$  为悬链线，则

$$J\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

对应  $C^1[x_0, x_1]$  中不同的函数  $y(x)$ ，有不同曲线长度值  $J$ ，即  $J$  依赖于  $y(x)$ ，是定义在函数集合  $C^1[x_0, x_1]$  上的一个泛函，此时我们可以写成

$$J = J(y(x))$$

我们称如下形式的泛函为最简泛函

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad (3)$$

被积函数  $F$  包含自变量  $t$ ，未知函数  $x(t)$  及导数  $\dot{x}(t)$ 。上述曲线长度泛函即为一最简泛函。

### 1.1.2 泛函极值问题

考虑上述曲线长度泛函，我们可以提出下面问题：

在所有连接定点  $A(x_0, y_0)$  和  $B(x_1, y_1)$  的平面曲线中，试求长度最小的曲线。

即，求  $y(x) \in \{y(x) | y(x) \in C^1[x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$ ，使

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

取最小值。此即为泛函极值问题的一个例子。以极小值为例，一般的泛函极值问题可表述为，

称泛函  $J(x(t))$  在  $x_0(t) \in S$  取得极小值，如果对于任意一个与  $x_0(t)$  接近的  $x(t) \in S$ ，

都有  $J(x(t)) \geq J(x_0(t))$ 。所谓接近，可以用距离  $d(x(t), x_0(t)) < \varepsilon$  来度量，而距离可以定义为

$$d(x(t), x_0(t)) = \max_{t_0 \leq t \leq t_f} \{|x(t) - x_0(t)|, |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)|\}$$

泛函的极大值可以类似地定义。其中  $x_0(t)$  称为泛函的极值函数或极值曲线。

### 1.1.3 泛函的变分

如同函数的微分是增量的线性主部一样，泛函的变分是泛函增量的线性主部。作为泛函的自变量，函数  $x(t)$  在  $x_0(t)$  的增量记为

$$\delta x(t) = x(t) - x_0(t)$$

也称函数的变分。由它引起的泛函的增量记作

$$\Delta J = J(x_0(t) + \delta x(t)) - J(x_0(t))$$

如果  $\Delta J$  可以表为

$$\Delta J = L(x_0(t), \delta x(t)) + r(x_0(t), \delta x(t))$$

其中  $L$  为  $\delta x$  的线性项，而  $r$  是  $\delta x$  的高阶项，则称  $L$  为泛函在  $x_0(t)$  的变分，记作

$\delta J(x_0(t))$ 。用变动的  $x(t)$  代替  $x_0(t)$ ，就有  $\delta J(x(t))$ 。

泛函变分的一个重要形式是它可以表为对参数  $\alpha$  的导数：

$$\delta J(x(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha \delta x(t)) \right|_{\alpha=0} \quad (4)$$

这是因为当变分存在时，增量

$$\Delta J = J(x(t) + \alpha \delta x) - J(x(t)) = L(x(t), \alpha \delta x) + r(x(t), \alpha \delta x)$$

根据  $L$  和  $r$  的性质有

$$L(x(t), \alpha \delta x) = \alpha L(x(t), \delta x)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha \delta x} \delta x = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x + \alpha \delta x) \right|_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(x + \alpha \delta x) - J(x)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(x, \alpha \delta x) + r(x, \alpha \delta x)}{\alpha} = L(x, \delta x) = \delta J(x) \end{aligned}$$

## 1.2 泛函极值的相关结论

### 1.2.1 泛函极值的变分表示

利用变分的表达式 (4)，可以得到有关泛函极值的重要结论。

泛函极值的变分表示：若  $J(x(t))$  在  $x_0(t)$  达到极值（极大或极小），则

$$\delta J(x_0(t)) = 0 \quad (5)$$

证明：对任意给定的  $\delta x$ ， $J(x_0 + \alpha \delta x)$  是变量  $\alpha$  的函数，该函数在  $\alpha = 0$  处达到极值。根据函数极值的必要条件知

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x_0 + \alpha \delta x) \Big|_{\alpha=0} = 0$$

再由 (4) 式, 便可得到 (5) 式。

变分法的基本引理:  $\varphi(x) \in C[x_1, x_2]$ ,  $\forall \eta(x) \in C^1[x_1, x_2]$ ,  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , 有

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \eta(x) dx \equiv 0,$$

则  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ 。

证明略。

### 1.2.2 泛函极值的必要条件

考虑最简泛函 (3), 其中  $F$  具有二阶连续偏导数, 容许函数类  $S$  取为满足端点条件为固定端点 (6) 的二阶可微函数。

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (6)$$

泛函极值的必要条件: 设泛函 (3) 在  $x(t) \in S$  取得极值, 则  $x(t)$  满足欧拉方程

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \quad (7)$$

欧拉方程推导: 首先计算 (3) 式的变分:

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha \delta x(t)) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(t, x(t) + \alpha \delta x(t), \dot{x}(t) + \alpha \delta \dot{x}(t)) \Big|_{\alpha=0} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [F_x(t, x, \dot{x}) \delta x + F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \delta \dot{x}] dt \end{aligned}$$

对上式右端第二项做分布积分, 并利用  $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ , 有

$$\int_{t_0}^{t_f} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \delta \dot{x} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \delta x dt,$$

所以

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \delta x dt$$

利用泛函极值的变分表示, 得

$$\int_{t_0}^{t_f} [F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}] \delta x dt = 0$$

因为  $\delta x$  的任意性, 及  $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ , 由基本引理, 即得 (7)。

(7) 式也可写成

$$F_x - F_{\dot{x}\dot{x}} - F_{x\dot{x}} \dot{x} - F_{\ddot{x}} \ddot{x} = 0 \quad (8)$$

通常这是关于  $x(t)$  的二阶微分方程, 通解中的任意常数由端点条件 (6) 确定。

### 1.2.3 几种特殊形式最简泛函的欧拉方程

(i)  $F$  不依赖于  $\dot{x}$ , 即  $F = F(t, x)$

这时  $F_{\dot{x}} \equiv 0$ ，欧拉方程为  $F_x(t, x) = 0$ ，这个方程以隐函数形式给出  $x(t)$ ，但它一般不满足边界条件，因此，变分问题无解。

(ii)  $F$  不依赖  $x$ ，即  $F = F(t, \dot{x})$

欧拉方程为

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, \dot{x}) = 0$$

将上式积分一次，便得首次积分  $F_{\dot{x}}(t, \dot{x}) = c_1$ ，由此可求出  $\dot{x} = \varphi(t, c_1)$ ，积分后得到可能的极值曲线族

$$x = \int \varphi(t, c_1) dt$$

(iii)  $F$  只依赖于  $\dot{x}$ ，即  $F = F(\dot{x})$

这时  $F_x = 0, F_{t\dot{x}} = 0, F_{x\dot{x}} = 0$ ，欧拉方程为

$$\ddot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} = 0$$

由此可设  $\ddot{x} = 0$  或  $F_{\dot{x}\dot{x}} = 0$ ，如果  $\ddot{x} = 0$ ，则得到含有两个参数的直线族  $x = c_1 t + c_2$ 。另外若  $F_{\dot{x}\dot{x}} = 0$  有一个或几个实根时，则除了上面的直线族外，又得到含有一个参数  $c$  的直线族  $x = kt + c$ ，它包含于上面含有两个参数的直线族  $x = c_1 t + c_2$  中，于是，在  $F = F(\dot{x})$  情况下，极值曲线必然是直线族。

(iv)  $F$  只依赖于  $x$  和  $\dot{x}$ ，即  $F = F(x, \dot{x})$

这时有  $F_{t\dot{x}} = 0$ ，故欧拉方程为

$$F_x - \dot{x} F_{x\dot{x}} - \ddot{x} F_{\dot{x}\dot{x}} = 0$$

此方程具有首次积分为

$$F - \dot{x} F_{\dot{x}} = c_1$$

事实上，注意到  $F$  不依赖于  $t$ ，于是有

$$\frac{d}{dt} (F - \dot{x} F_{\dot{x}}) = F_x \dot{x} + F_{\dot{x}} \ddot{x} - \ddot{x} F_{\dot{x}} - \dot{x} \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = \dot{x} (F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}) = 0。$$

### 1.3 几个经典的例子

#### 1.3.1 最速降线问题

**最速降线问题** 设  $A$  和  $B$  是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连结  $A$  和  $B$  的平面曲线中，求一曲线，使质点仅受重力作用，初速度为零时，沿此曲线从  $A$  滑行至  $B$  的时间最短。

**解** 将  $A$  点取为坐标原点， $B$  点取为  $B(x_1, y_1)$ ，如图 1。根据能量守恒定律，质点在曲

线  $y(x)$  上任一点处的速度  $\frac{ds}{dt}$  满足 ( $s$  为弧长)

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mgy$$

将  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$  代入上式得

$$dt = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

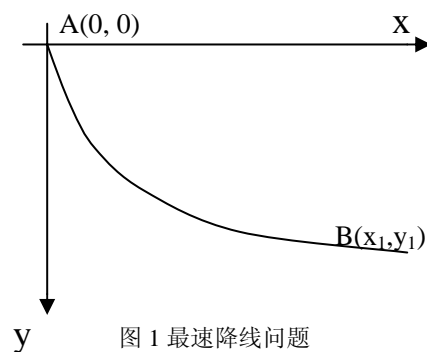


图 1 最速降线问题

于是质点滑行时间应表为  $y(x)$  的泛函

$$J(y(x)) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

端点条件为

$$y(0) = 0, y(x_1) = y_1$$

最速降线满足欧拉方程, 因为

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

不含自变量  $x$ , 所以方程 (8) 可写作

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

等价于

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$$

作一次积分得

$$y(1+y'^2) = c_1$$

令  $y' = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$ , 则方程化为

$$y = \frac{c_1}{1+y'^2} = c_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta)$$

又因

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}} = \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta) d\theta$$

积分之, 得

$$x = \frac{c}{2}(\theta - \sin \theta) + c_2$$

由边界条件  $y(0)=0$ ，可知  $c_2=0$ ，故得

$$\begin{cases} x = \frac{c_1}{2}(\theta - \sin \theta) \\ y = \frac{c_1}{2}(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

这是摆线（园滚线）的参数方程，其中常数  $c_1$  可利用另一边界条件  $y(x_1)=y_1$  来确定。

### 1.3.2 最小旋转面问题

最小旋转面问题 对于  $xy$  平面上过定点  $A(x_1, y_1)$  和  $B(x_2, y_2)$  的每一条光滑曲线  $y(x)$ ，绕  $x$  轴旋转得一旋转体。旋转体的侧面积是曲线  $y(x)$  的泛函  $J(y(x))$ ，易得

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1+y'^2(x)} dx$$

容许函数集可表示为

$$S = \{y(x)/y(x) \in C^1[x_1, x_2], y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\}$$

解 因  $F = y\sqrt{1+y'^2}$  不包含  $x$ ，故有首次积分

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1+y'^2} - y'y' \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

化简得  $y = c_1 \sqrt{1+y'^2}$

令  $y' = sh t$ ，代入上式，  $y = c_1 \sqrt{1+sh^2 t} = c_1 ch t$

由于  $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{c_1 sh t dt}{sh t} = c_1 dt$

积分之，得  $x = c_1 t + c_2$

消去  $t$ ，就得到  $y = c_1 ch \frac{x-c_2}{c_1}$ 。

这是悬链线方程，适当选择条件（令该悬链线过  $(0, 1/a)$  点，且该点处的切线是水平的）就可得到（1）。本例说明，对于平面上过两个定点的所有光滑曲线，其中绕  $x$  轴旋转所得旋转体的侧面积最小的是悬链线！

### 1.3.3 悬链线势能最小

1691 年，雅可比·伯努利证明：悬挂于两个固定点之间的同一条项链，在所有可能的形状中，以悬链线的重心最低，具有最小势能。下面我们用变分法证明之。

考虑通过 A、B 两点的各种等长曲线。令曲线  $y=f(x)$  的长度为  $L$ ，重心坐标为  $(\bar{x}, \bar{y})$ ，

则

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

由重心公式有

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{L}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{L}$$

由于只需探讨曲线重心的高低, 所以只对纵坐标的公式进行分析, 注意到问题的表述, 说明  $L$  是常数, 不难看出重心的纵坐标是  $y(x)$  的最简泛函, 记作

$$J(y(x)) = \int_a^b y(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

此时对应的欧拉方程 (8) 可化为

$$yy'' - (y')^2 - 1 = 0$$

令  $p = \frac{dy}{dx}$  解得  $y^2 = k(1 + p^2), k > 0$ , 进而得

$$y = \frac{1}{\sqrt{k}} ch[\sqrt{k}(x + c)].$$

此即为悬链线, 它使重心最低, 势能最小! 大自然中的许多结构是符合最小势能的, 人们称之为最小势能原理。

#### 1.4 泛函极值问题的补充

##### 1.4.1 泛函极值的几个简单推广

(i) 含多个函数的泛函

使泛函

$$J(y(x), z(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', z, z') dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, z(x_1) = z_1, z(x_2) = z_2.$$

的极值曲线  $y = y(x), z = z(x)$  必满足欧拉方程组

$$\begin{cases} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases}$$

(ii) 含高阶导数的泛函

使泛函

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'') dx$$

取极值且满足固定边界条件



$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, y'(x_1) = y'_1, y'(x_2) = y'_2$$

的极值曲线  $y = y(x)$  必满足微分方程

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

(iii) 含多元函数的泛函

设  $z(x, y) \in C^2, (x, y) \in D$ , 使泛函

$$J(z(x, y)) = \iint_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy$$

取极值且在区域  $D$  的边界线  $l$  上取已知值的极值函数  $z = z(x, y)$  必满足方程

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

上式称为奥式方程。

#### 1.4.2 端点变动的情况 (横截条件)

设容许曲线  $x(t)$  在  $t_0$  固定, 在另一端点  $t = t_f$  时不固定, 是沿着给定的曲线  $x = \psi(t)$  上变动。于是端点条件表示为

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t) = \psi(t) \end{cases}$$

这里  $t$  是变动的, 不妨用参数形式表示为

$$t = t_f + \alpha dt_f$$

寻找端点变动情况的泛函极值必要条件, 可仿照前面端点固定情况进行推导, 即有

$$\begin{aligned} 0 = \delta J &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{t_0}^{t_f + \alpha dt_f} F(t, x + \alpha \delta x, \dot{x} + \alpha \delta \dot{x}) dt \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} (F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}) \delta x dt + F_{\dot{x}} \delta x \Big|_{t=t_f} + F \Big|_{t=t_f} dt_f \end{aligned} \quad (9)$$

再对 (9) 式做如下分析:

(i) 对每一个固定的  $t_f$ ,  $x(t)$  都满足欧拉方程, 即 (9) 式右端的第一项积分为零;

(ii) 为考察 (9) 式的第二、第三项, 建立  $dt_f$  与  $\delta x \Big|_{t=t_f}$  之间的关系, 因为

$$x(t_f + \alpha dt_f) + \alpha \delta x(t_f + \alpha dt_f) = \psi(t_f + \alpha dt_f)$$

对  $\alpha$  求导并令  $\alpha = 0$  得

$$\dot{x}(t_f) dt_f + \delta x \Big|_{t=t_f} = \dot{\psi}(t_f) dt_f$$

即

$$\delta x|_{t=t_f} = [\dot{\psi}(t_f) - \dot{x}(t_f)]dt_f \quad (10)$$

把 (10) 代入 (9) 并利用  $dt_f$  的任意性, 得

$$[F + (\dot{\psi} - \dot{x})F_{\dot{x}}]|_{t=t_f} = 0 \quad (11)$$

(11) 式就是确定欧拉方程通解中另一常数的定解条件, 称为横截条件。

横截条件有两种常见的特殊情况:

(i) 当  $x = \psi(t)$  是垂直横轴的直线时,  $t_f$  固定,  $x(t_f)$  自由, 并称  $x(t_f)$  为自由端点。

此时 (9) 式中  $dt_f = 0$  及  $\delta x|_{t=t_f}$  的任意性, 便得自由端点的横截条件

$$F_{\dot{x}}|_{t=t_f} = 0 \quad (12)$$

(ii) 当  $x = \psi(t)$  是平行横轴的直线时,  $t_f$  自由,  $x(t_f)$  固定, 并称  $x(t_f)$  为平动端点。

此时  $\dot{\psi} = 0$ , (11) 式的横截条件变为

$$F - \dot{x}F_{\dot{x}}|_{t=t_f} = 0 \quad * \quad (13)$$

注意, 横截条件与欧拉方程联立才能构成泛函极值的必要条件。

#### 1.4.3 有约束条件的泛函极值

在最优控制系统中, 常常要涉及到有约束条件泛函的极值问题, 其典型形式是对动态系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad * \quad (14)$$

寻求最优性能指标 (目标函数)

$$J(u(t)) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t))dt \quad * \quad (15)$$

其中  $u(t)$  是控制策略,  $x(t)$  是轨线,  $t_0$  固定,  $t_f$  及  $x(t_f)$  自由,  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  (不受限, 充满  $R^m$  空间),  $f, \varphi, F$  连续可微。

下面推导取得目标函数极值的最优控制策略  $u^*(t)$  和最优轨线  $x^*(t)$  的必要条件。

采用拉格朗日乘子法, 化条件极值为无条件极值, 即考虑

$$J_1(x, u, \lambda) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x, u) + \lambda^T(t)(f(t, x, u) - \dot{x})]dt \quad (16)$$

的无条件极值, 首先定义 (14) 式和 (15) 式的哈密顿 (Hamilton) 函数为

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u) + \lambda^T(t)f(t, x, u) \quad (19) \quad (17)$$

将其代入 (16) 式, 得到泛函

$$J_1(x, u, \lambda) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [H(t, x, u, \lambda) - \lambda^T \dot{x}]dt \quad (20) \quad (18)$$

下面先对其求变分

$$\begin{aligned}
\delta J_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ \varphi(t_f + \alpha dt_f, x(t_f) + \alpha \delta x(t_f)) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f + \alpha dt_f} [H(t, x + \alpha \delta x, u + \alpha \delta u, \lambda + \alpha \delta \lambda) - (\lambda + \alpha \delta \lambda)^T (\dot{x} + \alpha \delta \dot{x})] dt \} \Big|_{\alpha=0} \\
&= [\delta x(t_f)]^T \varphi_{x(t_f)} + (dt_f)^T \varphi_{t_f} + (dt_f)^T H(t, x, u, \lambda) \Big|_{t=t_f} - (dt_f)^T (\lambda^T \dot{x}) \Big|_{t=t_f} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} [(\delta x)^T H_x + (\delta u)^T H_u + (\delta \lambda)^T H_\lambda - (\delta \lambda)^T \dot{x} - \lambda^T \delta \dot{x}] dt \\
&= (dt_f)^T [\varphi_{t_f} + F(t, x, u, t) \Big|_{t=t_f}] + [\delta x(t_f)]^T \varphi_{x(t_f)} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} [(\delta x)^T H_x + (\delta u)^T H_u + (\delta \lambda)^T H_\lambda - (\delta \lambda)^T \dot{x}] dt - \lambda^T(t_f) \delta x \Big|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\delta x)^T \dot{\lambda} dt
\end{aligned}$$

注意到  $\delta x \Big|_{t=t_f} \neq \delta x(t_f)$ ,  $\delta x \Big|_{t=t_f} = \delta x(t_f) - \dot{x}(t_f) dt_f$ , 因而

$$\begin{aligned}
\delta J_1 &= (dt_f)^T [\varphi_{t_f} + H(t, x, u, \lambda) \Big|_{t=t_f}] + [\delta x(t_f)]^T (\varphi_x - \lambda) \Big|_{t=t_f} \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_f} [(\delta x)^T (H_x + \dot{\lambda}) + (\delta \lambda)^T (H_\lambda - \dot{x}) + (\delta u)^T H_u] dt
\end{aligned}$$

再令  $\delta J_1 = 0$ , 由  $dt_f, \delta x(t_f), \delta x, \delta u, \delta \lambda$  的任意性, 使得

(i)  $x^*, \lambda^*$  必满足正则方程:

$$\textcircled{1} \text{ 状态方程 } \dot{x} = H_\lambda = f(t, x, u)$$

$$\textcircled{2} \text{ 协态方程 } \dot{\lambda} = -H_x.$$

(ii) 哈密顿函数  $H(t, x^*, u, \lambda^*)$  作为  $u$  的函数, 也必满足

$$H_u = 0$$

并由此方程求得  $u^*$ 。

(iii) 求  $x^*, \lambda^*, u^*$  时, 必利用边界条件

$$\textcircled{1} \quad x(t_0) = x_0, \quad (\text{用于确定 } x^*)$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)}, \quad (\text{用于确定 } \lambda^*)$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi_{t_f} = -H(t, x, u, \lambda) \Big|_{t=t_f}, \quad (\text{确定 } t_f)$$

#### 1.4.4 最大(小)值原理

如果受控系统

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0$$

其控制策略  $u(t)$  的全体构成有界集  $U$ ，求  $u(t) \in U$ ，使性能指标

$$J(u(t)) = \varphi(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, u) dt$$

达到最大（小）值。

最大（小）值原理：如果  $f(t, x, u)$ ， $\varphi(t_f, x(t_f))$  和  $F(t, x, u)$  都是连续可微的，那么

最优控制策略  $u^*(t)$  和相应的最优轨线  $x^*(t)$  由下列的必要条件决定：

(i) 最优轨线  $x^*(t)$ ，协态向量  $\lambda^*(t)$  由下列的必要条件决定：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, u), \quad u(t) \in U, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned}$$

(ii) 哈密顿函数

$$H(t, x^*, u, \lambda^*) = F(t, x^*, u) + \lambda^{*T}(t) f(t, x^*, u)$$

作为  $u(t)$  的函数，最优策略  $u^*(t)$  必须使

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \max_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda^*)$$

或使

$$H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = \min_{u \in U} H(t, x^*, u, \lambda^*) \text{ (最小值原理)}$$

(iii) 满足相应的边界条件

① 若两端点固定，则正则方程的边界条件为

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f。$$

② 若始端固定，终端  $t_f$  也固定，而  $x(t_f)$  自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)}(t_f, x(t_f))。$$

③ 若始端固定，终端  $t_f, x(t_f)$  都自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)}(t_f, x(t_f)),$$

$$H(t_f, x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f)) + \varphi_{t_f}(t_f, x(t_f)) = 0。$$

## §2 生产计划的制订

动态优化建模首先要解决两个问题,其一是,要使什么性能指标达到最优,其二是,通过什么变量(函数)控制这个性能指标。当然这些都应该是解决实际问题的直接反映。

工厂与客户签订了一项在某时刻提交一定数量产品的合同,在制订生产计划时要考虑生产和储存两种费用,生产费用通常取决于生产率(单位时间的产量),生产率越高费用越大;储存费用自然由已经生产出来的产品数量决定,数量越多费用越大,所谓生产计划这里简单地看作是到每一时刻为止的累积产量,它与每单位时间(如每天)的产量可以互相推算。建模目的是寻求最优的生产计划,使完成合同所需的总费用(生产与贮存费用之和)最小。

假设 开始生产时刻记为 $t=0$ ,按照合同应在 $t=T$ 提交数量为 $Q$ 的产品。到时刻 $t$ 为止的产量记作 $x(t)$ , $\dot{x}(t)$ 即生产计划。因为时刻 $t$ 的生产率表示为 $\dot{x}(t)$ ,所以单位时间的生产费用可以一般地记作 $f(\dot{x}(t))$ ,而单位时间的贮存费用则应记为 $g(x(t))$ 。于是从 $t=0$ 到 $t=T$ 的总费用 $C(x(t))$ 是

$$C(x(t)) = \int_0^T [f(\dot{x}(t)) + g(x(t))] dt \quad (1)$$

为了确定 $f$ 和 $g$ 的具体形式作如下假设:

1. 单位时间内生产率提高一个单位所需的生产费用与这时的生产率成正比。在需求饱满、生产率很高的工厂里这个假设是合理的。

2. 贮存费与贮存量(即累积产量)成正比。这是关于贮存费的最常用的假设。

假设1表明,生产费 $f$ 对生产率 $\dot{x}$ 的变化率与 $\dot{x}$ 成正比,即

$$\frac{df}{d\dot{x}} \propto \dot{x}$$

于是

$$f(\dot{x}(t)) = k_1 \dot{x}^2(t) \quad (2)$$

$k_1$ 是比例系数,由假设2则可以直接写出

$$g(x(t)) = k_2 x(t) \quad (3)$$

$k_2$ 是单位数量产品单位时间的贮存费。

**建模** 将(2)、(3)代入(1)式并注意 $x(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=T$ 时的值,我们有

$$C(x(t)) = \int_0^T [k_1 \dot{x}^2(t) + k_2 x(t)] dt \quad (4)$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = Q \quad (5)$$

制订最优生产计划归结为在固定端点条件(5)下,求 $x(t)$ 使(4)式定义的泛函 $C(x(t))$ 取得最小值。

用变分法求解,记 $F(t, x, \dot{x}) = k_1 \dot{x}^2 + k_2 x$ ,根据欧拉方程(§1(7)式)

$$F_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0$$

可得关于 $x(t)$ 的二阶微分方程

$$k_2 - 2k_1\ddot{x}(t) = 0 \quad (6)$$

方程(6)在端点条件(5)下的解为

$$x(t) = \frac{k_2}{4k_1}t^2 + \frac{4k_1Q - k_2T^2}{4k_1T}t \quad (7)$$

这就是使总费用 $C(x(t))$ 达到最小的生产计划。

由(7)式不难画出 $x(t)$ 的示意图(图2)，它是过 $x(0)=0, X(T)=Q$ 两点的抛物线，且因 $\ddot{x}(t) > 0$ 而呈下凸状。随着参数 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $T$ 、 $Q$ 的不同，曲线 $x(t)$ 可能有 $S_1$ 和 $S_2$ 两种形状。但是对于生产计划 $x(t)$ 应该有明显的限制条件

$$x(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

这就是说，只有当 $x(t)$ 呈 $S_1$ 形状时才有实际意义。

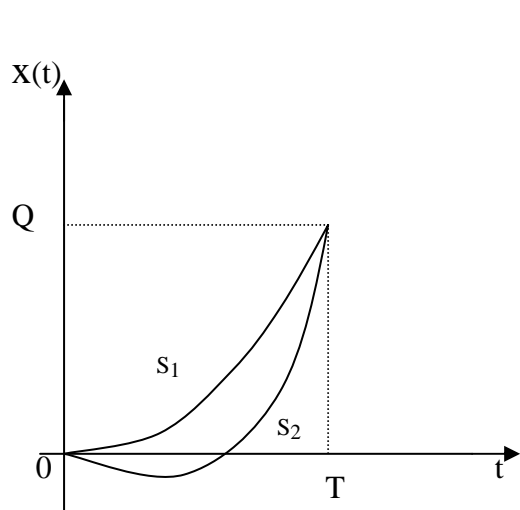


图 2-1  $x(t)$  的两种形式

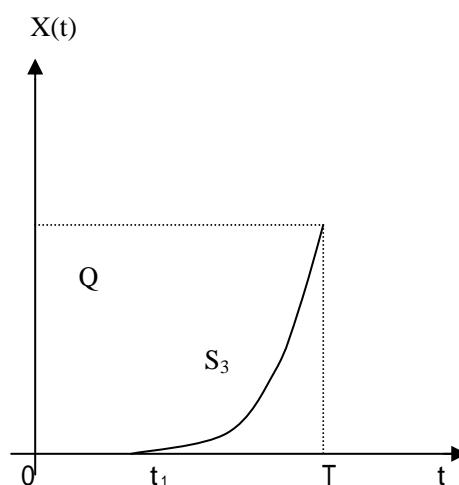


图 2-2 满足条件的  $x(t)$

容易看出，对于(7)式表示的 $x(t)$ 条件(8)等价于

$$\dot{x}(t) \geq 0 \quad (9)$$

由(7)式算出 $\dot{x}(0)$ ，可知(9)式又表示为

$$Q \geq \frac{k_2T^2}{4k_1} \quad (10)$$

于是仅当(10)式成立时(7)式确定的 $x(t)$ 才是最优生产计划。

当 $k_1, k_2$ 固定时条件(10)表明,在一定交货期 $T$ 内要完成的产量 $Q$ 相当大,需要从 $t=0$ 就开始生产,如图中曲线 $S_1$

但是,当

$$Q < \frac{k_2 T^2}{4k_1} \quad (11)$$

即在 $T$ 内要完成的产量 $Q$ 较小时最优生产计划是什么呢?

直观的想法是为了节省贮存费用,到 $t=t_1$ 才开始生产,如图7-2的曲线 $S_3$ 所示。 $S_3$ 是否就是如(7)式所示、图7-1中曲线 $S_2$ 在 $x=0$ 的那一部分呢?如果不是,时刻 $t_1$ 和区域 $S_3$ 又如何确定(习题1)。

**解释** 为了对最优生产计划作出解释,考察它满足的方程(6)式,(6)式可以表示为

$$k_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dx} (k_1 \dot{x}^2) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{df}{dx} \right) \quad (12)$$

式中  $\frac{df}{dx}$  是单位时间内生产率提高一个单位所需的生产费用,经济理论中称为边际成本。而 $k_2$  (单位时间单位数量产品的贮存费)称为边际贮存。于是(12)式表明,使边际成本的变化率等于边际贮存的生产计划是最优的。

**评注** 优化模型通常包括目标函数和约束条件(或寻优范围)两部分,在这个模型目标函数只考虑了两种最基本的费用,并对它们作了相当简化的假设。至于约束条件,由于我们要用古典变分法求解,所以 $x(t)$ 除了要满足端点条件(5)以外,还需假定它是二阶可微函数。这个条件并不影响(7)式的最优意义,因为一般说来不会存在一个不满足二阶可微条件的、比(7)式更优的解。但是在另一些约束条件下问题就较难处理了,如这个模型应该要求 $x(t) \geq 0$ ,我们看到当参数满足条件(11)时最优解已经需要仔细考虑。若还要对生产率加以限制,譬如规定一个范围即  $A \leq \dot{x} \leq B$ ,则问题的求解更加困难。实际上,对控制函数施加的这类闭集约束,可能导致古典变分法的失败。

### §3 生产设备的最大经济效益

某工厂购买了一台新设备投入到生产中。一方面该设备随着运行时间的推移其磨损程度愈来愈大,因此其转卖价将随着使用设备的时间增加而减小;另一方面生产设备总是要进行日常保养,花费一定的保养费,保养可以减缓设备的磨损程度,提高设备的转卖价。那么,怎样确定最优保养费和设备转卖时间,才能使这台设备的经济效益最大。

#### 3.1 问题分析与假设

(i) 设备的转卖价是时间  $t$  的函数,记为  $x(t)$ ,  $x(t)$  的大小与设备的磨损程度和保养费的多少密切相关。记初始转卖价  $x(0) = x_0$ 。

(ii) 设备随其运行时间的推移,磨损程度越来越大。 $t$  时刻设备的磨损程度可以用  $t$  时刻转卖价的损失值来刻画,常称其为磨损函数或废弃函数,记为  $m(t)$ 。

(iii) 保养设备可以减缓设备的磨损速度,提高转卖价。如果  $u(t)$  是单位时间的保养费, $g(t)$  是  $t$  时刻的保养效益系数(每用一元保养费所增加的转卖价),那么单位时间的保养效益为  $g(t)u(t)$ 。另外,保养费不能过大(如单位时间保养费超过单位时间产值时,保养失去了意义),只能在有界函数集中选取,记有界函数集为  $W$ ,则  $u(t) \in W$ 。

(iv) 设单位时间的产值与转卖价的比值记为  $p$ ,则  $px(t)$  表示在  $t$  时刻单位时间的产值,即  $t$  时刻的生产率。

(v) 转卖价  $x(t)$  及单位时间的保养费  $u(t)$  都是时间  $t$  的连续可微函数。为了统一标准,采用它们的贴现值。对于贴现值的计算,例如转卖价  $x(t)$  的贴现值计算,如果它的贴现因子为  $\delta$ (经过单位时间的单位费用贴现),那么由

$$\begin{cases} \frac{dx(t_1)}{dt_1} = \delta x(t_1) \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

解得

$$x(t_1) = e^{-\delta(t-t_1)}$$

令  $t_1 = 0$ ,使得  $t$  时刻单位费用的贴现(称贴现系数)为  $e^{-\delta t}$ ,所以设备在  $t$  时刻转卖价  $x(t)$  的贴现为  $x(t)e^{-\delta t}$ 。仿此计算, $u(t)$  的贴现为  $u(t)e^{-\delta t}$ ,单位时间产值的贴现为  $px(t)e^{-\delta t}$ 。

(vi) 欲确定的转卖时间  $t_f$  和转卖价  $x(t_f)$  都是自由的。

#### 3.2 模型构造

根据以上的分析与假设可知:考察的对象是设备在生产中的磨损—保养系统;转卖价体



现了磨损和保养的综合指标，可以选作系统的状态变量；在生产中设备磨损的不可控性强，其微弱的可控性也是通过保养体现，加之保养本身具有较强的可控性，所以选单位时间的保养费  $u(t)$  作为控制策略。这样，生产设备的最大经济效益模型可以构成为在设备磨损—保养系统的（转卖价）状态方程

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -m(t) + g(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (21) (1)$$

之下，在满足  $0 \leq u(t) \leq U$  的函数集  $W$  中寻求最优控制策略  $u^*(t)$ ，使系统的经济效益这一性能指标

$$J(u(t)) = x(t_f)e^{-\delta t_f} + \int_0^{t_f} [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} dt \quad (22) (2)$$

为最大，其中  $t_f, x(t_f)$  都是自由的。

### 3.3 模型求解

首先写出问题的哈密顿函数

$$H = [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} + \lambda[-m(t) + g(t)u(t)] \quad (23) (3)$$

再由协态方程及边界条件求出  $\lambda(t)$ ，即由

$$\begin{cases} \frac{d\lambda(t)}{dt} = -H_x = -pe^{-\delta t} \\ \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)} = e^{-\delta t_f} \end{cases}$$

解得

$$\lambda(t) = (1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}$$

下面利用最大值原理求  $u^*(t)$ 。先将 (3) 式改变为

$$H = px(t)e^{-\delta t} - \lambda m(t) + [\lambda g(t) - e^{-\delta t}]u(t)$$

显然， $H$  是对  $u$  的线性函数，因此得到

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \quad (24) (4)$$

或

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & [(1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & [(1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \quad (25)$$

在上式中，还需解决两个问题：一是  $u^*(t) = U$  与  $u^*(t) = 0$  的转换点  $t_s$  在什么位置，即

$t_s$  等于多少？二是  $u^*(t)$  是由  $U$  到 0，还是由 0 到  $U$ 。

转换点  $t_s$  应满足

$$[(1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} = 0$$

即

$$[\frac{p}{\delta} - (\frac{p}{\delta} - 1)e^{\delta(t-t_f)}]g(t) - 1 = 0 \quad (26)(6)$$

从而可解出  $t_s$ 。

因为  $g(t)$  是时间  $t$  的减函数，所以 (6) 式的左端也是时间  $t$  的减函数，也就是说  $u^*(t)$  随时间应由  $U$  到 0。于是最优控制策略的具体表达式为

$$u^* = \begin{cases} U, & 0 \leq t < t_s \\ 0, & t_s < t \leq t_f \end{cases}$$

至于  $t_f$ ， $x(t_f)$  的求法，请见下面的例子。

在生产设备的最大经济效益的问题中，设  $x(0) = 100$ ， $U = 1$ ， $m(t) = 2$ ， $p = 0.1$ ，

$\delta = 0.05$ ， $g(t) = \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$ ，试求  $t_f$ ， $x(t_f)$  和  $u^*(t)$ 。

由 (6) 式可得求  $t_s$  的公式

$$(1+t_s)^{\frac{1}{2}} = 4 - 2e^{0.05(t_s-t_f)} \quad (27)(7)$$

当  $t < t_s$  时， $u^*(t) = U = 1$ ，状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2 + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$$

当  $t > t_s$  时， $u^*(t) = 0$ ，状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2$$

于是  $t > t_s$  时，有

$$\int_0^t \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{t_s} [-2 + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}] dt + \int_{t_s}^t (-2) dt$$

解得

$$x(t) = 4(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 96 - 2t \quad (28)(8)$$

由自由边界条件  $H|_{t=t_f} = -\varphi_{t_f}$  及  $\lambda(t_f) = e^{-\delta t_f}$ , 得

$$-px(t_f)e^{-\delta t_f} + 2e^{-\delta t_f} = -\delta e^{-\delta t_f} x(t_f)$$

于是

$$x(t_f) = \frac{2}{p-\delta} = 40$$

当  $t = t_f$  时, 由 (8) 式有

$$40 = 4(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 96 - 2t_f$$

即

$$t_f = 2(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 28 \quad (29)(9)$$

将 (7) 和 (9) 联立求解, 编写如下 Matlab 程序

```
[x,y]=solve('(1+ts)^(1/2)=4-2*exp(0.05*(ts-tf))','tf=2*(1+ts)^(1/2)+28')
```

求得

$$t_s = 10.6, t_f = 34.8$$

于是, 最优控制策略 (保养费) 为

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 10.6 \\ 0, & 10.6 < t \leq 34.8 \end{cases}$$

## 习 题

1. 求自原点 (0,0) 到直线  $x + y - 1 = 0$  的最速降线。
2. 求概率密度函数  $\varphi(x)$ , 使得信息量

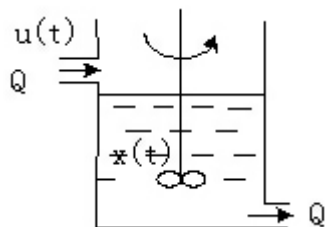
$$J = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \ln[\varphi(x)] dx$$

取最大值, 且满足等周条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx = \sigma^2 \text{ (常数)}$$

3. 在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件, 如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏, 即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失。如果在零部件运行一定时期后, 就对尚属正常的零件做预防性更换, 以避免一旦发生故障带来的损失, 从经济上看是否更为合算? 如果合算, 做这种预防性更换的时间如何确定呢?
4. 设有一盛放液体的连续搅拌槽, 如图所示, 槽内装有不停地转动着的搅拌器, 使槽

内液体处于完全的混合状态。槽中原来盛放有  $0$  的某种液体，现在需要将其温度在给定的一段时间  $t_f$  内升高到某一给定的温度  $T_f$ 。为此，在入口处流入一定量的液体，温度为  $u(t)$ ，而在出口处流出等量的液体，以便保持槽内液面恒定。试给出如下问题的数学模型：确定流入槽内液体的温度  $u(t)$  的变化规律，使槽中原有的液体在给定的时间内由  $0$  上升到给定的温度  $T_f$ ，并使搅拌槽散失的热量为最少。



参考文献：

1. 姜启源：数学模型。高等教育出版社 1993
2. 谭永基, 俞文鱼此：数学模型。复旦大学出版社 1997