本讲内容

5.1 剪枝方法论与人员安排问题

5.2 旅行商问题

5.3 A*算法

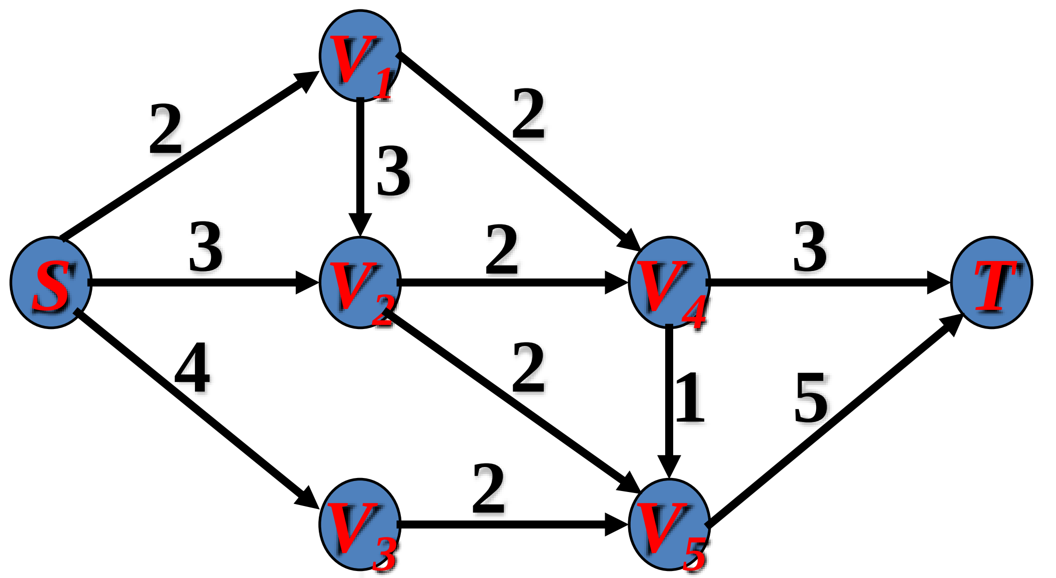
A*算法的基本思想

- **A*算法与分支界限策略的比较**
  - 分支界限策略是为了剪掉不能达到优化解的分支
  - 分支界限策略的关键是“界限”
  - A*算法的核心是告诉我们在某些情况下，我们得到的解一定是优化解，于是算法可以停止
  - A*算法试图尽早地发现优化解
  - A*算法经常使用Best-first策略求解优化问题

- A*算法关键—代价函数
  - 对于任意节点n
    - $g(n)$＝从树根到n的代价
    - $h^*(n)$＝从n到目标节点的优化路径的代价
    - $f^*(n)$＝$g(n) + h^*(n)$是节点n的代价
  - What is the value of $h^*(n)$?
    - 不知道！
    - 于是, $f^*(n)$也不知道
  - 估计$h^*(n)$
    - 使用任何方法去估计$h^*(n)$, 用$h(n)$表示$h^*(n)$的估计
    - $h(n) \le h^*(n)$总为真
    - $f(n)=g(n)+h(n) \le g(n)+h^*(n)=f^*(n)$定义为$n$的代价

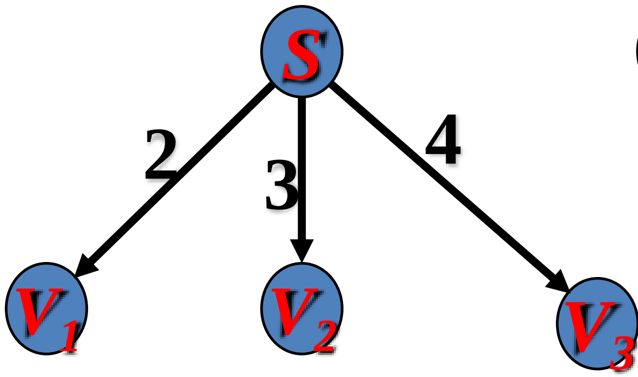
例1. 最短路径问题:

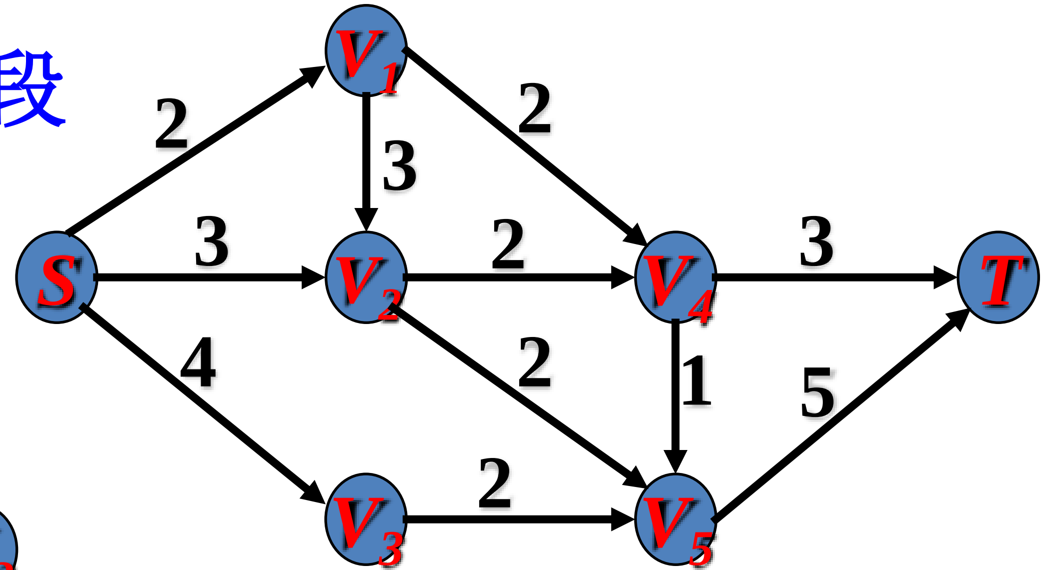
– 输入:



– 输出: 发现一个从*S*到*T*的最短路径

– 求解树的第一阶段





$$g(V_1)=2,\ \ g(V_2)=3,\ \ g(V_3)=4$$

$$\cancel{h^*(V_1)=5,\ \ f^*(V_1)=g(V_1)+h^*}(V_1)=7$$

– 估计$h^*(n)$

- 从V_1出发有两种可能: 代价为2, 代价为3, 最小者为2
- $h^*(V_1)\geq 2$, 选择$h(n)=2$为$h^*(V_1)$的估计值
- $f(V_1)=g(v_1)+h(V_1)=4$为V_1的代价

- **A*算法本质—已经发现的解是优化解**

定理1. 使用Best-first策略搜索树，如果A*选择的节点是标节点，则该节点表示的解是优化解.

证明. 令n是任意扩展到的节点，t是选中目标节点.

往证$f(t)=g(t)$是优化解代价.

(1). A*算法使用Best-first策略，$f(t) \le f(n)$.

(2). A*算法使用$h(n) \le h^*(n)$估计规则，$f(t) \le f(n) \le f^*(n)$.

(3). $\{f^*(n)\}$中必有一个为优化解的代价，令其为$f^*(s)$. 我们有$f(t) \le f^*(s)$.

(4). t是目标节点$h(t)=0$，所以$f(t)=g(t)+h(t)=g(t) \le f^*(s)$.

(5). $f(t)=g(t)$是一个可能解，$g(t) \ge f^*(s)$，$f(t)=g(t)=f^*(s)$.

A*算法的规则

(1). 使用Best-first策略搜索树;

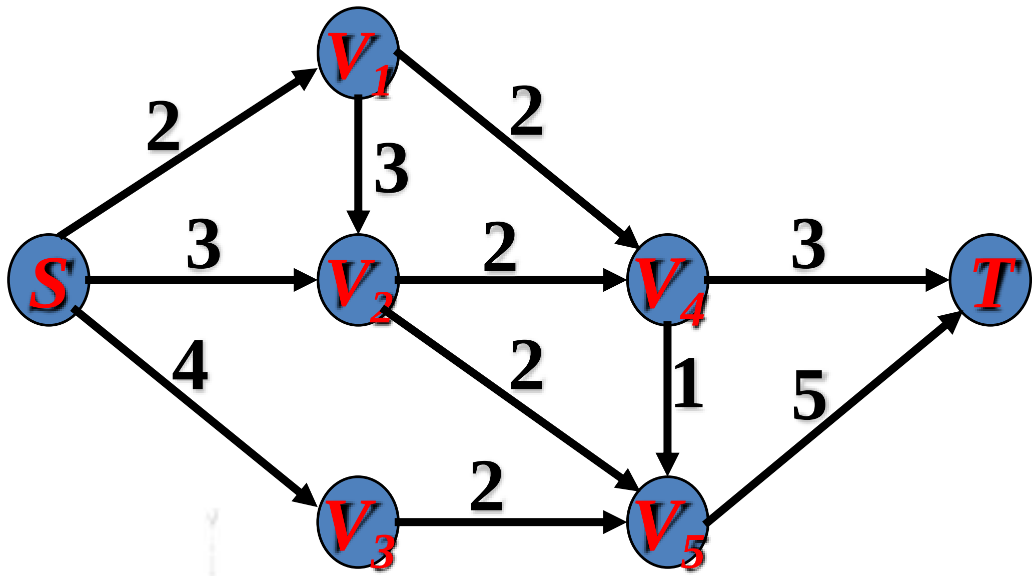
(2). 节点n的代价函数为$f(n)=g(n)+h(n)$, $g(n)$是从根到n的路径代价，$h(n)$是从n到某个目标节点的优化路径代价;

(3). 对于所有n, $h(n) \leq h^*(n)$;

(4). 当选择到的节点是目标节点时, 算法停止, 返回一个优化解.

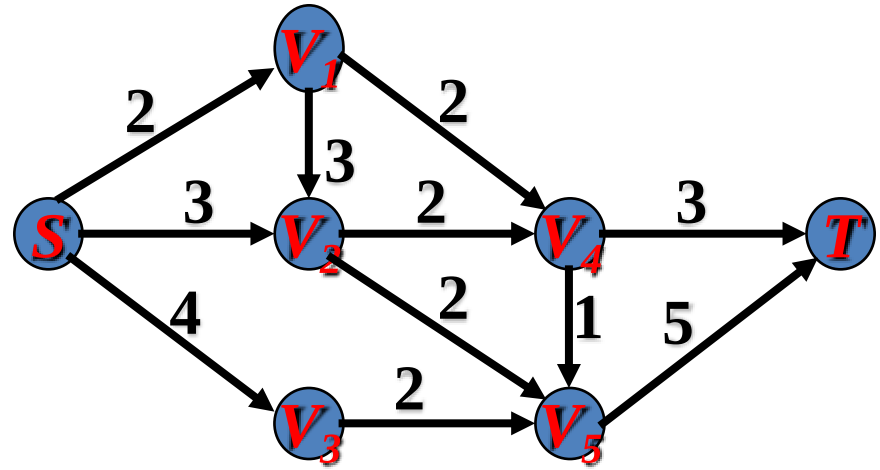
应用A*算法求解最短路径问题

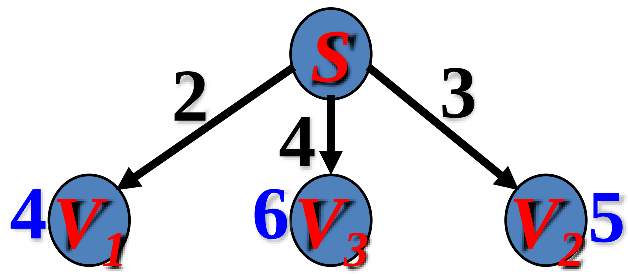
- 问题的输入:



- A*算法的执行全过程

Step 1



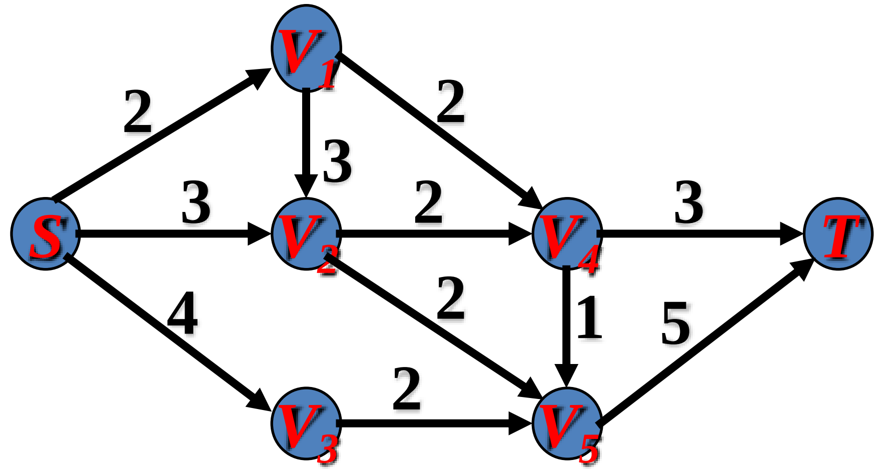


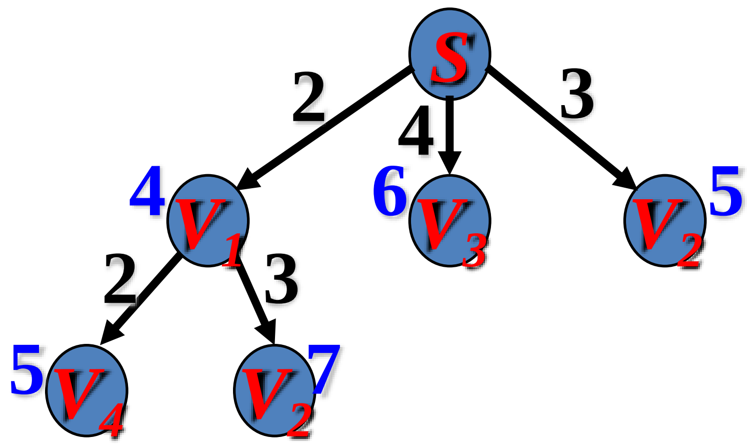
$g(V_1)=2 \quad h(V_1)=min\{2,3\}=2 \quad f(V_1)=2+2=4$

$g(V_3)=4 \quad h(V_3)=min\{2\}=2 \quad f(V_3)=4+2=6$

$g(V_2)=3 \quad h(V_2)=min\{2,2\}=2 \quad f(V_2)=2+2=5$

Step 2. 扩展V_1

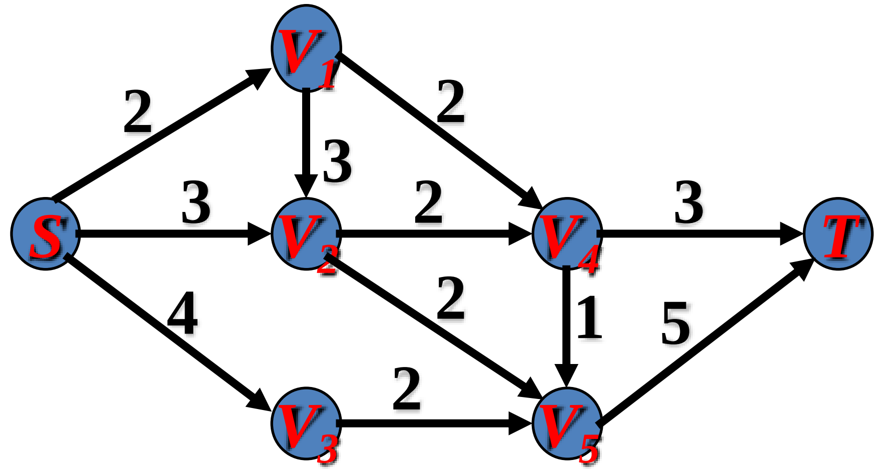


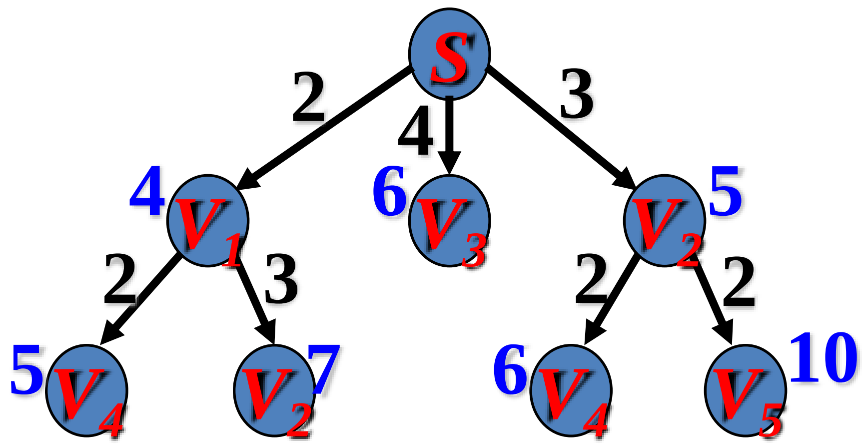


$g(V_4)=2+2=4$ $h(V_4)=min\{3,1\}=1$ $f(V_4)=4+1=5$

$g(V_2)=2+3=5$ $h(V_2)=min\{2, 2\}=2$ $f(V_2)=5+2=7$

Step 3. 扩展V_2

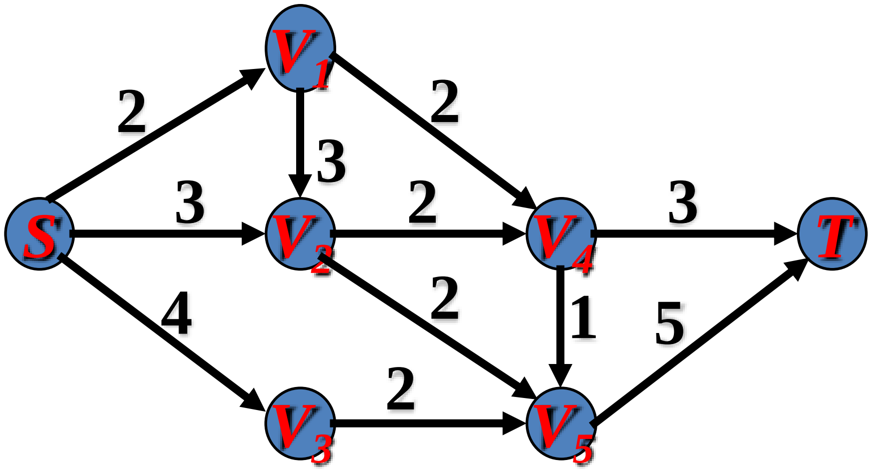


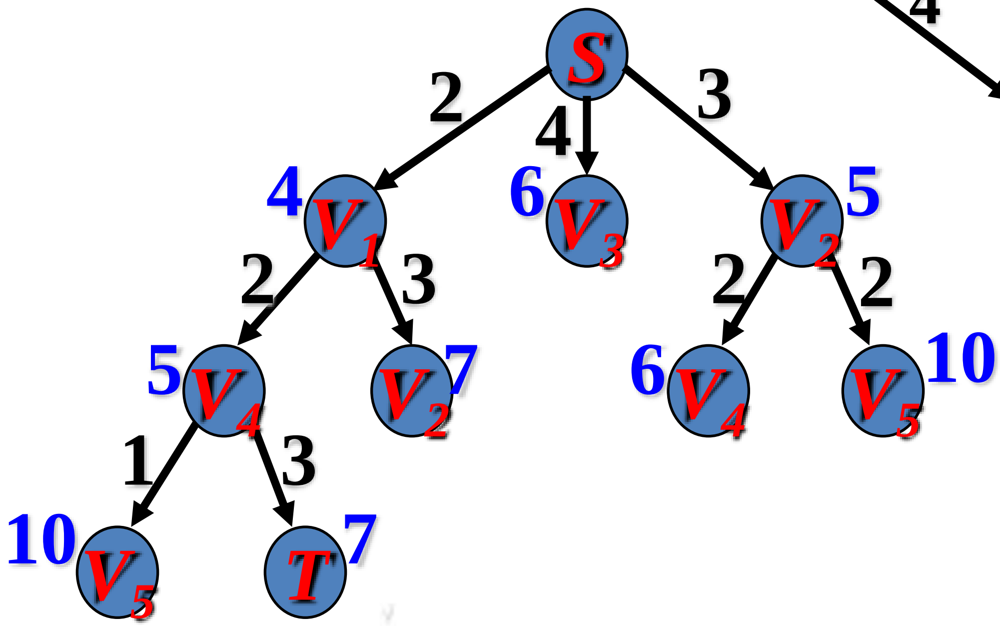


$g(V_4)=3+2=5$ $h(V_4)=min\{3,1\}=1$ $f(V_4)=5+1=6$

$g(V_5)=3+2=5$ $h(V_5)=min\{5\}=5$ $f(V_5)=5+5=10$

Step 4. 扩展V_4

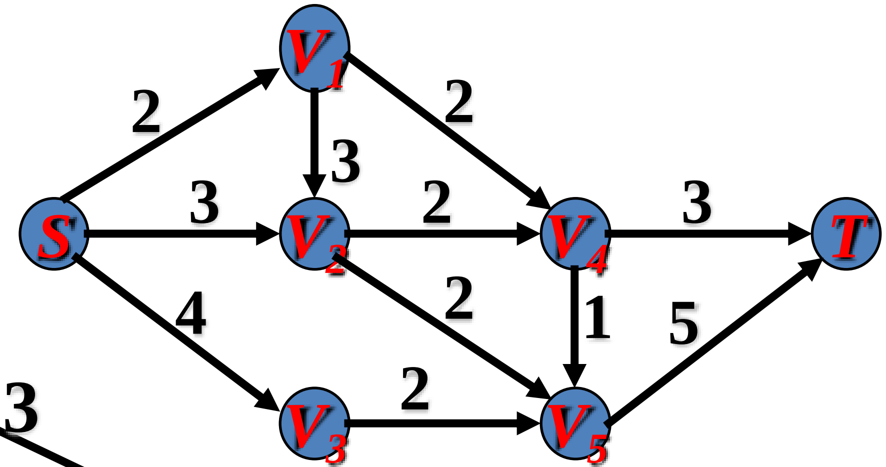


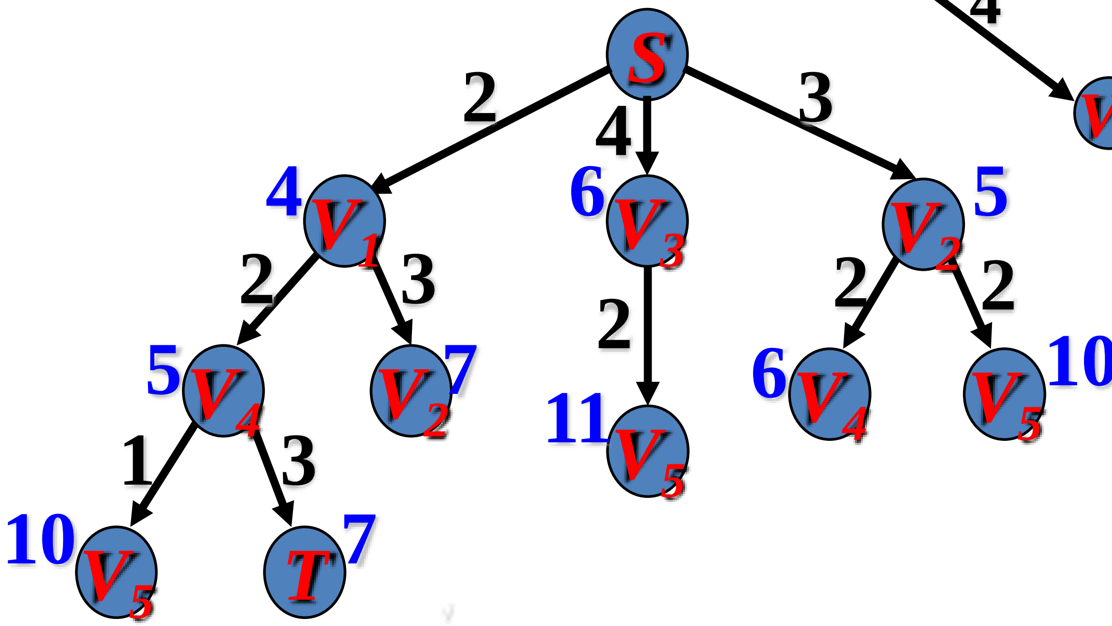


$g(V_5)=2+2+1=5$ $h(V_5)=min\{5\}=5$ $f(V_5)=5+5=10$

$g(T)=2+2+3=7$ $h(T)=0$ $f(T)=7+0=7$

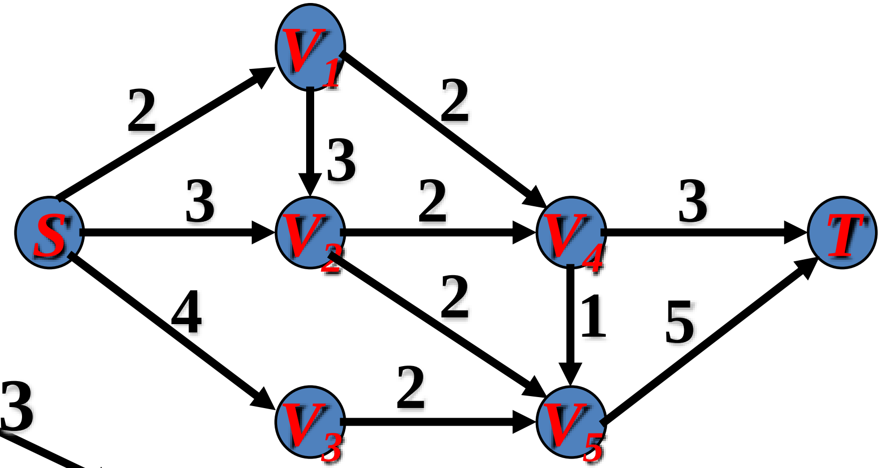
Step 5. 扩展V_3

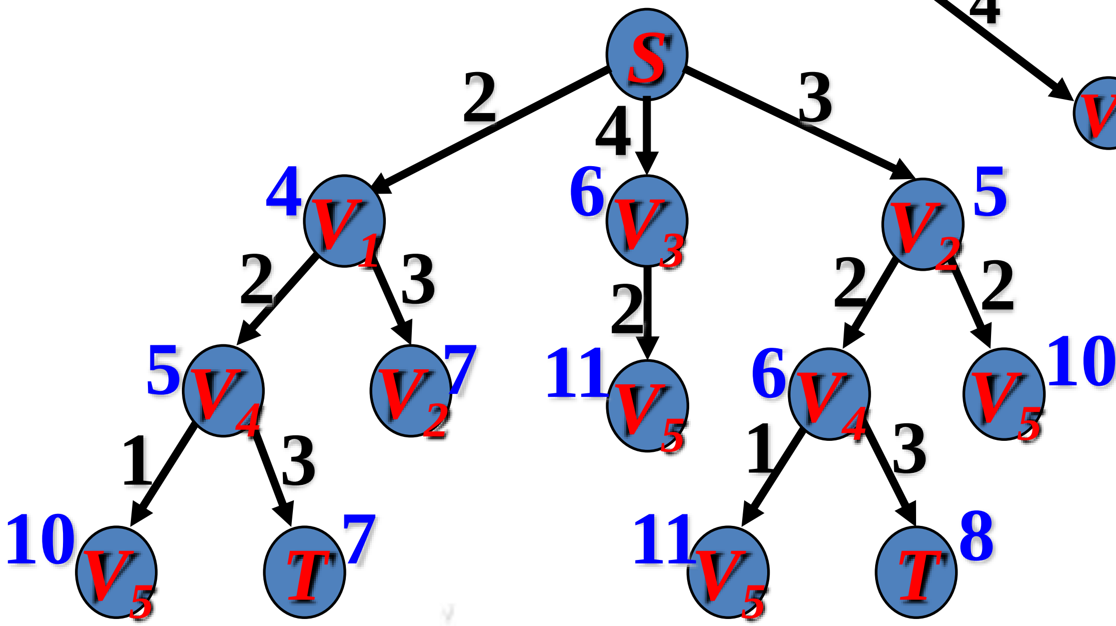




$g(V_5)=4+2=6$　$h(V_5)=min\{5\}=5$　$f(V_5)=6+5=11$

Step 6. 扩展V_4

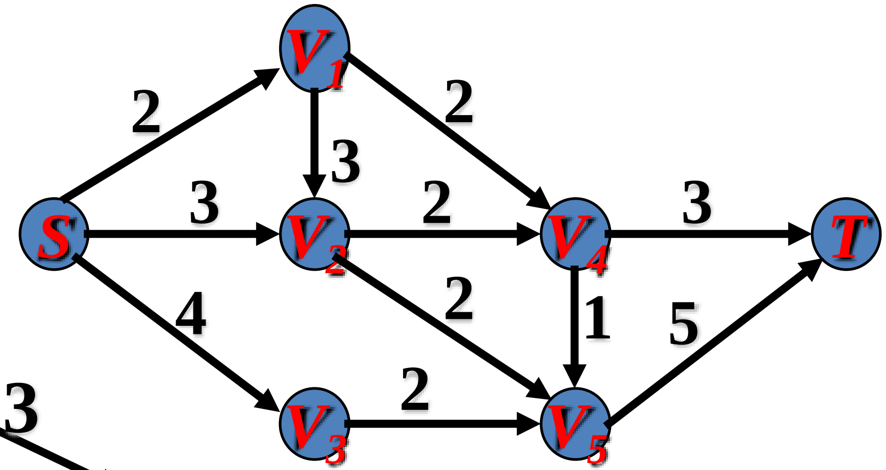


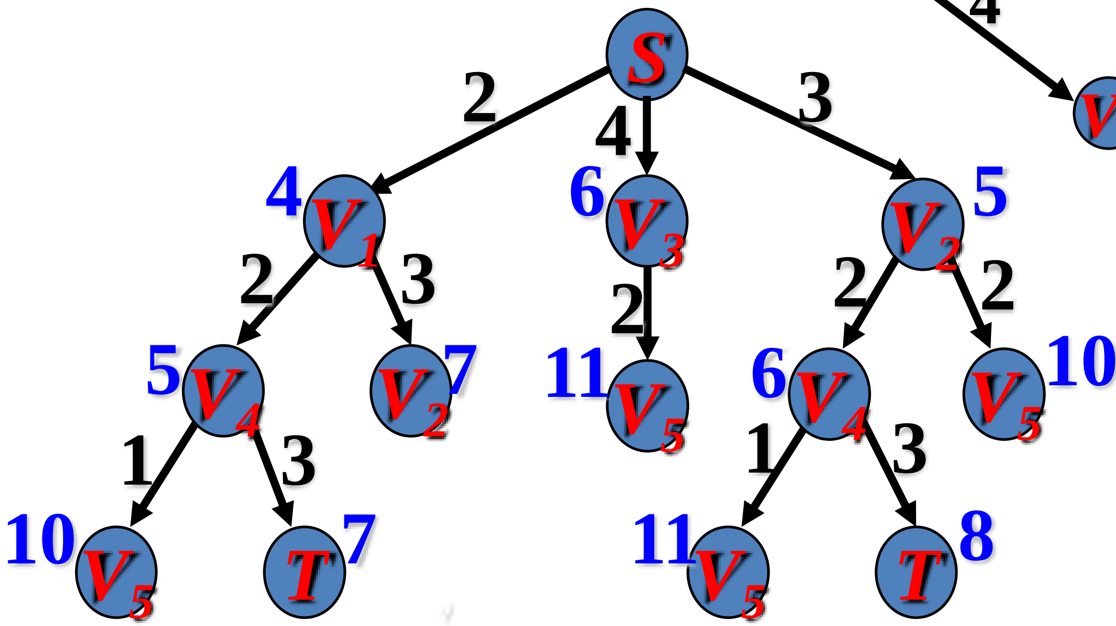


$g(V_5)=3+2+1=6$ $h(V_5)=min\{5\}=5$ $f(V_5)=6+5=11$

$g(T)=3+2+3=8$ $h(T)=0$ $f(T)=8+0=8$

Step 7. 扩展*T*





因为*T*是目标节点, 所以我们得到解:

$$S \to V_1 \to V_4 \to T$$