习题1 解答

1. 写出下列曲线的矢量方程，并说明它们是何种曲线.

(1) $x = a\cos t$，$y = b\sin t$；

(2) $x = 3\sin t$，$y = 4\sin t$，$z = 3\cos t$.

解 (1) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = a\cos t\boldsymbol{i} + b\sin t\boldsymbol{j},$$

其图形是 xOy 平面上之椭圆；

(2) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = 3\sin t\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j} + 3\cos t\boldsymbol{k},$$

其图形是平面 $4x - 3y = 0$ 与圆柱面 $x^2 + z^2 = 3^2$ 之交线，是一椭圆.

2. 设有定圆 O 与动圆 C，半径均为 a，动圆与定圆外相切且滚动(如图 1)．求动圆上一定点 M 所描曲线的矢量方程．

[提示:(1)设开始时 M 点与 A 点重合;(2)取 $\angle AOC=\theta$ 为参数;(3) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$．]

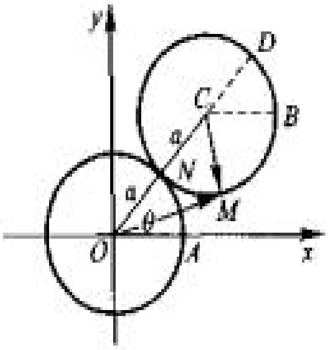

图 1

解 如图 1，延长 OC 至 D，过 C 作 $CB\,/\!/\,Ox$ 轴，则有

$\angle DCB=\theta$ (同位角相等)．

又设 N 为二圆的切点，则因 $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MN}$，故有

$\angle MCO=\theta$ (等圆上等弧所对之圆心角相等)，

所以 $$\angle DCB=\angle MCO=\theta,$$

从而 $$\angle BCM=\pi-\angle DCB-\angle MCO=\pi-2\theta,$$

则矢量 $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴正向的交角为：$-(\pi-2\theta)$．

于是有
$$\overrightarrow{OC}=2a\cos\theta\boldsymbol{i}+2a\sin\theta\boldsymbol{j},$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}&=a\cos[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{i}+a\sin[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{j}\\&=-a\cos2\theta\boldsymbol{i}-a\sin2\theta\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

由此得所求曲线的矢量方程为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}\\&=(2a\cos\theta-a\cos2\theta)\boldsymbol{i}+(2a\sin\theta-a\sin2\theta)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

3. (1) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{k}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha$.

证

(1) $$\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\end{vmatrix}=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k};$$

(2) $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\cos(\varphi+\alpha)\boldsymbol{i}+\sin(\varphi+\alpha)\boldsymbol{j}$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{i} \\
&\quad + (\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{j} \\
&= \cos\alpha(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j}) \\
&\quad + \sin\alpha(-\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) \\
&= \cos\alpha\boldsymbol{e}(\varphi) + \sin\alpha\boldsymbol{e}_1(\varphi).
\end{aligned}
$$

4. 求曲线 $x = t$，$y = t^2$，$z = \frac{2}{3}t^3$ 的切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$.

解 曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^3\boldsymbol{k},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k}$$

为曲线的切向矢量，其模

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2,$$

于是切向单位矢量

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\bigg/\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k}}{1 + 2t^2}.$$

5. 设 $\boldsymbol{a}(t)$三阶可导，证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] = \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right) + \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right) + \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

由于在三个矢量的混合积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$中，若有两个矢量相等时，此混合积为零，故有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right] &= 0 + 0 + \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right) \\
&= \boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).
\end{aligned}
$$

6. 求曲线 $x=a\sin^2 t$，$y=a\sin 2t$，$z=a\cos t$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切向矢量.

解 曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\sin^2 t\boldsymbol{i}+a\sin 2t\boldsymbol{j}+a\cos t\boldsymbol{k},$$

则
$$\boldsymbol{r}'=a\sin 2t\boldsymbol{i}+2a\cos 2t\boldsymbol{j}-a\sin t\boldsymbol{k}.$$

以 $t=\frac{\pi}{4}$ 代入，即得所求的切向矢量为

$$\boldsymbol{r}'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\boldsymbol{k}=a\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\boldsymbol{k}.$$

7. 求曲线 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$ 上这样的点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解
$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k}$$

为曲线的切向矢量，当其与所给平面平行时，必与此平面的法矢量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

相垂直，即有
$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

即
$$1+4t+3t^2=0\quad 或\quad (1+t)(1+3t)=0,$$

由此解得 $t=-1$ 与 $t=-\frac{1}{3}$. 将此依次代入 $\boldsymbol{r}$，即得所求之点的矢径：

$$\boldsymbol{r}|_{t=-1}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

及
$$\boldsymbol{r}|_{t=-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{9}\boldsymbol{j}-\frac{1}{27}\boldsymbol{k},$$

故所求点之坐标为：$(-1,1,-1)$ 与 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

8. 证明圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}(\theta)+b\theta\boldsymbol{k}$ 的切线与 Oz 轴之间成定角.

证 切向量 $\boldsymbol{r}'=a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\boldsymbol{k}$.

今以 φ 表示 $\boldsymbol{r}'$ 与 Oz 轴之间的夹角，即切线与 Oz 轴之间的夹角，则有

$$|\boldsymbol{r}'|\cos\varphi = b,$$

$$\cos\varphi = \frac{b}{|\boldsymbol{r}'|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以
$$\varphi = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 常数.$$

9. 计算 $\int \varphi^2 \boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

解 用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int \varphi^2 \boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi &= -\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi) + 2\int \varphi\boldsymbol{e}_1(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= -\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi) + 2\varphi\boldsymbol{e}(\varphi) - 2\int \boldsymbol{e}(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= -\varphi^2\boldsymbol{e}_1(\varphi) + 2\varphi\boldsymbol{e}(\varphi) + 2\boldsymbol{e}_1(\varphi) + \boldsymbol{C} \\ &= 2\varphi\boldsymbol{e}(\varphi) + (2-\varphi^2)\boldsymbol{e}_1(\varphi) + \boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

10. 已知 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\cos 2t + \boldsymbol{R}\sin 2t)$（$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ 为常矢），求 $\boldsymbol{X}$.

解
$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \int \boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\cos 2t + \boldsymbol{R}\sin 2t)\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{P}\times\left(\boldsymbol{Q}\int\cos 2t\mathrm{d}t + \boldsymbol{R}\int\sin 2t\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\sin 2t - \boldsymbol{R}\cos 2t) + \boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

11. 已知 $\boldsymbol{A}(t)$ 有二阶连续导数，$\boldsymbol{B}(t) = 3\boldsymbol{A}'(t)$，求 $\int \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t$.

解 由条件知 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 平行，故有 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{0}$. 从而

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t &= \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t \\ &= \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{0}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

12. 设 $\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{C} = 3\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$，计算 $\int_1^2 (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\mathrm{d}t$.

解 $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} t & -3 & 2t \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & t & -1 \end{vmatrix}=14t-21,$$

故

$$\int_1^2(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\mathrm{d}t=\int_1^2(14t-21)\mathrm{d}t=0.$$

13. 一质点沿曲线 $\boldsymbol{r}=r\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\varphi\boldsymbol{j}$ 运动，其中 r, φ 均为时间 t 的函数.

(1) 求速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及其垂直方向上的投影 v_r 和 v_φ；

(2) 求加速度 $\boldsymbol{w}$ 在同样方向上的投影 w_r 和 w_φ.

[提示:使用圆函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)$,则 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 及 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 之方向即为矢径方向及与之垂直的方向.]

解 将 $\boldsymbol{r}$ 写成 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}(\varphi)$，则

(1) $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}(\varphi)+r\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

由此可知 $$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad v_\varphi=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t};$$

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{w}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}(\varphi)+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}-r\boldsymbol{e}(\varphi)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\\&=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}(\varphi)+\left[r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{e}_1(\varphi),\end{aligned}$$

所以 $$w_r=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2,\ w_\varphi=r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

14. 求等速圆周运动 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$ 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{w}$,并讨论它们与 $\boldsymbol{r}$ 的关系.

解 将 $\boldsymbol{r}$ 写成 $\boldsymbol{r}=R\boldsymbol{e}(\omega t)$，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'=R\omega\boldsymbol{e}_1(\omega t),\quad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{r}''=-R\omega^2\boldsymbol{e}(\omega t).$$

由于 $|\boldsymbol{r}|=R$ 为常数，即 $\boldsymbol{r}$ 为定长矢量，故必与 $\boldsymbol{r}'$，即 $\boldsymbol{v}$ 互相垂直.

又 $$\boldsymbol{w} = -R\omega^2\boldsymbol{e}(\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{r},$$
说明 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 平行，但指向相反.

*15. 已知 $\boldsymbol{A}(t)$ 和一非零常矢 $\boldsymbol{B}$ 恒满足 $\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$，又 $\boldsymbol{A}'(t)$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角 θ 为常数，试证明 $\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t)$.

证 在 $\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$ 的两边对 t 求导，得 $\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}=1$，即
$$|\boldsymbol{A}'(t)||\boldsymbol{B}|\cos\theta=1.$$
由于 θ 为常数，且由此式知 $\cos\theta\neq0$，故有
$$|\boldsymbol{A}'(t)|=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|\cos\theta}=\text{常数},$$
说明 $\boldsymbol{A}'(t)$ 为定长矢量，故必与其导矢 $\boldsymbol{A}''(t)$ 互相垂直，即有
$$\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t).$$

习题 2 解答

1. 说出下列数量场所在的空间区域，并求出其等值面：

(1) $u=\dfrac{1}{Ax+By+Cz+D}$;

(2) $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 数量场 $u=\dfrac{1}{Ax+By+Cz+D}$ 所在的空间区域，是除去平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 以外的全部空间，场的等值面为
$$\frac{1}{Ax+By+Cz+D}=C_1$$
或 $$Ax+By+Cz+D-\frac{1}{C_1}=0\quad(C_1\neq0\text{ 为任意常数}).$$
这是与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的一族平面.

(2) 数量场 $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 所在的空间区域，是坐标满足
$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant1\quad\text{或}\quad z^2\leqslant x^2+y^2\quad(x^2+y^2\neq0)$$
的点所组成的空间部分. 场的等值面为

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$$

或 $$z^2=(x^2+y^2)\sin^2 C\quad(x^2+y^2\neq 0).$$

当 $\sin C\neq 0$ 时，是顶点在坐标原点的一族圆锥面(除顶点外)；当 $\sin C=0$ 时，是除去原点的 xOy 平面.

2. 求数量场 $u=\frac{x^2+y^2}{z}$经过点 $M(1,1,2)$的等值面方程.

解 在点 $M(1,1,2)$处函数 $u=\frac{1^2+1^2}{2}=1$，故所求等值面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{z}=1\quad\text{或}\quad z=x^2+y^2\quad(z\neq 0),$$

是除去原点的旋转抛物面.

3. 已知数量场 $u=xy$，求场中与直线 $x+2y-4=0$ 相切的等值线方程.

解 数量场 $u=xy$ 的等值线方程为

$$xy=C,$$

其斜率 $y'=-\frac{y}{x}$. 又所给直线的斜率为 $y'=-\frac{1}{2}$. 在切点处此二斜率应相等，即

$$-\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}\quad\text{或}\quad x=2y.$$

代入直线方程，解得 $y=1$，从而 $x=2$，即切点坐标为$(2,1)$. 函数 u 在这一点的对应值为 $u=2$. 故所求等值线方程为

$$xy=2.$$

4. 求矢量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}+zy^2\boldsymbol{k}$ 的矢量线方程.

解 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2y}=\frac{\mathrm{d}z}{zy^2},$$

由此有 $$x\,\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}y\quad\text{及}\quad\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

解之，即得所求的矢量线方程

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ z = C_2 x \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{为任意常数}).$$

5. 求矢量场 $\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + (x+y)z\boldsymbol{k}$ 通过点 $M(2,1,1)$ 的矢量线方程.

解 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)z}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 解得 $$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + C_1.$$

又按等比定理有

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{x^2-y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)z} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y} = \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

由此解得 $$x - y = C_2 z.$$

故矢量线族方程为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} + C_1, \\ x - y = C_2 z. \end{cases}$$

以点 $M(2,1,1)$ 的坐标代人，确定出 $C_1 = -\frac{1}{2}$，$C_2 = 1$，代人上式，即得通过点 M 的矢量线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2}, \\ x - y = z. \end{cases} \tag{A}$$

另法 由 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 解得 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + C_1$，再由此解出 $x = \frac{y}{1 + C_1 y}$，代人 $\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)z}$ 中得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\left(\dfrac{2y + C_1 y^2}{1 + C_1 y}\right)z},$$

即 $$\frac{(2+C_1y)\mathrm{d}y}{y(1+C_1y)}=\frac{\mathrm{d}z}{z} \quad 或 \quad \left(\frac{2}{y}-\frac{C_1}{1+C_1y}\right)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

由此解得 $$\frac{y^2}{1+C_1y}=C_2z \quad 或 \quad xy=C_2z,$$

于是得矢量线族方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+C_1,\\ xy=C_2z.\end{cases}$$

以点 $M(2,1,1)$ 的坐标代入，得 $C_1=-\dfrac{1}{2}$，$C_2=2$. 从而得通过点 M 的矢量线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2},\\ xy=2z\end{cases} \tag{B}$$

将方程组(B)与方程组(A)相比，虽然第二个方程不同，但它们所表达的矢量线是一样的. 因为从(A)、(B)两组方程之一可以得出其另一组来.

比如：将方程组(A)中的第一个方程改写为 $xy=2(x-y)$，再以其第二个方程 $x-y=z$ 代入，得 $xy=2z$ 将此方程与(A)的第一个方程联立，即得方程组(B).

*6. 求矢量场 $\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 通过曲线 C：$\begin{cases}z=4,\\ x^2+y^2=R^2\end{cases}$ 的矢量管方程.

解 矢量线满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{2z}=\frac{\mathrm{d}z}{1},$$

解之得矢量线族：

$$\begin{cases}x=C_1,\\ y=z^2+C_2.\end{cases}$$

由于曲线 C 在矢量管上，故其上点的坐标满足矢量管上的矢量

线方程．因此，将 C 之方程$\begin{cases} z=4, \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$与上面矢量线族方程联立，消去 x，y，z，即得矢量管上 C_1，C_2 之间应满足的关系式

$$C_1^{\,2}+(16+C_2)^2=R^2.$$

再将此式与矢量线族方程联立消去 C_1，C_2，即得所求之矢量管方程为

$$x^2+(y-z^2+16)^2=R^2.$$

*7. 证明 $u=(x+y)^2-z$ 为平行平面数量场.

[提示：考查场中直线 $l=\begin{cases} x+y=2, \\ z=1, \end{cases}$以及与之平行的任一直线 L 上，u 的数值.]

证 在直线 l：$\begin{cases} x+y=2, \\ z=1 \end{cases}$上所有点处，恒有 $u=2^2-1=3$，且与 l 平行的任一直线 L：$\begin{cases} x+y=C_1, \\ z=C_2 \end{cases}$上，同样恒有 $u=C_1^{\,2}-C_2$（常数）．因此，在任一块与 l 垂直的平面上，数量 u 的分布都是相同的．所以数量场 u 为平行平面数量场．

习题 3 解答

1. 求数量 $u=x^2z^3+2y^2z$ 在点 $M(2,0,-1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=2x\boldsymbol{i}-xy^2\boldsymbol{j}+3z^4\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数.

解 $\boldsymbol{l}\Big|_M=4\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=\frac{3}{5}.$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=2xz^3\Big|_M=-4,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=4yz\Big|_M=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=(3x^2z^2+2y^2)\Big|_M=12,$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_M$$

$$=(-4)\times\frac{4}{5}+0\times0+12\times\frac{3}{5}=4.$$

2. 求数量场 $u=3x^2z-xy+z^2$ 在点 $M(1,-1,1)$ 处沿曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$ 朝 t 增大一方的方向导数.

解 所求方向导数，等于函数 u 在该点处沿曲线上同一方向的切线的方向导数. 曲线上点 M 所对应的参数为 $t=1$，从而在点 M 处沿所取方向，曲线的切线方向数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_M=1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_M=\left.-2t\right|_{t=1}=-2,\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_M=\left.3t^2\right|_{t=1}=3,$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

又 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.(6xz-y)\right|_M=7,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.-x\right|_M=-1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.(3x^2+2z)\right|_M=5.$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_M$$

$$=7\times\frac{1}{\sqrt{14}}+(-1)\times\frac{-2}{\sqrt{14}}+5\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{24}{\sqrt{14}}.$$

3. 数量场 $u=x^2yz^3$ 在点 $M(2,1,-1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？这个最大值又是多少？

解 $$\left.\mathbf{grad}\,u\right|_M=\left.(2xyz^3\boldsymbol{i}+x^2z^3\boldsymbol{j}+3x^2yz^2\boldsymbol{k})\right|_M$$

$$=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k},$$

故知函数 u 沿 $\left.\mathbf{grad}\,u\right|_M=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数为最大，这个最大值为 $\left|\left.\mathbf{grad}\,u\right|_M\right|=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$.

4. 画出平面场 $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 中 $u=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2$ 的等

$$=(-4)\times\frac{4}{5}+0\times0+12\times\frac{3}{5}=4.$$

2. 求数量场 $u=3x^2z-xy+z^2$ 在点 $M(1,-1,1)$ 处沿曲线 $x=t,\ y=-t^2,\ z=t^3$ 朝 t 增大一方的方向导数.

解 所求方向导数，等于函数 u 在该点处沿曲线上同一方向的切线的方向导数. 曲线上点 M 所对应的参数为 $t=1$，从而在点 M 处沿所取方向，曲线的切线方向数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_M=1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_M=\left.-2t\right|_{t=1}=-2,\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_M=\left.3t^2\right|_{t=1}=3,$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

又
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.(6xz-y)\right|_M=7,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.-x\right|_M=-1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.(3x^2+2z)\right|_M=5.$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_M$$

$$=7\times\frac{1}{\sqrt{14}}+(-1)\times\frac{-2}{\sqrt{14}}+5\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{24}{\sqrt{14}}.$$

3. 数量场 $u=x^2yz^3$ 在点 $M(2,1,-1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？这个最大值又是多少？

解 $$\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M=\left.(2xyz^3\boldsymbol{i}+x^2z^3\boldsymbol{j}+3x^2yz^2\boldsymbol{k})\right|_M$$

$$=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k},$$

故知函数 u 沿 $\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数为最大，这个最大值为 $\left|\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M\right|=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$.

4. 画出平面场 $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 中 $u=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2$ 的等

值线，并画出场在点 $M_1(2,\sqrt{2})$ 与点 $M_2(3,\sqrt{7})$ 处的梯度矢量，看其是否符合下面事实：

(1) 梯度在等值线较密处的模较大，在较稀处的模较小；

(2) 在每一点处，梯度垂直于过该点的等值线，并指向 u 增大的方向.

解 所述等值线的方程为

$$x^2-y^2=0,\quad x^2-y^2=1,$$
$$x^2-y^2=2,\quad x^2-y^2=3,$$
$$x^2-y^2=4,$$

其中第一个又可以写为 $x-y=0$，$x+y=0$ 为二直线，其余的都是以 Ox 轴为实轴的等轴双曲线（如图 8，图中 $\boldsymbol{G}_1=\mathbf{grad}\,u\big|_{M_1}$，$\boldsymbol{G}_2=\mathbf{grad}\,u\big|_{M_2}$.）

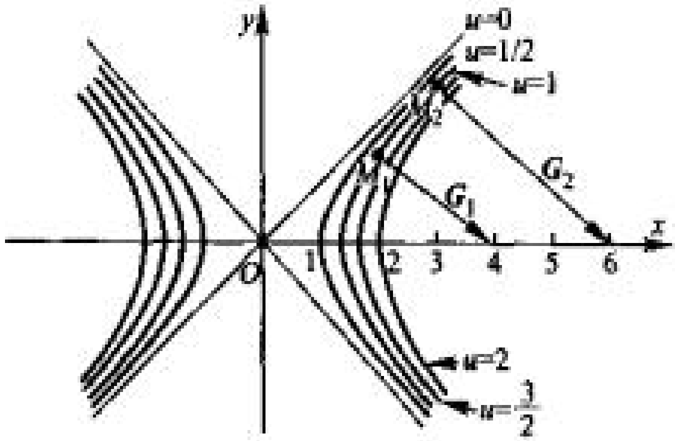

图 8

由于
$$\mathbf{grad}\,u=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j},$$
故
$$\mathbf{grad}\,u\big|_{M_1}=2\boldsymbol{i}-\sqrt{2}\boldsymbol{j},\quad \mathbf{grad}\,u\big|_{M_2}=3\boldsymbol{i}-\sqrt{7}\boldsymbol{j}.$$
由图可见，其图形都符合所论之事实.

5. 用以下二法求数量场 $u=xy+yz+zx$ 在点 $P(1,2,3)$ 处沿

其矢径方向的方向导数.

(1) 直接应用方向导数公式;

(2) 作为梯度在该方向的投影.

解 (1) 点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，其模 $r=\sqrt{14}$. 其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

又
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=(y+z)\Big|_P=5,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=(x+z)\Big|_P=4,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=(x+y)\Big|_P=3,$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_P$$
$$=5\times\frac{1}{\sqrt{14}}+4\times\frac{2}{\sqrt{14}}+3\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{22}{\sqrt{14}}.$$

(2)
$$\mathbf{grad}\ u\Big|_P=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\Big|_P$$
$$=5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}.$$

所以
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\mathbf{grad}\ u\Big|_P\cdot\boldsymbol{r}^{\circ}$$
$$=5\times\frac{1}{\sqrt{14}}+4\times\frac{2}{\sqrt{14}}+3\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{22}{\sqrt{14}}.$$

两种方法结果相同.

6. 求数量场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $O(0,0,0)$ 与 $A(1,1,1)$ 处梯度的大小和方向余弦. 又问在哪些点上的梯度为 $\mathbf{0}$?

解 $\mathbf{grad}\ u=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{grad}\ u\Big|_O = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k},\ \mathbf{grad}\ u\Big|_A = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}.$$

其大小，即其模依次为

$$\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7,\ \sqrt{6^2 + 3^2 + 0^2} = 3\sqrt{5},$$

于是 $\mathbf{grad}\ u\Big|_O$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{3}{7},\ \cos\beta = -\frac{2}{7},\ \cos\gamma = -\frac{6}{7}.$$

$\mathbf{grad}\ u\Big|_A$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma = 0.$$

现在来求使 $\mathbf{grad}\ u = \mathbf{0}$ 之点：即求坐标满足

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ 4y + x - 2 = 0, \\ 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

之点. 由此方程组解得 $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$. 故使梯度为 $\mathbf{0}$ 之点为 $(-2,1,1)$.

7. 通过梯度求曲面 $x^2y + 2xz = 4$ 上一点 $M(1,-2,3)$ 处的法线方程.

解 所给曲面可视为数量场 $u = x^2y + 2xz$ 的一张等值面，因此，场 u 在点 M 处的梯度，就是曲面在该点的法矢量，即

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\ u\Big|_M &= (2xy + 2z)\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k}\Big|_M \\ &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

故所求的法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

8. 求数量场 $u = 3x^2 + 5y^2 - 2z$ 在点 $M(1,1,3)$ 处沿等值面朝 Oz 轴正向一方的法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$.

解 由$\frac{\partial u}{\partial z}=-2<0$知，沿 Oz 轴正向一方，函数 u 是减小的，因此，所论方向，恰好与 M 点处的梯度方向相反，故有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=\left|\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M\right|\cos\pi=-\left|\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M\right|.$$

而 $\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M=\left.(6x\boldsymbol{i}+10y\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\right|_M=6\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,

$$\left|\left.\mathbf{grad}\ u\right|_M\right|=\sqrt{140}.$$

故
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=-\sqrt{140}=-2\sqrt{35}.$$

*9. 证明 $\mathbf{grad}\ u$ 为常矢的必要和充分条件是 u 为线性函数：

$$u=ax+by+cz+d\quad(a,b,c,d\text{ 为常数}).$$

证 充分性：设 $u=ax+by+cz+d$,

则有
$$\mathbf{grad}\ u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}\text{ 为常矢}.$$

必要性：设 $\mathbf{grad}\ u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 为常矢，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\ \frac{\partial u}{\partial y}=b,\ \frac{\partial u}{\partial z}=c.$$

由$\frac{\partial u}{\partial x}=a$ 有
$$u=ax+\varphi(y,z).$$

两端对 y 求导，注意到$\frac{\partial u}{\partial y}=b$，则有 $b=\varphi'_y(y,z)$，从而

$$\varphi(y,z)=by+\psi(z),$$

于是
$$u=ax+by+\psi(z).$$

再两端对 z 求导，注意到$\frac{\partial u}{\partial z}=c$，则有 $c=\psi'(z)$，从而

$$\psi(z)=cz+d,$$

所以有
$$u=ax+by+cz+d.$$

*10. 若在数量场 $u=u(M)$中，恒有 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$，证明 $u=$常数.

证 因为 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

由$\frac{\partial u}{\partial x}=0$，有

$$u=C_1+\varphi(y,z).$$

两端对 y 求导，注意到$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，则有$0=\varphi'_y(y,z)$，从而

$$\varphi(y,z)=C_2+\psi(z),$$

于是
$$u=C_1+C_2+\psi(z).$$

两端再对 z 求导，注意到$\frac{\partial u}{\partial z}=0$，则有$0=\psi'(z)$，从而

$$\psi(z)=C_3,$$

所以有
$$u=C_1+C_2+C_3=C \quad (\text{常数}).$$

*11. 设函数 $u=u(M)$在点 M_0 处可微，且 $u(M)\leqslant u(M_0)$，试证明在点 M_0 处有 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$.

证 因为函数 u 在点 M_0 处可微，故在点 M_0 处存在偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

存在．由于 $u(M)\leqslant u(M_0)$，有 $\Delta u=u(M)-u(M_0)\leqslant 0$．于是在点 M_0 处：

当 $\Delta x>0$ 时，有$\frac{\Delta u}{\Delta x}\leqslant 0$，故有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta u}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时，有$\frac{\Delta u}{\Delta x}\geqslant 0$，故有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta u}{\Delta x}\geqslant 0,$$

于是有$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=0$．同理可得$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=0$．因此有

$$\left.\mathbf{grad}\ u\right|_{M_0}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right|_{M_0}=\mathbf{0}.$$

习题 4 解答

1. 设 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\geqslant 0)$ 求矢量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 向上穿过 S 的通量 Φ.

[提示:注意 S 的法矢 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同指向.]

解
$$\Phi=\iint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S r_n \mathrm{d}S=\iint_S |\boldsymbol{r}|\mathrm{d}S$$
$$=a\iint_S \mathrm{d}S=a\cdot 2\pi a^2=2\pi a^3$$

2. 设 S 为曲面 $x^2+y^2=z\ (0\leqslant z\leqslant h)$，求流速场 $\boldsymbol{v}=(x+y+z)\boldsymbol{k}$ 在单位时间内向下侧穿过 S 的流量 Q.

解
$$Q=\iint_S \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\iint_D (x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
其中 D 为 S 在 xOy 面上的投影区域：$x^2+y^2\leqslant h$. 用极坐标计算，有
$$Q=-\iint_D (r\cos\theta+r\sin\theta+r^2)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}(r^2\cos\theta+r^2\sin\theta+r^3)\mathrm{d}r$$
$$=-\int_0^{2\pi}\left[(\cos\theta+\sin\theta)\frac{\sqrt{h}^3}{3}+\frac{h^2}{4}\right]\mathrm{d}\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\pi h^2.$$

3. 求下面矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=(x^3+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^3+xy)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{A}=(1+y\sin x)\boldsymbol{i}+(x\cos y+y)\boldsymbol{j}$.

解 (1) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=3x^2+2y+3z^2$.

(2) $\operatorname{div} \boldsymbol{A}=0$.

(3) $\operatorname{div} \boldsymbol{A}=y\cos x-x\sin y+1$.

4. 求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 在给定点处的值:

(1) $\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,0,-1)$处;

(2) $\boldsymbol{A}=4x\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,1,3)$处;

(3) $\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$)在点 $M(1,3,2)$处.

解 (1) $\operatorname{div} \boldsymbol{A}\Big|_M=(3x^2+3y^2+3z^2)\Big|_M=6$.

(2) $\operatorname{div} \boldsymbol{A}\Big|_M=(4-2x+2z)\Big|_M=8$.

(3)
$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{A}&=xyz\operatorname{div} \boldsymbol{r}+\mathbf{grad}\,(xyz)\cdot\boldsymbol{r}\\&=3xyz+(yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k})\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\&=6xyz.\end{aligned}$$

故
$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}\Big|_M=6xyz\Big|_M=36.$$

5. 求矢量场 $\boldsymbol{A}$ 从内穿出所给闭曲面 S 的通量 Φ:

(1) $\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$, S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$;

(2) $\boldsymbol{A}=(x-y+z)\boldsymbol{i}+(y-z+x)\boldsymbol{j}+(z-x+y)\boldsymbol{k}$, S 为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\Phi&=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\\&=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

其中 Ω 为 S 所围之球域 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 今用球坐标

$$x=r\sin\theta\cos\varphi \quad y=r\sin\theta\sin\varphi \quad z=r\cos\theta$$

计算 有

$$\begin{aligned}\Phi&=3\iiint_\Omega r^2\quad r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^4\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi a^5\end{aligned}$$

(2) $\Phi = \oiint\limits_{S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V$

$$= 3\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = 3 \times \frac{4}{3}\pi abc = 4\pi abc.$$

6. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常矢，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$，求

(1) $\mathrm{div}(r\boldsymbol{a})$；(2) $\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{a})$；(3) $\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{a})$ （n 为整数）.

解 (1) $\mathrm{div}(r\boldsymbol{a}) = r\,\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} + \mathbf{grad}\ r \cdot \boldsymbol{a}$

$$= 0 + \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}}{r}.$$

(2) $\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{a}) = r^2\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} + \mathbf{grad}\ r^2 \cdot \boldsymbol{a}$

$$= 0 + 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}$$

(3) $\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{a}) = r^n\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} + \mathbf{grad}\ r^n \cdot \boldsymbol{a}$

$$= 0 + nr^{n-2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} = nr^{n-2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}.$$

7. 求使 $\mathrm{div}\ r^n\boldsymbol{r} = 0$ 的整数 n（$\boldsymbol{r}$ 与 r 同上题）.

解 $\mathrm{div}\ r^n\boldsymbol{r} = r^n\mathrm{div}\ \boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\ r^n \cdot \boldsymbol{r}$

$$= 3r^n + nr^{n-2}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}$$

$$= 3r^n + nr^n = (3+n)r^n.$$

要使 $\mathrm{div}\ r^n\boldsymbol{r} = 0$，必有 $3 + n = 0$，即 $n = -3$.

8. 设有无穷长导线与 Oz 轴一致，通以电流 $I\boldsymbol{k}$ 后，在导线周围产生磁场，其在点 $M(x, y, z)$处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}),$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，求 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{H}$.

解 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Iy}{2\pi r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Ix}{2\pi r^2}\right)$

$$= \frac{Iy}{\pi r^3}\frac{x}{r} - \frac{Ix}{\pi r^3}\frac{y}{r} = 0 \quad (r \neq 0).$$

9. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$，求：

(1) 使 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = 0$ 的 $f(r)$；

(2) 使 $\mathrm{div}[\mathbf{grad}\ f(r)] = 0$ 的 $f(r)$.

解 (1) $$\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = f(r)\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\, f(r)\cdot\boldsymbol{r}$$
$$= 3f(r) + f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}$$
$$= 3f(r) + rf'(r).$$

令其为0，得微分方程$f'(r) + \dfrac{3}{r}f(r) = 0$，

解之得 $$f(r) = \frac{C}{r^3} \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

(2) $$\operatorname{div}[\mathbf{grad}\, f(r)] = \operatorname{div}\left[f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]$$
$$= \frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\,\frac{f'(r)}{r}\cdot\boldsymbol{r}$$
$$= 3\frac{f'(r)}{r} + \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}$$
$$= 3\frac{f'(r)}{r} + f''(r) - \frac{f'(r)}{r}.$$

令其为0，得微分方程 $f''(r) + \dfrac{2}{r}f'(r) = 0$，

解之即得 $$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (C_1, C_2\text{ 为任意常数}).$$

*10. 已知函数 u 沿封闭曲面 S 向外法线的方向导数为常数 C，Ω 为 S 所围的空间区域，A 为 S 的面积，证明

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, u)\,\mathrm{d}V = CA.$$

证 由奥氏公式

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, u)\,\mathrm{d}V = \oiint_S \mathbf{grad}\, u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S \mathbf{grad}_n u\,\mathrm{d}S$$
$$= \oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = C\oiint_S \mathrm{d}S = CA.$$

习题 5 解答

1. 求一质点在力场 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 的作用下沿闭曲线 l：$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = a(1-\cos t)$从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 运动一

周时所做的功.

解　功 $W = \oint_l \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l -y\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi} [a^2\sin^2 t - a^2(1-\cos t)\cos t + a^2\cos t\sin t]\,\mathrm{d}t$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t+\cos t\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi a^2.$$

2. 求矢量场 $\boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$（$C$ 为常数)沿下列曲线的环量:

（1）圆周 $x^2+y^2=R^2$，$z=0$;

（2）圆周$(x-2)^2+y^2=R^2, z=0$.

解　(1) 令 $x=R\cos\theta$，则圆周 l：$x^2+y^2=R^2$，$z=0$ 的方程成为 $x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，$z=0$.

于是环量

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}(R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2 .$$

（2）令 $x-2=R\cos\theta$，则圆周 l：$(x-2)^2+y^2=R^2, z=0$ 的方程成为

$$x=R\cos\theta+2,\quad y=R\sin\theta,\quad z=0.$$

于是环量

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}[R^2\sin^2\theta + (R\cos\theta+2)R\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(R^2+2R\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2 .$$

3. 用以下二法求矢量场 $\boldsymbol{A} = x(z-y)\boldsymbol{i} + y(x-z)\boldsymbol{j} + z(y-x)\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,2,3)$处沿方向 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的环量面密度.

（1）直接应用环量面密度的计算公式;

（2）作为旋度在该方向上的投影.

解 (1) $n^{\circ}=\dfrac{n}{|n|}=\dfrac{1}{3}i+\dfrac{2}{3}j+\dfrac{2}{3}k$，故 n 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

又 $\qquad P=x(z-y),\ Q=y(x-z),\ R=z(y-x),$

按公式，环量面密度

$$\mu_n\Big|_M=[(R_y-Q_z)\cos\alpha+(P_z-R_x)\cos\beta+(Q_x-P_y)\cos\gamma]_M$$

$$=\left[(z+y)\frac{1}{3}+(x+z)\frac{2}{3}+(x+y)\frac{2}{3}\right]_M$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{8}{3}+\frac{6}{3}=\frac{19}{3}.$$

(2) $\mathbf{rot}\ A\Big|_M=[(z+y)i+(x+z)j+(x+y)k]_M$

$$=5i+4j+3k,$$

于是 $\mu_n\Big|_M=\mathbf{rot}\ A\Big|_M\cdot n^{\circ}=(5i+4j+3k)\cdot\left(\dfrac{1}{3}i+\dfrac{2}{3}j+\dfrac{2}{3}k\right)$

$$=\frac{5}{3}+\frac{8}{3}+\frac{6}{3}=\frac{19}{3}.$$

4. 用雅可比矩阵求下列矢量场的散度和旋度.

(1) $A=(3x^2y+z)i+(y^3-xz^2)j+2xyzk$;

(2) $A=yz^2i+zx^2j+xy^2k$;

(3) $A=P(x)i+Q(y)j+R(z)k$.

解

(1) $$DA=\begin{pmatrix}6xy & 3x^2 & 1\\ -z^2 & 3y^2 & -2xz\\ 2yz & 2xz & 2xy\end{pmatrix},$$

故有 $\qquad \mathrm{div}\ A=6xy+3y^2+2xy=(8x+3y)y.$

$$\mathbf{rot}\ A=4xzi+(1-2yz)j-(z^2+3x^2)k.$$

(2) $$DA=\begin{pmatrix}0 & z^2 & 2yz\\ 2xz & 0 & x^2\\ y^2 & 2xy & 0\end{pmatrix},$$

故有 $$\operatorname{div} \boldsymbol{A}=0+0+0=0,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=x(2y-x)\boldsymbol{i}+y(2z-y)\boldsymbol{j}+z(2x-z)\boldsymbol{k}.$$

(3) $$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} P'(x) & 0 & 0 \\ 0 & Q'(y) & 0 \\ 0 & 0 & R'(z) \end{pmatrix},$$

故有 $$\operatorname{div} \boldsymbol{A}=P'(x)+Q'(y)+R'(z),$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}.$$

5 已知 $u=\mathrm{e}^{xyz}$ $\boldsymbol{A}=z^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}$，求 $\mathbf{rot}\ u\boldsymbol{A}$.

解 $\mathbf{rot}\ u\boldsymbol{A}=u\,\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\ u\times\boldsymbol{A}$,

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

有 $$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=2y\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k},$$

$$u\,\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xyz}(2y\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k}),$$

$$\mathbf{grad}\ u=\mathrm{e}^{xyz}(yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}),$$

$$\mathbf{grad}\ u\times\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xyz}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ yz & xz & xy \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

$$=\mathrm{e}^{xyz}[(xy^2z-x^3y)\boldsymbol{i}+(xyz^2-y^3z)\boldsymbol{j}+(x^2yz-xz^3)\boldsymbol{k}],$$

故有

$$\mathbf{rot}\ u\boldsymbol{A}=\mathrm{e}^{xyz}[(2y+xy^2z-x^3y)\boldsymbol{i}+(2z+xyz^2-y^3z)\boldsymbol{j}+(2x+x^2yz-xz^3)\boldsymbol{k}].$$

6. 已知 $\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{i}+2z^2\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}$，求 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$.

解 $$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3y & 2z^2 & xy \\ x^2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$=-8z^2\boldsymbol{i}+(x^3y+12y)\boldsymbol{j}-2x^2z^2\boldsymbol{k},$$

$$D(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -16z \\ 3x^2y & x^3+12 & 0 \\ -4xz^2 & 0 & -4x^2z \end{pmatrix},$$

故有

$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0\boldsymbol{i} + (4xz^2 - 16z)\boldsymbol{j} + 3x^2y\boldsymbol{k}$$
$$= 4z\,(xz-4)\boldsymbol{j} + 3x^2y\boldsymbol{k}.$$

7. 已知 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{C}$ 为常矢，证明

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 0 \text{ 及 } \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{C}.$$

证 设 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r} = (C_2z - C_3y)\boldsymbol{i} + (C_3x - C_1z)\boldsymbol{j} + (C_1y - C_2x)\boldsymbol{k},$$

$$D\,(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -C_3 & C_2 \\ C_3 & 0 & -C_1 \\ -C_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 0+0+0 = 0,$$
$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 2C_1\boldsymbol{i} + 2C_2\boldsymbol{j} + 2C_3\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{C}.$$

8. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{C}$ 为常矢，求

(1) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}$；　　(2) $\mathbf{rot}\,[f(r)\boldsymbol{r}]$；

(3) $\mathbf{rot}\,[f(r)\boldsymbol{C}]$；　　(4) $\operatorname{div}[\boldsymbol{r}\times f(r)\boldsymbol{C}]$.

解 (1) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$.

(2) $$\mathbf{rot}\,[f(r)\boldsymbol{r}] = f(r)\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\,f(r)\times\boldsymbol{r}$$
$$= \boldsymbol{0} + f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

(3) $$\mathbf{rot}\,[f(r)\boldsymbol{C}] = f(r)\mathbf{rot}\,\boldsymbol{C} + \mathbf{grad}\,f(r)\times\boldsymbol{C}$$
$$= \boldsymbol{0} + f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{C} = \frac{1}{r}f'(r)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{C}).$$

(4) $$\operatorname{div}[\boldsymbol{r}\times f(r)\boldsymbol{C}] = \operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{C}]$$
$$= \boldsymbol{C}\cdot\mathbf{rot}\,[f(r)\boldsymbol{r}] - f(r)\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{C}$$
$$= \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{0} - f(r)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{0} = 0 - 0 = 0.$$

9. 设有点电荷 q 位于坐标原点，试证其所产生的电场中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的旋度为零.

证 由电学知　　$\boldsymbol{D} = \dfrac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}$,

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$. 据前题之(2)即知有

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{D}=\mathbf{rot}\left(\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}\right)=\mathbf{0}.$$

10. 设函数 $u(x,y,z)$及矢量 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 的三个坐标函数都有二阶连续偏导数. 证明

(1) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)=\mathbf{0}$；(2) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})=0$.

证 (1) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)=\mathbf{rot}(u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k})$

$$=(u_{zy}-u_{yz})\boldsymbol{i}+(u_{xz}-u_{zx})\boldsymbol{j}+(u_{yx}-u_{xy})\boldsymbol{k}.$$

因函数 $u(x,y,z)$有二阶连续偏导数，故有

$$u_{yz}=u_{zy},\quad u_{xz}=u_{zx},\quad u_{yx}=u_{xy}.$$

因此有 $$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)=\mathbf{0}.$$

(2) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})=\mathrm{div}[(R_y-Q_z)\boldsymbol{i}+(P_z-R_x)\boldsymbol{j}+(Q_x-P_y)\boldsymbol{k}]$

$$=(R_{yx}-Q_{zx})+(P_{zy}-R_{xy})+(Q_{xz}-P_{yz}).$$

因函数 P，Q，R 均有二阶连续偏导数，故有

$$P_{zy}=P_{yz},\quad Q_{xz}=Q_{zx},\quad R_{yx}=R_{xy},$$

因此有 $$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})=0.$$

*11. 设矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$，若存在非零函数 $\mu(x,y,z)$ 使 $\mu\boldsymbol{A}$ 为某数量场 $\varphi(x,y,z)$的梯度，即 $\mu\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ \varphi$，试证明

$$\boldsymbol{A}\perp\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}.$$

证 由 $\mu\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ \varphi$，有

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}\mathbf{grad}\ \varphi=\frac{\varphi_x}{\mu}\boldsymbol{i}+\frac{\varphi_y}{\mu}\boldsymbol{j}+\frac{\varphi_z}{\mu}\boldsymbol{k},$$

$$D\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu^2}\begin{pmatrix}\mu\varphi_{xx}-\varphi_x\mu_x & \mu\varphi_{xy}-\varphi_x\mu_y & \mu\varphi_{xz}-\varphi_x\mu_z\\ \mu\varphi_{yx}-\varphi_y\mu_x & \mu\varphi_{yy}-\varphi_y\mu_y & \mu\varphi_{yz}-\varphi_y\mu_z\\ \mu\varphi_{zx}-\varphi_z\mu_x & \mu\varphi_{zy}-\varphi_z\mu_y & \mu\varphi_{zz}-\varphi_z\mu_z\end{pmatrix},$$

故 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\dfrac{1}{\mu^2}[(\varphi_y\mu_z-\varphi_z\mu_y)\boldsymbol{i}+(\varphi_z\mu_x-\varphi_x\mu_z)\boldsymbol{j}+(\varphi_x\mu_y-\varphi_y\mu_x)\boldsymbol{k}]$.

于是有

$$A \cdot \mathrm{rot}\, A = \frac{1}{\mu^3}[\varphi_x(\varphi_y\mu_z - \varphi_z\mu_y) + \varphi_y(\varphi_z\mu_x - \varphi_x\mu_z) + \varphi_z(\varphi_x\mu_y - \varphi_y\mu_x)]$$
$$= 0,$$

所以
$$A \perp \mathrm{rot}\, A.$$

习题 6 解答

1. 证明下列矢量场为有势场，并用公式法和不定积分法求其势函数

(1) $\boldsymbol{A} = y\cos xy\boldsymbol{i} + x\cos xy\boldsymbol{j} + \sin z\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A} = (2x\cos y - y^2\sin x)\boldsymbol{i} + (2y\cos x - x^2\sin y)\boldsymbol{j}$.

解 (1) 记 $P = y\cos xy$，$Q = x\cos xy$，$R = \sin z$.

则
$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + [(\cos xy - xy\sin xy) - (\cos xy - xy\sin xy)]\boldsymbol{k}$$
$$= \boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 今用两种方法求其势函数 v:

1° 公式法:

$$v = -\int_0^x P(x,0,0)\mathrm{d}x - \int_0^y Q(x,y,0)\mathrm{d}y - \int_0^z R(x,y,z)\mathrm{d}z + C_1$$
$$= -\int_0^x 0\mathrm{d}x - \int_0^y x\cos xy\mathrm{d}y - \int_0^z \sin z\mathrm{d}z + C_1$$
$$= 0 - \sin xy + \cos z - 1 + C_1$$
$$= \cos z - \sin xy + C.$$

2° 不定积分法:

因势函数 v 满足 $\boldsymbol{A} = -\mathbf{grad}\, v$，即有

$$v_x = -y\cos xy,\ v_y = -x\cos xy,\ v_z = -\sin z.$$

将第一个方程对 x 积分，得

$$v = -\sin xy + \varphi(y,z),$$

对 y 求导，得 $\qquad v_y = -x\cos xy + \varphi'_y(y,z)$.

与第二个方程比较，知 $\varphi'_y(y,z)=0$，于是 $\varphi(y,z)=\psi(z)$，从而

$$v = -\sin xy + \psi(z).$$

再对 z 求导，得 $\qquad v_z = \psi'(z)$.

与第三个方程比较，知 $\psi'(z) = -\sin z$，故 $\psi(z) = \cos z + C$，所以

$$v = \cos z - \sin xy + C.$$

(2) 记 $P = 2x\cos y - y^2\sin x$，$Q = 2y\cos x - x^2\sin y$，$R=0$.

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + [(-2y\sin x - 2x\sin y) - (-2x\sin y - 2y\sin x)]\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场．今用两种方法求势函数 v:

1° 公式法：

$$v = -\int_0^x P(x,0,0)\mathrm{d}x - \int_0^y Q(x,y,0)\mathrm{d}y - \int_0^z R(x,y,z)\mathrm{d}z + C$$

$$= -\int_0^x 2x\mathrm{d}x - \int_0^y (2y\cos x - x^2\sin y)\mathrm{d}y - \int_0^z 0\mathrm{d}z + C$$

$$= -x^2 - y^2\cos x - x^2\cos y + x^2 + C$$

$$= -y^2\cos x - x^2\cos y + C.$$

2° 不定积分法：

因势函数 v 满足 $\boldsymbol{A} = -\mathbf{grad}\ v$，即有

$$v_x = -2x\cos y + y^2\sin x,\quad v_y = -2y\cos x + x^2\sin y,\quad v_z = 0.$$

将第一个方程对 x 积分，得

$$v = -x^2\cos y - y^2\cos x + \varphi(y,z),$$

对 y 求导，得 $v_y = x^2\sin y - 2y\cos x + \varphi'_y(y,z)$,

与第二个方程比较，知 $\varphi'_y(y,z)=0$，于是 $\varphi(y,z)=\psi(z)$，从而

$$v = -x^2\cos y - y^2\cos x + \psi(z).$$

再对 z 求导，得 $$v_z = \psi(z),$$

与第三个方程比较，知 $\psi'(z)=0$，故 $\psi(z)=C$

所以 $$v = -x^2\cos y - y^2\cos x + C$$

2. 下列矢量场 A 是否保守场？若是，计算曲线积分 $\int_l A\ \ \mathrm{d}l$

(1) $A=(6xy+z^3)i+(3x^2-z)j+(3xz^2-y)k$ l 的起点为 $A(4,0,1)$，终点为 $B(2,1,-1)$，

(2) $A=2xzi+2yz^2j+(x^2+2y^2z-1)k$ l 的起点为 $A(3,0,1)$ 终点为 $B(5,-1,3)$.

解

(1) $$DA=\begin{pmatrix}6y & 6x & 3z^2\\ 6x & 0 & -1\\ 3z^2 & -1 & 6xz\end{pmatrix},$$

有 $\mathrm{rot}\ A=[(-1)-(-1)]i+(3z^2-3z^2)j+(6x-6x)k=0$.

故 A 为保守场.因此,存在 $A\cdot \mathrm{d}l$ 的原函数 u.按公式

$$\begin{aligned}u &= \int_0^x P(x,0,0)\mathrm{d}x + \int_0^y Q(x,y,0)\mathrm{d}y + \int_0^z R(x,y,z)\mathrm{d}z\\ &= \int_0^x 0\mathrm{d}x + \int_0^y 3x^2\mathrm{d}y + \int_0^z (3xz^2-y)\mathrm{d}z\\ &= 3x^2y + xz^3 - yz,\end{aligned}$$

于是

$$\int_l A\cdot \mathrm{d}l = (3x^2y + xz^3 - yz)\Big|_{A(4,0,1)}^{B(2,1,-1)} = 7.$$

(2) $$DA=\begin{pmatrix}2z & 0 & 2x\\ 0 & 2z^2 & 4yz\\ 2x & 4yz & 2y^2\end{pmatrix},$$

有 $$\mathrm{rot}\ A=(4yz-4yz)i+(2x-2x)j+0k=0,$$

故 A 为保守场．因此，存在 $A\cdot \mathrm{d}l$ 的原函数 u．按上面公式有

$$u=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^z (x^2+2y^2z-1)\mathrm{d}z$$
$$=x^2z+y^2z^2-z,$$

于是

$$\int_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(x^2z+y^2z^2-z)\Big|_{A(3,0,1)}^{B(5,-1,3)}=73.$$

3. 求下列全微分的原函数 u:

(1) $\mathrm{d}u=(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$;

(2) $\mathrm{d}u=(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y$.

解 由公式

$$u=\int_0^x P(x,0,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y,0)\mathrm{d}y+\int_0^z R(x,y,z)\mathrm{d}z+C,$$

(1) $$u=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^z (z^2-2xy)\mathrm{d}z+C$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3-2xyz+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

(2) $$u=\int_0^x 3x^2\mathrm{d}x+\int_0^y (6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y+C$$
$$=x^3+3x^2y^2+y^4+C.$$

4. 确定常数 a 使 $\boldsymbol{A}=(x+3y)\boldsymbol{i}+(y-2z)\boldsymbol{j}+(x+az)\boldsymbol{k}$ 为管形场.

解 $$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial}{\partial x}(x+3y)+\frac{\partial}{\partial y}(y-2z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+az)$$
$$=1+1+a,$$

由此可见，当 $a=-2$ 时，有 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$，从而场 $\boldsymbol{A}$ 为管形场.

5. 证明 $\mathbf{grad}\,u\times\mathbf{grad}\,v$ 为管形场.

证 $$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,u\times\mathbf{grad}\,v)$$
$$=\mathbf{grad}\,v\cdot\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)-\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,v)$$
$$=\mathbf{grad}\,v\cdot\mathbf{0}-\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{0}=0,$$

所以 $\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v$ 为管形场.

6. 求证 $\boldsymbol{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\boldsymbol{i} + (3x^3y - 3xy)\boldsymbol{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\boldsymbol{k}$ 不是管形场，而 $\boldsymbol{B} = xyz^2\boldsymbol{A}$ 是管形场.

证

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{A} &= (4x + 8y^2z) + (3x^3 - 3x) - (8y^2z + 2x^3)\\ &= x^3 + x \neq 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不是管形场.

$$\begin{aligned}\text{而 } \operatorname{div} xyz^2\boldsymbol{A} &= xyz^2\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \mathbf{grad}\,(xyz^2)\cdot\boldsymbol{A}\\ &= x^4yz^2 + x^2yz^2 + (yz^2\boldsymbol{i} + xz^2\boldsymbol{j} + 2xyz\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{A}\\ &= x^4yz^2 + x^2yz^2 + (2x^2yz^2 + 8xy^3z^3 + 3x^4yz^2\\ &\quad - 3x^2yz^2 - 8xy^3z^3 - 4x^4yz^2)\\ &= 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{B} = xyz^2\boldsymbol{A}$ 是管形场.

7. 设 $\boldsymbol{B}$ 为无源场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势量，$\varphi(x, y, z)$ 为具有二阶连续偏导数的任意函数，证明 $\boldsymbol{B} + \mathbf{grad}\ \varphi$ 亦为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势量.

证 由条件知有 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$，于是有

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{B} + \mathbf{grad}\ \varphi) &= \mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}\ \varphi)\\ &= \boldsymbol{A} + \mathbf{0} = \boldsymbol{A},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{B} + \mathbf{grad}\ \varphi$ 亦为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势量.

8. 是否存在矢量场 $\boldsymbol{B}$，使得：

(1) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$?

(2) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$?

若存在，求出 $\boldsymbol{B}$.

解 (1) 由于 $\operatorname{div}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 3 \neq 0$,

故 $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 不是管形场. 从而不存在矢量场 $\boldsymbol{B}$ (即矢势量)使

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

(2) 由于 $\operatorname{div}(y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}) = 0$,

故 $y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ 为管形场，从而存在满足

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$$

的矢量场 $\boldsymbol{B}$（即矢势量）. 比如

$$\boldsymbol{B} = U\boldsymbol{i} + V\boldsymbol{j} + W\boldsymbol{k}$$

其中 $$U = \int_{z_0}^{z} z^2 \mathrm{d}z - \int_{y_0}^{y} x^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{3}(z^3 - z_0^3) - x^2(y - y_0),$$

$$V = -\int_{z_0}^{z} y^2 \mathrm{d}z = -y^2(z - z_0),$$

$$W = C,$$

即 $$\boldsymbol{B} = \left[\frac{1}{3}(z^2 - z_0) - x^2(y - y_0)\right]\boldsymbol{i} - y^2(z - z_0)\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k},$$

其中(x_0, y_0, z_0)为场中任一点，C 为任意常数.

9. 证明矢量场

$$\boldsymbol{A} = (2x + y)\boldsymbol{i} + (4y + x + 2z)\boldsymbol{j} + (2y - 6z)\boldsymbol{k}$$

为调和场，并求其调和函数.

解 $$D\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix},$$

有 $$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 2 + 4 - 6 = 0,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = (2 - 2)\boldsymbol{i} + (0 - 0)\boldsymbol{j} + (1 - 1)\boldsymbol{k} = \mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为调和场. 其调和函数 u 由公式有

$$u = \int_0^x P(x, 0, 0)\,\mathrm{d}x + \int_0^y Q(x, y, 0)\,\mathrm{d}y + \int_0^z R(x, y, z)\,\mathrm{d}z + C$$

$$= \int_0^x 2x\mathrm{d}x + \int_0^y (4y + x)\,\mathrm{d}y + \int_0^z (2y - 6z)\mathrm{d}z + C$$

$$= x^2 + 2y^2 + xy + 2yz - 3z^2 + C.$$

10. 已知 $u = 3x^2 z - y^2 z^3 + 4x^3 y + 2x - 3y - 5$，求 Δu.

［提示：$\Delta u = \operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u)$.］

解 $$\mathbf{grad}\ u = (6xz + 12x^2 y + 2)\boldsymbol{i} + (-2yz^3 + 4x^3 - 3)\boldsymbol{j} + (3x^2 - 3y^2 z^2)\boldsymbol{k},$$

则 $$\Delta u = \operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u) = 6z + 24xy - 2z^3 - 6y^2 z.$$

11. 若函数 $\varphi(x,y,z)$满足拉普拉斯方程 $\Delta\varphi=0$，证明梯度场 $\mathbf{grad}\ \varphi$ 为调和场.

证　由所给条件有 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ \varphi)=\Delta\varphi=0$.
又根据旋度运算的基本公式，有

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ \varphi)=\mathbf{0},$$

所以梯度场 $\mathbf{grad}\ \varphi$ 为调和场.

12. 设 r 为矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的模，证明

(1) $\Delta(\ln r)=\dfrac{1}{r^2}$;

(2) $\Delta r^n=n(n+1)r^{n-2}$　（n 为常数）.

证　(1) $\mathbf{grad}(\ln r)=\dfrac{1}{r}\mathbf{grad}\ r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$,

$$\begin{aligned}\Delta(\ln r)&=\mathrm{div}[\mathbf{grad}(\ln r)]=\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\\&=\frac{1}{r^2}\mathrm{div}\ \boldsymbol{r}+\mathbf{grad}\frac{1}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}\\&=\frac{3}{r^2}-2r^{-4}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

(2) $\mathbf{grad}\ r^n=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$,

$$\begin{aligned}\Delta r^n&=\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ r^n)=\mathrm{div}\ nr^{n-2}\boldsymbol{r}\\&=nr^{n-2}\mathrm{div}\ \boldsymbol{r}+\mathbf{grad}(nr^{n-2})\cdot\boldsymbol{r}\\&=3nr^{n-2}+n(n-2)r^{n-4}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\\&=[3n+n(n-2)]r^{n-2}=n(n+1)r^{n-2}.\end{aligned}$$

13. 试证矢量场 $\boldsymbol{A}=-2y\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}$ 为平面调和场，并且：

(1) 求出场的力函数 u 和势函数 v;

(2) 画出场的力线与等势线的示意图.

证　记 $P=-2y$, $Q=-2x$，则有

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0+0=0,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0\boldsymbol{k}=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为平面调和场.

(1) 由公式，并取其中$(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$\text{势函数 } v=-\int_0^x P(x,0)\,\mathrm{d}x-\int_0^y Q(x,y)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=-\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 2x\mathrm{d}y+C=2xy+C,$$

$$\text{力函数 } u=\int_0^x -Q(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^y P(x,y)\,\mathrm{d}y+C'$$

$$=\int_0^x 2x\mathrm{d}x-\int_0^y 2y\mathrm{d}y=x^2-y^2+C'.$$

(2) 分别令 u 与 v 等于常数，就得到

力线方程 $\qquad x^2-y^2=C_1,$

等势线方程 $\qquad xy=C_2.$

二者均为双曲线族，但对称轴相差$\dfrac{\pi}{4}$角. 如图 9 所示.

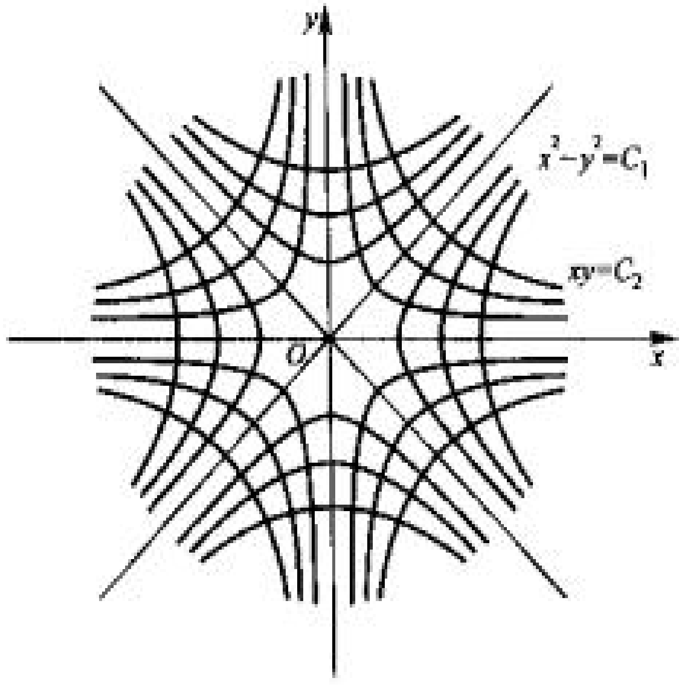

图 9

14. 已知平面调和场的力函数 $u=x^2-y^2+xy$，求场的势函数 v 及场矢量 $\boldsymbol{A}$.

解 力函数 u 与势函数 v 之间满足如下关系：

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

由
$$v_y = u_x = 2x + y,$$

有
$$v = \int (2x + y)\,\mathrm{d}y = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x),$$

由此
$$v_x = 2y + \varphi'(x).$$

又由于
$$v_x = -u_y = 2y - x,$$

与前式相比，即知 $\varphi'(x) = -x$，所以 $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$，

从而得势函数
$$v = 2xy + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C.$$

于是，场矢量

$$\boldsymbol{A} = -\mathbf{grad}\, v = (x - 2y)\boldsymbol{i} - (2x + y)\boldsymbol{j}.$$

习题 7 解答

1. 证明 $\nabla\times(u\boldsymbol{A}) = u\,\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla u\times\boldsymbol{A}$.

证
$$\nabla\times(u\boldsymbol{A}) = \nabla\times(u_c\boldsymbol{A}) + \nabla\times(u\boldsymbol{A}_c),$$

其中
$$\nabla\times(u_c\boldsymbol{A}) = u_c\nabla\times\boldsymbol{A} = u\,\nabla\times\boldsymbol{A},$$
$$\nabla\times(u\boldsymbol{A}_c) = \nabla u\times\boldsymbol{A}_c = \nabla u\times\boldsymbol{A},$$

所以
$$\nabla\times(u\boldsymbol{A}) = u\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla u\times\boldsymbol{A}.$$

2. 证明 $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$.

[提示：$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})$.]

证
$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \nabla(\boldsymbol{A}_c\cdot\boldsymbol{B}) + \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c).$$

按提示
$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}_c\cdot\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$
$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c) = \nabla(\boldsymbol{B}_c\cdot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}),$$

所以
$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = {}& \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \\ & + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

3. 证明 $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla(A)^2 - \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$.

证　在上题中，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，得

$$\nabla(\boldsymbol{A})^2=2\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A},$$

移项即得　$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A})^2-\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}).$$

4. 证明 $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)u=\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$.

证
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)u&=A_x\frac{\partial u}{\partial x}+A_y\frac{\partial u}{\partial y}+A_z\frac{\partial u}{\partial z}\\&=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\&=\boldsymbol{A}\cdot\nabla u.\end{aligned}$$

5. 证明 $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$.

证
$$\begin{aligned}\Delta(uv)&=\nabla\cdot[\nabla(uv)]=\nabla\cdot[u\nabla v+v\nabla u]\\&=\nabla\cdot[u_c\nabla v]+\nabla\cdot[u(\nabla v)_c]\\&\quad+\nabla\cdot[v_c\nabla u]+\nabla\cdot[v(\nabla u)_c]\\&=u_c\nabla^2v+\nabla u\cdot(\nabla v)_c+v_c\nabla^2u\\&\quad+\nabla v\cdot(\nabla u)_c\\&=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v.\end{aligned}$$

6. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为常矢，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，证明

(1) $\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$；

(2) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})=\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$；

(3) $\nabla\times(r\boldsymbol{a})=\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$；

(4) $\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(5) $\nabla(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|^2)=2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}]$.

[提示：利用公式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.]

证　(1) 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})=\nabla(xa_x+ya_y+za_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}.$$

(2) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})=\nabla r\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$.

(3) $\nabla\times(r\boldsymbol{a})=\nabla r\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$.

(4) $\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$.

由(1)知$\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$，所以有

$$\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

(5) $$\begin{aligned}\nabla(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|^2)&=\nabla[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]\\&\xlongequal{\text{(按提示)}}\nabla[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2]\\&=\nabla[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})r^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2]\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\nabla r^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\\&\xlongequal{\text{由(1)知}}2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})r\frac{\boldsymbol{r}}{r}-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\\&=2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}].\end{aligned}$$

*7. 已知函数 u 与无源场 $\boldsymbol{A}$ 分别满足：

$$\Delta u=F(x,y,z),$$
$$\Delta\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{G}(x,y,z).$$

求证 $\boldsymbol{B}=\nabla u+\nabla\times\boldsymbol{A}$ 满足如下方程组：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=F(x,y,z),\\\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{G}(x,y,z).\end{cases}$$

证 $$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}&=\nabla\cdot(\nabla u+\nabla\times\boldsymbol{A})=\Delta u+\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\\&\xlongequal{\text{(旋度场无源)}}\Delta u+0=F(x,y,z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{B}&=\nabla\times(\nabla u+\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\times(\nabla u)\\&\quad+\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\\&\xlongequal{\text{(梯度场无旋，及公式(18))}}\boldsymbol{0}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}\\&\xlongequal{\text{(}\boldsymbol{A}\text{ 为无源场)}}\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}-\Delta\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{G}(x,y,z).\end{aligned}$$

*8. 设 S 为区域 Ω 的边界曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的向外单位法矢，f 与 g 均为 Ω 中的调和函数，证明

(1) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega|\nabla f|^2\mathrm{d}V$；

(2) $\oiint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S.$

证 (1) $$\oiint\limits_S f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S f\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S f\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\xlongequal{\text{(由格林第一公式)}}\iiint\limits_\Omega(\nabla f\cdot\nabla f+f\Delta f)\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{\text{(f 为调和函数)}}\iiint\limits_\Omega(\nabla f\cdot\nabla f+0)\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_\Omega|\nabla f|^2\mathrm{d}V.$$

(2) $$\oiint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S-\oiint\limits_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S(f\nabla g-g\nabla f)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_S(f\nabla g-g\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\xlongequal{\text{(由格林第二公式)}}\iiint\limits_\Omega(f\Delta g-g\Delta f)\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{\text{(f,g 均为调和函数)}}\iiint\limits_\Omega 0\mathrm{d}V=0,$$

所以 $$\oiint\limits_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

习题 8 解答

1. 下列曲线坐标构成的坐标系是否正交？为什么？

(1) 曲线坐标(ξ,θ,z)，它与直角坐标(x,y,z)的关系是：

$$x = a\operatorname{ch}\xi\cos\theta,\quad y = a\operatorname{sh}\xi\sin\theta,\quad z = z\quad (a>0);$$

(2) 曲线坐标(ρ,θ,z)，它与直角坐标(x,y,z)的关系是：

$$x = a\rho\cos\theta,\quad y = b\rho\sin\theta,\quad z = z\quad (a,b>0,a\neq b).$$

解 (1) 在曲线坐标系(ξ,θ,z)中，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\\ &= a\operatorname{ch}\xi\cos\theta\boldsymbol{i} + a\operatorname{sh}\xi\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi} = a\operatorname{sh}\xi\cos\theta\boldsymbol{i} + a\operatorname{ch}\xi\sin\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = -a\operatorname{ch}\xi\sin\theta\boldsymbol{i} + a\operatorname{sh}\xi\cos\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

显然有

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = 0,\quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} = 0,$$

所以，曲线坐标系(ξ,θ,z)是正交的.

(2) 在曲线坐标系(ρ,θ,z)中，有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$
$$= a\rho\cos\theta\boldsymbol{i} + b\rho\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = a\cos\theta\boldsymbol{i} + b\sin\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a\rho\sin\theta\boldsymbol{i} + b\rho\cos\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

由于
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a^2\rho\sin\theta\cos\theta + b^2\rho\sin\theta\cos\theta$$
$$= \rho\sin\theta\cos\theta(b^2 - a^2) \neq 0 \quad (\text{因 } a \neq b),$$
所以，曲线坐标系(ρ,θ,z)不是正交的.

2. 计算前题两种曲线坐标系中的拉梅系数.

解 (1) 因曲线坐标系(ξ,θ,z)是正交的，根据
$$x = a\operatorname{ch}\xi\cos\theta,\quad y = a\operatorname{sh}\xi\sin\theta,\quad z = z,$$
有
$$dx = a\operatorname{sh}\xi\cos\theta d\xi - a\operatorname{ch}\xi\sin\theta d\theta,$$
$$dy = a\operatorname{ch}\xi\sin\theta d\xi + a\operatorname{sh}\xi\cos\theta d\theta,$$
$$dz = dz.$$
于是
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2(\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\theta + \operatorname{ch}^2\xi\sin^2\theta)(d\xi^2 + d\theta^2) + dz^2$$
$$= a^2(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\theta)(d\xi^2 + d\theta^2) + dz^2,$$
故拉梅系数为:
$$H_\xi = H_\theta = a\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\theta} \quad (H_z = 1),$$
$$(\text{或}) = a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\theta}.$$

(2) 因曲线坐标系(ρ,θ,z)不是正交的，故不能用上面的方法来求. 根据
$$x = a\rho\cos\theta,\quad y = b\rho\sin\theta,\quad z = z,$$
按定义有

$$H_\rho^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta,$$

$$H_\theta^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=a^2\rho^2\sin^2\theta+b^2\rho^2\cos^2\theta,$$

$$H_z^2=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2=1,$$

由此得拉梅系数为：

$$H_\rho=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},\quad H_\theta=\rho\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta},\quad H_z=1.$$

在下列各题中，(ρ,φ,z)为柱面坐标，(r,θ,φ)为球面坐标.

3. 已知 $u(\rho,\varphi,z)=\rho^2\cos\varphi+z^2\sin\varphi$，求 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$ 及 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

解 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

$$=2\rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\frac{1}{\rho}(z^2\cos\varphi-\rho^2\sin\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi+2z\sin\varphi\boldsymbol{e}_z.$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[4\rho\cos\varphi-\frac{1}{\rho}(z^2\sin\varphi+\rho^2\cos\varphi)+2\rho\sin\varphi\right]$$

$$=\left(2-\frac{z^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi+3\cos\varphi.$$

4. 已知 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\rho\cos^2\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$，求 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}$.

解 在柱面坐标系中

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \rho\cos^2\varphi & \rho^2\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}[0\boldsymbol{e}_\rho+0\boldsymbol{e}_\varphi+(2\rho\sin\varphi+2\rho\cos\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_z]$$

$$=(2\sin\varphi+\sin 2\varphi)\boldsymbol{e}_z.$$

5. 证明 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\left(1+\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\left(1-\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+b^2\boldsymbol{e}_z$ 为调和场.

证 在柱面坐标系中

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right],$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z.$$

已知 $A_\rho=\left(1+\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi,A_\varphi=-\left(1-\dfrac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi,A_z=b^2,$

代入上面二式,即得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi+0=0,$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{e}_\rho+0\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[-\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi+\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi\right]\boldsymbol{e}_z=\mathbf{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)$为调和场.

6. 求空间一点 M 的矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式;并由此证明 $\boldsymbol{r}$ 在这两种坐标系中的散度都等于3.

[提示:参看第四章第二节例3.]

解 (1) 在柱面坐标系中

$$\boldsymbol{r}=\rho\cos\varphi\boldsymbol{i}+\rho\sin\varphi\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

又由第四章第二节例3中的表二知

$$\boldsymbol{i}=\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \boldsymbol{j}=\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_z,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\rho\cos\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)+\rho\sin\varphi(\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)+z\boldsymbol{e}_z\\&=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

由此有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho r_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial r_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho r_z)}{\partial z}\right]=\frac{1}{\rho}(2\rho+\rho)=3.$$

(2) 在球面坐标系中

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + r\cos\theta\boldsymbol{k}$$

又由第四章第二节例 3 中的表三知

$$\boldsymbol{i} = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,$$
$$\boldsymbol{j} = \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,$$
$$\boldsymbol{k} = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= r\sin\theta\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\ &\quad + r\sin\theta\sin\varphi(\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\ &\quad + r\cos\theta(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= r\boldsymbol{e}_r + 0\boldsymbol{e}_\theta + 0\boldsymbol{e}_\varphi = r\boldsymbol{e}_r.\end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{r} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2 r_r)}{\partial r} + r\frac{\partial(\sin\theta r_\theta)}{\partial\theta} + r\frac{\partial r_\varphi}{\partial\varphi}\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^3}{\partial r} = 3.\end{aligned}$$

7. 求常矢 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$ 在球面坐标系中的表示式.

解 由前题中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 在球面坐标系中的表示式，就得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= C_1(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\ &\quad + C_2(\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\ &\quad + C_3(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= (C_1\sin\theta\cos\varphi + C_2\sin\theta\sin\varphi + C_3\cos\theta)\boldsymbol{e}_r\\ &\quad + (C_1\cos\theta\cos\varphi + C_2\cos\theta\sin\varphi - C_3\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta\\ &\quad + (C_2\cos\varphi - C_1\sin\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

8. 已知 $u(r,\theta,\varphi) = \left(ar^2 + \frac{1}{r^3}\right)\sin 2\theta\cos\varphi$，求 $\mathbf{grad}\ \varphi$.

解 在球面坐标系中

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\ u &= \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\\ &= \left(2ar - \frac{3}{r^4}\right)\sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r + 2\left(ar + \frac{1}{r^4}\right)\cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

$$-2\left(ar+\frac{1}{r^4}\right)\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi.$$

9. 已知 $u(r,\theta,\varphi)=2r\sin\theta+r^2\cos\varphi$，求 Δu.

解 在球面坐标系中

$$\begin{aligned}\Delta u&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(2r^2\sin\theta+2r^3\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin2\theta)-\frac{r^2\cos\varphi}{\sin\theta}\right]\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[4r\sin^2\theta+6r^2\sin\theta\cos\varphi+2r\cos2\theta-\frac{r^2\cos\varphi}{\sin\theta}\right]\\&=\frac{4\sin\theta}{r}+6\cos\varphi+\frac{2\cos2\theta}{r\sin\theta}-\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

10. 已知 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=\frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r+\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$，求 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$.

解 在球面坐标系中

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+r\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+r\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)+r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^3}\right)\right]\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\left(-\frac{2\cos\theta}{r^2}\right)+\frac{\sin2\theta}{r^2}\right]\\&=-\frac{2\cos\theta}{r^4}+\frac{2\cos\theta}{r^4}=0\quad(r\neq0).\end{aligned}$$

11. 证明 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=2r\sin\theta\boldsymbol{e}_r+r\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi$ 为有势场，并求其势函数.

证 在球面坐标系中

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r&r\boldsymbol{e}_\theta&r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\\frac{\partial}{\partial r}&\frac{\partial}{\partial\theta}&\frac{\partial}{\partial\varphi}\\A_r&rA_\theta&r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 2r\sin\theta & r^2\cos\theta & -\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}[0\boldsymbol{e}_r+0\boldsymbol{e}_\theta+0\boldsymbol{e}_\varphi]=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 因此存在势函数 $v(r,\theta,\varphi)$满足 $\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\,v$，即

$$\boldsymbol{A}=-\frac{\partial v}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

由此得到三个方程：

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-2r\sin\theta\ ,\ \frac{\partial v}{\partial\theta}=-r^2\cos\theta\ ,\ \frac{\partial v}{\partial\varphi}=\sin\varphi.$$

由第一个方程得

$$v=-\int 2r\sin\theta\,\mathrm{d}r=-r^2\sin\theta+f(\theta,\varphi)\ ,$$

由此
$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=-r^2\cos\theta+f'_\theta(\theta,\varphi)$$

比第二个方程比较，知 $f'_\theta(\theta,\varphi)=0$，故 $f(\theta,\varphi)=g(\varphi)$，于是

$$v=-r^2\sin\theta+g(\varphi),$$

由此
$$\frac{\partial v}{\partial\varphi}=g'(\varphi).$$

与第三个方程比较，知 $g'(\varphi)=\sin\varphi$，故 $g(\varphi)=-\cos\varphi+C$

于是得所求之势函数为

$$v=-r^2\sin\theta-\cos\varphi+C.$$

12. 求柱面坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ 的各偏导数.

解 在柱面坐标系中：$H_\rho=1$，$H_\varphi=\rho$，$H_z=1$. 于是

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}=-\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi}-\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_z}\frac{\partial H_\rho}{\partial z}=\boldsymbol{0},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\rho}\frac{\partial H_\varphi}{\partial\rho}=\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}=\boldsymbol{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \rho} = \frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_\varphi}\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_z}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_\rho}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} = -\boldsymbol{e}_\rho,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z} = \frac{\boldsymbol{e}_z}{H_\varphi}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \rho} = \frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_z}\frac{\partial H_\rho}{\partial z} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \varphi} = \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_z}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z} = -\frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \mathbf{0}.$$

13. 计算球面坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 的各偏导数.

解 在球面坐标系中：$H_r = 1$，$H_\theta = r$，$H_\varphi = r\sin\theta$. 于是

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = -\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} = \boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} = \sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\boldsymbol{e}_r}{H_\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \theta} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\boldsymbol{e}_r}{H_r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r} = -\boldsymbol{e}_r,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi} = \frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\theta}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r} = \frac{\boldsymbol{e}_r}{H_\varphi}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta} = \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_\varphi}\frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\boldsymbol{e}_r}{H_r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_\theta}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta} = -\sin\theta\boldsymbol{e}_r - \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

14. 已知 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\varphi\boldsymbol{e}_r+2r\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$，求$\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial\varphi}$.

解 $\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial\varphi}=r^2\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+\sin\varphi\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}\right)+2r\cos\theta\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi}+\sin\theta\dfrac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}$.

由前题知：
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_r}{\partial\varphi}=\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,\quad \frac{\partial\boldsymbol{e}_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi.$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\sin\theta\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$

故有
$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial\varphi}&=r^2\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+r^2\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi+2r\cos^2\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\&\quad+\sin\theta(-\sin\theta\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&=(r^2\cos\varphi-\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta\\&\quad+(r^2\sin\varphi\sin\theta+2r\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

习题 9 解答

1. 在椭圆柱面坐标系中，令 ch $u=\xi$，$\cos v=\eta$，$z=\zeta$，试求拉梅系数 H_ξ，H_η，H_ζ.

解 此时坐标 ξ，η，ζ 与直角坐标(x,y,z)的关系为
$$x=a\xi\eta,\quad y=a\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-\eta^2},\quad z=\zeta.$$
$$\begin{aligned}H_\xi^2&=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2=a^2\eta^2+\frac{a^2\xi^2(1-\eta^2)}{\xi^2-1}+0\\&=a^2\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}H_\eta^2&=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2=a^2\xi^2+\frac{a^2\eta^2(\xi^2-1)}{1-\eta^2}+0\\&=a^2\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2},\end{aligned}$$
$$H_\zeta^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2=0+0+1=1.$$

故拉梅系数为

$$H_\xi = a\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}},\quad H_\eta = a\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}},\quad H_\zeta = 1.$$

2. 设另一种旋转抛物面坐标(ξ,η,φ)，它与直角坐标的关系为

$$x=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\quad y=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\xi-\eta).$$

(1) 求此种坐标系的坐标曲面；

(2) 求拉梅系数 H_ξ、H_η、H_φ.

解 (1) 容易求得坐标曲面为

$\xi=$常数：为绕 Oz 轴负向的旋转抛物面

$$z-\frac{\xi}{2}=-\frac{1}{2\xi}(x^2+y^2),$$

$\eta=$常数：为绕 Oz 轴正向的旋转抛物面

$$z+\frac{\eta}{2}=\frac{1}{2\eta}(x^2+y^2),$$

$\varphi=$常数：为以 Oz 轴为界的半平面

$$y=\tan\varphi x.$$

(2) 求拉梅系数：

$$H_\xi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2$$

$$=\frac{\eta}{4\xi}\cos^2\varphi+\frac{\eta}{4\xi}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}=\frac{\eta+\xi}{4\xi},$$

$$H_\eta^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2$$

$$=\frac{\xi}{4\eta}\cos^2\varphi+\frac{\xi}{4\eta}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}=\frac{\xi+\eta}{4\eta},$$

$$H_\varphi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=\xi\eta\sin^2\varphi+\xi\eta\cos^2\varphi+0^2=\xi\eta.$$

故拉梅系数为

$$H_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}},\ H_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}},\ H_\varphi = \sqrt{\xi\eta}.$$

3. 计算积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}V$,其中$\Omega$是由曲面$\frac{x^2+y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$所围成的空间区域.

解 用长球面坐标，此时将所给曲面方程与此坐标系中的一种坐标曲面，即长球面方程

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\operatorname{sh}^2 u}+\frac{z^2}{a^2\operatorname{ch}^2 u}=1$$

比较，可知存在常数 u_0 及 a 满足

$$a\operatorname{sh} u_0 = 3,\ a\operatorname{ch} u_0 = 4,\ a^2 = 4^2-3^2=7.$$

于是积分

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{a\operatorname{sh} u\sin v}H_uH_vH_\varphi\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} a^2(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{u_0}\mathrm{d}u\int_0^{\pi}(\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 v)\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\pi a^2\left[\int_0^{u_0}\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2u-1)\,\mathrm{d}u\int_0^{\pi}\mathrm{d}v+\int_0^{u_0}\mathrm{d}u\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2v)\,\mathrm{d}v\right]$$

$$= 2\pi a^2\left[\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2u_0-\frac{u_0}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{2}u_0\right]$$

$$= \pi^2 a^2\operatorname{sh} u_0\operatorname{ch} u_0 = 3\times 4\times\pi^2 = 12\pi^2.$$

4. 试用旋转抛物面坐标，计算由以下二旋转抛物面

$$z+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad 与\quad z-\frac{9}{2}=-\frac{1}{18}(x^2+y^2)$$

所围成的空间区域的体积.

解 所给曲面方程，正好与旋转抛物面坐标系中当 $\xi=1$ 与

$\eta=3$ 时的两种坐标曲面相同．于是所求体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} H_\xi H_\eta H_\varphi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi \\
&= \iiint_{\Omega} (\xi^2+\eta^2)\,\xi\eta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\xi \int_0^3 (\xi^3\eta+\xi\eta^3)\,\mathrm{d}\eta \\
&= 2\pi\left(\int_0^1 \xi^3 \mathrm{d}\xi \int_0^3 \eta \mathrm{d}\eta + \int_0^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^3 \eta^3 \mathrm{d}\eta\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{9}{8}+\frac{81}{8}\right) = \frac{45}{2}\pi = 22.5\pi.
\end{aligned}
$$