目　录

第一章 微 积 分

§1.1 回顾微积分

复变函数论是在复数域上讨论微积分．如同对任何的数学进行推广那样，往往是一部分的内容可以没有多大困难地直接推广得到，而另一部分的内容却是推广后所独有的，在原来实数域理论中所没有的．前一部分当然重要，但人们的兴趣往往更集中在后一部分，因为常常是这一部分才真正刻画了事物的本质．

在这一章中，先十分简单地回顾一下什么是微积分，然后看看微积分中哪些结果可以直接推广到复数域上去，而在以后的各章中要着重讨论一些有本质不同、只在复数域上才特有的一些主要性质与结果．

什么是微积分？微积分由三个部分所组成，即微分、积分以及联系微分、积分成为一对矛盾的微积分基本定理，即 Newton-Leibniz 公式．

众所周知，若 $y=f(x)$ 为定义在区间 (a,b) 上的一个函数，如果 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 在 (a,b) 中的一点 x 存在，则称 $f(x)$ 在这点可微，记这极限值为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 或 $f'(x)$ 等，称为 $f(x)$ 在点 x 的微商；称 $\mathrm{d}f=f'(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在点 x 的微分．如果在 (a,b) 上每一点都可微，则称函数在 (a,b) 上可微．另一方面，如果 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，将 $[a,b]$ 分为任意 n 个小区间 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，而 ξ_i 为 $[x_{i-1},x_i]$ 中任一点，如果令 $n\to\infty$，且所有 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 的长度都趋于零，如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 存在，则称

$f(x)$在$[a,b]$上可积，记此极限值为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 这就是微积分最最基本的定义及出发点，并且都有很明确的几何意义，微商是$y=f(x)$所描绘的曲线在点(x,y)处的斜率，积分是曲线$y=f(x)$在$[a,b]$上的曲边梯形的面积.

微分、积分的概念古已有之，使之成为一门学问而发扬光大是由于Newton和Leibniz证明了微积分基本定理，即指出了微分与积分是一对矛盾，这条基本定理有两种相互等价的表述形式.

微积分基本定理（微分形式） 设函数$f(t)$在区间$[a,b]$上连续，x是$[a,b]$中的一点，令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

则$\Phi(x)$在$[a,b]$中可微，并且$\Phi'(x)=f(x)$，即$\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x$. 换句话说，若$f(x)$的积分是$\Phi(x)$，则$\Phi(x)$的微分就是$f(x)\mathrm{d}x$.

微积分基本定理（积分形式） 设$\Phi(x)$是在$[a,b]$中可微，且$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$等于连续函数$f(x)$，那末成立着

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)-\Phi(a) \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

换句话说，若$\Phi(x)$的微分是$f(x)\mathrm{d}x$，则$f(x)$的积分就是$\Phi(x)$.

有了这个定理，求积分成为求微分的逆运算，而微分与积分的一些性质相互对应，成为一件事物的两个方面. 例如

$$\frac{\mathrm{d}(f(x)\pm g(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\pm\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

与

$$\int(f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$$

相对应；

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g$$

与分部积分法

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int gf'\mathrm{d}x$$

相对应；

若 $u=f(y)$，$y=g(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

与

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$$

相对应等等. 又例如微分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，则在 $[a,b]$ 中存在一点 c，使得

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

与积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

是相互对应的. 又例如，函数的 Taylor 展开，可以用微分来证明之，并以微分形式表达其余项；也可以用积分来证明之，并以积分形式来表达其余项等等，不在此一一赘述了.

在微积分中一般讨论初等函数及其复合函数，所谓初等函数是指下面三类函数，即

1. 幂函数 x^α，α 为实数；多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为常数；有理分式 $\dfrac{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}{c_0+c_1x+\cdots+c_px^p}$，这里 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$，$c_i(i=0,1,\cdots,p)$ 为常数；以及其反函数.

2. 三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 等等及其反函数，如 $\arcsin x$，$\arccos x$ 等等.

3. 指数函数 e^x，2^x 等等及其反函数 $\ln x$，$\log_2 x$ 等等.

而所谓函数 $f(x)$ 的 Taylor 展开式及 Fourier 展开式不过是用第 1 类中的多项式来逼近函数 $f(x)$，以及用第 2 类中的 $\sin nx$，

$\cos nx$ 等来逼近函数 $f(x)$. 所以没有用第 3 类初等函数，即指数函数来逼近函数 $f(x)$的原因之一是下面即将讲到的 Euler 公式——指数函数可以表为三角函数. 当然一些重要的初等函数的 Taylor 级数是熟知的. 例如：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{1.1}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \tag{1.2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \tag{1.3}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1), \tag{1.4}$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x|<1, r\ 为实数), \tag{1.5}$$

等等.

以上只是十分简单地回顾了一维微积分的大概，用这种观点来看待一维微积分，详细的叙述可参阅我与张声雷所写的《简明微积分》中有关部分（龚昇、张声雷[1]）.

至于高维的微积分，也有相应的三个部分，即微分、积分及联系微分与积分的微积分基本定理. 只是在微分的部分有偏微分、全微分，而与微商相当的是 Jacobi 矩阵；在积分的部分有重积分、线积分、面积分等，这些都是一维微分与积分的自然推广，于是也可列出其相应的定理，这里不多叙述了. 对第三部分要说几句话. 在高维情形下，什么是微积分的基本定理？是什么定理刻画了在高维的情形下，微分、积分是一对矛盾？ 回答是：Green 公式、Stokes 公式及 Gauss 公式.

Green 公式 若 D 为 xy 平面上封闭曲线 L 围成的闭区域，函数 $P(x,y)$和 $Q(x,y)$在 D 上有一阶连续偏微商，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

Stokes 公式 设在空间有曲面 Σ，边界是封闭曲线 L，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$有一阶连续偏微商，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

Gauss 公式 设 V 是空间封闭曲面 Σ 所围成的闭区域，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在 V 上有一阶连续偏微商，则

$$\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.8}$$

这三个公式都刻画了在边界上积分与在内部积分的关系，如果用外微分形式，那末这三个公式可以统一成一个公式，称为 Stokes 公式. 要十分严谨的叙述外微分形式需要很多篇幅，但这可以在很多微积分的教材中找到. 拙著《简明微积分》就是用这种观点来写的. 在这里只能十分简单地形式地作一简介(龚昇、张声雷[1]).

定义微分 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 的外乘积为 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，它满足下面的规则：

(1) $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0$，即两个相同微分的外乘积为零.

(2) $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x$，即两个不同微分的外乘积交换次序差一符号.

当然(1)可以看成(2)的推论. 由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式称为外微分形式. 例如：若 P,Q,R,A,B,C,H 为 x,y,z 的函数，则

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

为一次外微分形式(由于一次没有外乘积，与普通的微分形式是一样的)；

$$A\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

为二次外微分形式；

$$H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

为三次外微分形式；而 P,Q,R,A,B,C,H 称为微分形式的系数. 对于外微分形式 ω 可以定义外微分算子 d，它是这样定义的：对于零次外微分形式，即函数 f，定义

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

即普通的全微分算子. 对于一次外微分形式 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$，定义

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z,$$

即对 P、Q、R 进行微分，然后进行外乘积. 通过外乘积运算规则，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = &\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对于二次外微分形式 $\omega = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 也是一样定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}B \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}C \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

对于三次外微分形式 $\omega = H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 也是一样定义：

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

可以证明这恒等于零. 如果规定 $\mathrm{dd}x = \mathrm{dd}y = \mathrm{dd}z = 0$，则外微分算子 d 与普通微分算子是一样的了，即对每一项进行运算，在每一项中分别对每一个因子进行运算，其余因子不动，将得出的各项相加，不同的只是外微分算子 d 是在运算之后进行外乘积. 由此立得重要的 **Poincaré 引理**：若 ω 为一外微分形式，其系数具有二阶连续偏微商，则 $\mathrm{dd}\omega = 0$. 其逆也成立，即若 ω 是一个 p 次外微分形式，且 $\mathrm{d}\omega = 0$，则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 α，使得 $\omega = \mathrm{d}\alpha$. 有了

这些准备之后，那末 Green 公式、Stokes 公式与 Gauss 公式可以统一地写成

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega, \tag{1.9}$$

这里 ω 为外微分形式，$\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分，Σ 为 $\mathrm{d}\omega$ 的积分区域，为封闭区域，$\partial\Sigma$ 表示 Σ 的边界，$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数积分. 事实上，当 ω 为零次外微分形式，(1.9)就是 Newton-Leibniz 公式；当 ω 为一次外微分形式，在平面的情形，(1.9)就是 Green 公式；在三维空间，(1.9)为 Stokes 公式；当 ω 为二次外微分形式，(1.9)就是 Gauss 公式. (1.9)真正刻画了微分与积分是一对矛盾. 这个公式不仅对三维欧氏空间成立，而且对任意高维的欧氏空间也成立. 不仅如此，对于更一般的微分流形上也是成立的，所以(1.9)是高维空间的微积分的基本定理. 这个定理是微积分的顶峰与终点.

当然这样回顾微积分是十分粗略的，但我想说清楚思路就可以了，不可能也不必要在此作十分仔细的叙述.

复变函数论是复数域上的微积分，是普通微积分的继续，公式(1.9)成为本书的出发点之一也是十分自然的事了.

§1.2 复数域、扩充复平面及其球面表示

复数的全体组成复数域，它是实数域的扩充.

在初等代数中已经知道，虚数单位 i 具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$，将这一虚数单位与两个实数 α,β 用加、乘结合起来得到复数 $\alpha+\mathrm{i}\beta$. α,β 分别称为这一复数的实部(real part)与虚部(imaginary part). 若记 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则记 $\mathrm{Re}a=\alpha$，$\mathrm{Im}a=\beta$. 两复数相等当且仅当实部与虚部相等. 复数的四则运算为

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)\pm(\gamma+\mathrm{i}\delta)=(\alpha\pm\gamma)+\mathrm{i}(\beta\pm\delta),$$

$$(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\gamma+\mathrm{i}\delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+\mathrm{i}(\alpha\delta+\beta\gamma),$$

若 $\gamma+\mathrm{i}\delta\neq 0$,

$$\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\gamma+\mathrm{i}\delta}=\frac{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\gamma-\mathrm{i}\delta)}{(\gamma+\mathrm{i}\delta)(\gamma-\mathrm{i}\delta)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+\mathrm{i}(\beta\gamma-\alpha\delta)}{\gamma^2+\delta^2}.$$

若复数 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$,则 $\alpha-\mathrm{i}\beta$ 称为 a 的共轭(conjugate)复数,记作 $\bar{a}$. 于是

$$\mathrm{Re}a=\frac{a+\bar{a}}{2},\quad \mathrm{Im}a=\frac{a-\bar{a}}{2\mathrm{i}},$$

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},\quad \overline{ab}=\bar{a}\cdot\bar{b},\quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\bar{a}}{\bar{b}},$$

$a\bar{a}=\alpha^2+\beta^2$, 记作 $|a|^2$,而 $|a|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 称为 a 的绝对值. 显然 $|a|\geqslant 0$,

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0),$$

$$|a\pm b|^2=|a|^2+|b|^2\pm 2\mathrm{Re}a\bar{b},\quad |a+b|\leqslant|a|+|b|$$

等等.

对于平面上一个给定的直角坐标系来说,复数 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 可以用坐标(α,β)的点来表示,第一个坐标称为实轴,第二个坐标称为虚轴,所在的平面称为复平面,记作 $\boldsymbol{C}$.

一个复数不仅可以用一点来表示,而且可以用一个由原点指向这点的向量来表示,这个复数、这个点、这个向量都以同一字母 a 来表示之. 与通常一样,任一向量作平行移动后得到的所有的向量都视为与原向量恒等. 于是复数的加法成为向量的加法. 而复数的公式往往赋有几何意义,例如 $|a|$ 表示向量长度;$|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 表示三角形两边之和大于第三边,等等.

对复数也可引入极坐标(r,φ),复数 $a=\alpha+\mathrm{i}\beta=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. 显然,$r=|a|$,$r$ 称为复数 a 的**模**,φ 称为复数 a 的**幅角**. 如果

$$a_1=r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1),\quad a_2=r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2),$$

则

$$a_1a_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

即 $r=r_1r_2$，$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，复数 a 的幅角不唯一，因为 $\varphi+2k\pi$，k 为任意整数，仍为幅角. 记一般的幅角为 $\mathrm{Arg}a$，特别 $0\leqslant\varphi<2\pi$ 时，称为**主幅角**，记作 $\arg a$.

若 $z=x+\mathrm{i}y$，a 为一固定的复数，r 为一固定的实数，则 $|z-a|=r$ 表示一个以 a 为中心、r 为半径的圆周；$|z-a|<r$ 表示一个以 a 为中心，r 为半径的圆盘，记作 $D(a,r)$. 同样，上半平面可以用 $\mathrm{Im}z>0$ 来表示，右半平面可以用 $\mathrm{Re}z>0$ 来表示等等.

引入坐标，得到复平面 $\boldsymbol{C}$，但如何来处理无穷远点？在复变数函数论中，我们引入一个点，叫无穷远点，记作 ∞，以此来扩展 $\boldsymbol{C}$. 对所有有限的复数 $a\in\boldsymbol{C}$，$a+\infty=\infty+a=\infty$，对所有的 $b\neq0$，$b\cdot\infty=\infty\cdot b=\infty$，$\dfrac{a}{0}=\infty\,(a\neq0)$ 及 $\dfrac{b}{\infty}=0$ 等等. $\boldsymbol{C}$ 中所有的点加上"∞"，组成扩充复数平面，记作 $\boldsymbol{C}^*$. 即 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$. 在本书中，扩充复数平面指的就是 $\boldsymbol{C}^*$.

要对扩充复数平面作个几何模型，在这个模型上一切扩充平面上的点都有一个具体的表示，这就是球面表示，它是通过球极平面投影（stereographic projection）得到的.

考察一个三维空间的单位球面 S^2，其方程为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$（三维空间的直角坐标为 x_1,x_2,x_3），在 S^2 上的每一点，除了 $(0,0,1)$ 以外，我们可用一复数

$$z=\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3} \tag{2.1}$$

与之相对应，这个对应是一对一的，事实上，由(2.1)可得

$$|z|^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1+x_3}{1-x_3}.$$

因之得到

$$x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},\quad x_1=\frac{z+\bar z}{1+|z|^2},\quad x_2=\frac{z-\bar z}{1+|z|^2}. \tag{2.2}$$

令无穷远点∞对应于$(0,0,1)$,就完成了球面S^2上的点与扩充复数平面$\boldsymbol{C}^*$上的点之间的一对一的对应,因之,可以把球面S^2作为扩充复数平面$\boldsymbol{C}^*$的代表.球面S^2称为**Riemann 球面**.显然,$x_3<0$的半球面对应于单位圆盘$|z|<1$,而$x_3>0$的半球面对应于单位圆盘的外部$|z|>1$等等.

如复平面为以x_1轴为实轴,x_2轴为虚轴的(x_1,x_2)平面,则(2.1)有明确的几何意义.

取$z=x+\mathrm{i}y$,则由(2.1)得

$$x:y:-1=x_1:x_2:x_3-1.$$

这说明点$(x,y,0)$,(x_1,x_2,x_3),$(0,0,1)$在一条直线上.因此,这个对应实际上是以$(0,0,1)$为中心的中心投影,将S^2上的点投影到$\boldsymbol{C}^*$上,称这个投影为**球极平面投影**.在球面表示中,无穷远点不再有任何特殊了.

§1.3 复 微 分

如同普通微积分中那样,可以定义复数域上的复值函数$w=f(z)$,这里z,w均为复数.为了有确切的意义,我们先限定$f(z)$为单值的.也可以用ϵ-δ语言来定义函数的极限,即

$$\lim_{z\to a}f(z)=A$$

是指任给$\epsilon>0$,存在一个正数δ,对于所有的z,只要$|z-a|<\delta(z\neq a)$,恒有$|f(z)-A|<\epsilon$.如果$\lim\limits_{z\to a}f(z)=f(a)$,则称$f(z)$在$z=a$处连续.

如同普通微积分中那样,可以在复平面上定义开集、闭集、集合的连通性、紧致性等等.定义复平面中的曲线为区间$[\alpha,\beta]$上的连续复值函数$\gamma(t)$:$\gamma(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$,$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,此处$x(t)$,$y(t)$均为$t$的连续实函数.$\gamma(\alpha)$,$\gamma(\beta)$称为曲线$\gamma(t)$的端点.如果$\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$,则称$\gamma(t)$为闭曲线.曲线的方向就是$t$增加的方向.如果

$\gamma'(t)$存在且连续，则称 $\gamma(t)$为光滑曲线. 如果 $\gamma'(t)$除去有限个 t 外是连续的，在这有限个 t 处，$\gamma(t)$有左、右导数，则称 $\gamma(t)$为分段光滑曲线. 分段光滑曲线是可求长的. 若曲线 $\gamma(t)$仅当 $t_1 = t_2$时，$\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$，则称 $\gamma(t)$为简单曲线，或 Jordan 曲线. 若 $\gamma(t)$同时是闭曲线，则称 $\gamma(t)$为简单闭曲线或 Jordan 闭曲线.

复平面上的一个点集 D 称为一个域，如果

(1) D 为开集；

(2) D 为连通，即 D 中任意两点均可用完全位于 D 中的曲线把它们连接起来.

域 D 的边界记作 ∂D. 域 D 称为**单连通**的，如果 D 内任何简单闭曲线的内部仍属于 D. 不是单连通的域称为**多连通域**. 由两条 Jordan 闭曲线所围成的域是二连通域，由 n 条 Jordan 闭曲线所围成的域是 n 连通域，这些闭曲线可能退化成为一个点或一条 Jordan 曲线. 此外，如同实数域的情形那样，可以证明 Heine-Borel 定理、Bolzano-Weierstrass 定理等等，这里只叙不证.

Heine-Borel 定理　若 A 为紧集，G 为 A 的开覆盖，则从 G 中可以选出有限个开集覆盖 A.

Bolzano-Weierstrass 定理　任一无穷集至少有一极限点.

现在来讨论复变数复值函数的导数. 若 $w=f(z)$，那末自然考察 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$，这里 h 为复数. 如果这个极限对于所有的 $h\to 0$都存在且相同，则称 $f(z)$在 z 点可微，记作 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ 或 $f'(z)$，称为 $f(z)$在 z 点的微商或导数. 如果 $f(z)$在其定义域上每一点都可微，则称 $f(z)$为其定义域上的**解析函数**(analytic function)或**全纯函数**(holomorphic function). 这个定义是与普通微积分中微商的定义相一致的. 因此，复微商的四则运算、复合函数的微商等公式也是相一致的. 这些公式读者可以立即写出来. 但复微商终究是在复平面上进行，所以这里有一些特殊的地方.

若

$$f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处可微，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

对任意途径的 $z\to z_0$ 都存在且相等，特别 z 沿着平行于坐标轴的途径趋于 z_0 也应存在且相等. 先令 $z=x+\mathrm{i}y_0$，$x\to x_0$，则

$$\begin{aligned}f'(z_0)&=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}+\mathrm{i}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\right]\\&=u_x(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_x(x_0,y_0).\end{aligned}$$

再令 $z=x_0+\mathrm{i}y$，$y\to y_0$，则

$$\begin{aligned}f'(z_0)&=\lim_{y\to y_0}\left[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)}+\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\right]\\&=v_y(x_0,y_0)-\mathrm{i}u_y(x_0,y_0).\end{aligned}$$

两式比较实部与虚部，即得：u，v 在点 (x_0,y_0) 处应满足

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x. \tag{3.1}$$

(3.1)也可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{3.2}$$

方程(3.1)及(3.2)都称为 Cauchy-Riemann 方程，简称 C-R 方程. C-R 方程为 $f(z)$ 在一点 $z=z_0$ 处可微的必要条件，但不充分，例如

$$f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=\sqrt{|xy|}.$$

在 $z=0$ 处满足 C-R 方程，但不可微. 因为取 $x=\alpha t$，$y=\beta t$，

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+\mathrm{i}\beta},$$

令 $z\to 0$ 时，极限不唯一. 但有如下的

定理1 函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在域 D 内全纯的充要条件是：u，v 在 D 内有一阶连续偏微商，且满足 C-R 方程(3.1).

证明 *必要性* 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处可微，则满足(3.1)已证. 在下一章§2.3中将证明，全纯函数的微商也是全纯函数，故 $f'=$

$u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$ 也是连续函数.

充分性　设 u,v 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处有一阶连续偏微商,且满足 C-R 方程(3.1). 记 $\alpha=u_x(x_0,y_0)$,$\beta=v_x(x_0,y_0)$,那末

$$u(x,y)-u(x_0,y_0)=\alpha(x-x_0)-\beta(y-y_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|),$$

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)=\beta(x-x_0)+\alpha(y-y_0)+\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

其中$|\Delta z|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$,$\varepsilon_1,\varepsilon_2$满足

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0.$$

将第二式乘以 i 与第一式相加,得到

$$f(z)-f(z_0)=(\alpha+\mathrm{i}\beta)(z-z_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)+\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

即为

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(\alpha+\mathrm{i}\beta)=\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+\mathrm{i}\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z-z_0}.$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\alpha+\mathrm{i}\beta,$$

即

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_x(x_0,y_0).$$

定理证毕.

但是有如下的

Loomen-Menchoff 定理　若 $f(z)$在开集 $\Omega\subset\boldsymbol{C}$ 中连续,且$\frac{\partial f}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$在 Ω 中每一点都存在,且满足 C-R 方程(3.1),则 $f(z)$在 Ω 上全纯.

Loomen-Menchoff 定理说明定理1中 u,v 有一阶连续偏微商的条件是不必要的. 前面所举的例子,$f(z)=\sqrt{|xy|}$并不满足 Loomen-Menchoff 定理的条件. 当然在此不可能也无必要来证明这个定理.

在下一章 § 2.3中将证明:如 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在域 D 内全纯,则

其微商 $f'(z)$ 也是 D 内的全纯函数，所以 u,v 的二阶偏微商也是连续的，因而二阶混合偏微商 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ 是相等的. 由 C-R 方程得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

因之得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

同样可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

这个方程称为 Laplace 方程. 它是偏微分方程理论中三个最基本的偏微分方程之一，即椭圆型方程的典型方程，记作

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

此处

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

满足 $\Delta u = 0$ 的函数 u 称为调和函数，即全纯函数 $f = u + \mathrm{i}v$ 的实部与虚部均为调和函数.

由于 $z = x + \mathrm{i}y$, $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$, 于是 $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = -\frac{1}{2}\mathrm{i}(z - \bar{z})$. x,y 的函数 $f(x,y)$ 可以考虑为 z 及 $\bar{z}$ 的函数，把 z 及 $\bar{z}$ 看作为自变数（它们实际上是互相共轭的，但暂不注意及此），如微分法则可用，则可得

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

应用这个记号，则一个函数 f 是全纯的当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. 不妨说：一个全纯函数是与 $\bar{z}$ 无关，而只是 z 的函数，所以全纯函数可以看作确是一个复变数 z 的函数，而不称之为两个实变数复值函数.

$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$又等价于$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial z}$. 应用这些记号，则 $\Delta=4\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}=4\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial}{\partial z}$.

复微商有很好的几何性质，即共形性.

设函数 $f(z)$在域 D 内全纯，$z_0\in D$，$f'(z_0)\neq 0$，$\gamma(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$为 D 内过点 z_0的一条光滑曲线，且 $\gamma(0)=z_0$，$\gamma(t)$在点 z_0的切线与实轴的夹角为 $\arg\gamma'(0)$，$f(z)$把 $\gamma(t)$映为过点 $w_0=f(z_0)$的光滑曲线 $\sigma(t)=f(\gamma(t))$，于是 $\sigma'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)$，$\sigma'(0)=f'(z_0)\cdot\gamma'(0)$，$\sigma(t)$在点 w_0的切线与实轴的夹角为

$$\arg\sigma'(0)=\arg f'(z_0)+\arg\gamma'(0),$$

此即为

$$\arg\sigma'(0)-\arg\gamma'(0)=\arg f'(z_0).$$

即 $\sigma(t)$在点 w_0处切向量的幅角与 $\gamma(t)$在点 z_0处切向量的幅角之差总是 $\arg f'(z_0)$，与 $\gamma(t)$无关. 因此，过点 z_0的任意两条光滑曲线 $\gamma_1(t)$，$\gamma_2(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$，$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z_0$，它们在 $f(z)$映射下的像分别是过点 $w_0=f(z_0)$的光滑曲线 $\sigma_1(t)$与 $\sigma_2(t)$. 于是

$$\arg\sigma_2'(0)-\arg\gamma_2'(0)=\arg\sigma_1'(0)-\arg\gamma_1'(0),$$

即

$$\arg\sigma_2'(0)-\arg\sigma_1'(0)=\arg\gamma_2'(0)-\arg\gamma_1'(0).$$

所以 $\gamma_1(t)$与 $\gamma_2(t)$在点 z_0处的夹角等于 $\sigma_1(t)$与 $\sigma_2(t)$在点 $w_0=f(z_0)$处的夹角，也就是说，在映射 $w=f(z)$之下，在微商不为零的点处，两条光滑曲线的夹角的大小及旋转方向是保持不变的，此为 $f(z)$在 z_0处的保角性.

另一方面，由于

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

任取过 z_0的曲线 $\gamma(t)$，在映射 $f(z)$下成为 $\sigma(t)$，那末

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|.$$

即像点之间的距离与原来两点之间的距离之比的极限与曲线无

关，称 $|f'(z_0)|$ 为 $f(z)$ 在点 z_0 处的伸长度. 因此任意一个以 z_0 为顶点的小三角形，经过 $f(z)$ 映射后，成为一曲边三角形，它们的微分三角形是相似的. 上述两个性质加在一起，称为共形性. 所以我们称在 D 上的全纯映射为**共形映射**（若 $f'(z)\neq 0$），在第四章中，我们要详细讨论之.

§1.4 复 积 分

如果 $f(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$ 为一个在实区间 $[a,b]$ 上定义的复值函数，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

如果 γ 是一个分段可微弧段，其方程为 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$，$f(z)$ 在 γ 上定义且连续，则 $f(z(t))$ 也是 t 的连续函数. 令

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

作为 $f(z)$ 沿复曲线 γ 上积分的定义，这是一个参数变换下的不变的积分. 如有增函数 $t=t(\tau)$ 将 $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta$ 映为 $a\leqslant t\leqslant b$，$t(\tau)$ 为逐段可微，则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t&=\int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))\mathrm{d}\tau\\&=\int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))\frac{\mathrm{d}z(t(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

如果用 Riemann 和来定义线积分也可获得同样的结果. 于是有与普通线积分一样的性质，例如

$$\int_{-\gamma} f(z)\mathrm{d}z=-\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z;$$

如 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$，则

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

所以对复积分没有太多可以说的了，那末对应于微积分的第三部分，应是怎样？在复平面上，对应的是复形式的 Green 公式，现在尽量用一般通行的符号来书写之. 为此，我们用复的外微分形式，视 z、$\bar{z}$ 为独立变量，定义微分的外乘积为：

$$dz\wedge dz=0,\quad d\bar{z}\wedge d\bar{z}=0,\quad dz\wedge d\bar{z}=-d\bar{z}\wedge dz,$$

这里

$$dz=dx+idy,\quad d\bar{z}=dx-idy.$$

所以

$$\begin{aligned}d\bar{z}\wedge dz&=(dx-idy)\wedge(dx+idy)\\&=-idy\wedge dx+idx\wedge dy\\&=2idx\wedge dy=2idA,\end{aligned}$$

这里 dA 为二维面积元素. 如同实的情形那样，定义0次外微分形式为函数 $f(z,\bar{z})$；一次外微分形式为 $\omega_1dz+\omega_2d\bar{z}$，这里 ω_1，ω_2 为 z，$\bar{z}$ 的函数；二次外微分形式为 $\omega_0dz\wedge d\bar{z}$，这里 ω_0 为 z，$\bar{z}$ 的函数；定义外微分算子 $d=\partial+\bar{\partial}$，这里 $\bar{\partial}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$，$\partial=\frac{\partial}{\partial z}$. 显然也可以证明 $dd\omega=0$ 对任意外微分形式 ω 都成立，于是复形式的 Green 公式为：

定理2 若 $\omega=\omega_1dz+\omega_2d\bar{z}$ 为域 Ω 上的一次外微分形式，这里 $\omega_1=\omega_1(z,\bar{z})$，$\omega_2=\omega_2(z,\bar{z})$ 均为 z、$\bar{z}$ 的可微函数，d 为外微分算子，即 $d=\partial+\bar{\partial}$，这里 $\partial=\frac{\partial}{\partial z}$，$\bar{\partial}=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$，记 Ω 的边界为 $\partial\Omega$，则

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\iint_{\Omega}d\omega. \tag{4.1}$$

证明 若 $\omega_1=\xi_1+i\eta_1$，$\omega_2=\xi_2+i\eta_2$，这里 ξ_1，η_1，ξ_2，η_2 均为实值函数. 于是

$$\begin{aligned}\omega&=\omega_1dz+\omega_2d\bar{z}\\&=(\xi_1+i\eta_1)(dx+idy)+(\xi_2+i\eta_2)(dx-idy)\\&=((\xi_1+\xi_2)dx+(-\eta_1+\eta_2)dy)\\&\quad+i((\eta_1+\eta_2)dx+(\xi_1-\xi_2)dy).\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \partial(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) + \bar{\partial}(\omega_1 dz + \omega_2 d\bar{z}) \\
&= \frac{\partial\omega_1}{\partial z} dz \wedge dz + \frac{\partial\omega_2}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} + \frac{\partial\omega_1}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial\omega_2}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \wedge d\bar{z} \\
&= \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right) d\bar{z} \wedge dz \\
&= \Big[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\xi_1 + i\eta_1) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\xi_2 + i\eta_2)\Big] 2i\,dA \\
&= \Big[-\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y} + \frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \frac{\partial\xi_2}{\partial y} - \frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right) \\
&\quad + i\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x} - \frac{\partial\eta_1}{\partial y} - \frac{\partial\xi_2}{\partial x} - \frac{\partial\eta_2}{\partial y}\right)\Big] dA.
\end{aligned}
$$

由 Green 公式，显然有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} (\xi_1 + \xi_2) dx + (-\eta_1 + \eta_2) dy \\
&\quad = \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial}{\partial x}(\eta_1 - \eta_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\xi_1 + \xi_2)\right) dA
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} (\eta_1 + \eta_2) dx + (\xi_1 - \xi_2) dy \\
&\quad = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\xi_1 - \xi_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\eta_1 + \eta_2)\right) dA,
\end{aligned}
$$

所以(4.1)是成立的.

公式(4.1)在高维复欧氏空间也成立，在复流形上也成立，所以这是一般形式的特例，这个一般形式也叫做 Stokes 公式. 公式(4.1)是下一章的出发点之一.

§1.5 初等函数

在微积分中，初等函数是由三类函数以及它们的复合函数所

构成的．这三类函数是：

（1）幂函数、多项式、有理分式及其反函数；

（2）三角函数及其反函数；

（3）指数函数及其反函数，即对数函数．

在复数域中如何定义这三类函数？有些是容易做到的，例如，对于多项式只要将实变数换成复变数即可．但另外一些函数，如 $\sin z$，当 z 是复数时，这是什么意义？又例如 e^z，当 z 是复数时，这又是什么意义？这些必须重新定义之，既要有确切的意义，当变数为实数时，又要与原来的定义相一致．一个自然的想法是用级数来定义．

若 y 为实数，则

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots.$$

十分自然地去定义

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{(iy)}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) \\ &\quad + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right). \end{aligned}$$

但是，我们知道

$$1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots = \cos y,$$

$$\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots = \sin y.$$

所以就有

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y. \tag{5.1}$$

这就是著名的 Euler 公式．

这就建议：对于任意的复数 $z=x+iy$，定义

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{5.2}$$

于是，(5.1)是(5.2)的推论. (5.1)是非常重要的公式，它告诉我们指数函数与三角函数之间是可以相互表示的. 由(5.1)即得

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\quad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

由此建议我们：对于任意的复数 $z=x+iy$，定义

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{5.3}$$

当然由此可以定义：$\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$等等. 由(5.3)立得，若 y 为实数，则 $\cos iy=\mathrm{ch}\,y$，$\sin iy=i\,\mathrm{sh}\,y$.

从定义(5.2)可以定义 e^z 的反函数 $\mathrm{Log}z$，这可定义为：满足 $e^w=z$ 的复数 w 称为 z 的对数，记作 $\mathrm{Log}z$. 同样由(5.3)可以定义 $\cos z$ 及 $\sin z$ 的反函数 $\arccos z$ 及 $\arcsin z$ 等.

对于幂函数 z^α，当 α 为整数时，其意义是明确的. 对于任意的复数 α，十分自然地可定义

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log} z}. \tag{5.4}$$

由(5.2)、(5.3)及(5.4)定义的函数的性质，下面还将进一步讨论. 但从这里可以看出，微积分中看来互相不相关的三类初等函数，在复数域中成了一类，即指数函数及其反函数，而三角函数及其反函数，幂函数及其反函数均可以由此来表达. 所以能这样做的关键的一步是公式(5.1)，即 Euler 公式，这是十分深刻的公式. 例如当 $y=\pi$，则(5.1)成为 $e^{i\pi}=-1$，这是联系了数学中四个重要的常数 e，π，i，-1的一个公式. 又例如有用的 De Moivre 公式

$$(\cos y + i\sin y)^n = \cos ny + i\sin ny$$

是(5.1)的自然推论等.

以下来看看这样定义的初等函数的性质.

先看指数函数，由定义(5.2)立得

(1) 指数函数不取零值，$e^z\neq 0$，这是因为 $|e^z|=e^x>0$.

(2) 对于任意 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$. 有 $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$,这是因为

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}
$$

(3) e^z 以$2\pi i$ 为周期,这是因为 $e^{2\pi i}=1$.

(4) e^z 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯,且$(e^z)'=e^z$,这是因为由(5.2),

$$u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y,$$

故

$$u_x=v_y=e^x\cos y,\quad u_y=-v_x=-e^x\sin y$$

都是在 $\boldsymbol{C}$ 上的连续函数,由定理1,e^z 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯且

$$(e^z)'=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z.$$

以上可见在实数域中 e^x 的主要性质,在复数域中依然成立.

如果将 $w=f(z)$看作由 z 平面上一个区域到 w 平面上一个区域的映射,映射称为单叶的,如果映射是一对一的. 以下我们讨论(5).

(5) e^z 的单叶性区域,即在怎样的区域上 e^z 看作映射可以建立起一一对应.

设 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$使 $e^{z_1}=e^{z_2}$成立,即

$$e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)=e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)$$

成立,也就是 $e^{x_1}e^{iy_1}=e^{x_2}e^{iy_2}$ 成立. 因此, $x_1=x_2, y_1=y_2+2k\pi$,即 $z_1-z_2=2k\pi i$,其中 k 为整数. 取带域$2k\pi<y<2(k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 作为 e^z 的单叶区域,例如取 $z=x+iy, 0<y<2\pi$,则 e^z 将此带域单叶地映为 $\boldsymbol{C}$ 上去掉正实数轴的域 $E=\boldsymbol{C}\setminus\{z\,|\,z\geqslant 0\}$.

再看看指数函数的反函数,即对数函数.

对于 $z\neq0$,满足 $e^w=z$ 的复数 w 称为 z 的对数,记作 $\mathrm{Log}z$,由于指数函数的周期性,$\mathrm{Log}z$ 是(无穷)多值函数.

设

$$z=re^{i\theta},\quad w=u+iv,$$

则

$$e^{u+iv} = re^{i\theta},$$

得到 $e^u=r, v=\theta+2k\pi$，k 为整数. 所以

$$w = \log r + (\theta + 2k\pi)i$$

或记作

$$w = \log|z| + i\mathrm{Arg}z,$$

这里 $\mathrm{Arg}z=\theta+2k\pi$ 为 z 的幅角.

对数函数有性质

$$\mathrm{Log}(z_1z_2) = \mathrm{Log}z_1 + \mathrm{Log}z_2,$$

这是因为 $\mathrm{Arg}(z_1z_1)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$.

由对指数函数的讨论知道：若在域 $D:\boldsymbol{C}\setminus\{z\,|\,z\geqslant 0\}$ 上，z 的幅角取主值 $0<\arg z<2\pi$，那末函数

$$w_k(z) = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

把 D 单叶地映为平行于实轴的带域 $E_k: 2k\pi<v<2(k+1)\pi$. 它们都是指数函数 $z=e^w$ 的反函数，且在域 D 内全纯，并且有 $w_k'=\dfrac{1}{z}$.

称 $w_0(z)=\log|z|+i\arg z$ 为 $\mathrm{Log}z$ 的主值分支，记作 $\log z$，即

$$\log z = \log|z| + i\arg z.$$

为方便计，有时也取 $-\pi<\arg z<\pi$.

再看三角函数，由定义(5.3)立得

(1) $\cos z,\sin z$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯，且

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

(2) $\cos z,\sin z$ 以 2π 为周期，即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

(3) $\cos z$ 为偶函数，$\sin z$ 为奇函数，即

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

(4) 和角公式成立，即

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2.$$

(5) $\cos z$ 与 $\sin z$ 的基本关系式

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

成立.

(6) $\sin z$ 仅在 $z=k\pi$ 处为零,$\cos z$ 仅在 $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 处为零,这里 $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

以上可见实数域上定义的 $\sin x,\cos x$ 的主要性质,在复数域上依然成立,但是,$\cos x,\sin x$(x 为实数)与 $\cos z,\sin z$(z 为复数)还是有不同之处.

(7) $|\sin z|$ 与 $|\cos z|$ 是无界的. 这是由于(4),

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= |\sin(x+\mathrm{i}y)|^2 = |\sin x\cos \mathrm{i}y + \cos x\sin \mathrm{i}y|^2 \\ &= |\sin x\,\mathrm{ch}y + \mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}y|^2 = \mathrm{sh}^2 y + \sin^2 x, \end{aligned}$$

这是个无界函数. 同样 $|\cos z|^2=\mathrm{ch}^2 y-\sin^2 x$,这也是个无界函数.

(8) $\sin z$ 与 $\cos z$ 的单叶性域.

先考察 $w=\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$,这是三个函数 $\xi=\mathrm{i}z,\zeta=\mathrm{e}^{\xi},w=\frac{1}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta})$的复合. 第一个函数只是旋转,故映射处处单叶. 第二个函数单叶的充要条件为:ξ 平面上的域不包含满足 $\xi_2-\xi_1=2k\pi\mathrm{i}$ 的两点 ξ_1,ξ_2,这里 k 为整数,此即为:在 z 平面上的域不包含 $z_1-z_2=2k\pi$ 的两点. 第三个函数单叶的充要条件为:在 ζ 平面上,不包含 $\zeta_1\zeta_2=1$的两点 ζ_1与 ζ_2,在 z 平面上就是不包含满足条件 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1}\cdot e^{\mathrm{i}z_2}=1$,即 $z_1+z_2=2k\pi$ 的两点,因此,带域$0<\mathrm{Re}z<\pi$ 就可作为 $\cos z$ 的单叶区域.

$\xi=\mathrm{i}z$ 将$0<\mathrm{Re}z<\pi$ 单叶地映为$0<\mathrm{Im}z<\pi$,$\zeta=\mathrm{e}^{\xi}$ 又将后一带域单叶地映为上半平面 $\mathrm{Im}\zeta>0$,最后 $w=\frac{1}{2}(\zeta+\frac{1}{\zeta})$又将上半平面映为除去实轴上$-\infty<u\leqslant-1$和$1\leqslant u<+\infty$的整个 w 平面,即 $w=\cos z$ 将$0<\mathrm{Re}z<\pi$ 单叶地映为 w 平面上去掉$-\infty<u\leqslant-1$,$v=0$及$1\leqslant u<+\infty$,$v=0$的域.

同样可以考虑 $w=\sin z,w=\tan z$ 等.

再来看看反三角函数，先看 $w=\arccos z$，即 $\cos w=z$.

由于

$$\cos w=\frac{1}{2}(e^{iw}+e^{-iw})=z,$$

这是 e^{iw}的二次方程，有根 $e^{iw}=z\pm\sqrt{z^2-1}$；即

$$\begin{aligned}w&=\arccos z=-\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)\\&=\pm\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).\end{aligned}$$

所以 $\arccos z$ 有无穷多值，这反映了 $\cos w$ 的周期性. 另一方面，$\arcsin z$ 可定义为$\frac{\pi}{2}-\arccos z$.

最后看看幂函数.

由定义(5.4)，若 $\alpha=a+ib$，则

$$\begin{aligned}z^{\alpha}&=e^{\alpha\mathrm{Log}z}=e^{(a+ib)(\log|z|+i(\arg z+2k\pi))}\\&=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)}\cdot e^{i[b\log|z|+a(\arg z+2k\pi)]},\end{aligned}$$

这里 k 为任意整数. 记

$$\rho_k=e^{a\log|z|-b(\arg z+2k\pi)},$$

$$\theta_k=b\log|z|+a(\arg z+2k\pi),$$

则

$$w=z^{\alpha}=\rho_k e^{i\theta_k},\quad |w|=\rho_k.$$

因此，若 $b\neq 0$，则 $w=z^{\alpha}$ 是无穷多值函数；若 $b=0$，则 α 为实数 a，而

$$w=z^{\alpha}=e^{a\log|z|}e^{i(\arg z+2k\pi)a}=|z|^{a}e^{a(\arg z+2k\pi)i}.$$

这时 z^{α} 的值，都在圆周 $|w|=|z|^{a}$ 上，所以

(1) 当 $\alpha=a=n$ 为整数时，$z^{\alpha}=z^{n}$ 是单值的；

(2) 当 $\alpha=a=p/q$ 为既约分数，且$0<p<q$，p,q 为正整数，则

$$z^{\alpha}=e^{\frac{p}{q}\log|z|}e^{i\frac{p}{q}(\arg z+2k\pi)}=|z|^{\frac{p}{q}}e^{i\frac{p}{q}\arg z}e^{i\frac{p}{q}2k\pi}.$$

由于$\frac{p}{q}2k\pi$ 仅当 $k=0,1,2,\cdots,q-1$时，这 q 个值关于2π 是不同余的，而 k 取其他值，其相应的值均与上述 q 个值中的某一个关于2π

是同余的，故对于给定的 z，z^{α} 只有 q 个不同的值；

(3) 当 $\alpha = a$ 为无理数，则 z^{α} 为无穷多值函数.

§1.6 复数级数

最后，我们可以看到微积分中的级数理论有一部分也可以无困难地推广到复数域.

例如：函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 $E \subset \boldsymbol{C}$ 上一致收敛于 $f(z)$ 是指：对任给的 $\varepsilon > 0$，一定存在一个只依赖于 ε，而不依赖于 z 的 n_0，使得对所有的 $n \geqslant n_0$ 和所有的 $z \in E$，都有

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

如同在微积分中一样，可以证明：

一个一致收敛的连续函数序列，其极限函数本身也是连续的.

Cauchy 判别准则 函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 $E \subset \boldsymbol{C}$ 上一致收敛的充要条件是：对于任给的 $\varepsilon > 0$，一定存在一个只依赖于 ε，而不依赖于 z 的 n_0，使得对所有的 $m, n \geqslant n_0$ 和所有的 $z \in E$，都有

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Weierstrass M-判别法 若函数项级数

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

在集合 $E \subseteq \boldsymbol{C}$ 上定义，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 为一正项级数. 若存在 n_0 及常数 $M > 0$，当 $n > n_0$ 时，对所有 $z \in E$ 使得 $|f_n(z)| \leqslant Ma_n$ 都成立. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛.

特别考虑幂级数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots, \tag{6.1}$$

有如下的

定理3(Abel 定理) 对于幂级数(6.1)，存在一个数 R，$0 \leqslant R \leqslant \infty$，称为它的收敛半径，具有下列性质：

(1) 对于每一个使 $|z| < R$ 的 z，级数绝对收敛. 如果 $0 \leqslant \rho <$

R，则对于$|z|\leqslant\rho$，级数一致收敛.

（2） 如果 z 满足$|z|>R$，则级数的项无界，级数发散.

（3） 在$|z|<R$ 内，级数的和是一个全纯函数，它的导数可以通过逐项微分求得. 所得的级数与原级数有相同的收敛半径.

圆$|z|\leqslant R$ 称为收敛圆. 在收敛圆周上，收敛性不一定. R 可取为

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},\tag{6.2}$$

这称为收敛半径的 Hadamard 公式.

现在来证明定理3.

证明 如果$|z|<R$，则可找到 ρ，使得$|z|<\rho<R$，于是$\frac{1}{\rho}>\frac{1}{R}$. 由(6.2)，存在一个 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$时，有$|a_n|^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{\rho}$，即$|a_n|<\frac{1}{\rho^n}$，故当 $n\geqslant n_0$时，$|a_nz^n|<\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$. 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ 当 $|z|<\rho$ 时收敛，由 Weierstrass M-判别法知：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 绝对收敛. 为了证明级数在$|z|\leqslant\rho(<R)$中的一致收敛性，选取 ρ'，n_1，使得 $\rho<\rho'<R$. 对于 $n\geqslant n_1$，$|a_nz^n|\leqslant\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n$ 成立，由 Weierstrass M-判别法，知(6.1)在$|z|\leqslant\rho$ 中一致收敛.

如果$|z|>R$，取 ρ 使得 $R<\rho<|z|$. 由于$\frac{1}{\rho}<\frac{1}{R}$，故存在一个 n_2，使得当 $n\geqslant n_2$时，$|a_n|^{\frac{1}{n}}>\frac{1}{\rho}$，即$|a_n|>\frac{1}{\rho^n}$. 于是有无穷多个 n，使$|a_nz^n|>\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$，故级数项无界.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 有相同的收敛半径，这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

对于 $|z|<R$，记

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=S_n(z)+R_n(z),$$

这里

$$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},\quad R_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_kz^k.$$

令

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\lim_{n\to\infty}S_n'(z),$$

要证明 $f_1(z)=f'(z)$.

取 $0<\rho<R$，任意取定一点 z_0，$|z_0|<\rho$. 由于

$$\begin{aligned}&\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z)\\&\quad=\left(\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S_n'(z_0)\right)\\&\qquad+(S_n'(z_0)-f_1(z))+\left(\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right),\end{aligned}$$

若 $z\neq z_0$，且 $|z|<\rho<R$，则上式右边最后一项可写为

$$\sum_{k=n}^{\infty}a_k(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+\cdots+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1}),$$

故

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}.$$

这是一个收敛级数的余项，故存在 n_3，当 $n\geqslant n_3$时，有

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $f_1(z)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(z)$，故存在 n_4，使得 $n\geqslant n_4$时，有 $|S_n'(z_0)-f_1(z)|<\varepsilon/3$. 取固定的 $n>n_3,n>n_4$，由微商的定义，可以找到 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S_n'(z_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

综合上面各式，得到：当$0<|z-z_0|<\delta$时，有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z_0)\right|<\varepsilon.$$

这就证明了$f'(z_0)=f_1(z_0)$. 定理3证毕.

这种推理可重复进行，得到

$$f^{(k)}(z)=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2+\cdots$$

对任意正整数k都成立. 由此可得$a_k=\dfrac{f^k(0)}{k!}$，故幂级数可以写成

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\cdots,$$

这是 Taylor-Maclaurin 级数. 这是在$f(z)$具有一个幂级数展开式这个假定下证明的，即如果展开式存在则唯一确定. 在下一章中将证明：每一全纯函数具有一个 Taylor 展开式.

由指数函数的性质(4)，$(e^z)'=e^z$，立得e^z的 Taylor 级数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots.$$

由定义(5.3)，得到$\cos z$及$\sin z$的 Taylor 展开式为

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots,$$

由 Hadamard 公式，这三个级数是在全平面上收敛的.

习 题 一

1. 用公式(1.9)来验证：Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Stokes 公式及 Gauss 公式.

2. (1) 求下列复数的模及幅角的主值：

(i) 2i; (ii) 1−i; (iii) 3+4i; (iv) −5+12i.

(2) 求下列复数之值：

(i) $(1+3\mathrm{i})^3$;　　(ii) $\dfrac{10}{4-3\mathrm{i}}$;

(iii) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}$;　　(iv) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$,这里 n 为正整数.

(3) 求下列复数的绝对值:

(i) $-3\mathrm{i}(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$;　(ii) $\dfrac{(4-3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}$.

3. 通过计算 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$,证明

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

4. 若 $z=x+\mathrm{i}y$,x,y 为实数,求下列复数的实部与虚部:

(1) $\dfrac{1}{z}$;　(2) z^2;　(3) $\dfrac{1+z}{1-z}$;　(4) $\dfrac{z}{z^2+1}$.

5. 解二次方程

$$z^2+(\alpha+\mathrm{i}\beta)z+\gamma+\mathrm{i}\delta=0,$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实数.

6. 设 $|z|=r>0$,证明:

$$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{r^2}{z}\right),\quad \mathrm{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{r^2}{z}\right).$$

7. 求证:(1) 若 $|a|<1$,$|b|<1$,则 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$;

(2) 若 $|a|=1$或$|b|=1$,则 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$,并讨论 $|a|=1$及 $|b|=1$同时成立的情形.

8. 证明复数形式的 Lagrange 等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2,$$

由此导出复数形式的 Cauchy 不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2,$$

并证明上式等号成立当且仅当 a_k 与 $\bar{b}_k$ 成比例,$k=1,\cdots,n$.

9. 证明:a_1,a_2,a_3为等边三角形的顶点当且仅当

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1.$$

10. 证明复数 α,β,γ 共线的充要条件为

$$\begin{vmatrix} \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. 求$1-\mathrm{i}, 4+3\mathrm{i}$ 在 Riemann 球面 S^2上所对应的点.

12. 若 z_1,z_2为复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的两点,对应于 Riemann 球面 S^2上的两点为一条直径的两个端点,当且仅当 $z_1\bar{z}_2=-1$.

13. 证明圆周的方程为 $A|z|^2+Bz+\overline{B}\bar{z}+C=0$,其中 A,C 为实数,且$|B|^2>AC$. 并证明上述圆周在 Riemann 球面 S^2上的对应的像是大圆当且仅当 $A+C=0$.

14. 设 $d(z_1,z_2)$表示 $\boldsymbol{C}$ 中两点 z_1,z_2相对应于 Riemann 球面 S^2上两点 Z_1,Z_2之间的球面距离,证明

$$d(z_1,z_2)=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}},\quad 若\ z_1,z_2\in\boldsymbol{C};$$

$$d(z_1,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}},\quad 若\ z_1\in\boldsymbol{C}.$$

15. 说明下列关系式的几何意义:

(i) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|\leqslant 1,\quad z_1\neq z_2$; (ii) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0,\quad z_1\neq z_2$;

(iii) $0<\arg\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$;

(iv) $|z+c|+|z-c|\leqslant 2a,\quad a>0, |c|<a$.

16. 证明复平面上的 Heine-Borel 定理,Bolzano-Weierstrass 定理.

17. 证明:序列 $z_n\in\boldsymbol{C}(n=1,2,\cdots)$收敛到点 $z_0\in\boldsymbol{C}$ 当且仅当序列 $\mathrm{Re}z_n,\mathrm{Im}z_n(n=1,2,\cdots)$分别收敛到 $\mathrm{Re}z_0,\mathrm{Im}z_0$.

18. 证明:(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n'=b$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k z_{n-k}'=ab.$$

（2） 由此导出：若$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = A.$$

19. 讨论下列函数的可导性：

(i) $f(z)=|z|$； (ii) $f(z)=\bar{z}$； (iii) $f(z)=\mathrm{Re}z$.

20. 若 $g(w)$及 $f(z)$都是全纯函数，证明 $g(f(z))$也是全纯函数.

21. （1） 若函数 $f(z)$在域 D 内全纯，且 $f'(z)$在域 D 内恒等于零，则 $f(z)$在 D 内为常数.

（2） 若函数 $f(z)$在域 D 内全纯，且满足下列条件之一：

(i) $\mathrm{Re}f(z)$在 D 内是常数； (ii) $\mathrm{Im}f(z)$在 D 内是常数；

(iii) $|f(z)|$在 D 内是常数； (iv) $\arg f(z)$在 D 内是常数，则 $f(z)$在 D 内是常数.

22. 若 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是全纯函数，且 $f'(z)\neq 0$，则曲线 $u(x,y)=c_1$与 $v(x,y)=c_2$正交，这里 c_1,c_2是常数.

23. 证明：(1) 在极坐标下，

$$f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta), \quad z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

则 C-R 方程为

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta,$$

且

$$f'(z)=\frac{r}{z}(u_r+\mathrm{i}v_r).$$

（2） 若记 $f(z)=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则 C-R 方程为

$$\frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{R}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial R}{\partial\theta} = -Rr\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

24. 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ $(z=x+\mathrm{i}y)$在域 D 内全纯，证明 u,v 对 x,y 的 Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = |f'(z)|^2,$$

并给出其几何意义.

25. 计算：(i) $\int_\gamma x\mathrm{d}z$，这里 $z=x+\mathrm{i}y$，γ 为由0到$1+\mathrm{i}$ 的有向线段；

(ii) $\int_\gamma |z-1|\,|\mathrm{d}z|$，这里 $\gamma(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，$\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(iii) $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z$，这里 $\gamma(t)=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$，$\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$a$ 为一个复常数.

26. (i) 求 $\cos(x+\mathrm{i}y)$，$\sin(x+\mathrm{i}y)$的实部与虚部，这里 x,y 为实数；

(ii) 证明：

$$\sin \mathrm{i}z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}z,\quad \cos \mathrm{i}z=\mathrm{ch}z,\quad (\sin z)'=\cos z,$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

27. 求 $\sin \mathrm{i}$，$\cos(2+\mathrm{i})$，$\tan(1+\mathrm{i})$，2^{i}，i^{i}，$(-1)^{2\mathrm{i}}$，$\log(2-3\mathrm{i})$，$\arccos\frac{1}{4}(3+\mathrm{i})$的值.

28. (i) 当 $z=\frac{\pi\mathrm{i}}{2},-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}$ 时，求 e^z 的值；

(ii) 若 $\mathrm{e}^z=\mathrm{i}$，求 z 的值.

29. 确定 z^z 的实部与虚部，这里 $z=x+\mathrm{i}y$.

30. 证明 $z^n=a$ 的根是正多边形的顶点.

31. 证明：(1) 一致收敛的连续函数序列其极限函数本身也是连续的；

(2) Cauchy 判别准则；

(3) Weierstrass M-判别法

在复数域上都是成立的.

32. 求出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径，若(i) $a_n=n^{1/n}$； (ii) $a_n=n^{\ln n}$；(iii) $a_n=\frac{n!}{n^n}$； (iv) $a_n=n^n$.

第二章 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式

§ 2.1 Cauchy-Green 公式(Pompeiu 公式)

Cauchy 积分理论是复变数函数论中三个主要组成部分之一. 有了 Cauchy 积分理论,复变数函数论才形成一门独立的学科,并由此导出一系列在微积分中得不到的结果.

先从 Cauchy-Green 公式开始,这是上一章中的定理2(复形式的 Green 公式)的直接推论.

定理1(Cauchy-Green 公式、Pompeiu 公式) 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域,有 C^1边界,即边界为光滑曲线,$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\in C^1(\overline{U})$,即 $u(x,y)$,$v(x,y)$在 $\overline{U}$ 上有一阶连续偏微商,则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{U}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{U}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}A}{\zeta-z}. \qquad (1.1)$$

证明 在 z 点的附近作一个以 z 为中心、$\varepsilon(>0)$为半径的小圆 $D(z,\varepsilon)$,且 $D(z,\varepsilon)\subset U$. 记 $U_{z,\varepsilon}=U\setminus D(z,\varepsilon)$. 在 $U_{z,\varepsilon}$中考虑微分形式

$$\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z},$$

则由第一章定理2(复形式的 Green 公式),得到

$$\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-\int_{\partial D_{z,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}=\iint_{U_{z,\varepsilon}}\mathrm{d}_{\zeta}\left(\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\right).$$

由 d_{ζ} 的定义,

$$\iint\limits_{U_{z,\epsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \iint\limits_{U_{z,\epsilon}} (\partial + \bar{\partial})\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right)$$

$$= \iint\limits_{U_{z,\epsilon}} \partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) + \iint\limits_{U_{z,\epsilon}} \bar{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right).$$

由于

$$\partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\zeta \wedge d\zeta = 0$$

以及

$$\bar{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} + f \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) d\bar{\zeta} \wedge d\zeta,$$

而$\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} = 0$，故

$$\bar{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

因此

$$\iint\limits_{U_{z,\epsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) = \iint\limits_{U_{z,\epsilon}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}.$$

另一方面，由于

$$\int_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

而由假设，$f(\zeta) \in C^1(\overline{U})$，故存在常数 c，使得

$$|f(\zeta) - f(z)| < c|\zeta - z|$$

在 $\partial D(z,\epsilon)$ 上成立，于是

$$\left|\int_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta\right| < c\int_{\partial D(z,\epsilon)} \left|\frac{\zeta - z}{\zeta - z}\right| |d\bar{\zeta}| = 2\pi\epsilon c.$$

当 $\epsilon \to 0$时，上述积分$\to 0$. 而当 $\zeta \in \partial D(z,\epsilon)$时，$\zeta$ 可表为 $\zeta = z + \epsilon e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，于是

$$\int_{\partial D(z,\epsilon)} \frac{f(z)d\zeta}{\zeta - z} = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon e^{i\theta} i d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = 2\pi i f(z).$$

因此，

$$\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - 2\pi \mathrm{i} f(z) = \iint\limits_{U_{z,\varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + O(\varepsilon),$$

这里 $O(\varepsilon)$表示一个量，当此量除以 ε，而让 $\varepsilon \to 0$时，其值趋于常数，在上式中令 $\varepsilon \to 0$，即得(1.1). 证毕.

由定理1，立得

定理2(**Cauchy 积分公式**)　若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域，有 C^1边界，$f(z)$为 U 上的全纯函数，且 $f(z) \in C^1(\overline{U})$，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{1.2}$$

由此还可以立即得到

定理3(**Cauchy 积分定理**)　若 $U \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域，有 C^1边界，$F(z)$为 U 上全纯函数，且 $F(z) \in C^1(\overline{U})$，则

$$\int_{\partial U} F(\zeta) \mathrm{d}\zeta = 0. \tag{1.3}$$

证明　不妨假设 U 包有原点，令 $f(z) = zF(z)$，以此代入(1.2)，再令 $z=0$，即得(1.3). 证毕.

也就是说，Cauchy 积分公式可以推出 Cauchy 积分定理. 当然定理3也可以由 Cauchy-Green 定理直接证明之.

反过来，由 Cauchy 积分定理可以推出 Cauchy 积分公式. 可以这样来进行. 在 U 中固定一点 z_0，考虑 $U_{z_0,\varepsilon}$(定义如前). 取$F(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$，如同证明定理1那样，立得定理2. 因此，定理2、定理3是相互等价的. 而这两条相互等价的定理却是复变函数论的重要基石之一.

Cauchy-Green 公式的另一个重要应用是解一维的$\bar{\partial}$-问题，这将在第三章中用到.

若 ψ 为一个连续函数，使 $\psi \neq 0$的所有的点的集合的闭包称为 ψ 的支集(support)，记作 $\operatorname{supp}\psi$.

定理4(**一维的$\bar{\partial}$-问题的解**)　若 $\psi(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$，且有紧致支集，即支集为紧致集，令

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{C} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta, \tag{1.4}$$

则 $u(z) \in C^1(\boldsymbol{C})$，且为 $\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = \psi(z)$ 的解.

证明 固定 $z \in \boldsymbol{C}$，令 $\zeta - z = \xi$，则

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{C} \frac{\psi(\xi + z)}{\xi} d\bar{\xi} \wedge d\xi.$$

由于 $\frac{1}{\xi}$ 在任意紧致集合上可积，故 $u(z)$ 为连续函数. 若 $h \in \boldsymbol{R}$，$h \neq 0$，则

$$\frac{u(z+h) - u(z)}{h}$$
$$= \frac{-1}{2\pi i}\iint_{C} \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\psi(\xi + z + h) - \psi(\xi + z)}{h} d\bar{\xi} \wedge d\xi.$$

固定 z，ξ，当 $h \to 0$ 时.

$$\frac{\psi(\xi + z + h) - \psi(\xi + z)}{h} \to \frac{\partial \psi(\xi + z)}{\partial \xi}.$$

由于 $\psi \in C^1(\boldsymbol{C})$，且有紧致支集，故

$$\frac{\psi(\xi + z + h) - \psi(\xi + z)}{h} \to \frac{\partial \psi(\xi + z)}{\partial \xi}$$

对 ξ 及 z 来讲是一致的. 由于 $\frac{1}{|\xi|}$ 在任意紧致集合上是可积的，故有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(u(z+h) - u(z)) \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\iint_{C} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\xi + z) d\bar{\xi} \wedge d\xi \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\iint_{C} \frac{\partial \psi(\zeta)}{\partial \alpha} \frac{1}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

这里 $\zeta = \alpha + i\beta$，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. 而这个极限对 $\boldsymbol{C}$ 中任意紧致集合的点 z 来讲是一致的. 故 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 是连续的. 同理

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z)=\frac{-1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_{C}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(\xi+z)\mathrm{d}\bar{\xi}\wedge\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{-1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_{C}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\beta}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta, \tag{1.6}$$

且$\frac{\partial u}{\partial y}$是连续的. 故 $u\in C^1(\boldsymbol{C})$.

由(1.5)及(1.6)立得

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{-1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_{C}\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta. \tag{1.7}$$

由于 $\psi(z)$有紧致子集 $\operatorname{supp}\psi$,则存在 $R>0$,使得 $\operatorname{supp}\psi\subset D(0,R)=\{z\,|\,|z|<R\}$. 于是由(1.7)得到:取 $\varepsilon>0$,则

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{-1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_{D(0,R+\varepsilon)}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

由 Cauchy-Green 公式(定理1)得到上式右边等于

$$\psi(z)-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial D(0,R+\varepsilon)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

而

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial D(0,R+\varepsilon)}\frac{\psi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

显然为零,故得

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}}=\psi(z).$$

定理证毕.

显然,若 $\psi(z)\in C^k(\boldsymbol{C})$有紧致支集,则由(1.4)所定义的 $u(z)\in C^k(\boldsymbol{C})$,这里 k 为正整数或∞. 同样显然的是:若 $\psi(z)\in C^k(\boldsymbol{C})$,其支集为互不相交的紧集之和(有限个或无限个),则定理4依然成立.

§ 2.2 Cauchy-Goursat 定理

Cauchy 当初建立的积分公式与积分定理就是定理2及定理3

的形式. 之后 Goursat 去掉了 $f(z)\in C^1(\overline{U})$的条件，成为 Cauchy-Goursat 积分公式与积分定理. 从而成为一般通常应用的公式与定理.

定理2′（**Cauchy-Goursat 积分公式**） 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域，∂U 为简单闭曲线，若 $f(z)$在 U 上全纯，在 $\overline{U}$ 上连续，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta. \tag{2.1}$$

定理3′（**Cauchy-Goursat 积分定理**） 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域，∂U 为简单闭曲线，若 $f(z)$在 U 上全纯，在 $\overline{U}$ 上连续，则有

$$\int_{\partial U}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=0. \tag{2.2}$$

显然定理2′与定理3′是相互等价的. 这里只证明定理3′，用的是传统的方法.

引理1 设 $f(z)$为在区域 $G\subseteq \boldsymbol{C}$ 上的连续函数，Γ 是在这区域内的任意一条逐段光滑曲线，则对任意小的 $\varepsilon>0$，存在一条内接于 Γ，且完全在 G 内的折线 P，使得

$$\left|\int_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z-\int_{P}f(z)\mathrm{d}z\right|<\varepsilon$$

成立.

证明 在 G 内取一个闭子区域 $\overline{D}\subset G$，使得 $\Gamma\subset\overline{D}$. 由于 $f(z)$ 在 G 上连续，故在 $\overline{D}$ 上一致连续. 因此，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对 $\overline{D}$ 内任意满足 $|z'-z''|<\delta$ 的两点，$|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$ 都成立. 分 Γ 为 n 段长度都小于 δ 的弧 $s_0,s_1,\cdots,s_{n-1}$，且内接于 Γ 作折线 P，使它的连接线段 $l_0,l_1,\cdots,l_{n-1}$正好对着这些弧. 以 $z_0,z_1,\cdots,z_n$ 表示折线 P 的顶点，由于每一段 s_k 的长度都小于 δ，故每个弧段上任意两点的距离都小于 δ，对 l_k 上的任意两点也是如此. 积分 $\int_{\Gamma}f(z)\mathrm{d}z$ 有近似值

$$s=f(z_0)\Delta z_0+f(z_1)\Delta z_1+\cdots+f(z_{n-1})\Delta z_{n-1},$$

这里 $\Delta z_k=\int_{s_k}\mathrm{d}z$. 这也可表为

$$s = \int_{s_0} f(z_0)\mathrm{d}z + \int_{s_1} f(z_1)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{s_{n-1}} f(z_{n-1})\mathrm{d}z.$$

于是

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - s = \int_{s_0} (f(z) - f(z_0))\mathrm{d}z + \int_{s_1} (f(z) - f(z_1))\mathrm{d}z$$
$$+ \cdots + \int_{s_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))\mathrm{d}z.$$

由于在每段 s_k 上都有 $|f(z)-f(z_k)|<\varepsilon$，故有

$$\left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - s\right| < \varepsilon s_0 + \varepsilon s_1 + \cdots + \varepsilon s_{n-1} = \varepsilon l,$$

这里 l 为 Γ 的长度.

由于 Δz_k 也可表为 $\int_{l_k} \mathrm{d}z$，故同样有

$$\int_P f(z)\mathrm{d}z - s = \int_{l_0} (f(z) - f(z_0))\mathrm{d}z + \int_{l_1} (f(z) - f(z_0))\mathrm{d}z$$
$$+ \cdots + \int_{l_{n-1}} (f(z) - f(z_{n-1}))\mathrm{d}z.$$

同样得到

$$\left|\int_P f(z)\mathrm{d}z - s\right| < \varepsilon l_0 + \varepsilon l_1 + \cdots + \varepsilon l_{n-1}$$
$$= \varepsilon(l_0 + l_1 + \cdots + l_{n-1}) < \varepsilon l.$$

故

$$\left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right|$$
$$\leqslant \left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - s\right| + \left|s - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right|$$
$$= \varepsilon l + \varepsilon l = 2\varepsilon l.$$

这就证明了引理1.

引理2 若 $f(z)$ 是单连通区域 $G\subseteq \boldsymbol{C}$ 上的全纯函数，则沿 G 内任意一条逐段光滑闭曲线 Γ 所取的积分 $\int_\Gamma f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = 0$.

证明 由引理1，任给 $\varepsilon>0$，任意一条逐段光滑闭曲线 Γ 都可

用一条闭折线 P 来内接之，且

$$\left|\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$$

成立.

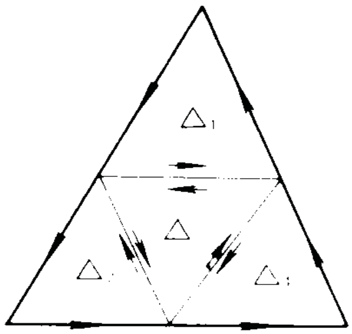

图 1

如果对任意闭折线，引理2成立，即 $\int_P f(z)\mathrm{d}z = 0$，由此即可得出引理2对任意逐段光滑闭曲线也都成立.

对任意闭折线，均可添加直线段，使之分解成若干个三角形之和. 因为在添加的这些线段上，积分的值相互抵消，于是在闭折线上的积分等于在这些三角形上的积分的总和. 如果能证明在三角形（图1）上，引理2是成立的，则引理2对任意逐段光滑闭曲线都成立.

现在来证明引理2对三角形成立.

设在 G 内任一三角形周界△上，$f(z)$的积分的绝对值为 M，即

$$\left|\int_\triangle f(z)\mathrm{d}z\right| = M.$$

要证 $M=0$. 二等分三角形的每一边，两两连接这些分点，给定的三角形被分成四个全等的三角形，它们的周界分别为$\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$及$\triangle_4$. 于是

$$\int_\triangle f(z)\mathrm{d}z$$
$$= \left(\int_{\triangle_1} + \int_{\triangle_2} + \int_{\triangle_3} + \int_{\triangle_4}\right) f(z)\mathrm{d}z.$$

由于 $\left|\int_\triangle f(z)\mathrm{d}z\right| = M$，故至少有一个 $\triangle_k (k=1,2,3,4)$ 使得 $\left|\int_{\triangle_k} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4}$. 不妨设此为 $\triangle_1 = \triangle^{(1)}$，于是 $\left|\int_{\triangle_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4}$. 对$\triangle_1$用同样方法分成四个全等三角形，又可找到一个三角形

$\triangle^{(2)}$，使得 $\left|\int_{\triangle^{(2)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^2}$. 这样可以无限止地进行下去，于是得到一串三角形序列 $\triangle=\triangle^{(0)}, \triangle=\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \cdots, \triangle^{(n)}, \cdots$ 前一个包有后一个，而

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{M}{4^n}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2.3}$$

以 L 表示$\triangle$的周长，于是$\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \cdots, \triangle^{(n)}, \cdots$的长度为 $\frac{L}{2}, \frac{L}{2^2}, \cdots, \frac{L}{2^n}, \cdots$. 当 $n\to\infty$时，这趋于零. 故存在一点 z_0，属于所有的$\triangle^{(n)}$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)$，只要 $|z-z_0|<\delta$，就有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

成立，即

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon|z-z_0|$$

成立. 当 n 充分大时，$\triangle^{(n)}$全落在 $D(z_0,\varepsilon)$之中，显然 $\int_{\triangle^{(n)}}\mathrm{d}z = 0$ 及 $\int_{\triangle^{(n)}} z\mathrm{d}z = 0$. 故

$$\int_{\triangle^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\triangle^{(n)}} (f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0))\mathrm{d}z.$$

于是

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z\right| < \int_{\triangle^{(n)}} \varepsilon|z-z_0||\mathrm{d}z|.$$

但 $|z-z_0|$ 为$\triangle^{(n)}$上任意一点 z 到这三角形内一点 z_0的距离，故

$$|z-z_0| < \frac{L}{2^n}.$$

因此

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)\mathrm{d}z\right| < \varepsilon\frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n} = \varepsilon\frac{L^2}{4^n}, \tag{2.4}$$

比较(2.3)，(2.4)，即得 $M<\varepsilon L^2$对任意 $\varepsilon>0$都成立，故 $M=0$，引理2得证.

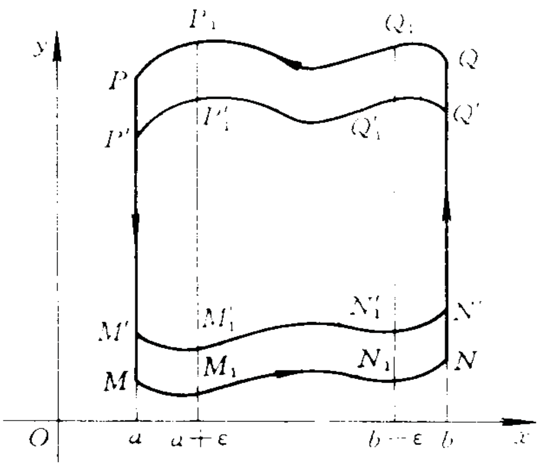

图 2

定理3′的证明 先设 U 具有特殊形状，来证定理3′成立.

若 ∂U 为由 $x=a, x=b$ $(a<b)$ 及两条可求长连续曲线

MN：$y=\varphi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，

PQ：$y=\psi(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$

所围成的域（见图2），其中 $\varphi(x)<\psi(x)$ $(a<x<b)$. 假定 $f(z)$ 在 U 上全纯，在 $\bar{U}$ 上连续，要证

$$\int_{MNQPM} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2.5}$$

作直线 $x=a+\varepsilon, x=b-\varepsilon$，及

$$M'N': \ y=\varphi(x)+\eta, \ a\leqslant x\leqslant b;$$

$$P'Q': \ y=\psi(x)-\eta, \ a\leqslant x\leqslant b,$$

其中 ε,η 为充分小的正数. 由于 U 为单连通区域，故

$$\int_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

其中 $M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'$ 为由上述两条直线及两条曲线所围成的域的边界.

固定 ε，令 $\eta\to 0$，由于 $f(z)$ 在 $\bar{U}$ 上一致连续，故有

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{M_1N_1} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{Q_1'P_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{Q_1P_1} f(z)\mathrm{d}z,$$

$$\int_{P_1'M_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{P_1M_1} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{N_1'Q_1'} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

因此

$$\int_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

令 $\varepsilon\to 0$,同理

$$\int_{M_1N_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{MN} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{Q_1P_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{QP} f(z)\mathrm{d}z.$$

如能证明:当 $\varepsilon\to 0$时,

$$\int_{P_1M_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{PM} f(z)\mathrm{d}z, \quad \int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z,$$

则(2.5)得证.这里只证后一个极限,前一个极限的证明可类似地进行.

令

$$y_\varepsilon = \max(\varphi(b),\varphi(b-\varepsilon)), \quad Y_\varepsilon = \max(\psi(b),\psi(b-\varepsilon)),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{i}\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{i}\left(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\right) f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_{NQ} f(z)\mathrm{d}z - \int_{N_1Q_1} f(z)\mathrm{d}z \\ &\quad = \mathrm{i}\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} (f(b+\mathrm{i}y) - f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y))\mathrm{d}y + \mathrm{i}S(\varepsilon),\end{aligned} \tag{2.6}$$

这里

$$\begin{aligned}S(\varepsilon) = &\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y \\ &- \left(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\right) f(b-\varepsilon+\mathrm{i}y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于 $f(z)$的一致连续性,当 $\varepsilon\to0$时,(2.6)右边的第一项趋于零.而当 $\varepsilon\to0$时,y_ε、Y_ε 分别以 $\varphi(b)$,$\psi(b)$为极限,故 $S(\varepsilon)$中的四个积分均为零.于是当 $\varepsilon\to0$时,$\int_{N_1Q_1}f(z)\mathrm{d}z\to\int_{NQ}f(z)\mathrm{d}z$.

这就证明了:当 U 为这种特殊区域时,定理3′成立.但对任意区域 U,均可用有限条平行于 y 轴的辅助线,将 U 划分成具有上述形状的域,而在辅助线上,积分相互抵消.故定理3′得证.

定理3′对多连通区域也是对的.因为这可以将多连通区域用若干曲线将它分割成若干个单连通区域之和,而在辅助线上的积分都是相互抵消的.

这也可叙述为:若 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 为 $n+1$条可求长的曲线,而 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 全在 γ_0之内,$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 中每一条曲线都在其他各条曲线的外部,U 为由 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 所围成的域,即 U 的边界 ∂U 由 γ_0,$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 所组成.若 $f(z)$在 U 上全纯,在 $\overline{U}$ 上连续,则

$$\int_{\partial U}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由定理3′,如 $f(z)$在 U 上全纯,z_0,z 为 U 内两点,于是可以定义 $f(z)$的积分为

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

这个积分不依赖于路径的选取.显然,$F'(z)=f(z)$成立.

§2.3 Taylor 级数与 Liouville 定理

由 Cauchy 积分公式及 Cauchy 积分定理,立即可以得到一系列重要的推论,这一节以及以下各节都是它们的重要推论.

定理5 若 $f(z)$在 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,在 $\overline{U}$ 上连续,则 $f(z)$在 U 上的每一点,各级导数都存在,且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\cdots.\tag{3.1}$$

若 $z_0\in U$，$\overline{D}(z_0,r)=\overline{\{z\mid |z-z_0|<r\}}\subset U$，则 $f(z)$ 在 $D(z_0,r)$ 中可展开成 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(z-z_0)^j. \tag{3.2}$$

这级数在 $\overline{D}(z_0,r)$ 中绝对和一致收敛，且有

$$a_j=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{j+1}}. \tag{3.3}$$

证明 设 $z_0\in U$，作小圆 $D(z_0,r)\subset U$. 由定理2′，若 $z\in D(z_0,r)$，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\mathrm{d}\zeta,$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

于是

$$\begin{aligned}f(z)-f(z_0)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{z-z_0}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)},\end{aligned}$$

即

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^2}\\&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\right)\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{z-z_0}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^2}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

若 z_0 到 ∂U 的距离（即最短距离）为 d，取 $r=d/2$，于是

$$\begin{aligned}|\zeta-z|&=|(\zeta-z_0)-(z-z_0)|\\&\geqslant|\zeta-z_0|-|z-z_0|\end{aligned}$$

$$\geqslant d - d/2 = d/2.$$

但是$|\zeta - z_0| \geqslant d$，故

$$\left| \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} \right| \leqslant \frac{M \cdot L}{d/2 \cdot d^2} = \frac{2ML}{d^3},$$

这里 $M = \max\limits_{\zeta \in \partial U} |f(\zeta)|$，$L = \partial U$ 的长度. 在(3.4)中令 $z \to z_0$，由上述估计式，即得

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^2}.$$

这就证明了(3.1)当 $n=1$时成立.

若(3.1)当 $n=k \geqslant 1$时成立，即

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

成立. 由于

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

而$|z - z_0| < r \leqslant |\zeta - z_0|$，故$\left| \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$. 于是

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j. \tag{3.5}$$

从而得到

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots \right)^{k+1} \mathrm{d}\zeta \\ &= f^{(k)}(z_0) + \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)(z - z_0)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+2}} + O(|z - z_0|^2). \end{aligned}$$

于是有

$$\frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+2}} + O(|z - z_0|).$$

令 $z \to z_0$，即得(3.1)当 $n=k+1$时也成立，即

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+2}}.$$

由数学归纳法,(3.1)对任意的 $n=1,2,\cdots$ 都成立.

将(3.5)代入 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$,由(3.1)即得

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(z-z_0)^j\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{j+1}}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^j(z_0)}{j!}(z-z_0)^j.$$

这就证明了(3.2)及(3.3).

定理5表明:对于复变数函数来讲,如果一个函数的一阶导数存在,则任意阶导数都存在,而且可以展成 Taylor 级数. 这个性质,对实变数函数来讲是没有的. 这显示了复变数函数与实变数函数的根本区别之一. 在第一章1.3节中,定义一个复变数函数 $f(z)$ 在域 $U\subseteq C$ 上是全纯的,若 $f(z)$ 在 U 上每一点,其导数是存在的. 由定理5知道,这也可以定义为:$f(z)$ 在 U 上每一点 z 全纯,如果在这点的一个邻域中,$f(z)$ 可以展开成为收敛幂级数. 显然,这两种定义是等价的.

由定理5,立即得到

定理6 (1) Cauchy 不等式. 若 $f(z)$ 在 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,$\overline{D}(z_0,R)\subseteq U$,则

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial z^j}f(z_0)\right|\leqslant\frac{j!M}{R^j}\quad(j=1,2,\cdots)\tag{3.6}$$

成立,这里 $M=\max\limits_{z\in\overline{D}(z_0,R)}|f(z)|$.

(2) 若域 $U\subseteq\boldsymbol{C}$,K 为 U 中的一个紧集,V 为 K 的一个邻域且在 U 中是相对紧的(即相对于 U,V 是紧集),则对每一个在 U 中全纯的函数 $f(z)$,存在常数 $c_n(n=1,2,\cdots)$,使得

$$\sup_{z\in K}|f^{(n)}(z)|\leqslant c_n\|f\|_{L(V)}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{3.7}$$

这里 $\|f\|_{L(V)}$ 为 f 在 V 上的 L 模,即

$$\frac{1}{A(V)}\iint\limits_V|f(\zeta)|\mathrm{d}A,$$

$A(V)$为 V 的面积.

Cauchy 不等式给出全纯函数的各阶导数的模在一点的估计，而定理6中(2)的(3.7)式给出全纯函数的各阶导数的模在一个紧致集合上的估计.

定理6的证明 定理6中(1)的证明是显然的.现在来证明定理6(2).

在 V 上作一个 C^∞ 函数 ψ，具有如下的性质：在 V 上有紧致支集，且在 K 的邻域(包在 V 中)上取值为1.这样的 ψ 是存在的，可以在很多书中找到证明，就不在此叙述其证明了.对 ψf 应用定理1(Pompeiu 公式)，则有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{\psi(\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_U\frac{\partial(\psi f)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

由于在 U 上，f 为全纯，故 $\dfrac{\partial(\psi f)}{\partial\bar{\zeta}}=f\,\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}$.但是 $\psi(\zeta)$的支集在 V 中，而 V 在 U 中相对紧，故有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_U f\,\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

若 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}$的支集为 K_1，则 K_1为 V 中的紧子集，故 K 与 K_1之间的距离 $d(K,K_1)>0$.

若 $z\in K$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\iint_{K_1}f(\zeta)\,\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

在上式中，对 z 求 n 次导数，得到

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\iint_{K_1}f(\zeta)\,\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

于是就有

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\iint_{K_1}|f(\zeta)|\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\right|\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{|\zeta-z|^{n+1}}.$$

由于 $d(K,K_1)>0$，故有 c_1 使得 $\frac{1}{|\zeta-z|}<c_1$ 对于任意 $z\in K,\zeta\in K_1$ 都成立. 而 $\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\right|$ 显然在 K_1 上有界，故有 c_n'，使得

$$
\begin{aligned}
|f^{(n)}(z)| &\leqslant c_n'\iint_{K_1}|f(\zeta)|\,|\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}| \\
&\leqslant c_n'\iint_{V}|f(\zeta)|\,|\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}| = c_n\|f\|_{L(V)},
\end{aligned}
$$

这里 c_n',c_n 为只依赖于 n 的常数，这就是(3.7).

由定理5，立即得到定理3′(Cauchy-Goursat 积分定理)之逆.

定理7(Morera 定理) 若 $f(z)$ 在 U 上连续，且沿 U 中任意一条可求长闭曲线的积分为零，则 $f(z)$ 在 U 上全纯.

证明 任取一点 $z_0\in U$，由于在 U 中任一可求长闭曲线的积分为零，故

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\quad z\in U$$

不依赖于路径的选取，且 $F'(z)=f(z)$. 于是 $F(z)$ 为 U 上全纯函数. 由定理5，$F(z)$ 的二阶导数，即 $f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 也是存在的. 故 $f(z)$ 在 U 上是全纯函数. 证毕.

由定理5，还可以立即得到重要的

定理8(Liouville 定理) 若 $f(z)$ 在全平面 $\boldsymbol{C}$ 上全纯且有界，则 f 为常数.

证明 若 $|f(z)|\leqslant M$，当 $z\in\boldsymbol{C}$. 固定 $z_0\in\boldsymbol{C}$，作 $D(z_0,R)$，由(3.6)(当 $j=1$ 时)，得到 $|f'(z_0)|\leqslant\frac{M}{R}$. 令 $R\to\infty$，得到 $f'(z_0)=0$. 由于 z_0 为 $\boldsymbol{C}$ 中任意一点，故 $f'(z)=0$ 对任意 $z\in\boldsymbol{C}$ 都成立，因此 $f(z)$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上为常数.

Liouville 定理表明：在整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上全纯且有界的函数，只有常数. 这个定理在第五章中还要进一步讨论之.

最后来证明

定理9(Riemann 定理) 若 F 在去掉一点 z_0的圆 $\widetilde{D}(z_0,r)=D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$内全纯,且 F 在 $\widetilde{D}(z_0,r)$上有界,则 F 可解析开拓到 $D(z_0,r)$之上,即有在 $D(z_0,r)$上定义的全纯函数 f,使得 $f|_{\widetilde{D}(z_0,r)}=F$.

证明 不妨假设 $z_0=0$,定义

$$G(z)=\begin{cases}z^2F(z), & \text{当 } z\in\widetilde{D}(0,r),\\ 0, & \text{当 } z=0,\end{cases}$$

则 $G(z)$在 $D(0,r)$上连续可导,且满足 Cauchy-Riemann 方程,这是因为

$$\lim_{z\to 0}\frac{G(z)-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2F(z)-0}{z}=\lim_{z\to 0}zF(z)=0.$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}G(0)}{\mathrm{d}z}=0$. 而当 $z\neq 0$ 时,

$$G'(z)=z^2F'(z)+2zF(z).$$

显然 $G'(z)\to 0$,当 $z\to 0$. 由第一章§1.3的定理1,$G(z)$是在 $D(0,r)$上的全纯函数. 故 $G(z)$可以在 $z=0$处展开成 Taylor 级数

$$G(z)=0+0\cdot z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots, \tag{3.8}$$

此级数在 $D(0,r)$中收敛,定义

$$f(z)=\frac{G(z)}{z^2}=a_2+a_3z+\cdots, \tag{3.9}$$

显然级数(3.9)与级数(3.8)有相同的收敛半径,这可由第一章定理3中(6.2)得到. 故 $f(z)$在 $D(0,r)$上全纯,且在 $\widetilde{D}(0,r)$中,$f(z)=F(z)$.

§2.4 有关零点的一些结果

若 $f(z)$在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,如果 $z_0\in U$ 且 $f(z_0)=0$,则称 z_0 为 $f(z)$的零点. 若 $f(z)$在 $z=z_0$有展开

$$a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\quad a_m\neq 0,$$

则称 $f(z)$在 $z=z_0$处有 m 重零点. 由 Cauchy 积分公式及 Cauchy

积分定理可以得到一系列有关零点的推论.

定理10(代数基本定理) 若 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 为 n 次多项式,则至少有一个 z_0,使 $p(z_0)=0$.

z_0称为方程式 $p(z)=0$的根.

证明 如不然,则 $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$在 C 上全纯,由于当 $z\to\infty$时,$p(z)\to\infty$,所以 $f(z)$在 C 上有界,由定理8(Liouville 定理)知,$f(z)$为常数,即 $p(z)$为常数.得到矛盾.

定理11 若 $f(z)$在域$U\subseteq C$ 上全纯,则 $f(z)$的零点的集合$\{z\in U\mid f(z)=0\}$在 U 上无聚点,除非 $f(z)$在 U 上恒等于零.

证明 如不然,若 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$为 $f(z)$在 U 上的零点,且有聚点 $z_0\in U$.不妨假设 $z_0=0$.由于$0\in U$,$f(z)$在 U 上全纯,故在0点 $f(z)$可以展成 Taylor 级数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots.$$

由于数列$\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$为 $f(z)$的零点,故 $f(z_n)=0$.于是

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=f(\lim_{n\to\infty}z_n)=f(0)=0.$$

故得 $a_0=0$.因此,

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

这就有 $a_1=\dfrac{f(z)}{z}+O(z)$.取 $z=z_n$,得到 $a_1=\dfrac{f(z_n)}{z_n}+O(z_n)=O(z_n)$.令 $n\to\infty$,即得 $a_1=0$.同样办法可得 $a_2=a_3=\cdots=a_n=\cdots=0$.即 Taylor 级数的所有的系数均为零,故 $f(z)=0$.因此,若 $f(z)$不是在 U 上恒等于零的函数,则集合$\{z\in U\mid f(z)=0\}$在 U 上无聚点.

由定理11,立即得到:若 $h_1(z),h_2(z)$为域 $U\subseteq C$ 上的两个全纯函数,E 为 U 中一个有聚点的集合,其聚点在 U 中,如在 E 上,$h_1(z)=h_2(z)$,则在 U 上,也有 $h_1(z)=h_2(z)$.即全纯函数在 U 上的值,可以由聚点在 U 内的点集上的值所完全决定.例如:$\sin^2z+\cos^2z=1$,当 z 为实数时成立,故为复数时也成立.同样道理,

一些三角恒等式取实数值时成立，即可导出在复数时也成立.

定理12(幅角原理) 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯，$\gamma\subset U$ 为一条正定向简单闭曲线，且在 U 中可连续地缩成一个点，$f(z)$ 在 γ 上不为零，则 $f(z)$ 在 γ 内有有限个零点，零点的个数 k(重数计算在内)为

$$k=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z. \tag{4.1}$$

若记 $w=f(z)$，则有

$$k=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w}.$$

这里 Γ 为 γ 在 $w=f(z)$ 映射下的像. 这说明当 z 沿着 γ 的正方向转动一圈时，$w=f(z)$ 在 Γ 上沿正方向绕原点转动的总圈数，恰好等于 f 在 γ 内的零点的个数. 所以这个定理也叫做幅角原理.

定理12的证明 这里只证 $k=1$ 的情形，其他的情形一样可以证明.

不妨设 γ 为一个正定向的圆，且 $f(z)$ 在 $z=0$ 处有单零点，于是 $f(z)$ 在 $z=0$ 处有 Taylor 级数

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

于是 $f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots$. 因此

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)}&=\frac{a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots}{a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots}\\&=\frac{1}{z}\cdot\frac{a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots}{a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots}\\&=\frac{1}{z}\left(1+\frac{a_2z+2a_3z^2+\cdots}{a_1+a_2z+\cdots}\right)\\&=\frac{1}{z}+\frac{a_2+2a_3z+\cdots}{a_1+a_2z+\cdots}=\frac{1}{z}+h(z).\end{aligned}$$

由于 $f(z)$ 在 $z=0$ 处只有单零点，故 $a_1\neq 0$. 所以 $h(z)$ 在 $z=0$ 的附近是全纯的. 因此，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma}h(z)\mathrm{d}z=1,$$

这是因为 $\int_{\gamma} h(z)\mathrm{d}z = 0$.

同样可证有 k 重零点的情形及多个零点的情形.

定理13(Hurwitz 定理) 若$\{f_j\}$为 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上的全纯函数序列,在 U 内紧致集合上一致收敛(即内闭一致收敛)到一个函数 f,若所有的 f_j 在 U 上全不等于零,则 f 或是恒不等于零或是恒等于零.

证明 对于任一点 $z\in U$,在 U 中取一条简单闭曲线 γ,且 z 在 γ 包有的区域内. 由于 f_j 在 U 上全纯,故由 Cauchy 积分公式

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f_j(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

由于$\{f_j\}$在 U 上内闭一致收敛,故

$$\lim_{j\to\infty} f_j(z) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f_j(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \lim_{j\to\infty} f_j(\zeta)\, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

(由内闭一致收敛的条件可以导出极限与积分可以交换的结论. 其证明与微积分中的相应定理的证明相仿,读者试自证明之.)此即为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

因此,$f(z)$为全纯函数. 同样可证 $f_j'(z)$内闭一致收敛于 $f'(z)$.

若 $f(z)\not\equiv 0$,则由定理11,$f(z)$的零点是离散的. 取 γ 不经过这些零点,于是当 $j\to\infty$时,

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f_j'(\zeta)}{f_j(\zeta)}\mathrm{d}\zeta \to \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta.$$

但由假设及定理12,知道

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f_j'(\zeta)}{f_j(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = 0.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}\zeta = 0.$$

即 $f(z)$在 U 上无零点.

定理14(Rouché 定理) 若 $f(z),g(z)$在 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯,γ 为 U 内可求长简单闭曲线且在 γ 上满足

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|, \tag{4.2}$$

则 f,g 在 γ 内有相同的零点的个数.

证明 由(4.2)知,在 γ 上 $|f(z)|>0$,且 $g(z)\neq 0$. 如不然,在 γ 上存在一点 z_0,使 $g(z_0)=0$,即得 $|f(z_0)|<|f(z_0)|$,这不可能.

令 N_1,N_2为 f,g 在 γ 内零点的个数,则由定理12(幅角原理),得到

$$N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz,\quad N_2=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz.$$

于是得到

$$\begin{aligned}N_2-N_1&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{g'(z)}{g(z)}-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{fg'-gf'}{fg}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(g/f)'}{g/f}dz.\end{aligned}$$

命

$$F(z)=g(z)/f(z),$$

则

$$N_2-N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{F'(z)}{F(z)}dz.$$

但是(4.2)即为$|F(z)-1|<1$. $w=F(z)$将 γ 映为 Γ,Γ 不经过原点且不包有原点,这是因为 Γ 在 $|w-1|<1$之内. 由定理3(Cauchy 积分定理),得到 $\displaystyle\int_\Gamma\frac{dw}{w}=0$, 即 $N_1=N_2$. 证毕.

定理10已经证明:若 $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$为 n 次多项式,则至少有一个根,即有零点 z_0,$p(z_0)=0$.

现在用 Rouché 定理,立即可以证明:若 $a_n\neq 0$,则 $p(z)$有且只有 n 个零点,即 $p(z)=0$有且只有 n 个根. 这可证明如下:

令 $g(z)=a_n z^n$，则当 $|z|=R$ 充分大时，

$$|p(z)-g(z)|=|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|<|g(z)|$$
$$=|a_n||z|^n=|a_n||R|^n$$

成立，故由 Rouché 定理，在 $|z|<R$ 内，$p(z)$ 与 $g(z)$ 有相同的零点个数，而 $a_n z^n$ 显然有 n 个零点，故 $p(z)$ 也是如此.

作为 Rouché 定理的推论，有

定理15 若 $f(z)$ 在 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯，$w_0=f(z_0)$，$z_0\in U$. 若 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的 m 重零点，则对于充分小的 $\rho>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 $D(w_0,\delta)$ 内的每一点 A，函数 $f(z)-A$ 在 $D(z_0,\rho)$ 内恰有 m 个零点.

证明 z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 重零点，由定理11，存在 $\rho>0$，使得 $f(z)-f(z_0)$ 在 $\overline{D}(z_0,\rho)\subset U$ 上，除去 z_0 外，没有其他的零点，而在 $|z-z_0|=\rho$ 上，$|f(z)-f(z_0)|\geqslant\delta(\delta>0)$. 于是在 $D(w_0,\delta)$ 内的任意点 A，当 $|z-z_0|=\rho$ 时，$|A-w_0|<|f(z)-f(z_0)|$ 成立. 此即 $|(f(z)-f(z_0))-(f(z)-A))|<|f(z)-f(z_0)|$ 成立. 由 Rouché 定理，$f(z)-A$ 与 $f(z)-f(z_0)$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上有相同的零点个数，而 $f(z)-f(z_0)$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上有 m 重零点，故 $f(z)-A$ 在 $D(z_0,\rho)$ 上也有 m 个零点.

有关零点的理论，以后还要讨论之.

§2.5 最大模原理、Schwarz 引理与全纯自同构群

作为 Cauchy 积分公式的另一重要推论是最大模原理. 这是一条十分有用的定理.

在叙述这条定理之前，先来证明全纯函数的均值性质.

若 $f(z)$ 在 $U\subseteq\boldsymbol{C}$ 上全纯，$z_0\in U$. 若 $r>0$，使得 $\overline{D}(z_0,r)\subset U$，则由 Cauchy 积分公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z_0}$$

成立. $\partial D(z_0,r)$上的点 ζ 可以表为 $\zeta=z_0+re^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. 于是 Cauchy 积分公式成为

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})ire^{it}}{re^{it}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{it})dt, \tag{5.1}$$

这就是全纯函数的均值性质. 这说明: $f(z)$在 $z=z_0$的值等于 $f(z)$ 在 $\partial D(z_0,r)$上的值的平均.

在(5.1)的两边取实部与虚部,于是得到:调和函数也有均值性质. 反过来,可以证明:具有均值性质的连续函数一定是调和函数,这将在2.6节中证明之. 由于函数具有均值性质当且仅当函数是调和函数,所以调和函数也可定义为具有均值性质的函数.

现在利用全纯函数的均值性质来证明

定理16(最大模原理) 若 $f(z)$在域 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上全纯,如有点 $z_0\in U$,使得$|f(z_0)|\geqslant|f(z)|$对所有的 $z\in U$ 都成立,则 $f(z)$必为常数.

证明 乘以模为1的常数,使得 $M=f(z_0)\geqslant 0$. 令 $S=\{z\in U \mid f(z)=f(z_0)\}$,则 $S\neq\varnothing$($\varnothing$表示空集). 这是因为已知有 $z_0\in S$. 由于 f 为 U 上的连续函数,故 S 为闭集. 现在来证 S 也是开集. 若 $w\in S$,取 r,使得 $D(w,r)\subseteq U$. 取 r',而$0<r'<r$. 于是由均值性质

$$M=f(w)=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(w+r'e^{it})dt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(w+r'e^{it})|dt\leqslant M.$$

由于上式左、右两端相等,故所有不等式中的等号成立. 即

$$f(w+r'e^{it})=|f(w+r'e^{it})|=M$$

对所有的 t 及$0<r'<r$ 都成立. 于是

$$\{w+r'e^{it}\mid 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0<r'<r\}\subseteq S.$$

也就是说:对 S 中任意一点 w,一定存在一个开的小圆,这个小圆中的任意一点都属于 S. 因此,S 是开集. 因此,S 是 U 中的非空,

既开又闭的集合. 由于 U 是连通的. 故 S 只能是 U，即 $S=U$. 因此，$f(z)$在 U 上为常数 M. 证毕.

这里用到了：一个连通集的非空子集，如果既开又闭，则这个子集一定是集合自己，这个结果很有用处. 读者试自证明之.

作为最大模原理的**直接推论**有：若 $f(z)$在有界域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上全纯，在 $\overline{U}$ 上连续，并且不是常数，则$|f(z)|$只能在 ∂U 上达到最大值.

在最大模原理的证明中，只用到了函数的均值性质，故最大模原理对调和函数也是成立的.

由最大模原理立即推出重要的

定理17（Schwarz 引理） 若 $f(z)$为将单位圆 $D=D(0,1)$映入到 D 的全纯函数，且 $f(0)=0$，则

$$|f(z)| \leqslant |z| \text{ 及 } |f'(0)| \leqslant 1 \tag{5.2}$$

成立. 而$|f(z)|=|z|$在 D 中一点 $z\neq 0$处成立，或$|f'(0)|=1$成立，当且仅当 $f(z)=e^{i\tau}z$，这里 $\tau\in \boldsymbol{R}$.

证明 令

$$G(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & \text{当 } z\neq 0,\\ f'(0), & \text{当 } z=0,\end{cases}$$

则 $G(z)$在 D 上全纯. 对函数 $G(z)$在$\{z\,|\,|z|\leqslant 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$上应用最大模原理，得到

$$|G(z)| \leqslant \frac{\max\limits_{|z|=1-\varepsilon}|f(z)|}{1-\varepsilon} < \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon\to 0+$，即得$|G(z)|\leqslant 1$在 D 上成立. 故当 $z\neq 0$时，$|f(z)\leqslant|z|$成立，而当 $z=0$时，$|G(0)|=|f'(0)|\leqslant 1$.

若$|f(z)|=|z|$在 D 中一点 $z\neq 0$处成立，即$|G(z)|=1$在 D 中一点 $z\neq 0$处成立. 由最大模原理，$|G(z)|=1$对所有 $z\in D$ 都成立. 故 $G(z)=e^{i\tau}$，$\tau\in \boldsymbol{R}$，即 $f(z)=e^{i\tau}z$. 同样可证$|f'(0)|=1$成立时，$f(z)=e^{i\tau}z$. 证毕.

由 Schwarz 引理立即可以得到单位圆 D 的全纯自同构群.

若域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$，在域 U 上的全纯自同构群是这样定义的：

全纯函数 $f(z)$在 U 上定义，若 $f(z)$将 U 单叶全纯地映射到自身，则称 $f(z)$为 U 的全纯自同构. U 上所有全纯自同构组成群，称这个群为域 U 的全纯自同构群. 记作 $\mathrm{Aut}(U)$.

现在来给出 $\mathrm{Aut}(D)$.

先来证明：若 $a\in D$. 则 $\varphi_a(\zeta)=\dfrac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}\in \mathrm{Aut}(D)$.

显然 φ_a 在 $\overline{D}$ 上全纯，$\varphi_a(a)=0$，且 $\varphi_a:\partial D\to\partial D$，这是因为对于 $|\zeta|=1$，有

$$|\varphi_a(\zeta)|=\left|\frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}\right|=\left|\frac{\zeta-a}{\bar{\zeta}-\bar{a}}\right|=1,$$

所以 $\varphi_a(\zeta)$将 D 的内部映为 D 的内部.

再来证明 $\varphi_a(\zeta)$在 D 上是单叶的.

若有 $\zeta_1,\zeta_2\in D$，且

$$\frac{\zeta_1-a}{1-\bar{a}\zeta_1}=\frac{\zeta_2-a}{1-\bar{a}\zeta_2},$$

则

$$(\zeta_1-a)(1-\bar{a}\zeta_2)=(\zeta_2-a)(1-\bar{a}\zeta_1),$$

此即$(\zeta_1-\zeta_2)(1-|a|^2)=0$. 由于$|a|<1$，故 $\zeta_1=\zeta_2$. 这就证明了 $\varphi_a\in \mathrm{Aut}(D)$.

令 $\xi=\varphi_a(\zeta)=\dfrac{\zeta-a}{1-\bar{a}\zeta}$. 于是 $\xi-\bar{a}\zeta\xi=\zeta-a$，

$$\zeta=\frac{\xi+a}{1+\bar{a}\xi}=\varphi_{-a}(\xi).$$

故有$(\varphi_a)^{-1}=\varphi_{-a}$. 显然这也属于 $\mathrm{Aut}(D)$. 称 φ_a 为 Möbius 变换，所有 Möbius 变换组成的群，称为 Möbius 变换群. 这是$\mathrm{Aut}(D)$的一个子群. 另外，旋转 $\xi=\rho_\tau(\zeta)=e^{i\tau}\zeta$，$\tau\in\boldsymbol{R}$ 显然也是属于 $\mathrm{Aut}(D)$，而所有旋转的全体组成的群称为旋转群，这也是 $\mathrm{Aut}(D)$的一个子群.

定理18（单位圆的全纯自同构群） 若 $f\in \mathrm{Aut}(D)$，则存在复

数 a, $|a|<1$ 及 $\tau\in\boldsymbol{R}$ 使得

$$f(\zeta)=\varphi_a\circ\rho_\tau(\zeta). \tag{5.3}$$

也就是说:Aut(D)中的元素都是由 Möbius 变换及旋转复合而成.

证明 若 $f(0)=b$. 令 $G=\varphi_b\circ f$,则

$$G(0)=\varphi_b\circ f(0)=\varphi_b(b)=0.$$

由定理17(Schwarz 引理),$|G'(0)|\leqslant 1$. 同样可应用定理17于 G^{-1},可得

$$\left|\frac{1}{G'(0)}\right|=|(G^{-1})'(0)|\leqslant 1,$$

于是 $|G'(0)|=1$. 由定理17,这就导出 $G(\zeta)=e^{i\tau}\zeta=\rho_\tau(\zeta)$,即 $\varphi_b\circ f=\rho_\tau$,所以 $f=\varphi_{-b}\circ\rho_\tau$. 取 $-b=a$,即得(5.3).

由定理18可以导出重要的

定理19(Schwarz-Pick 引理) 若 f 为将 D 映入到 D 内的全纯函数,且将 $z_1,z_2\in D$ 映为 $w_1=f(z_1)$, $w_2=f(z_2)$,则

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-w_1\overline{w}_2}\right|\leqslant\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right| \tag{5.4}$$

及

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}\leqslant\frac{|dz|}{1-|z|^2} \tag{5.5}$$

成立,等号成立当且仅当 $f\in$ Aut(D).

证明 令

$$\varphi(z)=\frac{z+z_1}{1+\bar{z}_1 z},\quad \psi(z)=\frac{z-w_1}{1-\overline{w}_1 z},$$

显然 $\varphi,\psi\in$ Aut(D),且

$$\psi\circ f\circ\varphi(0)=\psi\circ f(z_1)=\psi(w_1)=0.$$

故 $\psi\circ f\circ\varphi$ 满足定理17(Schwarz 引理)的条件. 因此,当 $z(\neq 0)\in D$ 时,

$$|(\psi\circ f\circ\varphi)(z)|\leqslant|z|$$

成立. 令 $z=\varphi^{-1}(z_2)$,则有

$$|\psi\circ f(z_2)|\leqslant|\varphi^{-1}(z_2)|.$$

此即 $|\psi(w_2)|\leqslant|\varphi^{-1}(z_2)|$,这就是(5.4).

当 $z=0$时,则由定理17(Schwarz 引理),就有

$$|(\psi\circ f\circ\varphi)'(0)|\leqslant 1,$$

此即

$$|\psi'(w_1)f'(z_1)\varphi'(0)|\leqslant 1.$$

但是

$$\varphi'(z)=\frac{1-z_1\bar{z}_1}{(1+\bar{z}_1z)^2},\quad \varphi'(0)=1-|z_1|^2;$$

$$\psi'(z)=\frac{1-w_1\overline{w}_1}{(1-\overline{w}_1z)^2},\quad \psi'(w_1)=\frac{1}{1-|w_1|^2}.$$

所以有 $|f'(z_1)|\leqslant\dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}$,此即为(5.5).

由定理17,等号成立当且仅当

$$\psi\circ f\circ\varphi(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}z=\rho_\tau(z),$$

故

$$f=\psi^{-1}\circ\rho_\tau\circ\varphi^{-1}\in\mathrm{Aut}(D).$$

定理证毕.

事实上,在 D 上可以定义度量(双曲度量、Poincaré 度量,见第五章第5.1节),

$$\mathrm{d}_zs^2=\frac{|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

则(5.5)就是 $\mathrm{d}_ws^2\leqslant\mathrm{d}_zs^2$. 所以定理19也可叙述为:如果 $w=f(z)$为 D 上全纯函数,将 D 映入到 D 内,则其 Poincaré 度量是不增的. 保持 Poincaré 度量当且仅当 $f\in\mathrm{Aut}(D)$. 于是定理19给出了 Schwarz 引理的明确的微分几何的意义.

§2.6 全纯函数的积分表示

Cauchy 积分公式(2.1)是全纯函数的一种积分表示. 记 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}=H(\zeta,z)$,称 $H(\zeta,z)$为 Cauchy 核,于是(2.1)可以写成为

$$f(z)=\int_{\partial U}f(\zeta)H(\zeta,z)\mathrm{d}\zeta.$$

也就是说:全纯函数 $f(z)$在 U 中一点 z 的值,可以由 Cauchy 核 $H(\zeta,z)$及 f 在 U 的边界 ∂U 上的值 $f(\zeta)$的积分表示之.

由此还可以导出一些其他的积分表示. 先给出调和函数的积分表示.

若 $U(z)$为单位圆 D 上的调和函数,且在 $\overline{D}$ 上连续,则由2.5节中证明的调和函数的均值性质,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})\mathrm{d}\psi=U(0). \tag{6.1}$$

若 $a\in D$,则 $w=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\in \mathrm{Aut}(D)$,且在2.5节中已经证明,这个变换将 ∂D 映到 ∂D. 令 $U(w)=u(z)$,则 $u(z)$也是 D 上的调和函数,且 $U(0)=u(a)$. 若 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$对应于 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$,即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}-a}{1-\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}}$,于是有

$$\mathrm{d}\psi=\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|^2}\mathrm{d}\tau.$$

将上式代入(6.1),即得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|^2}\mathrm{d}\tau=u(a). \tag{6.2}$$

记

$$P(\zeta,a)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}|^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|a|^2}{|\zeta-a|^2},$$

这里 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$,称 $P(\zeta,a)$为 **Poisson 核**,于是(6.2)可以写成

$$\int_0^{2\pi} u(\zeta)P(\zeta,a)\mathrm{d}\tau = u(a).$$

(6.2)称为 **Poisson 积分公式**，这是在单位圆内调和，在 $\overline{D}$ 上连续的函数的积分表示. 也就是说：调和函数在单位圆内一点 z 的值可以用 Poisson 核及调和函数在单位圆周上的值的积分表示之.

可以不困难地将(6.2)推广为：若函数 u 在 $D(0,R)$上调和，在 $\overline{D}(0,R)$上连续，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{R^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\tau = u(z) \tag{6.3}$$

成立，这里 $\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$，$z\in D(0,R)$. 同样称

$$P(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{R^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

为 Poisson 核. 容易看出，(6.3)还可以写成

$$u(z) = \mathrm{Re}\Big[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R} u(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\Big]. \tag{6.4}$$

上式右边括号中的函数为在 $|z|<R$ 中的全纯函数，故 u 为全纯函数

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R} u(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \mathrm{i}c \tag{6.5}$$

的实部，这里 c 为任意常数，于是 $f(z)$可以写成 $u(z)+\mathrm{i}v(z)$.

在(6.5)的两边取虚部，就有

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{2\mathrm{Im}(z\overline{\zeta})}{|\zeta-z|^2}\mathrm{d}\tau + c, \tag{6.6}$$

这里 $\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$. 从上式显然得到 $c=v(0)$.

记 $S(\zeta,z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\;\dfrac{\zeta+z}{\zeta-z}\;\dfrac{1}{\zeta}$. 称 $S(\zeta,z)$为 Schwarz 核. 于是(6.5)可以写成

$$f(z) = \int_{|\zeta|=R} u(\zeta)S(\zeta,z)\mathrm{d}\zeta + \mathrm{i}v(0),$$

这是全纯函数的另一种积分表示. 也就是说：全纯函数 f 在 $D(0,R)$中一点 z 上的值，可以用 Schwarz 核 $S(\zeta,z)$及 f 的实部 u 在

$\partial D(0,R)$上的值的积分表示之.

同样,记

$$Q(\zeta,z)=\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{Im}(z\bar{\zeta})}{|\zeta-z|},$$

称 $Q(\zeta,z)$为共轭的 Poisson 核. 于是(6.6)可以写成

$$v(z)=\int_0^{2\pi}u(\zeta)Q(\zeta,z)\mathrm{d}\zeta+v(0),$$

这是调和函数的另一种积分表示. 也就是说:调和函数 v 在 $D(0,R)$中一点 z 上的值,可以用共轭 Poisson 核 $Q(\zeta,z)$及 v 的共轭调和函数 u 在$\partial D(0,R)$上的值的积分表示之. 这里两个调和函数称为是共轭的,若它们为同一个全纯函数的虚部与实部.

除了 Cauchy 核以外,上面所讨论到的各种核中,最重要的是 Poisson 核. 这是因为它与很多方面都有联系. 在这里举出两个方面. 一是与偏微分方程的联系,一是与调和分析的联系.

Poisson 积分与偏微分方程的联系

在偏微分方程中,有一类重要的问题是求椭圆型方程的 Dirichlet 问题的解. 也就是要求出函数,使之在区域内适合已给的椭圆型方程,而在边界上等于已给的函数. 用 Poisson 积分公式(6.3),可以解如下的 **Dirichlet 问题**:在区域 $D(0,R)$内适合 Laplace 方程,而在边界上等于已给的连续函数 $\varphi(Re^{i\tau})$. 这个问题的解就是 $u(z)=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)\varphi(\zeta)\mathrm{d}\tau$, 这里 $\zeta=Re^{i\tau}$. 而且这个解是唯一的.

现在来证明上述结论.

由

$$P(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\right),$$

而 $\Delta=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$,故显然有 $\Delta P=0$. 因此

$$u(z)=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)\varphi(\zeta)\mathrm{d}\tau$$

在 $D(0,R)$ 上满足 $\Delta u(z)=0$是显然的. 要证 $\lim\limits_{z\to\xi}u(z)=\varphi(\xi)$，这里 $z\in D(0,R)$，$\xi\in\partial D(0,R)$. 由于 $\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)\mathrm{d}\zeta=1$，故有

$$u(\rho e^{i\theta})-\varphi(Re^{i\theta})=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(Re^{i\theta}))\mathrm{d}\tau,$$

这里 $\xi=Re^{i\theta}$，$z=\rho e^{i\theta}$，$0<\rho<R$. 由于 φ 在 $|\zeta|=R$ 上是连续函数，故任给 $\varepsilon>0$，可以选取 $\delta>0$，使得当 $|\theta-\tau|<\delta$ 时，$|\varphi(Re^{i\theta})-\varphi(Re^{i\tau})|<\varepsilon$成立. 于是

$$\begin{aligned}&u(\rho e^{i\theta})-\varphi(Re^{i\theta})\\&\quad=\left(\int_{|\theta-\tau|<\delta}+\int_{|\theta-\tau|\geqslant\delta}\right)P(\zeta,z)(\varphi(\zeta)-\varphi(Re^{i\theta}))\mathrm{d}\tau\\&\quad=I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然

$$|I_1|<\varepsilon\int_{|\theta-\tau|<\delta}P(\zeta,z)\mathrm{d}\tau<\varepsilon.$$

由于 $P(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$，而在 I_2 中，$|\theta-\tau|>\delta$，故当 ρ 充分接近 R 时，可使 $P(\zeta,z)<\frac{\varepsilon}{2M}$，这里 $M=\sup\limits_{|\zeta|=R}|\varphi(\zeta)|$. 于是 $|I_2|<\varepsilon$. 因此，当 ρ 充分接近 R 时，就有 $|u(\rho e^{i\theta})-\varphi(Re^{i\theta})|<2\varepsilon$. 这就得到 $\lim\limits_{\rho\to R}u(\rho e^{i\theta})=\varphi(Re^{i\theta})$. 不难证明对于 $u(z)=\int_0^{2\pi}P(\zeta,z)\varphi(\zeta)\mathrm{d}\tau$ 来讲，当 $z\to\xi\in\partial D(0,R)$时，就有$\lim\limits_{z\to\xi}u(z)=\varphi(\xi)$，只要 $z\to\xi$ 不是沿着 ξ 在$\partial D(0,R)$的切线方向即可.（参阅 L. V. Ahlfors[1]）

唯一性的证明是容易的. 如不然，则有两个解 u 及 v，则 u，v 在边界上取相同的值 $\varphi(Re^{i\theta})$. 故 $u-v$ 在边界上取值为零. 显然 $u-v$ 仍为调和函数. 由 Poisson 积分公式，边界上取零值的调和函数只有零函数.

Poisson 积分与调和分析的联系

在(6.3)中取 $R=1$，即考虑的区域是单位圆 D，则(6.3)的左边为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\mathrm{d}\tau}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}, \tag{6.7}$$

这里 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}$.

若 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$为在单位圆周$\partial D$上已给的连续函数，则 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$可以有 Fourier 级数

$$u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\mathrm{d}\tau.$$

这个 Fourier 级数未必收敛，但可作它的 Abel 和，即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n\rho^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau}$. 经过简单的计算，可得这个 Abel 和就是(6.7)的右边的那个积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})\mathrm{d}\tau}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}.$$

由前面叙述的 Dirichlet 问题的解知道，当 $\rho\to 1$时，这个积分趋于 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$，即

$$\lim_{\rho\to 1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\rho^{|n|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\tau} = u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}).$$

也就是说：在单位圆周∂D上的连续函数 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$，其 Fourier 级数的 Abel 和，当 $\rho\to 1$时，趋于 $u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$自己，即连续函数的 Fourier 级数可 Abel 求和. 这是调和分析中一条初等但重要的定理.

最后可以应用 Dirichlet 问题的解，来证明在2.5节中已经说到的：具有均值性质的连续函数一定是调和函数. 事实上可证如下的结论.

定理20 若 $f(z)$是域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上的连续实值函数，且 $f(z)$在 U 中满足局部均值性质，即对每一点 $z_0\in U$，有充分小的 $r_0>0$，当 $0<r\leqslant r_0$时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0) \tag{6.8}$$

成立，则 $f(z)$在 U 上调和.

证明 任取 U 中的一点 z_0，则有 $r_0>0$，对所有满足$0<r\leqslant r_0$ 的 r，(6.8)成立. 令 $u_0(\theta)=f(z_0+r_0e^{i\theta})$，于是可以通过解 Dirichlet 问题，得到一个以 $u_0(\theta)$为边界值的在 $D(z_0,r_0)$中调和的函数 $u(z)$. 在 $\overline{D}(z_0,r_0)$上考虑函数 $f(z)-u(z)$，由于 $f(z)$及 $u(z)$都有均值性质，故 $f(z)-u(z)$也有均值性质. 在2.5节中已经指出：均值性质导出最大模原理，故$|f(z)-u(z)|$在 $\partial D(z_0,r_0)$上取最大值. 但 $f(z)-u(z)$在$\partial D(z_0,r_0)$上为零，故由最大模原理，$|f(z)-u(z)|\leqslant 0$. 由于 $f(z)$，$u(z)$均为连续函数，故当 $z\in D(z_0,r_0)$，有 $f(z)=u(z)$，即 $f(z)$在 $z=z_0$处为调和函数. 由于 z_0是在 U 中任意取的. 故 $f(z)$在 U 上调和.

习 题 二

1. 用 Cauchy 积分公式计算

(i) $\displaystyle\int_{|z+i|=3}\sin z\,\frac{dz}{z+i}$；　　(ii) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz$；

(iii) $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$；

(iv) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^n(z-3)}$，　$n=1,2,\cdots$；

(v) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$；　(vi) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^5-1}$；

(vii) $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$，　a,b不在圆周$|z|=R$上，n为正整数；

(viii) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{dz}{(z^3-1)(z-2)^2}$.

2. 证明：

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta},$$

这里 C 为围绕原点的一条简单闭曲线.

3. 若 f,g 为在单位圆$|z|<1$中全纯，在$|z|\leqslant 1$中连续的函数，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{zg(\zeta)}{z\zeta-1}\right)d\zeta$$

$$=\begin{cases} f(z), & \text{当 } |z|<1; \\ g\left(\frac{1}{z}\right), & \text{当 } |z|>1. \end{cases}$$

4. 设

$$f(z)=\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta,$$

求 $f'(1+i)$.

5. 通过计算 $\int_{|z|=1}(z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{dz}{z}$，证明：

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta=2\pi\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}.$$

6. 称 $p_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n)]$为 Legendre 多项式，证明

$$p_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,$$

其中 γ 是其内部包有点 z 的简单闭曲线.

7. 若 $f(z)$在 $\mathbf{C}$ 上全纯且满足 $|f(z)|\leqslant Me^{|z|}$，证明 $|f(0)|\leqslant M$ 及 $\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}\leqslant M\left(\frac{e}{n}\right)^n$，$n=1,2,\cdots$.

8. （外部 Cauchy 积分公式） 设 γ 为一条可求长简单闭曲线，其内部为域 D_1，外部为域 D_2，函数 $f(z)$在 D_2内全纯，在 $D_2+\gamma$ 上连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$. 求证

(i) $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & \text{若 } z\in D_2, \\ A, & \text{若 } z\in D_1;\end{cases}$$

(ii) 若原点属于 D_1，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{zf(\zeta)}{z\zeta-\zeta^2}d\zeta=\begin{cases}f(z), & \text{若 } z\in D_2, \\ 0, & \text{若 } z\in D_1.\end{cases}$$

9. 若函数 $f(z)$在有界域 D 内全纯，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，并且 $f(z)\neq 0$. 证明：如果在 ∂D 上 $|f(z)|=M$（常数），则 $f(z)=Me^{i\alpha}$，这里 α 为实的常数.

10. 若函数 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 上全纯且有界，a,b 为任意两个复常数，求极限

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\mathrm{d}z,$$

由此得到 Liouville 定理的另一个证明.

11. 若函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内全纯，且

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}\quad(|z|<1),$$

则对于 $0<r<1$，有

$$|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{n!}{r^n(1-r)}.$$

特别取 $r=1-\dfrac{1}{n+1}$，可以得到

$$|f^{(n)}(0)|<\mathrm{e}(n+1)!,\ n=1,2,\cdots.$$

12. (Cauchy 型积分) 若函数 $\varphi(\zeta)$ 在一条可求长曲线 γ 上连续，证明函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}$$

在不包含 γ 上的点的任意域 D 内是全纯的，且

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},\ n=1,2,\cdots.$$

13. 若函数 $f(z)$ 在有界域 D 内全纯，且不为常数，在 $\overline{D}$ 上连续，若 $f(z)\neq0$，$m=\inf\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$，$M=\sup\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$，则在 D 内的任一点 z，有 $m<|f(z)|<M$.

14. 若 $p_n(z)$ 为 n 次多项式，当 $|z|<1$ 时，$|p_n(z)|\leqslant M$，则当 $1\leqslant|z|<+\infty$ 时，$|p_n(z)|\leqslant M|z|^n$.

15. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内全纯，且 $|f(z)|\leqslant M$，$f(0)=0$，则

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{R}|z|,\quad|f'(0)|\leqslant\frac{M}{R},$$

其中等号成立当且仅当 $f(z)=\dfrac{M}{R}e^{i\alpha}z$，这里 α 为实数.

16. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯，且 $\operatorname{Re} f(z)>0$，$f(0)=\alpha>0$，则

$$\left|\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}\right| \leqslant |z|, \quad |f'(0)| \leqslant 2\alpha.$$

17. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯，且 $f(0)=0$，$\operatorname{Re} f(z) \leqslant A(A>0)$，则

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{1-|z|}.$$

18. 求下列函数在 $z=0$ 处的 Taylor 展开，并求出其收敛半径.

(i) $\dfrac{e^z+e^{-z}+2\cos z}{4}$；　　(ii) $\dfrac{z^2+4z^4+z^6}{(1-z^2)^3}$；

(iii) $(1-z^{-5})^{-4}$；　　(iv) $\dfrac{z^6}{(z^2-1)(z+1)}$.

19. (1) 若 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上全纯，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 为其在 $z=0$ 处的 Taylor 展开，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(2) 若(1)中的 $r=1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}=\frac{1}{\pi}\iint_D |f(z)|^2 dA,$$

这里 D 为单位圆 $|z|\leqslant 1$.

20. 证明公式(6.3)，(6.4).

21. 证明方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆 $|z|<1$ 内有一个根，在 $1<|z|<2$ 中有三个根.

22. 求方程 $z^7-5z^4-z+2=0$ 在圆 $|z|<1$ 内的根的个数.

23. 证明 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限内恰有一个根.

24. 求方程 $z^4-8z+10=0$ 在圆 $|z|<1$ 及圆环 $1<|z|<3$ 内的根的个数.

25. 证明:若 $a>\mathrm{e}$,则方程 $\mathrm{e}^z=az^n$ 在圆 $|z|<1$ 内有 n 个根.

26. 若 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内全纯,在圆 $|z|\leqslant 1$ 上连续,且 $|f(z)|<1$,则 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内有唯一的不动点.

27. (i) 求一全纯函数,其实部为 $\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)$ $(z=x+\mathrm{i}y)$.

(ii) 求形如 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的最一般的调和函数,这里 a,b,c,d 为实常数.

28. 应用调和函数的均值性质,证明:若 $-1<r<1$,则

$$\int_0^\pi \ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta=0.$$

29. 证明:如果在整个复平面 $\boldsymbol{C}$ 上,调和函数 $u(z)$ 是有界的,则 $u(z)$ 恒等于常数.

30. 求在 $|z|<1$ 内的调和函数,使其在 $|z|=1$ 上的一段弧上取值为1,而在圆周的其余部分取值为零.

第三章　Weierstrass 级数理论

§3.1　Laurent 级数

Weierstrass 理论之一是用级数来研究与刻画函数的性质. 在第一、第二章中已经讲到了全纯函数的幂级数展开以及函数项级数等. 这些结果与微积分中的级数理论大部分是一样的. 当然也有一些不同之处,如第一章中定理3的(3). 当然,更重要的是与微积分中级数理论相不同的部分. 在复变函数的级数理论中,与微积分级数理论最大不同之处是:除了 Taylor 级数外,还有 Laurent 级数. 一个函数的特性,除了全纯部分外,是由它的奇性所决定的. 而用来刻画、研究奇性的有力工具就是 Laurent 级数. 在介绍 Laurent 级数之前,先介绍一个有关函数项级数的 Weierstrass 定理,这是一条深刻的定理,这个定理在微积分中是没有的.

定理1(Weierstrass 定理)　若 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 在 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上全纯,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 上内闭一致收敛到 $f(z)$,则 $f(z)$ 在 U 上全纯,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)(k=1,2,\cdots)$.

在证明定理1之前,先叙述两条有关函数项级数的结果.

(1) 若 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 在集合 A 上连续,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 A 上一致收敛到 $f(z)$,则 $f(z)$ 在 A 上连续.

(2) 若 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 在可求长曲线 γ 上连续,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$,则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z.$$

这两个结果与微积分中有关函数项级数的定理是完全一样的，证明也是一样的，故证明从略. 而定理1为更深入的结果. 它告诉我们：如全纯函数项级数在域 U 上内闭一致收敛，则这级数收敛到一全纯函数，且逐项求导后的级数也内闭一致收敛到全纯函数的导数.（请读者回顾一下微积分中函数项级数逐项求导的定理，与定理1比较之.）

定理1的证明　由结论(1)知，$f(z)$在 U 上定义且连续.

若 K 为 U 内任一圆周，其内部属于 U，γ 为 K 内任一可求长闭曲线，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛，故由结论(2)，

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0,$$

这是因为 $f_n(z)$在 K 内全纯. 由 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，由 Morera 定理（第二章 § 2.3的定理7）得到 $f(z)$在 K 内全纯，故 $f(z)$在 U 上全纯.

若 $z_0\in U$，$\overline{D}(z_0,r)\subset U$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)$ 在 $\partial D(z_0,r)$上一致收敛到 $f(\zeta)$，若 $z\in D(z_0,r/2)$，则 $\left|\dfrac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{r}\right)^{k+1}$. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$ 在 $\partial D(z_0,r)$上一致收敛到$\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}$. 于是任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使得 $n\geqslant N$ 时，

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{k!},$$

当 $\zeta\in\partial D(z_0,r)$及 $z\in D(z_0,r/2)$时成立.

因此，当 $z\in D(z_0,r/2)$时，由 Cauchy 公式（第二章 § 2.3定理5），

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f_j(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \right|$$

$$\leqslant \frac{k!}{2\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| |d\zeta| < \varepsilon,$$

故 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$ 在 $D(z_0, r/2)$ 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

U 中任一有界闭域 $\bar{d}$，在 $\bar{d}$ 的每一点邻域内 $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$ 一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 这些邻域构成 $\bar{d}$ 的一个开覆盖. 由 Heine-Borel 定理，从中可以选出 $\bar{d}$ 的有限个开覆盖，因此，$\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(z)$ 在 $\bar{d}$ 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. 证毕.

由最大模原理可得：若 $D \subseteq \boldsymbol{C}$ 为有界域，若 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 在 D 内全纯，在 $\bar{D}$ 上连续，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 ∂D 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一致收敛. 因此，定理 1 中的条件"$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 上内闭一致收敛到 $f(z)$"可以改为"$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 U 中任一闭曲线上一致收敛到 $f(z)$"，则定理1依然成立.

现在来定义并讨论 Laurent 级数.

若 $a \in \boldsymbol{C}$，$c_n(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为复常数，则称

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1.1}$$

为在 a 点的 **Laurent 级数**. 即 Laurent 级数由两部分组成：一部分是非负幂的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$；一部分是负幂的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$. 若这两部分都在点 $z=z_0$ 处收敛，则称 Laurent 级数在这点收敛. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R，且 $R>0$，则级

数在 $|z-a|<R$ 内绝对收敛,且内闭一致收敛,故级数的和(记作 $\varphi(z)$)在 $|z-a|<R$ 上全纯. 记 $\zeta=\dfrac{1}{z-a}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^{n}$. 设其收敛半径为 λ,且 $\lambda>0$,则级数在 $|\zeta|<\lambda$ 内绝对收敛,且内闭一致收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ 在 $r=\dfrac{1}{\lambda}<|z-a|<\infty$ 内绝对收敛且内闭一致收敛,级数的和(记作 $\psi(z)$)在 $r<|z-a|<\infty$ 上全纯. 如果 $r>R$,则(1.1)处处发散;如果 $r=R$,则(1.1)除了 $|z-a|=R$ 的点外,处处发散,而在 $|z-a|=R$ 上有不同情形,如 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|=1$ 上处处收敛, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}z^n$ 在 $|z|=1$ 上处处发散, $\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 在 $|z|=1$ 上除了 $z=1$ 外处处收敛;如果 $r<R$,则(1.1)在圆环 $r<|z-a|<R$ 内绝对收敛且内闭一致收敛,在圆环外发散,称圆环为级数(1.1)的收敛圆环,由定理 1,级数(1.1)在圆环内收敛到一个全纯函数. $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内全纯,$\psi(z)$ 在 $r<|z-a|<\infty$ 内全纯,而 $f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$ 在 $r<|z-a|<R$ 内全纯,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 称为(1.1)的**全纯部分**, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ 称为(1.1)的**主要部分**(principal part)或奇异部分,即函数 $f(z)$ 的特性主要由这部分所决定.

归纳起来,若 Laurent 级数(1.1)的收敛圆环为 $r<|z-a|<R$,则(1.1)在此圆环内绝对收敛且内闭一致收敛,和函数 $f(z)$ 在此圆环上全纯. 反过来有

定理2 若函数 $f(z)$ 在圆环 $V: r<|z-a|<R\ (0\leqslant r<R<\infty)$ 上全纯,则 $f(z)$ 在 V 上有展开式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{1.2}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (r < \rho < R). \qquad (1.3)$$

展开式(1.2)是唯一的，称为 $f(z)$ 在圆环 V 上的 Laurent 展开式，或 Laurent 级数.

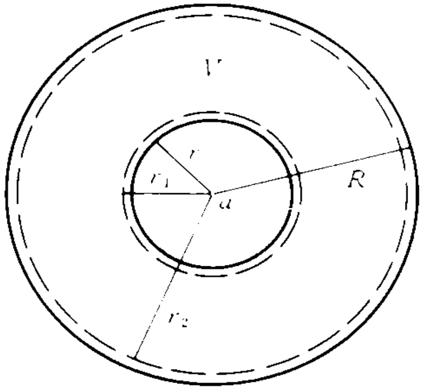

图 5

证明 (1.3)中的积分与 ρ 无关 $(r<\rho<R)$. 若 $r<\rho_1<\rho_2<R$，则

$$\int_{|\zeta - a| = \rho_1} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \int_{|\zeta - a| = \rho_2} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

若 $z \in V$，在 V 内取 $\gamma_1 = \partial D(a, r_1)$，$\gamma_2 = \partial D(a, r_2)$，$r_1 < r_2$，而 z 在圆环 $r_1 < |z-a| < r_2$ 之内. 由 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \qquad (1.4)$$

当 $\zeta \in \gamma_1$ 时，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n},$$

这是因为 $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$，上式右边的级数是在 γ_1 上一致收敛的；当 $\zeta \in \gamma_2$ 时，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

这是因为 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$，上式右边的级数是在 γ_2 上一致收敛的. 将这两个式子代入(1.4)，就有(1.2)及(1.3).

最后证明唯一性. 设 $f(z)$ 在 U 上还有另一个 Laurent 级数展

开式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z-a)^n \quad (r < |z-a| < R). \qquad (1.5)$$

(1.5)式右边的级数在$|z-a|=\rho(r<\rho<R)$上一致收敛到$f(z)$，以$\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$乘(1.5)式的两边，然后在$|z-a|=\rho$上积分，由一致收敛性，有

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-a)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n' \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_m',$$

这是因为

$$\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & 若\ k=-1; \\ 0, & 若\ k\neq -1. \end{cases}$$

于是$c_m'=c_m(m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$. 这就证明了级数的唯一性. 证毕.

§3.2 孤 立 奇 点

若函数$f(z)$在点a的邻域$D(a,R)\backslash\{a\}$上全纯，则称a点为$f(z)$的一个孤立奇点. 若a为$f(z)$的一个孤立奇点，由定理2，$f(z)$在$0<|z-a|<R$上可展开成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

而

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (0<\rho<R),$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

如上一节所说那样，$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$，这里

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad (2.1)$$

在$|z-a|<R$上全纯，为$f(z)$的 Laurent 展开式的全纯部分，而

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{2.2}$$

在$0<|z-a|<\infty$上全纯，为$f(z)$的 Laurent 展开式的主要部分.

讨论$\lim\limits_{z\to a}f(z)$的情形，有下述三种可能.

(1) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在且有限，则由 Riemann 定理(第二章 § 2.3 定理9)，$f(z)$可解析开拓到$D(a,R)$.(作为练习，建议读者用定理2直接证明之.)因此，(2.2)中的c_{-n}全为零. 反之如(2.2)中的c_{-n}全为零，则$f(z)=\varphi(z)$，而$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\varphi(a)$. 故$\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在且有限当且仅当$c_{-n}$全为零，这时称$a$为**可去奇点**.

(2) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$存在且无限，则充要条件为：(2.2)中c_{-n}只有有限个不为零，即

$$\psi(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m},\quad c_{-m}\neq 0.$$

而

$$\begin{aligned}f(z)&=\varphi(z)+\psi(z)\\&=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots\\&=\frac{g(z)}{(z-a)^m},\end{aligned}$$

其中

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots,\quad c_{-m}=g(a)\neq 0,$$

这时称a为$f(z)$的一个 **m 级极点**. $m=1$时，称为**简单极点**.

证明 充分性是显然的. 只需证必要性.

因为$\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$，故存在$\delta>0$，使得在$0<|z-a|<\delta$内，$f(z)\neq 0$. 于是在$0<|z-a|<\delta$内，$F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$全纯，且不为零及$\lim\limits_{z\to a}F(z)=0$. 由(1)，$a$为$F(z)$的可去奇点，且为$F(z)$的一个零点. 设$a$为$F(z)$的一个$m$级零点，则$F(z)=(z-a)^m\lambda(z)$，这里$\lambda(z)$在$|z-a|<\delta$上全纯，且可取$a$的一个邻域，使$\lambda(z)$在此邻域

内不为零，不妨设此邻域为 $|z-a|<\delta$. 因之，$\frac{1}{\lambda(z)}$ 在 $|z-a|<\delta$ 上全纯且不为零，其 Taylor 展开式为

$$\frac{1}{\lambda(z)}=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots,\quad c_{-m}\neq 0,|z-a|<\delta.$$

于是

$$f(z)=\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{(z-a)^m\lambda(z)}$$

$$=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots.$$

由 Laurent 展开式的唯一性，得证(2).

从(1),(2)立即得到

(3) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在，其充要条件为(2.2)的系数 c_{-n} 有无穷多个不为零，这时称 a 为 $f(z)$ 的**本性奇点**. 例如：$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$，$z=0$ 为其本性奇点，因为 $\lim\limits_{z=x\to 0+}e^{\frac{1}{z}}=+\infty$，而 $\lim\limits_{z=x\to 0-}e^{\frac{1}{z}}=0$，故 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在.

对于本性奇点，有如下重要的

定理3(Weierstrass 定理) 若 a 为 $f(z)$ 的本性奇点，任给 $\delta>0$，则对任意有限复数 A 及正数 $\varepsilon>0$，在 $0<|z-a|<\delta$ 内有一点 z，使得 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立，即 $f(z)$ 在本性奇点的邻域内的取值在 $\boldsymbol{C}$ 上是稠密的.

证明 如不然，存在有限复数 A 及 $\varepsilon>0$，在 $0<|z-a|<\delta$ 内 $|f(z)-A|>\varepsilon$. 于是

$$F(z)=\frac{f(z)-A}{z-a}$$

在 $0<|z-a|<\delta$ 上全纯，而当 $z\to a$ 时，$F(z)\to\infty$. 故 a 为 $F(z)$ 的极点，由(2)，

$$F(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots,$$

因此

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z-a}$$
$$+(A+c_{-1})+c_0(z-a)+\cdots,$$

所以 a 或是 $f(z)$的 $m-1$级极点(当 $m>1$)或是 $f(z)$的可去奇点(当 $m=1$),这与定理的条件相矛盾. 证毕.

Weierstrass 定理十分深刻地刻画了 $f(z)$在一个本性奇点附近的值分布的性质. 但1879年,Picard 证明了更为一般,更为深刻的 **Picard 定理**:全纯函数在一个本性奇点的邻域内无穷多次地取到每个有限复值,至多除去一个例外值. 关于 Picard 定理,将在第五章中证明之.

以上讨论孤立奇点是有限复数的情形,现在讨论孤立奇点是无穷远点的情形.

若函数 $f(z)$在圆环 $V:R<|z|<\infty(R>0)$上全纯,$z=\infty$为 $f(z)$的一个孤立奇点. 这时候,作变换 $\zeta=\frac{1}{z}$,将 $z=\infty$的邻域变为 $\zeta=0$的邻域,于是 $g(\zeta)=f(z)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$在$0<|\zeta|<\frac{1}{R}$上全纯. 且可展开成 Laurent 级数

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{-n}\zeta^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_{-n}\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\zeta^{-n}=\varphi(\zeta)+\psi(\zeta),$$

$\varphi(\zeta)$为 $g(\zeta)$的 Laurent 展开式的全纯部分,而 $\psi(\zeta)$为 $g(\zeta)$的 Laurent 展开式的主要部分. 于是

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n=\varphi_0(z)+\psi_0(z),$$

其中 $\varphi_0(z)$为 $f(z)$的 Laurent 展开式的全纯部分,$\psi_0(z)$为 $f(z)$的 Laurent 展开式的主要部分. 故

(1) 当 $z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点时,

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots;$$

(2) 当 $z=\infty$为 $f(z)$的 m 级极点时,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m, \quad c_m \neq 0;$$

(3) 当 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的本性奇点时,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

§3.3 整函数与亚纯函数

若函数 $f(z)$ 除了无穷远点外,在 $\boldsymbol{C}$ 上是全纯的,则称 $f(z)$ 为一**整函数**(entire function). 于是 $f(z)$ 的 Taylor 展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.1}$$

在 $\boldsymbol{C}$ 上成立. $z=\infty$ 是孤立奇点,由 Laurent 展开式的唯一性,(3.1)也是 $f(z)$ 在无穷远点的邻域的 Laurent 展开式. 于是有三种可能:

(1) $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点,则由 Liouville 定理(第二章§2.3定理8),$f(z)$ 为常数.

(2) $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个 m 级极点,则 $c_n=0$ 当 $n>m$,即 $f(z)$ 为一个 m 次多项式

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m, \quad c_m \neq 0.$$

(3) $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的一个本性奇点,则

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

其中 $c_n(n\geqslant 1)$ 有无穷多个不为零,这时称 $f(z)$ 为**超越整函数**,例如:e^z, $\sin z$, $\cos z$ 等等.

若函数 $f(z)$ 除了无穷远点外,在 $\boldsymbol{C}$ 上只有极点(极点的个数可为有限个,可为无限个),则称 $f(z)$ 为一**亚纯函数**(meromorphic function). 整函数是亚纯函数,有理函数 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 也是亚纯函数,其中 $P_n(z)$,$Q_m(z)$ 为两个既约多项式,

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m, \quad b_m \neq 0.$$

$Q_m(z)$的零点是 $f(z)$的极点. 由于

$$f(z) = \frac{1}{z^{m-n}} \frac{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^n}}{b_m + \dfrac{b_{m-1}}{z} + \cdots + \dfrac{b_0}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{若 } m = n; \\ \infty, & \text{若 } n > m; \\ 0, & \text{若 } n < m. \end{cases}$$

即 $z=\infty$或是 $f(z)$的可去奇点,或是极点.

反过来,有如下的

定理4 若 $z=\infty$为亚纯函数 $f(z)$的可去奇点或极点,则 $f(z)$必为有理函数.

证明 由于 $z=\infty$是 $f(z)$的可去奇点或极点,故存在 $R>0$,使得 $f(z)$在 $R<|z|<\infty$上全纯. 设 $f(z)$在 $z=\infty$的邻域内的 Laurent 展开式的主要部分为 $p(z)$. 当 $z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点时,$p(z)\equiv 0$;当 $z=\infty$为 $f(z)$的极点时,$p(z)$是一多项式.

在圆$|z|\leqslant R$ 上,$f(z)$只能有有限个极点,如不然,$f(z)$有无穷多个极点,由 Bolzano-Weierstrass 定理,这无穷多个极点必有极限点 z_0,z_0是在$|z|\leqslant R$ 上,z_0就是 $f(z)$的一个非孤立奇点,但这不可能,因为 $f(z)$为亚纯函数. 设 $z_1,z_2,\cdots,z_k$ 是 $f(z)$的极点,在 $z_i(i=1,\cdots,k)$的邻域内,$f(z)$的 Laurent 展开式的主要部分为

$$\psi_i(z) = \frac{c_{-1}^{(i)}}{z-z_i} + \cdots + \frac{c_{-m}^{(i)}}{(z-z_i)^m}, \quad i = 1,2,\cdots,k.$$

全纯部分为 $\varphi_i(z)$,于是函数

$$F(z) = f(z) - p(z) - \sum_{i=1}^{k} \psi_i(z)$$

除去 $z_1,z_2,\cdots,z_k,\infty$外,在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯. 而这些点是 $F(z)$的可去奇

点. 事实上,当 $z\to z_i$ 时,$\lim\limits_{z\to z_i}(f(z)-\psi_i(z))=\varphi_i(z_i)$,而 $\sum\limits_{m\neq i}\psi_m(z)-p(z)$ 在 z_i 是全纯的,故$\lim\limits_{z\to z_i}F(z)$存在且有限. 在 $z=\infty$,$f(z)-p(z)$是 $f(z)$在 $z=\infty$的邻域的 Laurent 展开式的全纯部分. 故$\lim\limits_{z\to\infty}(f(z)-p(z))$存在且有限,而 $\lim\limits_{z\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}\psi_i(z)=0$. 于是$\lim\limits_{z\to\infty}F(z)$有限. 故 $F(z)$在 $\boldsymbol{C}$ 上全纯. 由 Liouville 定理,$F(z)$为常数 c. 因此,

$$f(z)=c+p(z)+\sum_{i=1}^{k}\psi_i(z),$$

即为有理函数.

除去有理函数外的亚纯函数,称为**超越亚纯函数**,超越亚纯函数或以 $z=\infty$为本性奇点,或以 $z=\infty$为它的极点的极限点.

第二章 § 2.5中已经给出了单位圆的全纯自同构群(第二章定理18),现在可以定出复平面 $\boldsymbol{C}$ 及扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$,即 $\boldsymbol{C}$ 加上无穷远点∞,也即 Riemann 球 S^2的自同构群.

先来定出复平面 $\boldsymbol{C}$ 的全纯自同构群 Aut($\boldsymbol{C}$).

若 $\alpha(z)\in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$,则 $\alpha(z)$一定将∞点映为∞点. 由于映射是自同构,故为一对一的. 因此,$\alpha(z)$在∞点有单极点,根据前述结果,$\alpha(z)$一定是一个一次多项式,即 $\alpha(z)=az+b$,$a,b\in\boldsymbol{C}$,$a\neq 0$. 反过来,易见 $az+b\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$,若 $a,b\in\boldsymbol{C}$,$a\neq0$. 故 Aut($\boldsymbol{C}$)是由所有的线性变换$\{az+b\mid a,b\in\boldsymbol{C},a\neq0\}$所组成,即 Aut($\boldsymbol{C}$)是由平移(translation)$\alpha(z)=z+b$ 及伸缩(dilation)$\alpha(z)=az$ 的复合所组成.

再来定出 $\boldsymbol{C}^*$,即扩充复平面的亚纯自同构群 Aut($\boldsymbol{C}^*$).

若 $\alpha(z)\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$,且 $\alpha(\infty)=\infty$,由于自同构是一对一的,故 $\alpha(z)$在 $\boldsymbol{C}$ 上是属于 Aut($\boldsymbol{C}$)的. 因此 $\alpha(z)=cz+d$,这里 $c,d\in\boldsymbol{C}$,$c\neq0$. 显然容易直接验证 $\alpha(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$,若 $a,b,c,d\in\boldsymbol{C}$,且 $ad-bc\neq0$.

若 $\alpha(z)\in\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$且 $\alpha(\infty)\neq\infty$,则 $\beta(z)=\dfrac{1}{\alpha(z)-\alpha(\infty)}\in$

$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$，且 $\beta(\infty)=\infty$，所以 $\beta(z)=cz+d$，这里 $c,d\in\boldsymbol{C}$，$c\neq 0$. 于是 $cz+d=\dfrac{1}{\alpha(z)-\alpha(\infty)}$，由此可解出 $\alpha(z)$，得到 $\alpha(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$，这里 $a=\alpha(\infty)c$，$b=d\alpha(\infty)+1$. 故 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$是由所有分式线性变换 $\left\{\dfrac{az+b}{cz+d}\mid ad-bc=1\right\}$所组成. 即 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$是由平移 $\alpha(z)=z+b$，伸缩 $\alpha(z)=az$ 以及反演(inversion)$\alpha(z)=1/z$ 的复合所组成. 如果令$\dfrac{az+b}{cz+d}$与二阶方阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$一一对应，则 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^*)$与所有的方阵

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=1\right\}$$

所组成的群相同构，这个群称为二阶特殊线性群，记作 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$. 这里 det[　]为[　]的行列式.

在复分析中有如下一条十分重要的定理.

单值化定理(uniformization theorem)　任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一：单位圆、复平面 $\boldsymbol{C}$、扩充复平面 $\boldsymbol{C}^*$，即 Riemann 球面 S^2.

Riemann 曲面的意义将在下一章中叙述. 由上述的结果及第二章中 §2.5的定理18，给出了上述三种域的自同构群，即定出了所有与单连通 Riemann 曲面相一对一全纯等价的域的自同构群. 在下一章中还将证明重要的 Riemann 映射定理：任意边界点至少有两点的单连通区域一定一对一地全纯等价于单位圆. 故在一对一全纯等价的意义下，单连通区域只有这三个. 至于这三个区域上的几何将在第五章中讨论之.

§3.4　Weierstrass 因子分解定理、Mittag-Leffler 定理与插值定理

在这一节中将证明三个构造性定理.

由于整函数，除了无穷远点外，函数是全纯的，故可以用 §2.3 中的 Taylor 级数(3.1)来表达之. 由 §3.3，若 $z=\infty$ 为整函数的

极点，则$f(z)$就是一个多项式，因之整函数可以看成多项式的自然推广，是无穷多次阶的多项式(3.1)．对于多项式，一个明确的表达式是用它的根（即零点）来表达之．如 $a_1,\cdots,a_n$ 为 n 次多项式 $P_n(z)$的根，则 $P_n(z)$可以表为 $A(z-a_1)\cdots(z-a_n)$，这里 A 为复常数．这个表达式称为 $P_n(z)$的因子分解．对超越整函数，是否也可以因子分解：即如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$为整函数的无穷多个零点，是否可将此函数表示为 $A(z-a_1)\cdots(z-a_n)\cdots=A\prod\limits_{i=1}^{\infty}(z-a_i)$．由于乘积是无穷乘积，就有个收敛的问题，故不能这样简单地从事．这个问题的正确回答是 Weierstrass 因子分解定理．为此，先简单地讨论一下无穷乘积．

对复数序列$\{u_n\}(n=1,2,\cdots)$作乘积

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k),$$

若$1+u_k\neq 0(k=1,2,\cdots)$，

$$\lim_{n\to\infty}p_n=p\neq 0,$$

且 p 为有限，则称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{4.1}$$

是**收敛的**，且收敛到 p，记作 $p=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$．否则称(4.1)是**发散的**．

由于当 $x\geqslant 0$时，$1+x\leqslant e^x$，故

$$\begin{aligned}&|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|\\ &\qquad\leqslant(1+|u_1|)(1+|u_2|)\cdots(1+|u_n|)\\ &\qquad\leqslant e^{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|},\end{aligned}$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ 同时收敛或同时发散．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称(4.1) 绝对收敛．于是有：绝对收敛的无穷乘积一定收敛，且绝对收敛的无穷乘积可以改变因子的顺序而不影响无穷乘

积的值.证明从略.

现在来讨论整函数的因子分解.

如整函数 $f(z)$ 无零点，则显然 $f(z)$ 可表为 $f(z)=e^{\varphi(z)}$，这里 $\varphi(z)$ 是整函数.事实上，只要首先注意到函数 $f'(z)/f(z)$ 在整个平面上解析，它是一个整函数 $\varphi(z)$ 的导数.从这一事实经过计算就可以推知 $f(z)e^{-\varphi(z)}$ 的导数为零，故 $f(z)$ 必是 $e^{\varphi(z)}$ 的常数倍，这一常数可以并在 $\varphi(z)$ 之内.若 $f(z)$ 是一个只有有限个零点的整函数，$0,a_1,a_2,\cdots,a_n(a_i\neq 0,i=1,\cdots,n)$ 是 $f(z)$ 的零点，其级分别为 $m,m_1,\cdots,m_n$.令

$$p(z)=z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n},$$

则 $h(z)=\dfrac{f(z)}{p(z)}$ 是以 $z=0,a_i(i=1,\cdots,n)$ 为可去奇点，故 $h(z)$ 为没有零点的整函数.于是 $h(z)=e^{\psi(z)}$，$\psi(z)$ 为整函数.因此，$f(z)$ 可表为

$$f(z)=z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}e^{\psi(z)},$$

即 $f(z)$ 可表为一个多项式及一个无零点的整函数的乘积，而此多项式是以 $f(z)$ 的零点为零点，且级相同.

若整函数 $f(z)$ 有无穷多个零点且不恒等于零.由于 $f(z)$ 的零点可列，可将 $f(z)$ 的零点按模的大小排列成一序列($z=0$除外，将另作处理)$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$

$$0<|a_n|\leqslant|a_{n+1}|,\quad \lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty. \tag{4.2}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$，故对任意的正数 R，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^n$ 是收敛的.考虑无穷乘积

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right\}. \tag{4.3}$$

记

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1},$$

$$Q_n(z) = \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + P_n(z),$$

$$E_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)} = e^{Q_n(z)},$$

则(4.3)即为 $\prod_{n=2}^{\infty} E_n(z)$.

对任意固定正数 R,取正整数 N,使得 $n \geqslant N$ 时,$|a_u| > 2R$,考虑无穷乘积 $\prod_{n=N}^{\infty} E_n(z)$, 当 $|z| \leqslant R, n \geqslant N$ 时, $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leqslant \frac{1}{2}$,故

$$\begin{aligned}|Q_n(z)| &\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{n+1} + \cdots \\ &\leqslant \left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{|z|}{|a_n|}} \leqslant 2\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n.\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n$ 收敛,故 $\sum_{n=N}^{\infty} Q_n(z)$ 在 $|z| \leqslant R$ 上绝对且一致收敛,故

$$\prod_{n=N}^{\infty} E_n(z) = \exp\left(\sum_{n=N}^{\infty} Q_n(z)\right)$$

在 $|z| \leqslant R$ 上一致收敛. 由 Weierstrass 定理(定理1),这个无穷乘积表示一个在 $|z| < R$ 上的全纯函数,且此函数不为零,而 $\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{N-1} E_n(z)$ 的零点为 $a_n(n=1,\cdots,N-1)$,而这些点都在 $|z| \leqslant 2R$之中. 因此,在 $|z| < R$ 中的那些 $a_n(n=1,2,\cdots)$是 $\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{N-1} E_n(z)$ 的零点,且在$|z| < R$ 中只有这些零点.

当 $|z| < R$. n 充分大时,可使 $|Q_n(z)| < 1$. 易证 $|e^z - 1| \leqslant \frac{7}{4}|z|$,当 $|z| < 1$时成立. 故

$$|E_n(z) - 1| = |e^{Q_n(z)} - 1|$$

$$\leqslant \frac{7}{4}|Q_n(z)| \leqslant \frac{7}{2}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n,$$

所以 $\prod_{n=N}^{\infty} E_n(z)$ 当 N 充分大时，在 $|z| \leqslant R$ 上绝对收敛.

于是对于已给的复数序列(4.2)，存在一个以 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其零点的整函数 $g(z) = \left(1-\frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{\infty} E_n(z)$，这个无穷乘积对 z 绝对收敛，且 $P_N(z) = \left(1-\frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{N} E_n(z)$ 在任意圆 $|z| < R$ 上一致收敛到 $g(z)$. 于是得到

定理5(Weierstrass 因子分解定理) 若 $f(z)$ 为一整函数，$z=0$ 为 $f(z)$ 的 m 重零点(m 也可为零)，其余零点为 $a_1, a_2, \cdots (0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|, \lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$，则 $f(z)$ 可表为

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right\}, \quad (4.4)$$

其中 $h(z)$ 为一整函数.

证明 如前所述，可以作出整函数 $g(z)$，以 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其零点. 于是 $z^m g(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的零点及相同的级. 故 $0, a_i(i=1,2,\cdots)$ 为 $H(z) = \dfrac{f(z)}{z^m g(z)}$ 的可去奇点，且无零点，故 $H(z) = e^{h(z)}$，这里 $h(z)$ 为整函数，定理得证.

由于 $g(z)$ 不唯一，故 $f(z)$ 的表达式也不唯一.

对于亚纯函数，可以有怎样的表示式?首先从 Weierstrass 因子分解定理的证明中可得：任意亚纯函数可以表为两个整函数之比.

证明 若 $f(z)$ 为亚纯函数，于是存在整函数 $f_1(z)$，它以 $f(z)$ 的极点为其零点. 令 $f_2(z) = f(z) f_1(z)$，在 $f(z)$ 的极点 a 处定义 $f_2(a) = \lim_{z\to a} f_2(z)$，则 $f_2(z)$ 也是一整函数. 故 $f(z) = \dfrac{f_2(z)}{f_1(z)}$.

由于任意亚纯函数可以表成两个整函数之比，而由 Weierstrass 因子分解定理，每个整函数可以表成(4.4)的形式，故每个亚纯函数可表为两个形如(4.4)式子的商. 这时，这个亚纯函数可以用它的零点及极点明确地表示之.

此外，在上一节中已知，如果一个亚纯函数 $f(z)$ 只有有限多个极点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，且 $z=\infty$ 是它的极点或可去奇点，则 $f(z)$ 为有理函数，并且有

$$f(z)=c+p(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z),$$

这里 c 为常数，$p(z)$ 为多项式，$\psi_j(z)$ 为极点 $z=a_j$ 的主要部分(定理4).

对于一个超越亚纯函数 $f(z)$，$z=\infty$ 或是它的本性奇点，或是它的极点的极限点. 若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，则 $f(z)$ 的极点仍为有限多个，故 $U(z)=f(z)-\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z)$ 是一个超越整函数，因此

$$f(z)=U(z)+\sum_{j=1}^{n}\psi_j(z).$$

若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的极点的极限点，这些极点是 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$. 按模的大小排列起来，$|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$. 在 a_j 点，其主要部分为 $\psi_j(z)$ 也是已给的. 是否存在亚纯函数 $f(z)$，以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为其极点，而以 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n,\cdots$ 为相应的主要部分，于是有

定理6(Mittag-Leffler 定理) 存在这样的亚纯函数，以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$($|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$)为其极点，而以 $\psi_1(z),\psi_2(z),\cdots,\psi_n(z),\cdots$ 为相应的主要部分.

证明 在 a_i 点取小的邻域 $U_i(i=1,2,\cdots)$，使得 $U_i\cap U_j=\varnothing$，当 $i\neq j$. 取 C^∞ 函数 φ_i，使得 $\varphi_i=1$ 在 a_i 的一个小邻域 $V_i\subset U_i$，$\varphi_i=0$ 在 $U_i(i=1,2,\cdots)$ 的补集上，于是在 $\boldsymbol{C}\backslash\{a_i\}_1^\infty$ 上定义 $u=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\psi_i$，

则 u 在 $\boldsymbol{C}\setminus\{a_i\}_1^\infty$ 上为 C^∞，且在 $V_i\setminus\{a_i\}$ 上的值为 ψ_i，即在 a_i 附近，有要求的主要部分. 但 u 不是亚纯的. 令

$$A=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}, & \text{当 } z\in \boldsymbol{C}\setminus\{a_i\}_1^\infty,\\ 0, & \text{当 } z=a_i, i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

由于在 $V_i\setminus\{a_i\}$ 上，$u=\psi_i$，故当 $z\neq a_i$ 时，$\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}=0$，即在 $V_i\setminus\{a_i\}$ 上，$A=0$，而由 A 的定义，当 $z=a_i$ 时，$A=0$，故 A 为连续函数，同理可证 A 为 C^∞ 函数. 于是由一维 $\bar{\partial}$-问题的解（第二章 § 2.1定理4），$\bar{\partial}$-问题

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=A$$

在 $\boldsymbol{C}$ 上有 C^∞ 的解 v，这可表为第二章 § 2.1中的公式(1.4). 于是 $f=u-v$ 即为所求的亚纯函数. 显然，当 $z\in \boldsymbol{C}\setminus\{a_i\}_1^\infty$ 时，$\dfrac{\partial(u-v)}{\partial \bar{z}}=0$，即 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$，故当 $z\in \boldsymbol{C}\setminus\{a_i\}_1^\infty$ 时，f 是全纯的. 由于 $v\in C^\infty(\boldsymbol{C})$，由 u 的定义，当 z 取 a_i 附近的值时，f 有主要部分 $\psi_i(z)$. 定理证毕.

用 $\bar{\partial}$-问题的解来证明 Mittag-Leffler 定理，干净利索. 但如用古典复分析的办法来证，可以将所得的亚纯函数写得更清楚.

定理6′(Mittag-Leffler 定理) 设 $f(z)$ 为亚纯函数，$a_n(n=1,2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的极点，且 $|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$，则 $f(z)$ 可以写成

$$f(z)=U(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\},$$

这里 $\Psi_n(z)$ 为 $f(z)$ 在极点 $z=a_n$ 处的主要部分，$P_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 为多项式，$U(z)$ 为整函数.

证明 取正数 $\varepsilon_n>0(n=1,2,\cdots)$，使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 收敛. 若 $a_1=0$，则取 $P_1(z)=0$. 对 $a_n(\neq 0)$，$\Psi_n(z)$ 是 $\dfrac{1}{z-a_n}$ 的多项式，故在 $|z|<|a_n|$ 内全纯，因此可展成 Taylor 级数

$$\Psi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

当 $|z|<|a_n|$ 时成立. 这个级数在 $|z|<\frac{1}{2}|a_n|$ 内一致收敛到 $\Psi_n(z)$,故存在 λ_n,使得

$$\left|\Psi_n(z) - \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!} z^k\right| < \varepsilon_n.$$

记 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} \frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$. 设 R 为任意正数,取正整数 $N=N(R)$,使得 $n>N$ 时,$|a_n|>2R$;$n\leqslant N$ 时,$|a_n|\leqslant 2R$. 于是,当 $n>N$,$|z|<R$($|z|<\frac{1}{2}|a_n|$)时,

$$|\Psi_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$ 收敛,故 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上一致收敛. 当 $n>N$ 时,$\Psi_n(z)$ 的极点 $z=a_n$ 不在 $|z|<R$ 内,故由 Weierstrass 定理(定理 1),$\Phi_N(z)=\sum_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上全纯,于是 $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{N}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}+\Phi_N(z)$ 在 $|z|<R$ 内,以满足 $|a_n|<R$ 的那些 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 的点为极点,其主要部分是 $\Psi_n(z)$. 由于 R 是任意的,故 $\varphi(z)$ 即为以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 为极点,以 $\Psi_1(z),\Psi_2(z),\cdots,\Psi_n(z),\cdots$ 为其相应主要部分的亚纯函数. 定义 $U(z)=f(z)-\varphi(z)$;$U(a_n)=\lim\limits_{z\to a_n}\{f(z)-\varphi(z)\}$,则 $U(z)$ 为一整函数,定理得证.

若已给 m 个点 $z_1,\cdots,z_m$ 及 m 个复数值 $a_1,\cdots,a_m$,一定可以找到一个多项式 $p(z)$,使得 $p(z)$ 在 z_j 的值等于 $a_j(j=1,2,\cdots,m)$. 这只要从 m 个方程 $p(z_j)=a_j(j=1,2,\cdots,m)$ 中解出 $p(z)$ 的系数来即可. 同样,若已给 m 个点 $z_1,\cdots,z_m$ 及复数值 $a_{j,k}(j=1,\cdots,m,0\leqslant k\leqslant n_j-1)$,这里 n_j 为 $\geqslant 1$ 的整数,则可以找到多项式

$p(z)$，使得$\frac{p^{(k)}(z_j)}{k!}=a_{j,k}$，也就是可以找到多项式 $p(z)$，使得 $p(z)$ 在 z_j 的 Taylor 展开式的开始 n_j 项是所给定的多项式. 下面证明一个十分一般的插值(interpolation)定理.

定理7(插值定理) 若 $z_1,z_2,\cdots$ 为 $\boldsymbol{C}$ 中的一个离散点集，n_1，$n_2,\cdots$ 为$\geqslant 1$的一个正整数序列，$a_{j,k}(j\geqslant 1,0\leqslant k\leqslant n_j-1)$为复数序列，则一定存在一个整函数 $g(z)$，使得

$$g^{(k)}(z_j)=k!a_{j,k}\quad (j\geqslant 1,0\leqslant k\leqslant n_j-1)$$

成立. 即，如果预先给定一个点列$\{z_j\}$及每一点 z_j 上的 Taylor 展开式的开始 n_j 项，则一定存在一个整函数，在这些点上，有这样的 Taylor 展开式.

证明 由定理5(Weierstrass 因子分解定理)，可以找到整函数 $f(z)$，使得 $f(z)$在 $z=z_j$ 处为 n_j 重零点. 由于 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots$ 为一个离散序列，故可以找到正数序列 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\cdots$ 使得以 z_j 为中心，$2\varepsilon_j$ 为半径的圆 $D(z_j,2\varepsilon_j)$相互之间互不相交. 作

$$P_j(z)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n_j-1}a_{j,k}(z-z_j)^k,\quad j\geqslant 1.$$

对每个 j，作 $\varphi_j\in C^{\infty}$，使得 φ_j 的支集在 $D(z_j,2\varepsilon_j)$之中，且$0\leqslant\varphi_j\leqslant 1$，而在 $\overline{D}(z_j,\varepsilon_j)$上 $\varphi_j\equiv 1$，$j=1,2,\cdots$.

令 $\psi(z)\in C^{\infty}$，作函数

$$g(z)=\sum_{j\geqslant 1}P_j(z)\varphi_j(z)-f(z)\psi(z).\tag{4.5}$$

由于 φ_j 的支集在 $\boldsymbol{C}$ 上互不相交，故对每一点 $z\in\boldsymbol{C}$，$\sum\limits_{j\geqslant 1}P_j(z)\varphi_j(z)$ 中最多只有一项不为零，故这个和式是有意义的. 我们要求出 ψ，使得 $g(z)$是个整函数，即要求$\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}=0$. 当 $z\in\boldsymbol{C}$ 时，此即

$$\sum_{j\geqslant 1}P_j(z)\frac{\partial\varphi_j(z)}{\partial\bar{z}}=f(z)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}.$$

令 $h(z)=\sum\limits_{j\geqslant 1}P_j(z)\frac{\partial\varphi_j(z)}{\partial\bar{z}}$，则在 $\bigcup\limits_j\overline{D(z_j,\varepsilon_j)}$ 上，$h(z)\equiv 0$. 在 $z=$

z_j 处，取 $\dfrac{h(z)}{f(z)}=0$，则 $\dfrac{h(z)}{f(z)}$ 在 $\mathbf{C}$ 上是 C^∞ 的. h 有互不相交的紧致支集，故由第二章 §2.1 定理 4，$\bar{\partial}$-问题 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}=\dfrac{h}{f}$ 有一个 C^∞ 的解 ψ. 取这样的 ψ，则(4.5)定义了一个整函数，在 $\bigcup\limits_j \overline{D(z_j,\varepsilon_j)}$ 上，$\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}=0$，故 ψ 在 z_j 的附近是全纯的. 由于 $f(z)$ 在 $z=z_j$ 处有 n_j 重零点，故由(4.5)所定义的 $g(z)$，可以直接计算验证：当 $0\leqslant k\leqslant n_j-1$ 时

$$g^{(k)}(z_j)=P_j^k(z_j)=k!a_{j,k}$$

成立，故定理得证.

§3.5 留数定理

若函数 $f(z)$ 在 $D(a,r)\setminus\{a\}$ 上全纯($r>0$)，a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 a 的留数定义为

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)dz,$$

这里 $0<\rho<r$. 由于 $f(z)$ 在 $D(a,r)\setminus\{a\}$ 可展开成 Laurent 级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$，故 $\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}$.

若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 内全纯，定义 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数为

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz,$$

这里 $R<\rho<\infty$. 由于 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域可展开成 Laurent 级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，故 $\operatorname{Res}(f,\infty)=-c_{-1}$.

若 $a(\neq\infty)$ 为 $f(z)$ 的 $m(m\geqslant 1)$ 级极点，于是 $f(z)$ 在 a 的邻域内可写成

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}g(z),$$

而 $g(z)$ 在 $z=a$ 处全纯，且 $g(a)\neq 0$，故

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

因此，

$$\operatorname{Res}(f,a) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a),$$

而

$$g^{(m-1)}(a) = \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\},$$

故

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}.$$

特别，当 $m=1$时，

$$\operatorname{Res}(f,a) = g(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

有如下的

定理8（留数定理） 若 $f(z)$在域$U \subseteq \boldsymbol{C}$ 上除去 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 之外是全纯的，且 $f(z)$在 $\overline{U}$ 上除去 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 之外是连续的，$\partial \dot{U}$ 为可求长简单闭曲线，则

$$\int_{\partial U} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

定理8′（留数定理） 若 $f(z)$在 $\boldsymbol{C}^*$上除去 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$外是全纯的，$z_1, z_2, \cdots, z_n, \infty$为 $f(z)$的孤立奇点，则 $f(z)$在所有这些孤立奇点的留数之和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

这两条定理的证明是显然的，只要用 Cauchy 积分定理，立即可得. 证明从略.

留数定理本身是十分简单的，重要的是可以用它来计算一些定积分的值. 而这些定积分的被积函数的原函数往往是求不出来的. 用留数定理求定积分有种种技巧，如函数 $f(z)$的选取，积分路线的选取等等. 在这里只举三个简单的例子来说明之.

例1 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$，$n$ 为正整数.

解 取 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$，则 $f(z)$ 在上半平面有唯一孤立奇点 $z=\mathrm{i}$，它为 $n+1$ 级极点，取 U 为上半圆 $|z|<R,\mathrm{Im}z>0$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})&=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left\{\frac{(z-\mathrm{i})^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left\{\frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}\right\}\Bigg|_{z=\mathrm{i}}\\&=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2\mathrm{i})^{2n+1}}\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

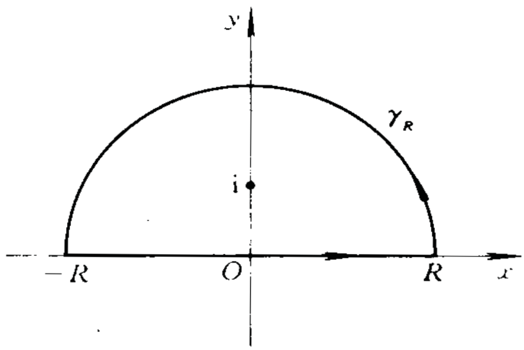

图 4

另一方面，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{n+1}}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{n+1}},\end{aligned}\tag{5.1}$$

这里 γ_R 为上半圆周(见图4)：$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 但

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_R}\frac{\mathrm{d}z}{(1+z^2)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{(1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^{n+1}},$$

当 $R\to\infty$ 时，显然这个积分 $\to 0$. 因此，在(5.1)中令 $R\to\infty$，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}=2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

例2 计算积分(Dirichlet 积分) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 显然 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$. 考虑 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$,取 U 为上半平面的半个圆环(见图 5),其边界为:

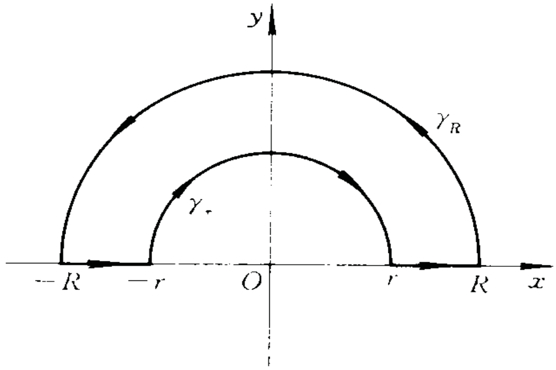

图 5

$-R<z<-r$; $r<z<R$;

γ_r: $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi$;

γ_R: $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

由于 $f(z)$在这个半圆环中全纯,由 Cauchy 积分定理,

$$\int_r^R f(x)\mathrm{d}x+\int_{-R}^{-r}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_r}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

而

$$\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-R\sin\theta+\mathrm{i}R\cos\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$$

但当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时,$\frac{2}{\pi}\theta\leqslant\sin\theta$,故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2R}(1-\mathrm{e}^{-R}),$$

当 $R\to\infty$ 时,这是趋于零的. 因此,当 $R\to\infty$ 时,$\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z\to 0$.

另一方面，

$$\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_\pi^0 \mathrm{e}^{-r\sin\theta + \mathrm{i}r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{i}\int_\pi^0 (1 + O(r))\mathrm{d}\theta = -\pi\mathrm{i} + O(r),$$

故当 $r \to 0$ 时，$\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z \to -\pi\mathrm{i}$. 而

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x = -\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x,$$

于是在

$$\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

中，令 $r\to 0$，$R\to\infty$，得

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

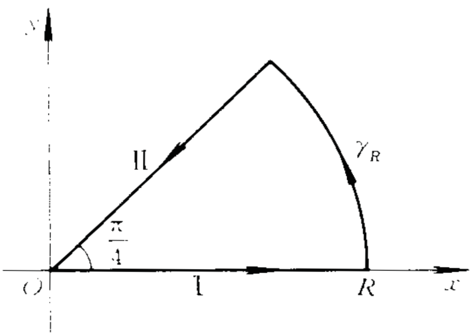

图 6

例3 计算 $\int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x$ 及 $\int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x$.

解 取 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$，取 U 为由 I: $0\leqslant z\leqslant R$; II: $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $0\leqslant r\leqslant R$ 及 γ_R: $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 所围成的扇形区域(图6). 于是由 Cauchy 积分定理

$$\int_{\mathrm{I}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\mathrm{II}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

而

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta)}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4R}\left(1 - \mathrm{e}^{-R^2}\right).$$

当 $R\to\infty$ 时，上式右边 $\to 0$，故

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\mathrm{III}} f(z)\mathrm{d}z\right)=0,$$

即

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}\mathrm{d}x=0.$$

这就有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

但已知 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，因此 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}$. 于是

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

§3.6 解析开拓

若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq\mathbf{C}$ 上全纯. 如果存在一个包有 U 的域 G，有函数 $F(z)$ 在 G 上全纯，在 U 上 $F(z)=f(z)$，则称 $f(z)$ 可解析开拓（或全纯开拓）到 $G\backslash U$. 由全纯函数的唯一性定理，如果在 G 内 F 存在，则是唯一的，同样如果 $f_1(z)$，$f_2(z)$ 分别在域 U_1，U_2 上全纯且 $U_1\cap U_2=U_3\neq\varnothing$，而在 U_3 上 $f_1=f_2$，则在 $U=U_1\cup U_2$（图7）上定义

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in U_1;\\ f_2(z), & z\in U_2.\end{cases}$$

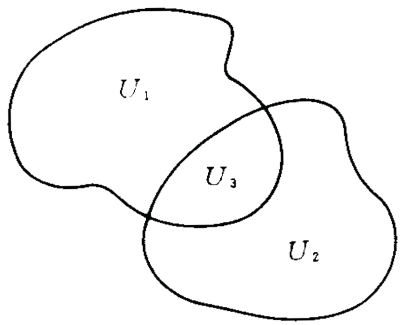

图 7

于是 f 在 U 上全纯，称 f_1，f_2 **互为解析开拓**.

最自然、最重要的解析开拓的方法是用幂级数来进行. 由Abel定理（第一章§1.6定理3），一个幂级数

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{6.1}$$

存在一个收敛半径 R. 在 $|z|<R$ 内级数绝对收敛且内闭一致收敛. 故这是一个全纯函数,记作 $f(z)$. 如果 $z_0 \in D(0,R)$,则 $f(z)$ 可以在 $z=z_0$ 处展开成 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

若其收敛半径为 ρ,则 $\rho \geqslant R-|z_0|$. 如果 $\rho > R-|z_0|$,则 $D(z_0,\rho)$ 有一部分在 $D(0,R)$ 之外,于是 $f(z)$ 可以解析开拓到 $D(z_0,\rho)\setminus D(0,R)$ 上去. 若 $\rho = R-|z_0|$,则 $D(z_0,\rho)$ 与 $D(0,R)$ 相切,设其切点为 ζ_0. 这表明 $f(z)$ 不能于 ζ_0 处解析开拓出去,称 ζ_0 为 $f(z)$ 的一个奇点. 显然,如果 R 是(6.1)的收敛半径,则(6.1)一定在 $|z|=R$ 上至少有 $f(z)$ 的一个奇点. 如不然,则 $f(z)$ 可以在 $|z|=R$ 上任一点解析开拓出去,即对于 $|z|=R$ 上任一点 ζ,都有 $D(\zeta,r_\zeta)$ 及 $g_\zeta(z)$,而 $g_\zeta(z)$ 在 $D(\zeta,r_\zeta)$ 上全纯,且 $g_\zeta(z)=f(z)$ 当 $z\in D(0,R)\cap D(\zeta,r_\zeta)$. 由于 $|z|=R$ 为紧的,故由 Heine-Borel 定理,在 $\{D(\zeta,r_\zeta)\}$ 中可选取有限个 $D(\zeta_1,r_{\zeta_1})$, $D(\zeta_2,r_{\zeta_2}),\cdots,D(\zeta_m,r_{\zeta_m})$ 覆盖 $|z|=R$. 令 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{m} D(\zeta_k,r_{\zeta_k})$,$\rho$ 为 $|z|=R$ 到 ∂G 的距离,显然 $\rho>0$. 于是 $\{R-\rho<|z|<R+\rho\}\subset G$. 在 G 内定义 $\Phi(z)=g_{\zeta_k}(z)$,当 $z\in D(\zeta_k,r_{\zeta_k})$ $(k=1,2,\cdots,m)$,则 $\Phi(z)$ 为 G 上单值全纯函数. 如 $D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\cap D(\zeta_l,r_{\zeta_l})\neq\varnothing$, $k\neq l$,则 $(D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\cap D(\zeta_l,r_{\zeta_l}))\cap D(0,R)\neq\varnothing$,在这部分,$g_{\zeta_k}(z)=g_{\zeta_l}(z)=f(z)$. 由全纯函数的唯一性定理,在 $D(\zeta_k,r_{\zeta_k})\cap D(\zeta_l,r_{\zeta_l})$ 上,$g_{\zeta_k}(z)=g_{\zeta_l}(z)$. 在 $G\cap D(0,R)$ 上,$\Phi(z)=f(z)$,故 $f(z)$ 可解析开拓到 $G\cup D$. 而这包有 $D(0,R+\rho)$,这与 R 为(6.1)的收敛半径的定义相矛盾.

因此,在收敛圆周上,(6.1)一定有奇点,例如 $\sum\limits_{n=0}^{N} z^n$ 在 $z=1$ 处为它的奇点. 下面这个著名的例子说明有这样的幂级数,它的收敛圆周上每一点都是奇点.

例1 $f(z)=z^{1!}+z^{2!}+\cdots+z^{n!}+\cdots$ (6.2)

解 由于

$$a_n=\begin{cases}1, & 若\ n=k!;\\ 0, & 若\ n\neq k!.\end{cases}$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

因此,(6.2)的收敛半径为 $R=1$,即 $f(z)$ 在 $D(0,1)$ 上全纯. 若 $z_0\in D(0,1)$, $|z_0|=\dfrac{1}{2}$, $f(z)$ 在 z_0 处有 Taylor 展开式

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

延长 Oz_0 与 $|z|=1$ 的交点为 ζ_0,如能证明 $g(z)$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$,则表明 $f(z)$ 不能在 ζ_0 处解析开拓. 如不然,即若 $g(z)$ 的收敛半径 $\rho>\dfrac{1}{2}$,则 $D(\zeta_0,\rho)\cap D(0,1)\neq\varnothing$,于是在 $D(\zeta_0,\rho)$ 中有 $|z|=1$ 的一段圆弧 σ, $\zeta_0\in\sigma$. 由于形如 $\exp\left\{\dfrac{2\pi \mathrm{i} p}{q}\right\}\left(p,q\ 为整数,\dfrac{p}{q}\ 为既约分数\right)$ 的点在 $|z|=1$ 上处处稠密,故在 σ 上一定有点 $\zeta_1=\exp\left\{\dfrac{2\pi \mathrm{i} p}{q}\right\}$,而 $\lim\limits_{r\to 1}g(r\zeta_1)=g(\zeta_1)$ $(0<r<1)$. 但当 $z\in D(0,1)$ 时, $g(z)=f(z)$,故 $\lim\limits_{r\to 1}f(r\zeta_1)=g(\zeta_1)$. 由于

$$f(r\zeta_1)=\sum_{n=1}^{q-1}r^{n!}\zeta_1^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}r^{n!}.$$

显然

$$\sum_{n=q}^{\infty}r^{n!}>\sum_{n=q}^{N}r^{n!}>(N-q)r^{N!}.$$

于是当 $r\to 1$ 时, $\sum\limits_{n=q}^{\infty}r^{n!}$ 可以大于任何正整数,故 $\lim\limits_{r\to 1}|f(r\zeta_1)|=\infty$,这与 $\lim\limits_{r\to 1}f(r\zeta_1)=g(\zeta_1)$ 相矛盾,故 ζ_0 为 $f(z)$ 的奇点.

一个函数称为在一点 z_0 附近是解析的(或全纯的)如果这个函数在这点附近可以展开成收敛幂级数,这是函数局部解析(或局部全纯)的定义.这个定义与第一章中§1.3的定义是相一致的.有了解析开拓的概念,可以定义整体解析(或整体全纯)函数.

从一个局部全纯函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 出发,如其收敛半径为 R,若 $a_1\in D(a,R)$,则得另一个幂级数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n,$$

其收敛半径为 $R_1\geqslant R-|a-a_1|>0$,称全纯函数 $f(z)$,$f_1(z)$ 为解析元素,而 $f_1(z)$ 为 $f(z)$ 的解析开拓.如有 m 个解析元素 $f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-a_k)^n(k=1,2,\cdots,m)$,$f_k$ 是 f_{k-1} 的解析开拓,则 f_m 也是 f 的解析开拓.将所有的由 $f(z)$ 出发的解析开拓得到的解析元素的全体组成一个集合,这个集合称为整体解析(整体全纯)函数(global analytic function).

完全解析(完全全纯)函数(complete analytic function)是一个整体解析函数包含有其中任何一个解析元素的所有解析开拓.一般来说,这是一个多值函数.所有解析开拓所对应的收敛圆之和称为完全解析函数的存在域.这当然不能再开拓出去.因此存在域的边界点都是完全解析函数的奇点.

习 题 三

1. 证明:(1) 若 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 在集合 A 上连续,且 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 A 上一致收敛到 $f(z)$,则 $f(z)$ 在 A 上连续.

(2) 若 $\{f_n(z)\}(n=1,2,\cdots)$ 在可求长曲线 γ 上连续,且 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛到 $f(z)$,则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z.$$

2. 证明定理8及定理8′.

3. 将下列函数在指定的区域内展开成 Laurent 级数.

(i) $\dfrac{1}{z^3(z+\mathrm{i})}$, $0<|z+\mathrm{i}|<1$;

(ii) $\dfrac{z^2}{(z+1)(z+2)}$, $1<|z|<2$;

(iii) $\log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$, $\max(|a|,|b|)<|z|<+\infty$;

(iv) $z^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, $0<|z|<+\infty$;

(v) $\sin\dfrac{z}{1+z}$, $0<|z+1|<+\infty$.

4. 下列函数有哪类奇点,若是极点,求其级.

(i) $\dfrac{\sin z}{z}$; (ii) $\dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$; (iii) $z(\mathrm{e}^{1/z}-1)$;

(iv) $\sin\dfrac{1}{1-z}$; (v) $\dfrac{\exp\left\{\dfrac{1}{1-z}\right\}}{\mathrm{e}^z-1}$; (vi) $\tan z$.

5. 证明:(1) 若 a 是 $f(z)$的本性奇点,且 $f(z)\neq 0$,则 a 也是$\dfrac{1}{f(z)}$的本性奇点.

(2) 若 a 是 $f(z)$的本性奇点,且 $P(\zeta)$是非常数多项式,则 a 也是 $P(f(z))$的本性奇点.

6. 证明:(i) 当$|z|<1$时,$\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}$;

(ii) $\displaystyle\sinh\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right)$;

(iii) $\displaystyle\cos\pi z=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right]$;

(iv) $\displaystyle\mathrm{e}^z-1=z\mathrm{e}^{z/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2n^2}\right)$.

7. (Blaschke 乘积) 设复数序列$\{a_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$满足 $0<|a_k|<1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)<\infty$, 证明无穷乘积

$$f(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\cdot\frac{|a_n|}{a_n}$$

在圆$|z|\leqslant r(0<r<1)$上一致收敛. 因而$f(z)$在$|z|<1$内全纯, $f(z)$以$a_k(k=1,2,\cdots)$为零点, 且没有别的零点, $|f(z)|\leqslant 1$.

8. 设亚纯函数$f(z)$在扩充复平面C^*上只有两个极点. $z=-1$是它的一级极点, 其主要部分是$\frac{1}{z+1}$; $z=2$是它的二级极点, 其主要部分是$\frac{2}{z-2}+\frac{3}{(z-2)^2}$, 且$f(0)=\frac{7}{4}$. 求$f(z)$在$1<|z|<2$的 Laurent 展开式.

9. 已知亚纯函数$f(z)$在$z=1,2,3,\cdots$有二级极点, 且$f(z)$在点$z=n$的邻域内. 其 Laurent 展开式的主要部分为$\psi_n(z)=\frac{n}{(z-n)^2}$ $(n=1,2,\cdots)$, 求$f(z)$的一般形式.

10. (i) 将$f(z)=\frac{1}{e^z-1}$展成部分分式;

(ii) 证明: $\frac{1}{\sin^2\pi z}=\frac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$;

(iii) 证明: 若$\alpha\neq 0,\beta/\alpha\neq\pm 1,\pm 2,\cdots$, 则

$$\frac{\pi}{\alpha}\cos\frac{\pi\beta}{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n\alpha+\beta}-\frac{1}{n\alpha+(\alpha-\beta)}\right\},$$

并由此证明

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n-1)}+\cdots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

11. 设亚纯函数$f(z)$只有有限多个极点$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, 并且$\alpha_k$ $(1\leqslant k\leqslant m)$都不是整数, $z=\infty$是$f(z)$的p级零点, $p\geqslant 2$, 证明:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n} f(k) = -\pi\sum\limits_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)\cot\pi z, \alpha_k)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}(-1)^k f(k) = -\pi\sum\limits_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left(\dfrac{f(z)}{\sin\pi z}, \alpha_k\right)$;

(iii) 利用(i),(ii)求下列级数的和：

$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n)^2}$, a 不是整数；

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+a^2}$, a 是不为零的实数.

12. 求下列函数在孤立奇点(包括无穷远点,如果它是孤立奇点)的留数.

(i) $\dfrac{1}{z^2-z^4}$; (ii) $\dfrac{z^2+z+2}{z(z^2+1)^2}$;

(iii) $\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$, $a\neq 0$, n 为正整数；

(iv) $\dfrac{1}{\sin z}$; (v) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$; (vi) $\dfrac{e^z}{z(z+1)}$.

13. 若函数 $f(z)$,$g(z)$在 $z=a$ 是全纯的,$f(a)\neq 0$,$z=a$ 是 $g(z)$的二重零点,求 $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}, a\right)$.

14. 计算下列积分

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$; (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a+\sin^2 x}$, $a>0$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; (iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$;

(v) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $0<\alpha<2$;

(vi) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$, n 为 $\geqslant 2$ 的整数；

(vii) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, $a>1$ 为常数.

15. 说明级数 $-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$ 在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数是否可以开拓为 $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$ 在 $|z|>1$ 内所定义的函数?

16. 证明由级数

$$1+\alpha z+\alpha^2 z^2+\cdots+\alpha^n z^n+\cdots$$

与

$$\frac{1}{1-z}-\frac{(1-\alpha)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-\alpha)^2 z^2}{(1-z)^3}+\cdots$$

定义的函数互为解析开拓.

17. 证明级数

$$z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots$$

在 $|z|<1$ 中所定义的函数 $f_1(z)$ 与级数

$$\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

在 $|z-1|<2$ 中所定义的函数 $f_2(z)$ 互为解析开拓.

18. 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ 不能解析开拓到它们的收敛圆外.

第四章 Riemann 映射定理

§4.1 共形映射

复变函数论中另一个重要组成部分是 Riemann 共形映射理论. 这个理论的基本观点是将全纯函数 $w=f(z)$看作为将 z 平面上的区域到 w 平面上的区域的映射. 也就是说,从几何的观点来看待与处理全纯函数. 在第一章 §1.3中已经提到,若 $f'(z)\neq 0$,则 $w=f(z)$看作一个映射是有共形性. 故称之为共形映射,或全纯映射.

首先看到这样一件事实. 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 为域,经过全纯映射 $w=f(z)$后得到 $f(U)$,则 $f(U)$仍是一个域。

这只要证明 $f(U)$为连通开集. 若 w_1,w_2为 $f(U)$中任意两点,在 U 内有 z_1,z_2,使得 $w_1=f(z_1)$,$w_2=f(z_2)$. 因为 U 为连通,故在 U 中有 $\gamma(t)$连接 z_1及 z_2,而显然 $f(\gamma(t))\subset f(U)$连接 w_1,w_2. 故 $f(U)$为连通.

设 w_0是 $f(U)$中任一点. 由第二章 §2.4定理15,对于充分小的 $\rho>0$,存在 $\delta>0$,使得 $D(w_0,\delta)$内任一点 w,在 $D(z_0,\rho)$内存在一点 z,使得 $f(z)=w$. 即 $D(w_0,\delta)\subset f(U)$,故 $f(U)$为开集. 上述结果也称**开映射**(open mapping)定理: f 将开集映为开集.

在第一章 §1.5中已经定义,在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上定义的函数 $f(z)$称为**单叶**(univalent),如果 $f(z_1)=f(z_2)$当且仅当 $z_1=z_2$. 于是可有如下的结果.

若 $f(z)$在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 上单叶且全纯,则任一点 $z\in U$,有 $f'(z)\neq 0$. 反之,若在点 $z_0\in U$,$f'(z_0)\neq 0$,则在点 z_0的一个邻域内,$f(z)$是单叶的.

这可证明如下：若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \mathbf{C}$ 上单叶且全纯，但是有 $z_0\in U$，使得 $f'(z_0)=0$. 于是 z_0 是函数 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 级零点，而 $m\geqslant 2$，由第二章 § 2.4定理15，对于 $w_0=f(z_0)$ 的邻域内的 w，$f(z)-w$ 在 z_0 的邻域内恰有 m 个零点. 这与 $f(z)$ 在 U 上单叶相矛盾. 反之，若 $f'(z_0)\neq 0$，则 z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的简单零点，由第二章 § 2.4定理15，对充分小的 ρ，存在 $\delta>0$，使得对 $D(f(z_0),\delta)$ 中任一点 w，$f(z)-w$ 在 $D(z_0,\rho)$ 中只有一个零点，即只有一个 z，使得 $f(z)=w$. 取 $\rho_1<\rho$，使得 $f(D(z_0,\rho_1))\subset D(w_0,\delta)$. 故 $f(z)$ 在 $D(z_0,\rho_1)$ 上是单叶的.

此外，容易证明：若 $w=f(z)$ 在 U 上单叶全纯，将 U 映为 G，则反函数 $z=g(w)$ 在 G 上单叶全纯，将 G 映为 U，因之，单叶全纯映射也称为**双全纯映射**(biholomorphic mapping).

下面的事实是直观的，但证起来却很复杂，故述而不证.

Jordan 定理 一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个域，其中一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部，γ 是这两个域的共同边界.

我们来证

定理1 若 $G\subseteq \mathbf{C}$ 为域，γ 为 G 内可求长简单闭曲线，其内部 $U\subset G$. 若 $f(z)$ 在 G 上全纯，把 γ 双方单值地映为简单闭曲线 Γ，则 $w=f(z)$ 在 U 上单叶，将 U 映为 Γ 的内部 V.

证明 若 w_0 不在 Γ 上，由幅角原理(第二章 § 2.4定理12)，函数 $f(z)-w_0$ 在 γ 内的零点个数 N 等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-w_0}.$$

当 w_0 在 Γ 的外部时，

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w-w_0}=0,$$

所以 $N=0$，即 $f(z)-w_0$ 在 U 内无零点. 当 w_0 在 Γ 的内部时，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-w_0}=1,$$

所以 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=\pm 1$. 因为 N 为非负，故 $N=1$，即 $f(z)-w_0$ 在 U 内只有一个零点. 当 z 沿 γ 正方向绕一圈时，$w=f(z)$ 沿 Γ 正方向绕一圈. 当 w_0 在 Γ 上时，则 $f(z)-w_0$ 在 U 内无零点. 如不然，则有 $z_0\in U$，使得 $f(z_0)=w_0$. 于是有 $D(w_0,\delta)\subset f(U)$. 对于 $D(w_0,\delta)$ 中每一点 w_1，$f(z)-w_1$ 在 U 内有零点. 取 $w_1\in D(w_0,\delta)$ 且位于 Γ 外，则与 $f(z)-w_1$ 在 U 内无零点相矛盾.

以下举一些最简单的共形映射的例子.

例1 在第二章§2.5中已证，将单位圆 $D(0,1)$ 映为自己的单叶全纯映射有且只有

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad a\in D(0,1),\theta\in \boldsymbol{R}. \tag{1.1}$$

例2 将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映为单位圆 $D(0,1)$ 的单叶全纯映射有且只有

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}},\quad \operatorname{Im}a>0,\ \theta\in \boldsymbol{R}. \tag{1.2}$$

显然这个变换将 $\operatorname{Im}z=0$ 映为 $|w|=1$. (1.2)也可表为

$$z=\frac{\bar{a}w-e^{i\theta}a}{w-e^{i\theta}},$$

将 $|w|=1$ 映为 $\operatorname{Im}z=0$. 由定理1知道，此映射将 $D(0,1)$ 单叶全纯地映为 $\operatorname{Im}z>0$. 反之，如有 $w=f(z)$ 将 $\operatorname{Im}z>0$ 单叶全纯地映为 $D(0,1)$. 已知(1.2)将 $\operatorname{Im}z>0$ 单叶全纯地映为 $D(0,1)$，记此映射为 $\psi(z)$，则 $f\circ\psi^{-1}$ 将单位圆映为单位圆. 由例1知，$f\circ\psi^{-1}$ 必为(1.1)的形式，记作 φ，即 $f\psi^{-1}=\varphi$. 故 $f=\varphi\circ\psi$，而此仍为(1.2)的形式.

同样可证

例3 将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映为上半平面 $\operatorname{Im}w>0$ 的单叶全纯映射有且只有

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

这里 a,b,c,d 为实数，且 $ad-bc>0$.

在第三章§3.3中，已经证明由所有分式线性变换$\{w=\frac{az+b}{cz+d},a,b,c,d\in \boldsymbol{C},ad-bc=1\}$所组成的群是扩充复平面$\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$的亚纯自同构群 $\mathrm{Aut}\{\boldsymbol{C}^*\}$. 这个群与二阶特殊线性群 $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$相一一对应，如果 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 对应于 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

如果 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$为任意分式线性变换，如将直线看作半径为∞的圆，则对于分式线性变换，有如下的重要的性质：分式线性变换将圆变为圆. 这可证明如下：若 $z=x+\mathrm{i}y$，则任意圆可以写成

$$\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0,$$

且可取 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为实数. 这个方程还可写成

$$\alpha z\bar{z}+\frac{1}{2}\beta(z+\bar{z})+\frac{1}{2\mathrm{i}}\gamma(z-\bar{z})+\delta=0,$$

或可写成

$$Az\bar{z}+Bz+\overline{B}\bar{z}+C=0, \tag{1.3}$$

这里 $A=\alpha,C=\delta$ 为实数，$B=\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2\mathrm{i}}\gamma$ 为复数. 若 $\alpha=0$，即 $A=0$，则(1.3)表示一条直线，否则(1.3)表示一个圆. 而任一分式线性变换 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$是由平移 $z=w+b$，伸缩 $z=aw$ 及反演 $z=\frac{1}{w}$等三种变换所组成，而这三种变换都是将圆变为圆的，这只要一一验证即可. 若将 $z=w+b$ 代入(1.3)，得

$$\begin{aligned} &Aw\overline{w}+(A\bar{b}+B)w+(Ab+\overline{B})\overline{w} \\ &\quad +Ab\bar{b}+Bb+\overline{B}\bar{b}+C=0, \end{aligned}$$

这仍是(1.3)的形式. 若将 $z=aw$ 代入(1.3)，得

$$Aa\bar{a}w\overline{w}+Baw+\overline{B}\bar{a}\overline{w}+C=0,$$

这仍是(1.3)的形式. 最后若将 $z=\frac{1}{w}$代入(1.3)，得

$$Cw\overline{w}+\overline{B}w+B\overline{w}+A=0,$$

这仍是(1.3)的形式. 故分式线性变换将圆映为圆.

若 z_1,z_2,z_3,z_4 为 C^* 中的四个点，至少有三点是不相同的，称

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

为这四点的**交比**(cross ratio). 若这四点中有任一点为∞，则用极限来定义交比，例如

$$(\infty,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}.$$

于是可以证明：在分式线性变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 下，将 z_1,z_2,z_3,z_4 变为 w_1,w_2,w_3,w_4，则

$$(w_1,w_2,w_3,w_4)=(z_1,z_2,z_3,z_4),$$

即交比在分式线性变换下是不变的，也就是：交比在分式线性变换群下是个不变量. 证明是容易的，只要将 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 直接代入 (w_1,w_2,w_3,w_4)，经过计算可以得出，这就是 (z_1,z_2,z_3,z_4).

反过来，如果有一个函数 $f(z_1,z_2,z_3,z_4)$ 在分式线性变换群下是个不变量，则 f 只是交比的一个函数. 即在这种意义下，在分式线性变换群下的不变量本质上只有交比. 这可证明如下：若 T 表示分式线性变换，由假设

$$f(Tz_1,Tz_2,Tz_2,Tz_4)=f(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

对任意的 T 都成立. 取 $T_1=z-z_4$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f(z_1-z_4,z_2-z_4,z_3-z_4,0);$$

取 $T_2=\dfrac{1}{z}$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f\left(\frac{1}{z_1-z_4},\frac{1}{z_2-z_4},\frac{1}{z_3-z_4},\infty\right);$$

取 $T_3=z-\dfrac{1}{z_3-z_4}$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f\left(\frac{z_3-z_1}{(z_1-z_4)(z_3-z_4)},\frac{z_3-z_2}{(z_2-z_4)(z_3-z_4)},0,\infty\right);$$

取 $T_4=\dfrac{(z_2-z_4)(z_3-z_4)}{(z_3-z_2)}z$，则

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f\left(\frac{(z_3-z_1)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)},1,0,\infty\right)$$
$$=f((z_1,z_2,z_3,z_4),1,0,\infty).$$

这就完成了证明.

§4.2 正 规 族

在 Riemann 共形映射理论中,最重要最深刻的定理为 Riemann 映射定理.

定理2(Riemann 映射定理) 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}$ 为单连通区域,其边界点多于一点,z_0为 U 中任意一点,则在 U 上存在唯一的一个单叶全纯函数 $f(z)$,将 U 映到单位圆 $D(0,1)$上,且 $f(z_0)=0,f'(z_0)>0$.

其边界点多于一点的要求是自然的,如果边界点只有一点,不妨取这点为∞点,若有 $f(z)$将它映到单位圆,于是由 Liouville 定理(第二章§2.3定理8),这个函数是常数.

由这个定理立即得到:在 $\boldsymbol{C}$ 中任意两个边界点多于一点的单连通区域都有单叶全纯函数将一个映为另一个。

若 U,V 为 $\boldsymbol{C}$ 中两个域,且存在一个单叶全纯函数将 U 映到 V 上,则称 U,V 是**全纯等价**的. 于是 Riemann 映射定理表明:任意边界点多于一点的单连通区域都是全纯等价的. 任意单连通区域是相互拓扑等价的,即可以经过连续变换将一个区域变到另一个区域,这是显然的. 而 Riemann 映射定理告诉我们:拓扑等价导出全纯等价. 这当然是十分深刻的定理. 在第六章中,还可以看到,这个定理在高维情形就不成立(见第六章§6.4定理11,Poincaré 定理). 这就更突出了这个定理在单复变数函数论中的特殊地位.

证明这个定理要依赖全纯函数的正规族(normal family)的概念. 正规族的概念是函数论中的一个基本概念,在某种意义上,与集合论中的紧致(compact)集合相当. 在第五章还将进一步讨论

之.

定义1 在域U上的函数族$\mathscr{F}$称为**正规的**,如果$\mathscr{F}$中任一序列中一定有子序列在U的任一紧致子集上一致收敛,即在U上内闭一致收敛.

定理3(Montel 定理) 若$U\subseteq \boldsymbol{C}$为域,$\mathscr{F}$为$U$上的全纯函数族.若存在正的常数$M$,使得

$$|f(z)|\leqslant M$$

对所有的$z\in U$,$f\in\mathscr{F}$都成立,则$\mathscr{F}$为正规族.

为了证明定理3,要证明如下的定理4.这个定理称为 Ascoli-Arzela 定理,这是很有用处的一条定理.在证明第五章§5.5定理7时还要用到此定理.

定义2 若$\mathscr{F}=\{f\}$为域$S\subseteq \boldsymbol{R}^n$上的函数族,若对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得对满足$|z-w|<\delta$的任意两点$z,w\in S$,及任意$f\in\mathscr{F}$,

$$|f(z)-f(w)|<\varepsilon$$

成立,则称$\mathscr{F}$为等度连续(equicontinuous).

定义3 若$\mathscr{F}=\{f\}$为域$S\subseteq \boldsymbol{R}^n$上的函数族,若存在一个正数$M>0$,使得对任意$z\in S$,$f\in\mathscr{F}$,

$$|f(z)|\leqslant M$$

成立,则称$\mathscr{F}$为一致有界(equibounded).

定理4(Ascoli-Arzela) 设K为$\boldsymbol{R}^n$中的紧致集合.若函数族$\mathscr{F}=\{f_\nu\}$是等度连续及一致有界的,则$\mathscr{F}$中有子序列在K上一致收敛.

也就是说:在紧致集合上等度连续及一致有界可导出一致收敛.

证明 在K上存在一个到处稠密的序列$\{\zeta_k\}$,例如取具有有理坐标的点的全体的集合.由于$\mathscr{F}$在K上一致有界,故对ζ_1,在$\{f_\nu(\zeta_1)\}$中可以找到一个收敛的子序列$\{f_{\nu_{1k}}(\zeta_1)\}$.然后在$\{f_{\nu_{1k}}(\zeta_2)\}$中可以找到一个收敛的子序列,记作$\{f_{\nu_{2k}}(\zeta_2)\}$,…这样

一直进行下去，就得到阵列

$$
\begin{array}{l}
\nu_{11} < \nu_{12} < \cdots < \nu_{1j} < \cdots, \\
\nu_{21} < \nu_{22} < \cdots < \nu_{2j} < \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots < \nu_{kj} < \cdots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\tag{2.1}
$$

这里每一行是前一行的子序列，且$\lim\limits_{j\to\infty} f_{\nu_{kj}}(\zeta_k)$对所有的 k 都存在. 显然 ν_{jj}是严格递增序列，也是(2.1)中每一行的子序列. 因之$\{f_{\nu_{jj}}\}$是$\{f_\nu\}$的一个子序列. 在所有点 ζ_k 上收敛，为简单起见，记 ν_{jj}为 ν_j.

由于 $\mathscr{F}$ 在 K 上等度连续，故给定 $\varepsilon>0$，可取到 $\delta>0$，使得对于任意两点 $z, z'\in K$ 及 $f\in\mathscr{F}$，只要$|z-z'|<\delta$，即可导出$|f(z)-f(z')|<\varepsilon/3$. 由于 K 为紧致集合，故可以用有限个半径为 $\delta/2$ 的邻域来覆盖 K. 在每一个这样的邻域中取一点 ζ_k，于是存在一个 N，使得当 $i, j>N$ 时，

$$|f_{\nu_i}(\zeta_k) - f_{\nu_j}(\zeta_k)| < \varepsilon/3$$

成立，对于每一点 $z\in K$，一定可以找到一点 ζ_k，使得$|\zeta_k-z|<\delta$. 于是

$$|f_{\nu_i}(z) - f_{\nu_i}(\zeta_k)| < \varepsilon/3$$

及

$$|f_{\nu_j}(z) - f_{\nu_j}(\zeta_k)| < \varepsilon/3$$

成立. 因此

$$|f_{\nu_i}(z) - f_{\nu_j}(z)| < \varepsilon$$

当 $i, j>N$ 时成立. 由于 K 为紧致集合，故$\{f_{\nu_j}\}$在 K 上一致收敛. 定理证毕.

还要注意两点：

(1) 定理4中的条件，等度连续及一致有界不仅仅是一致收敛的充分条件，而且也是必要条件. 证明从略.

(2) 定义2及定理4中的等度连续的概念，用的是欧氏度量，如

果用其他的度量(见第五章§5.1),定理4依然成立.这点在第五章§5.5定理7中用到.证明从略.

现在应用 Ascoli-Arzela 定理(定理4)来证明 Montel 定理(定理3).

定理3的证明 对于 $z_0\in U$,一定有 R,使得 $\overline{D}(z_0,R)\subseteq U$.由于 U 为开集,故 U 的余集 U^c 为闭集.由于 $\overline{D}(z_0,R)$与 U^c 不相交,故在这两个闭集之间有一正的距离,即存在 $c>0$,当 $z\in\overline{D}(z_0,R)$,$u\in U^c$ 时,就有$|z-u|>c$.对任意 $z\in\overline{D}(z_0,R)$,任意 $f\in\mathscr{F}$,在圆 $\overline{D}(z,c)$上用 Cauchy 不等式,得到$|f'(z)|\leqslant\frac{M}{c}$.记$\frac{M}{c}=C$,于是对任意 $z,w\in\overline{D}(z_0,R)$就有

$$|f(z)-f(w)|\leqslant C|z-w|,$$

这表明 $\mathscr{F}$ 在 $\overline{D}(z_0,R)$上是等度连续的.事实上,任给 $\varepsilon>0$,只要取 $\delta=\varepsilon/C$ 即可.

若 K 为 U 上任一紧致子集,由于 K 紧致,所以一定可以用有限个 $\overline{D}(z_0,R)$来覆盖之,故 $\mathscr{F}$ 在 K 上也是等度连续的.由 Ascoli-Arzela定理(定理4),$\mathscr{F}$ 中任一序列$\{f_\nu\}$,可以找到一个子序列$\{f_{\nu_k}\}$在 K 上一致收敛,所以可以用在证明定理4中已用过的对角线方法证明在$\{f_\nu\}$中存在这样的子序列$\{f_{\nu_k}\}$,在 U 中所有紧致集合上一致收敛.定理证毕.

在第五章§5.5中还要推广正规族的概念及 Montel 定理,用来证明著名的 Picard 定理.

§4.3 Riemann 映射定理

现在应用 Montel 定理(定理3)来证明 Riemann 映射定理(定理2).

定理2的证明 不妨设 U 为有界区域.固定一点 $z_0\in U$,记 $\mathscr{F}=\{\sigma(z)\}$为单叶全纯函数族,这里 $\sigma(z)$为单叶全纯函数将 U 映入

到 $D(0,1)$之中，且 $\sigma(z_0)=0$. 这样定义的函数族 $\mathscr{F}$ 是非空的，这是因为由于U 有界，故有 $R>0$，使得$U\subseteq D(0,R)$. 函数 $\sigma(\zeta)=\frac{1}{2R}(\zeta-z_0)$将 z_0映为0，全纯且单叶，且满足 $|\sigma(\zeta)|<\frac{1}{2R}(R+R)=1$，故 $\sigma\in\mathscr{F}$，由此得出 $\mathscr{F}$ 非空. 由于 $\mathscr{F}$ 中每个函数为全纯且有界的(上界为1)，故由 Montel 定理(定理3)，$\mathscr{F}$ 为正规族. 定义

$$M=\sup\{|\sigma'(z_0)|\,|\,\sigma\in\mathscr{F}\}.$$

若 $\overline{D}(z_0,r)$为一个能够包含在U 中的以 z_0为中心，r 为半径的闭圆，于是由 Cauchy 不等式 $|\sigma'(z_0)|\leqslant\frac{1}{r}$. 故 $M\leqslant\frac{1}{r}$. 要证明在 $\mathscr{F}$ 中存在 σ_0，使得 $\sigma_0'(z_0)=M$.

由 M 的定义，知在 $\mathscr{F}$ 中存在一个序列 σ_j，使得 $|\sigma_j'(z_0)|\to M$. 由于 $\mathscr{F}$ 为正规族，故序列$\{\sigma_j\}$中有子序列$\{\sigma_{j_k}\}$在U 中任一紧致集合上一致收敛到 σ_0. 由于 $|\sigma_{j_k}'(z_0)|\to M$，故 $|\sigma_0'(z_0)|=M$. 将 σ_0乘以模为1的复数，得到一个新的 σ_0，使得 $\sigma_0'(z_0)=M$.

现在来证明：σ_0在U 上为单叶的. 这里要用到幅角原理(第二章 §2.4定理12). 若 Q,R 为 U 中两个不同的点，且$0<s<|Q-R|$. 在 $\overline{D}(R,s)$上，考虑函数 $\psi_k(z)\equiv\sigma_{j_k}(z)-\sigma_{j_k}(Q)$. 由于 σ_j 为单叶的，ψ_k 在 $\overline{D}(R,s)$上不等于零，由 Hurwitz 定理(第二章 §2.4定理13)，其极限函数 $\sigma_0(z)-\sigma_0(Q)$或是恒等于零，或是在$\overline{D}(R,s)$上恒不为零. 由于 $\sigma_0'(z_0)=M>0$，故 σ_0不可能恒等于零. 因此，对所有 $z\in\overline{D}(R,s)$有 $\sigma_0(z)\neq\sigma_0(Q)$，特别有 $\sigma_0(R)\neq\sigma_0(Q)$. 由于 R,Q 为在U 中任意选择的两点，故 σ_0为单叶的.

最后证明 σ_0将U 映到 $D(0,1)$之上，即映射为映上(onto).

由于U 为单连通区域，如果 F 为U 上不等于零的全纯函数，则可在U 上定义 $\log F$ 为

$$\log F(z)=\int_{\gamma_z}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}\mathrm{d}\zeta+\log F(z_0),$$

这里 γ_z 为从 z_0到 z 的逐段 C^1曲线. 由于U 是单连通的，故这样定

义的 $\log F(z)$是不依赖于道路 γ_z 的选取的. 定义了 $\log F(z)$,就可以定义 $F(z)$的 α 次方.

$$F^{\alpha}(z) = \exp(\alpha \log F(z)),$$

这里 $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

如果 σ_0不是将 U 映上到 $D(0,1)$,则存在点 $\beta \in D(0,1)$,而 $\beta \notin \sigma_0(U)$. 令

$$\varphi_\beta(\zeta) = \frac{\zeta - \beta}{1 - \bar{\beta}\zeta},$$

于是 $\mu(\zeta) = (\varphi_\beta \circ \sigma_0(\zeta))^{1/2}$是在 U 上定义的全纯函数. 若 $\tau = \mu(z_0)$,令

$$\varphi_\tau(\zeta) = \frac{\zeta - \tau}{1 - \bar{\tau}\zeta}$$

及

$$\nu(\zeta) = \frac{|\mu'(z_0)|}{\mu'(z_0)}(\varphi_\tau \circ \mu(\zeta)),$$

于是 $\nu \in \mathscr{F}$. 但是 $\nu(z_0) = 0$及

$$|\nu'(z_0)| = \frac{1 + |\beta|}{2|\beta|^{1/2}} M > M,$$

这与 σ_0的定义相矛盾. 故 σ_0必须是映上. 这样的 σ_0就是 Riemann 映射定理中所需要的 f. 如果还有全纯单叶函数 $g(z)$也有这个性质,则 $F(z) = f(g^{-1}(z))$是单位圆上的一个自同构,且 $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$. 由第二章§2.5定理18,$F(z) = z$.

如 U 为无界区域,则可用变换将 U 变为有界区域. 定理证毕.

Riemann 映射定理说的是:有单叶全纯函数将单连通区域 U 内的点与单位圆内的点相一一对应. 但到边界上有没有相应的对应关系?由于单连通区域可以有十分复杂的边界,这里只叙述一个最简单的情形而不予证明.

若 U 为由一条 Jordan 曲线 Γ 所围成的区域. 若 $w = f(z)$为 U 上的单叶全纯函数将 U 映上到单位圆 $D(0,1)$,则 $f(z)$可以扩充到 Γ 上,使得 $f(z)$在 $\overline{U}$ 上连续,并且在 Γ 上的点与单位圆周

$|w|=1$上的点之间有一一对应关系.

§4.4 对称原理

定理5(Painlevé 定理) 若 U_1, U_2是两个域, $U_1 \cap U_2=\varnothing$, $\partial U_1 \cap \partial U_2=\gamma$(图8), 这里 γ 为一段可求长的曲线(端点不在内). 若 f_1, f_2分别在 U_1, U_2上全纯, 在 $U_1 \cup \gamma$ 及 $U_2 \cup \gamma$ 上连续, 且在 γ 上 $f_1(z)=f_2(z)$, 则函数

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & \text{当 } z \in U_1, \\ f_1(z)=f_2(z), & \text{当 } z \in \gamma, \\ f_2(z), & \text{当 } z \in U_2 \end{cases}$$

在 $U_1 \cup U_2 \cup \gamma$ 上全纯, f_1与 f_2称为越过边界 γ **互为解析开拓**.

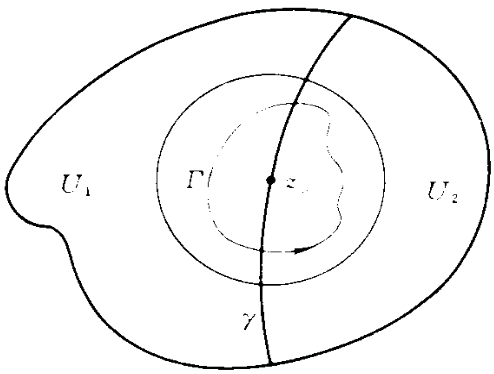

图 8

证明 由已给的条件知道: f 在 $U_1 \cup U_2 \cup \gamma$ 上连续, 在 U_1, U_2上全纯, 所以只要证明 $f(z)$在 γ 上全纯.

设 $z_0 \in \gamma$, 取 r 使得 $D(z_0, r) \subset U=U_1 \cup U_2 \cup \gamma$. 设 Γ 是 $D(z_0, r)$内任一可求长简单闭曲线. 若 Γ 在 $U_1 \cup \gamma$ 之内, 则由 Cauchy 积分定理

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\Gamma f_1(z)\mathrm{d}z=0.$$

同理，若 Γ 在 $U_2 \cup \gamma$ 之内，则

$$\int_{\Gamma} f(z) = \int_{\Gamma} f_2(z)\mathrm{d}z = 0.$$

若 Γ 同时属于 U_1 及 U_2，Γ_1 为属于 U_1 的部分，Γ_2 为属于 U_2 的部分，γ 在 Γ 的内部的部分记作 Γ_0，则

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1+\Gamma_0} f_1(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2-\Gamma_0} f_2(z)\mathrm{d}z = 0.$$

故由 Morera 定理（第二章 § 2.3定理7），$f(z)$ 在 $D(z_0, r)$ 上全纯，特别在 $z=z_0$ 处全纯. 而 z_0 为 γ 上任一点，故 $f(z)$ 在 U 上全纯.

由 Painlevé 定理，可以推出

定理6（对称原理） 设域 U 位于实数轴的同一侧，其边界包含有实数轴上的线段 s（端点不在内）. 若 $f(z)$ 在 U 上全纯，在 $U \cup s$ 上连续，且 $f(z)$ 在 s 上取实值，则一定存在一个函数 $F(z)$，在 $U \cup U' \cup s$ 上全纯，且在 U 内 $F(z)=f(z)$，这里 U' 为 U 关于实数轴的对称的域，且 $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$.

证明 在 $U \cup U' \cup s$ 上定义函数

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{当 } z \in U \cup s; \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{当 } z \in U'. \end{cases}$$

这样的函数满足 $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$. 这只要证 $F(z)$ 在 $U \cup U' \cup s$ 上全纯. 先证 $F(z)$ 在 U' 上全纯. 若 $z_0 \in U'$，z 是 z_0 的邻域内的一点，则

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right)},$$

故

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \overline{f'(\bar{z}_0)}.$$

又由于 $f(z)$ 在 s 上取实值，即 $\overline{f(x_0)}=f(x_0)$，当 $x_0 \in s$. 故当 $z \in U'$ 时，

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in U'}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in U'}} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\lim_{\substack{z \to x_0 \\ z \in U'}} f(\bar{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0),$$

故 $F(z)$ 在 $U' \cup s$ 上连续. 由 Painlevé 定理（定理5），$F(z)$ 在 $U \cup U'$

$\cup s$ 上全纯.

定理6还可叙述成更为一般的形式.

定理6′(对称原理) 设 U 位于直线 l 的同一侧,其边界包含 l 上一线段 s(端点不在内).若 $f(z)$在 U 上全纯,在 $U\cup s$ 上连续,且 $f(z)$在 s 上的值位于直线 L 上,则存在 $F(z)$在 $U\cup U'\cup s$ 上全纯,在 U 内 $F(z)=f(z)$,这里 U' 为 U 关于 l 对称的域.若 z_1,z_2为 $U\cup U'\cup s$ 内关于 l 对称的两点,则 $F(z_1),F(z_2)$是关于 L 对称的两点.

证明 用变换 $Z=az+b$ 将 l 变成实数轴,$W=cw+d$ 将 L 变为实数轴,然后对 Z,W 用对称原理,然后再回到 z,w 来即可.

对称原理还可以推广成:将定理6中的 s 改成一段圆弧.将定理6′中的 l 改成一段圆弧,则同样可以解析开拓.

§4.5 Riemann 曲面举例

Riĕmann 映射定理说的是:任意两个单连通区域(边界多于一点)是全纯等价的,即存在双方单值(即单叶)的全纯映射,将一个映为另一个.如果全纯映射不是双方单值(即单叶)的,如多值函数或无穷多值函数,则如何建立起映射的一一对应.这就要有 Riemann 曲面的概念.Riemann 曲面是复分析中极为重要的概念,可以用很多篇幅来叙述之.例如可参阅 L. V. Ahlfors and L. Sario[1] 以及 J. B Conway[1].但在作为大学本科生教材的本书中,只能用举例的办法来描述什么是 Riemann 曲面.

在第一章§1.5中讨论初等函数时,就已经看到,对于幂函数 $w=z^\alpha,\alpha=a+ib$,当 $b\neq0$时,$w=z^\alpha$ 是无穷多值函数;当 $b=0$而 $a=n$ 为整数时,$w=z^n$ 为单值函数.但反函数不是单值的.当 z 在角形区域$\frac{(k-1)2\pi}{n}<\arg z<\frac{k2\pi}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$中变动时,$w=z^n$ 将任一这样的角形区域映为整个 w 平面除去正实数轴.这个映射是

一一的、全纯的. 每个这样的角形区域的像在正实数轴上有一“切割”(cut). 于是这 n 个角形区域对应到 n 张 w 复平面加上切割. 将这 n 张平面按 $k=1,2,\cdots,n$ 进行排列,然后将前一张的切割的下边与后一张的切割的上边粘起来,而第 n 张切割的下边与第一张的切割的上边粘起来(这做起来似乎不可能,除非这些张自己相交,但这里是指让第 n 张的切割的下边与第一张的切割的上边相等同). 于是这样就构成了一个 Riemann 曲面. 称每一张平面为 Riemann 曲面的一叶(sheet)或称为 Riemann 曲面的一个**分支**. 十分清楚,当点 z 在 z 平面上变动时,相应的点 w 在 Riemann 曲面上变动,并且 z 平面与 Riemann 曲面之间的点是相互一一对应的.

取正实数轴作为切割可以用任意的从0到∞的射线作为切割来替代之. 这样得到的 Riemann 曲面与原来得到的 Riemann 曲面是相等同的,即可以用任意的0到∞的射线作为切割. 但在对 Riemann 曲面进行讨论之前必须说明是如何切割的.

点 $w=0$有特殊位置,它联系着所有的分支,一条曲线围绕 $w=0$旋转必须转 n 圈后才能封闭,这样的点称为**支点**(branch point). 如果将 $z=\infty$也考虑在内,则∞点也是一个支点. 一般来说,一个支点不必联系所有的分支. 如果它联系 h 叶,则称此为 $h-1$阶(order)的支点.

同样我们可以讨论 $w=e^z$ 的 Riemann 曲面. 这函数将带域 $(k-1)2\pi<y<k2\pi(z=x+iy)$映为 w 平面的一叶,而切割为正实数轴. 有无穷多叶相互粘接,而 $w=0$不在 Riemann 曲面上,因 e^z 永不为零.

反过来,若函数为 $w=z^{\frac{1}{n}}$,而 n 为大于1的正整数,则这函数将 n 叶的 Riemann 曲面映为 w 平面,而且相互一一对应. 同样 $w=\log z$ 将无穷多叶的 Riemann 曲面映为 w 平面,而且相互一一对应.

因此,在讨论 Riemann 曲面与复平面之间的对应时,往往必

须指明:这个讨论是在 Riemann 曲面的那一叶上进行.

§4.6 Schwarz-Christoffel 公式

Riemann 映射定理是一个存在定理,至于如何具体写出这个映射来却不是件简单的事.在§4.1中只是举了几个最简单的例子.下面要给出将一个多边形映射到上半平面的具体公式,这个公式称为 Schwarz-Christoffel 公式.

若 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<\infty$ 为 n 个实数,取 $a_0=-\infty$, $a_{n+1}=+\infty$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个正的实数满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+1<n$,且令

$$\beta(t)=(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}, \tag{6.1}$$

则显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\beta(t)|\mathrm{d}t<\infty.$$

当 $t<a_k$ 时,取

$$(t-a_k)^{\alpha_k-1}=\exp((\alpha_k-1)\log(t-a_k))$$

这样的一支,使其幅角为 $\pi(\alpha_k-1)$. 于是当 $t<a_1$时,

$$\arg\beta(t)=\pi[(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)-n];$$

当 t 在(a_{k-1},a_k)这线段上时,

$$\arg\beta(t)=\pi[(\alpha_k+\cdots+\alpha_n)-(n-k+1)],\quad 2\leqslant k\leqslant n;$$

当 t 在(a_n,∞)这线段上时,

$$\arg\beta(t)=0.$$

于是定义了 $n+2$个复数

$$w_k=c\int_0^{a_k}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant k\leqslant n+1, \tag{6.2}$$

这里 c 为一个正的常数. 在上半平面 $\overline{H}=\{z\in\boldsymbol{C}\mid\mathrm{Im}z\geqslant0\}$上,定义函数

$$f(z) = c\int_0^z \beta(t)\mathrm{d}t, \tag{6.3}$$

这函数显然在 $H=\{z\in \boldsymbol{C} \mid \mathrm{Im}z>0\}$ 上是全纯的. 而在实数轴上有：当 $x\in(a_{k-1},a_k)$ 时 $(1\leqslant k\leqslant n+1)$，

$$\begin{aligned} f(x) &= w_{k-1} + c\int_{a_{k-1}}^x \beta(t)\mathrm{d}t \\ &= w_{k-1} + c\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\alpha_k-1)\pi+\cdots+(\alpha_n-1)\pi]}\int_{a_{k-1}}^x |\beta(t)|\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

于是 $f(x)-w_{k-1}$ 在区间 (a_{k-1},a_k) 上有相同的幅角 $[(\alpha_k-1)\pi+\cdots+(\alpha_n-1)\pi]$，而其绝对值由0增长到

$$l_k = c\int_{a_{k-1}}^{a_k} |\beta(t)|\mathrm{d}t. \tag{6.4}$$

故 x 在区间 $[a_{k-1},a_k]$ 中变动时，则 f 在区间 $\triangle_{k-1}=[w_{k-1},w_k]$ 中变动. $\triangle_{k-1}$ 的幅角为 $(\alpha_k-1)\pi+\cdots+(\alpha_n-1)\pi$，长度为 l_k.

要证 $w_0=w_{n+1}$，这只要证明：对任给 $\varepsilon>0$，有 $R>0$，使得：当 $z\in\overline{H}$ 及 $|z|\geqslant R$ 时，$|w_0-f(z)|\leqslant\varepsilon$ 成立即可. 因为这表明 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=w_{n+1}=w_0$. 这可证之如下：

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(t)|\mathrm{d}t < \infty,$$

故任给 $\varepsilon>0$，有 $R_1>0$，使得

$$\int_{-\infty}^{-R_1} |\beta(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $-\infty<x<-R_1$ 时，有

$$\left|w_0 - c\int_0^x \beta(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{-R_1} |\beta(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

当然可取 $R_1\geqslant\max\{|a_1|,\cdots,|a_n|\}$. 取 $z_0=\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，而 $\rho_0\geqslant R_1$，$0\leqslant\theta_0\leqslant\pi$. 于是

$$\begin{aligned} &|f(z_0) - f(\rho_0)| \\ &= c\left|\int_0^{\theta_0} (\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - a_n)^{\alpha_n-1}\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right| \end{aligned}$$

$$\leqslant c\rho_0(\rho_0 - R_1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n-n}.$$

由于 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n<n-1$,故当 $\rho_0\to\infty$时,上式右边趋于零.故有 $R\geqslant R_1$,使得:当 $\rho_0=|z_0|\geqslant R$ 时,$|f(z_0)-f(\rho_0)|\leqslant\varepsilon/2$. 因此,当 $|z|\geqslant R$,$\mathrm{Im}z\geqslant0$时,$|f(z)-w_0|\leqslant\varepsilon$. 这就证明了 $w_0=w_{n+1}$,于是 f 将 $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$映到闭$(n+1)$边形 Δ,其边为 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_n$,其顶点为 $w_0,w_1,\cdots,w_n,w_{n+1}=w_0$.

若假设$0<\alpha_k<2$,则可证这个多边形在顶点 w_k 处,其内角为 $\alpha_k\pi$. 这可证明如下:

由于 $\beta(t)$可写成 $\beta_k(t)(t-a_k)^{\alpha_k-1}$,这里 $\beta_k(t)=\prod\limits_{j\neq k}(t-a_j)^{\alpha_j}$. 显然 $\beta_k(t)$在 a_k 点的一个邻域 V 中是全纯的,故可展开成 Taylor 级数

$$\beta_k(t) = a_{0,k} + a_{1,k}(t - a_k) + \cdots, \quad a_{0,k} \neq 0.$$

于是当 $z\in V\cap\overline{H}$ 时,有

$$\begin{aligned} f(z) &= w_k + c\int_{a_k}^{z}(a_{0,k} + a_{1,k}(t - a_k) + \cdots)(t - a_k)^{\alpha_k-1}\mathrm{d}t \\ &= w_k + c\,\frac{a_{0,k}}{\alpha_k}(z - a_k)^{\alpha_k}\left(1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_k + 1}\cdot\frac{a_{1,k}}{a_{0,k}}(z - a_k) + \cdots\right). \end{aligned}$$

当 z 沿着倾角 θ 的直线趋于 a_k 时($0\leqslant\theta\leqslant\pi$),$f(z)$沿着一条曲线趋于 w_k,而在 w_k 点处,其切线的倾角为 $\arg(a_{0,k})+\alpha_k\theta$,这是因为 $c>0$及 $\alpha_k>0$. 在 $\overline{H}$ 中作一个以 a_k 为中心的小半圆,使之全包在 $V\cap\overline{H}$ 之中.让 z 在这个小的半圆的圆周上变动,从 $\theta=0$到 $\theta=\pi$,这样 $f(z)$在一条 Jordan 曲线上变动从 Δ_{k-1}上的点变到 Δ_k 上的点,而 $f(z)$的幅角也由 $\arg(a_{0,k})$变到 $\arg(a_{0,k})+\alpha_k\pi$. 故在顶点 w_k 处的内角为 $\alpha_k\pi$. 而在顶点 $w_0=w_{n+1}$处的内角为$((n-1)-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n))\pi>0$,这是因为 $n+1$边形的内角之和为$(n-1)\pi$. 特别当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=n-2$时,则顶点 w_0处的内角为 π,即此为 n 边形.

公式(6.3)就叫做 Schwarz-Christoffel 公式,这里 $\beta(t)$由(6.1)所定义,而 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n<n-1$. (6.3)将上半平面映为 $n+1$边形,其顶点分别为 $w_0,w_1,\cdots,w_n,w_{n+1}=w_0,w_j(j=0,1,\cdots,n+1)$

由(6.2)所定义. 多边形的边为$[w_{k-1},w_k]$($k=1,\cdots,n+1$),其长度为 l_k,由(6.4)所给出. 若$0<\alpha_j<2$($j=1,\cdots,n$),则在顶点 w_k 处的内角为 $\alpha_k\pi$($k=1,\cdots,n$). 在 $w_0=w_{n+1}$处的内角为$[(n-1)-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)]\pi$.

当然(6.3)还可写成更一般的形式

$$f(z)=c\int_0^z\beta(t)\mathrm{d}t+c',\tag{6.3'}$$

如果把(6.2)写成更一般的形式,

$$w_k=c\int_0^{a_k}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\mathrm{d}t+c',\quad 0\leqslant k\leqslant n+1,$$

这里 c,c' 为两个正的常数.

公式(6.3′)也是 Schwarz-Christoffel 公式.

习 题 四

1. 验证 § 4.1中的例子.

2. 证明交比在分式线性变换下不变.

3. 证明:若整函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在实数轴上取实值,则所有的 c_n($n=0,1,\cdots$)是实数.

4. 试作出 $w=z+\sqrt{z^2-1}$的 Riemann 曲面.

5. 证明:任一圆周都可表为$\left|\dfrac{z-z_1}{z_1-z_2}\right|=k$($k>0$),其中 z_1,z_2 是关于它的两个对称点. 当 $k\neq1$时,这个圆周的圆心及半径分别为

$$a=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2},\quad R=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}.$$

6. 证明:交比(z_1,z_2,z_3,z_4)为实数的充要条件为 z_1,z_2,z_3,z_4这四点共圆.

7. (Carathéodory 不等式) 利用 Schwarz 引理及线性变换,证明:若函数 $f(z)$在圆$|z|<R$ 内全纯,在$|z|\leqslant R$ 上连续,$M(r)$

及$A(r)$分别为$|f(z)|$及$\mathrm{Re}f(z)$在圆周$|z|=r$上的最大值，则当$0<r<R$时，

$$M(r)\leqslant\frac{2r}{R-r}A(r)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

8. 设函数$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在单位圆$|z|<1$内全纯，且$|f(z)|\leqslant M$，证明$M|a_1|\leqslant M^2-|a_0|^2$.

9. 试作下列共形映射：

(i) 把z平面上的带形区域$0<\mathrm{Im}z<\pi$映射成$|w|<1$；

(ii) 把z平面上的半圆盘$|z|<1,\mathrm{Im}z>0$映射成上半平面；

(iii) 把z平面上$|z|<1$及$|z-1|<1$的公共部分映射成$|w|<1$；

(iv) 把z平面上的扇形$\{z\,|\,0<\arg z<\alpha(<2\pi),|z|<1\}$映射成$|w|<1$；

(v) 把z平面上$|z|<1$映射成带形区域$0<v<1(w=u+\mathrm{i}v)$并把$-1,1,\mathrm{i}$映射成∞,∞,i.

(vi) 把z平面去掉负实数轴上从$-\frac{1}{4}$到$-\infty$，映射成$|w|<1$.

10. 利用Schwarz-Christoffel公式，写出下列将上半平面映射到多边形P的共形映射：

(i) P为三角形，顶点为w_1,w_2,w_3，相应的顶角为$\alpha\pi,\beta\pi,\gamma\pi$，而$\alpha+\beta+\gamma=\pi$；

(ii) 特别当P为等边三角形，顶点为$w_1=0,w_2=a,w_3=\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}a$，其中$a>0$；

(iii) 特别当P为等腰三角形，顶点为$w_1=0,w_2=a,w_3=a(1+\mathrm{i})$，其中$a>0$；

(iv) P为矩形，其顶点为$w_1=-k_1,w_2=k_1,w_3=k_1+\mathrm{i}k_2,w_4=-k_1+\mathrm{i}k_2,k_1>0,k_2>0$；

(v) P 为菱形，其顶点为$0, a, a(1+e^{i\alpha\pi}), ae^{i\alpha\pi}$，其中$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$a>0$；

(vi) P 为正五角星的内部，P 的中心在原点，$w=1$是 P 的一个顶点.

11. 如果在 Riemann 映射定理中，z_0是实的，而 U 是一个关于实数轴对称的区域，由映射的唯一性定理，证明 f 满足对称关系 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$.

12. 证明：所有在域 Ω 上定义且取值于右半平面的全纯函数的全体，组成正规族.

13. 证明：所有在域 Ω 上定义且取值于$U_0=\boldsymbol{C}\backslash\{x+i0, 0\leqslant x\leqslant 1\}$之内的全纯函数的全体，组成正规族.

第五章　微分几何与 Picard 定理

§5.1　度量与曲率

在这一章中，将介绍一些复的微分几何的初步知识，并用之来处理复分析中的一些定理，例如 Picard 定理. Picard 定理也许是复分析尤其是值分布理论中最为重要的经典定理之一. 原来的证明很复杂，现在用微分几何来证，显得简单明了.

若 Ω 为 $\boldsymbol{C}$ 中的域，在 Ω 上定义一个非负的 C^2 函数 ρ，称之为度量(metric)，即 $\mathrm{d}s_\rho^2=\rho^2|\mathrm{d}z|^2$. 由此得到距离函数 d，在两点 $z_1\in\Omega$，$z_2\in\Omega$ 之间的距离定义为

$$d(z_1,z_2)=\inf\int_\gamma\rho(z)\,|\mathrm{d}z|,\tag{1.1}$$

这里 inf 是在所有连接 z_1，z_2 两点且各点全在 Ω 中的曲线 γ 上取的.

对度量 ρ，可以定义曲率

$$K(z,\rho)=-\frac{\Delta\log\rho(z)}{\rho^2(z)},\tag{1.2}$$

这里 Δ 为 Laplace 算子，即

$$\begin{aligned}\Delta&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\\&=4\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\end{aligned}$$

其中

$$z=x+\mathrm{i}y=re^{\mathrm{i}\theta}.$$

可以证明：这样定义的曲率是与通常微分几何中定义的 Gauss 曲率相一致的.

在复的微分几何中常用以下三种重要的度量.

1. 欧氏度量

若 $\Omega=\boldsymbol{C}$,在 $\boldsymbol{C}$ 中取度量 $\rho(z)=1$,对所有的 $z\in\boldsymbol{C}$,即 $\mathrm{d}s^2=|\mathrm{d}z|^2$,称这个度量为**欧氏度量**(Euclidean metric)或**抛物度量**(parabolic metric). 两点 z_1,z_2之间的距离称为欧氏距离,而 $d(z_1,z_2)=\inf\int_\gamma|\mathrm{d}z|=|z_1-z_2|=$ 连接 z_1,z_2点的直线段的长度.

由变换$\{w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+a,\theta$ 为任意实数,a 为任意复数$\}$所组成的群,即由旋转 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ 与平移 $w=z+a$ 的复合所组成的群称为欧氏运动群,或刚体运动群,这是 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C})$中的一个子群. 显然欧氏度量是在欧氏运动群下的不变度量. 而由定义(1. 2),这时候 $K(z,\rho)=0$对任意的 $z\in\boldsymbol{C}$ 都成立,所以称这个度量为抛物度量.

2. Poincaré 度量

若 Ω 为单位圆 $D(0,1)=\{z\mid|z|<1\}$,在 $D(0,1)$上取度量 $\lambda(z)=\dfrac{2}{1-|z|^2}$,即 $\mathrm{d}s_\lambda^2=\dfrac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$. 称这个度量为 **Poincaré 度量**(Poincaré metric)**或双曲度量**(hyperbolic metric). 在第二章§2. 5中已经证明:$D(0,1)$的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$由变换 $\left\{w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z},\theta\text{ 为任意实数},a\in D(0,1)\right\}$所组成,即群由旋转及 Möbius 变换所组成. 在第二章§2. 5中也已证明:Poincaré 度量是在 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$下的不变度量.

现在来计算 $D(0,1)$中两点 z_1,z_2的 Poincaré 距离.

先考虑 $D(0,1)$中两点 $z_1=0$及 $z_2=R+\mathrm{i}0\,(R<1)$之间的 Poincaré 距离. 这时候连接这两点的曲线 γ 可以写成

$$z(t)=u(t)+\mathrm{i}w(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$w(0)=u(0)=w(1)=0,\quad u(1)=R,$$

而 $u(t)^2+w(t)^2<1$,u,w 为 t 的 C^1实值函数,于是

$$\int_\gamma\mathrm{d}s=\int_\gamma\frac{2|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}=2\int_0^1\frac{((u'(t))^2+(w'(t))^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t}{1-(u(t))^2-(w(t))^2}$$

$$\geqslant \int_0^1 \frac{2|u'(t)|\mathrm{d}t}{1-(u(t))^2} \geqslant \left|\int_0^R \frac{2\mathrm{d}u}{1-u^2}\right| = \log\frac{1+R}{1-R},$$

等号成立,当且仅当 $w(t)=0,0\leqslant t\leqslant 1$. 所以得到

$$d(0,R+\mathrm{i}0) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2} = \log\frac{1+R}{1-R},$$

而使积分取 inf 的 γ 为连接0及 $R+\mathrm{i}0$的直线段.

由于 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ 是 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 中的一个元素,故 $D(0,1)$中任意两点的 Poincaré 距离经 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$ 变换后是不变的. 因此,有

$$d(0,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}R) = \log\frac{1+R}{1-R}$$

对任意实数 θ 都成立.

若 z_1,z_2为 $D(0,1)$中任意两点,则

$$\varphi(z) = \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$$

为 $\mathrm{Aut}(D(0,1))$ 中的一个元素,将 z_1映为0,z_2映为

$$\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}.$$

于是

$$d(z_1,z_2) = d\left(0,\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right) = \log\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}. \quad (1.3)$$

这就是 $D(0,1)$中任意两点 z_1,z_2之间的 Poincaré 距离或双曲距离. 这时候在

$$d(z_1,z_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$$

中取 inf 的 γ 为曲线

$$z = \frac{z_1 + \dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}t}{1+\bar{z}_1\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}t}, \quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

即

$$z=\frac{(1-t)z_1+(t-z_1\bar{z}_1)z_2}{1-tz_1\bar{z}_1-(1-t)\bar{z}_1z_2},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

从(1.3)可以看出，当 $z_2\to z_1$ 时，$d(z_1,z_2)=0$；当 z_1 或 z_2 趋于 $D(0,1)$ 的边界点时，$d(z_1,z_2)\to\infty$.

第二章§2.5定理19为 Schwarz-Pick 引理：若 $w=f(z)$ 为 $D(0,1)$ 中的全纯函数，将 $D(0,1)$ 映入到 $D(0,1)$，且 $w_1=f(z_1)$，$w_2=f(z_2)$，则有

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-\overline{w}_1w_2}\right|\leqslant\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|,\tag{1.4}$$

等号成立当且仅当 $f(z)\in\mathrm{Aut}(D(0,1))$.

由(1.3)，可将(1.4)改写成

$$d(w_1,w_2)\leqslant d(z_1,z_2).$$

于是 Schwarz-Pick 引理有明确的几何意义：若 $w=f(z)$ 为 $D(0,1)$ 中的全纯函数，将 $D(0,1)$ 映入到 $D(0,1)$，则 $D(0,1)$ 中任意两点之间的 Poincaré 距离经过映射后是不会增加的，距离相等当且仅当 $f(z)\in\mathrm{Aut}(D(0,1))$.

由于 $\Delta=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$，故

$$-\Delta\log\lambda(z)=\Delta\log(1-|z|^2)=\frac{-4}{(1-|z|^2)^2},$$

故双曲度量 $\lambda(z)$ 的曲率 $K(z,\lambda)=-1$ 对所有 $z\in D(0,1)$ 都成立. 所以称这个度量为双曲度量.

3. 球度量

若 Ω 为 $\boldsymbol{C}^*$，在 $\boldsymbol{C}^*$ 上取度量 $\sigma(z)=\frac{2}{1+|z|^2}$，即

$$\mathrm{d}s_\sigma^2=\frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1+|z|^2)^2},$$

称这个度量为**球度量**(spherical metric)或**椭圆度量**(elliptic metric). 在第一章§1.2中介绍过球面投影(stereographic projection)，这个投影建立起了 Riemann 球面 S^2 上的点与 $\boldsymbol{C}^*$ 中的

点之间的一一对应. 若 $z\in \boldsymbol{C}^*$，则在 S^2上对应的点的坐标为

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1},\frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(|z|^2+1)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).\quad(1.5)$$

若 $P=(x_1,x_2,x_3)$ 及 $P'=(x_1',x_2',x_3')$ 为 S^2上的两点，则这两点之间在 S^2上的最短距离为过 P,P' 的大圆上的弧$\widehat{PP'}$的弧长. 这个弧长等于

$$2\arctan\sqrt{\frac{1-x_1x_1'-x_2x_2'-x_3x_3'}{1+x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'}}.$$

由(1.5)，这等于$2\arctan\left|\frac{z-z'}{1+z\bar{z}'}\right|$. 将这个距离作为 $\boldsymbol{C}^*$中的一种度量，得到 z,z'之间的距离为

$$d(z,z')=2\arctan\left|\frac{z-z'}{1+z\bar{z}'}\right|.$$

显然相应的度量为

$$\mathrm{d}s^2=\frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1+|z|^2)^2}.$$

这只要对 d 求微分即可得到. 也就是：

$$\mathrm{d}s^2=\sigma(z)^2|\mathrm{d}z|^2,\quad \sigma(z)=\frac{2}{1+|z|^2}.$$

于是度量 $\sigma(z)$有十分明确的几何意义. 用度量 $\sigma(z)$来计算 $\boldsymbol{C}^*$中两点之间的距离等于在 S^2上对应的两点之间的最短距离，即球面距离. 也就是说，用 S^2上对应两点之间的球面距离作为 $\boldsymbol{C}^*$中两点之间的距离，于是有

$$d(z_1,z_2)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\sigma(z)|\mathrm{d}z|,$$

这里 γ 为连接 z_1,z_2的任意曲线.

若 z_1,z_2在 S^2上的对应的点为 P_1,P_2，连接 P_1P_2的大圆上的弧$\widehat{P_1P_2}$，将$\widehat{P_1P_2}$经过球面投影到 $\boldsymbol{C}^*$中连接 z_1与 z_2的曲线 γ_0，这 γ_0 就是使上式中积分取 inf 的曲线. 这是为什么称度量 $\sigma(z)$为球度量的原因.

容易计算得到：球度量 $\sigma(z)$ 的曲率在每一点 $z\in C^*$ 为 $+1$，所以称这个度量为椭圆度量.

在第三章§3.3中已经叙述了单值化定理：任意单连通的 Riemann 曲面一定一对一地全纯等价于下列三个区域之一：C；$D(0,1)$ 以及 C^*. 这就是为什么要在这三个区域上来定义并讨论几何的原因.

由(1.2)所定义的曲率，有一个重要的性质，就是曲率是在全纯映射下的不变量.

若 Ω_1 及 Ω_2 为 C 中两个区域，f 为 Ω_1 上的全纯函数，将 Ω_1 映为 Ω_2. 若 ρ 为 Ω_2 上的一个度量，且 $f'\neq 0$，则

$$f^*\rho=(\rho\circ f)|f'| \tag{1.6}$$

定义了在 Ω_1 上的一个度量. 这个度量称之为由度量 ρ 通过 $f(z)$ 拉回来(pullback)到 Ω_1 上的度量. 要证的是

$$K(z,f^*\rho)=K(f(z),\rho). \tag{1.7}$$

这可证之如下：

由于

$$\Delta\log|f'(z)|=0$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta\log(\rho\circ f(z))&=4\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial}{\partial z}\log(\rho\circ f(z))\\&=4\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial\bar f}\log(\rho\circ f)\right)\\&=|f'(z)|^2(\Delta_f\log\rho)\circ f(z),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}K(z,f^*\rho)&=-\frac{|f'(z)|^2(\Delta_f\log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2|f'(z)|^2}\\&=-\frac{(\Delta_f\log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2}\\&=K(f(z),\rho).\end{aligned}$$

§5.2 Ahlfors-Schwarz 引理

第二章§2.5定理17给出了经典的Schwarz引理的解析形式.第二章§2.5定理19给出了Schwarz-Pick引理,这是经典的Schwarz引理的推广.在上一节中,给出了Schwarz-Pick引理的微分几何的意义,这是用Poincaré度量来刻画的.这里要给出Schwarz引理的另一形式的推广,即Ahlfors-Schwarz引理,这是用曲率来刻画的,且是Schwarz-Pick引理的推广.这条引理是在1938年由Ahlfors所建立的(L. V. Ahlfors[2]),这条引理可以说是微分几何进入复分析的开始,也是用微分几何的观点来处理复分析问题的开始.

定理1(Ahlfors-Schwarz引理) 设$f(z)$为$D(0,1)$上的全纯函数,f将$D(0,1)$映为U.如果在U上可以引入一个度量ρ,即$ds_\rho^2=\rho(z)^2|dz|^2$,使得其曲率在$U$上任一点都$\leqslant -1$,则

$$f^*\rho(z)\leqslant\lambda(z), \tag{2.1}$$

其中$\lambda(z)=\dfrac{2}{1-|z|^2}$,即

$$ds_\rho^2\leqslant ds_\lambda^2. \tag{2.2}$$

也就是经过映射后,度量不增加.

证明 任意固定$r\in(0,1)$,在以原点为中心,r为半径的圆$D(0,r)$上定义度量

$$\lambda_r(z)=\frac{2r}{r^2-z^2},$$

显然,在$D(0,r)$中任一点z上,其曲率均为-1.定义函数

$$v(z)=\frac{f^*\rho(z)}{\lambda_r},$$

则在$D(0,r)$上,v是非负的连续函数.由(1.6),$f^*\rho(z)=\rho(f(z))|f'(z)|$在$\overline{D(0,r)}$上是有界的,且当$|z|\to r$时,$\dfrac{1}{\lambda_r}\to 0$.所

以当$|z|\to 0$时，$v\to 0$. 因此 v 只能在 $D(0,r)$中的某点 τ 处取到极大值 M，如能证明：$M\leqslant 1$，则在 $D(0,r)$上，$v\leqslant 1$成立. 令 $r\to 1-0$，即得(2.1).

若 $f^*\rho(\tau)=0$，则 $v\equiv 0$，已无需再证. 故不妨假设 $f^*\rho(\tau)>0$. 这时 $K(\tau,f^*\rho)$是有意义的. 因此，由假设 $K(\tau,f^*\rho)\leqslant -1$. 由于 $\log v$ 在 τ 点处取极大值，故有

$$\begin{aligned}0\geqslant \Delta\log v(\tau) &= \Delta\log f^*\rho(\tau) - \Delta\log\lambda_r(\tau)\\ &= -K(\tau,f^*\rho)\cdot(f^*\rho(\tau))^2 + K(\tau,\lambda_r)(\lambda_r(\tau))^2\\ &\geqslant (f^*\rho(\tau))^2 - (\lambda_r(\tau))^2,\end{aligned}$$

即得

$$\frac{f^*\rho(\tau)}{\lambda_r(\tau)}\leqslant 1,$$

故 $M\leqslant 1$. 引理证毕.

若在 Ahlfors-Schwarz 引理中，$U\subseteq D(0,1)$，则可取 $\rho=\lambda$，这样就得到 Schwarz-Pick 引理. 所以 Ahlfors-Schwarz 引理为 Schwarz-Pick 引理的推广.

还可以将 Ahlfors-Schwarz 引理写成为更一般的形式.

在 $D(0,\alpha)$上定义度量($\alpha>0$)

$$\lambda_\alpha^A(z) = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}, \tag{2.3}$$

这里 $A>0$，则这个度量在 $D(0,\alpha)$中任一点，其曲率均为$-A$.

定理2(一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理) 假设 $f(z)$为 $D(0,\alpha)$上的全纯函数，将 $D(0,\alpha)$映为 U，如在 U 上可以引入一个度量 ρ，即 $ds_\rho^2=\rho(z)^2|dz|^2$，使得其曲率在 U 上任一点都小于等于$-B$，则

$$f^*\rho(z)\leqslant\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_\alpha^A(z) \tag{2.4}$$

对每个 $z\in D(0,\alpha)$都成立，这里 B 为正的常数.

定理2的证明与定理1的证明一样，从略.

Ahlfors-Schwarz 引理也是微分几何中比较定理的开始之一.

应用 Ahlfors-Schwarz 引理可以得到很多重要的结果,例如:推广的 Liouville 定理等.

§5.3 Liouville 定理的推广及值分布

第二章§2.3的定理8为重要的 Liouville 定理:任意有界整函数必为常数.现在应用 Ahlfors-Schwarz 引理,可以用曲率来刻画与推广 Liouville 定理.

定理3(推广的 Liouville 定理) 若整函数 $f(z)$将 $\boldsymbol{C}$ 映到 U,如在 U 上可以引入一个度量 $\rho(z)$,使得对任意 $z\in U$,其曲率 $K(z,\rho)$满足 $K(z,\rho)\leqslant -B<0$,这里 B 为正的常数,则 $f(z)$必为常数.

证明 对任意 $\alpha>0$,$f(z)$将 $D(0,\alpha)$映到 U 之内,由假设,可在其上定义度量 ρ,使得其曲率 $K(z,\rho)\leqslant -B<0$.故由定理2,

$$f^*\rho(z)\leqslant\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}\lambda_\alpha^A(z).$$

由(2.3),当 $\alpha\to\infty$时,$\lambda_\alpha^A(z)\to 0$,故得 $f^*\rho(z)\leqslant 0$.所以 $f^*\rho(z)=0$.由于 $f(z)$为全纯函数,因此,f 必为常数.定理证毕.

由定理3可以导出 Liouville 定理.

若 $f(z)$为有界整函数,所以可以找到一个正的常数 M,使得 $|f(z)|\leqslant M$ 当 $z\in\boldsymbol{C}$ 时都成立.于是全纯函数$\frac{1}{M}f(z)$将 $\boldsymbol{C}$ 映射到 $D(0,1)$之内,而在 $D(0,1)$上显然可以取度量 λ,其曲率为-1,故在定理3中取 $B=1$,即得$\frac{1}{M}f(z)$必为常数,此即 $f(z)$必为常数,这就证明了 Liouville 定理.

由此可见,定理3是 Liouville 定理的微分几何形式的推广.

由 Liouville 定理知道:若整函数 $w=f(z)$将 $\boldsymbol{C}$ 映到有界域,则 $f(z)$必为常数.若整函数 $w=f(z)$将 $\boldsymbol{C}$ 映到无界域 U,如 $\boldsymbol{C}\backslash U$

的面积>0，那末仍可证明：$f(z)$必为常数．这可证明如下：若 $c_1\in C\backslash U$，且为内点，作变换 $w_1=w-c_1$，则 $w_1=0$位于 $f(C)-c_1$的余集中，作变换 $w_2=\dfrac{1}{w-c_1}$，则 w_2将 C 映到有界域，于是 w_2为常数 c_2．由 $c_2=\dfrac{1}{w-c_1}$，即得 w 也是一个常数．

再进一步，若整函数 $w=f(z)$将 C 映射到无界域 U，而 $C\backslash U$ 的面积为零，即 $C\backslash U$ 是由一些曲线组成，这时候 $f(z)$是否仍为常数？

我们来看看下面的例子．

若整函数 $w=u+\mathrm{i}v=f(z)$将 C 映为 $C\backslash\{u+\mathrm{i}0\mid 0\leqslant u\leqslant 1\}$．作变换

$$w_1=u_1+\mathrm{i}v_1=\varphi(w)=\frac{w}{w-1},$$

将 C 映为 $C\backslash\{u_1+\mathrm{i}0:u_1\leqslant 0\}$． 作变换 $w_2=r(w_1)=\sqrt{w_1}$，这里开根取主分支，则 w_2将 C 映为右半平面．再作 Cayley 变换 $w_3=\dfrac{w_2-1}{w_2+1}=s(w_2)$，将右半平面映为单位圆，于是由 Liouville 定理，w_3是常数，这导出 w_2,w_1及 w 均为常数．

由此可见，整函数 $w=f(z)$将 C 映到无界域 U，即使 $C\backslash U$ 是一个线段，这个整函数仍可为常数，不但如此，显然可见，我们可以取这根线段的长度可以为任意小的正数，这时候 $f(z)$仍为常数．

那末 $C\backslash U$ 多么小时，$f(z)$才不是常数？

考虑另一个极端的例子．整函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 将 C 映到 $U=C\backslash\{0\}$，所以如果 $C\backslash U$ 为一点的话，就有例子 $f(z)$不是常数．那末如果 $C\backslash U$ 为两点的话，$f(z)$是不是常数？其回答就是 Picard 小定理．

§5.4 Picard 小定理

定理4（Picard 小定理） 若整函数 $w=f(z)$将 C 映为 U，而

$C\backslash U$ 至少包含两点，则 $f(z)$ 必为常数.

也就是说：非常数的整函数取到 C 中所有的值除了一个可能的例外点.

为了证明 Picard 小定理，先证如下的

定理5 若 U 为 C 中的开集，$C\backslash U$ 至少包含有两点，则在 U 上可以引入一个度量 μ，使得其曲率 $K(z,\mu)$ 在 U 的每一点上都满足

$$K(z,\mu) \leqslant -B < 0,$$

这里 B 为正的常数.

由定理5立即推出定理4. 这是因为：若 $C\backslash U$ 至少包含有两点，故由定理5，可以在 U 上引入一个度量 μ，使得其曲率在 U 上每一点都满足 $K(z,\mu)\leqslant -B<0$，而 B 为正的常数，由推广的 Liouville 定理（定理3）得到 $f(z)$ 必为常数.

定理5的证明 在 $C\backslash U$ 中取两点，并用线性变换将这两点变为0与1. 记 $C_{0,1}=C\backslash\{0,1\}$，在 $C_{0,1}$ 上作度量

$$\mu(z) = \frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \cdot \frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}, \qquad (4.1)$$

则 $\mu(z)$ 在 $C_{0,1}$ 上为正的、光滑的函数，现在来计算 μ 的曲率，且证明其值为负的.

首先看到

$$\Delta(\log|z|^{5/6}) = \frac{5}{12}\Delta(\log|z|^2) = 0,$$

所以

$$\Delta\log\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} = \frac{1}{2}\Delta\log(1+|z|^{1/3})$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\log(1+(z\cdot\bar{z})^{1/6}) = \frac{1}{18|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2},$$

同样可以得到

$$\Delta\log\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right] = \frac{1}{18|z-1|^{5/3}(1+(z-1)^{1/3})^2}.$$

于是曲率

$$K(z,\mu)=-\frac{1}{18}\left[\frac{|z-1|^{2/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})}+\frac{|z|^{2/3}}{(1+|z|^{1/3})(1+|z-1|^{1/3})^3}\right].$$

可以看出

(1) $K(z,\mu)<0$,对于所有的 $z\in \boldsymbol{C}_{0,1}$;

(2) $\lim\limits_{z\to 0}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$;

(3) $\lim\limits_{z\to 1}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$;

(4) $\lim\limits_{z\to \infty}K(z,\mu)=-\infty$;

故 $K(z,\mu)$在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$上有一个负常数$-B$ 作为其上界,这就证明了定理5.

以下还要证明更为深刻的 Picard 大定理,这是 Picard 小定理的深化. 为了证明 Picard 大定理,下面来推广正规族的概念.

§5.5 正规族的推广

在第四章§4.2中引入了正规族的概念,并用此来证明 Riemann 映射定理. 现在来推广这个概念.

定义1 若$\{g_j\}$为域 Ω 上的复值函数序列(函数未必全纯),若对任给的 $\varepsilon>0$及 Ω 中任一紧致集 K,一定存在一个只依赖于 ε 及 K 的正整数 J,使得 $j>J$ 时

$$|g_j(z)-g(z)|<\varepsilon$$

对任意的 $z\in K$ 都成立,则称$\{g_j\}$在 Ω 上**正规收敛**(normally convergence).

即若$\{g_j\}$在 Ω 上为内闭一致收敛,则称$\{g_j\}$在 Ω 上正规收敛.

若对 Ω 中的任一紧致集 K,及 $\boldsymbol{C}$ 中的任一紧致集 L,一定存在一个只依赖于 K 及 L 的正整数 J,使得当 $j>J$ 时,$g_j(z)\notin L$ 对

任意的 $z\in K$ 都成立，则称 $\{g_j\}$ 在 Ω 上为**紧发散**(compactly divergence).

即若 $\{g_j\}$ 在 Ω 上任一紧集上一致发散到 ∞，则称 $\{g_j\}$ 为紧发散.

定义2 若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上复值函数族. 如果 $\mathscr{F}$ 中任一序列或是有子序列正规收敛，或是有子序列紧发散，则称 $\mathscr{F}$ 为**正规族**.

这是第四章 § 4.2中正规族定义的推广.

例 $\mathscr{F}=\{f_j\}, f_j=z^j, j=1,2,\cdots$.

$\mathscr{F}$ 在 $D(0,1)$ 上是正规族，因任一子序列正规收敛于零.

$\mathscr{F}$ 在 $\{z \mid |z|>1\}$ 上是正规族，因任一子序列紧发散.

$\mathscr{F}$ 在任一包含有单位圆周 $|z|=1$ 上任一点作为内点的区域上不是正规族，因为任一子序列在圆内的点收敛于0，在圆外的点上发散.

由上述定义，立得

定理6(Montel 定理) 若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上的全纯函数族，若对 Ω 中任一紧致集 K，存在常数 M_K，使得

$$|f(z)|\leqslant M_K \tag{5.1}$$

对每个 $z\in K, f\in\mathscr{F}$ 都成立，则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

如果 $|f(z)|\leqslant M$ 对所有 $z\in\Omega, f\in\mathscr{F}$ 都成立，这里 M 为常数，那末定理依然成立.

由于 $\mathscr{F}$ 为全纯函数族，且满足条件(5.1)，故不可能有紧发散，所以由第四章 § 4.2定理3(Montel 定理)，上述定理成立.

为了推广正规族概念到亚纯函数族，我们用 S^2 上的球距离来替代 $\boldsymbol{C}$ 上的欧氏距离，这时候 $\boldsymbol{C}^*$ 上的亚纯函数族是正规族可定义如下.

定义3 若 $\mathscr{F}$ 为域 $\Omega\subset\boldsymbol{C}^*$ 上的亚纯函数族，如果 $\mathscr{F}$ 的任一序列一定存在一个子序列，在 Ω 上在球距离的意义下是正规收敛的，则称 $\mathscr{F}$ 为正规族.

这个定义的形式与第四章 § 4.2中正规族的定义(定义1)是相

一致的，只是用球距离替代了欧氏距离.

可以看出，定义2相容于定义3，这只要用球距离来替代欧氏距离.

与 Montel 定理（定理6）相仿，可以有如下的 Marty 定理.

定理7（Marty 判别法） 若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上的亚纯函数族，则 $\mathscr{F}$ 为正规族当且仅当

$$\{f^*\sigma \mid f \in \mathscr{F}\} \tag{5.2}$$

在 Ω 的任一紧致集上一致有界，这里 σ 为球度量，即对 Ω 中任一紧致集 K，存在常数 M_K，使得

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leqslant M_K \tag{5.3}$$

对任意 $z\in K$，$f\in\mathscr{F}$ 都一致成立.

证明 （5.2）在 Ω 的任一紧致集上一致有界与（5.3）等价是显然的.

如（5.3）成立，则

$$\begin{aligned} d(f(z_1),f(z_2)) &= \inf\int_\gamma \mathrm{d}s = \inf\int_{\gamma'}\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|\mathrm{d}z| \\ &\leqslant \int_{\gamma_0}\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|\mathrm{d}z| \leqslant M_K|z_1-z_2|, \end{aligned}$$

这里 γ 是连接 $f(z_1)$，$f(z_2)$ 且全在 K 中的曲线，γ' 为 $f^{-1}(\gamma)$，γ_0 为从 z_0 到 z_1 的直线段. 故在球距离的意义下，f 是等度连续的，而 $f(z)$ 是一致有界的，故由 Ascoli-Arzela 定理（第四章 § 4.2定理4），$\mathscr{F}$ 为一正规族.

反之，如 $\mathscr{F}$ 为正规族，要导出（5.3）成立. 我们用反证法，如果（5.3）不成立，则在 Ω 中存在紧致集 E 及 $\mathscr{F}$ 中的序列 $\{f_n\}$，使得 $\max\limits_{z\in E} f_n^*\sigma(z)$ 无界. 由于 $\mathscr{F}$ 为正规族，故在 $\{f_n\}$ 中存在子序列 $\{f_{n_k}\}$ 使得当 $n_k\to\infty$ 时，$f_{n_k}\to f$ 在 E 上一致成立. 在 E 的每一点，可以有一闭圆 $\overline{D}$，$\overline{D}\subset\Omega$，在 $\overline{D}$ 中或是 f 是全纯或是 $\dfrac{1}{f}$ 是全纯. 若 f

为全纯，则在 $\overline{D}$ 上有界，由于 $\{f_{n_k}\}$ 是在球距离意义下收敛的，故当 n_k 充分大时，$\{f_{n_k}\}$ 在 $\overline{D}$ 内无极点. 由第三章 §3.1定理1 (Weierstrass 定理)，$f_{n_k}^*\sigma$ 在比 $\overline{D}$ 小一点的圆上一致收敛到 $f^*\sigma$. 由于 $f^*\sigma$ 是连续函数，故 $f_{n_k}^*\sigma$ 在小一点的圆上是有界的. 同样，若 $\frac{1}{f}$ 是全纯的情形，用同样的方法可证 $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^*\sigma$ 在小一点的圆上是有界的，但是 $\left(\frac{1}{f_{n_k}}\right)^*\sigma=f_{n_k}^*\sigma$，故仍得 $f_{n_k}^*\sigma$ 在小一点的圆上是有界的. 由于 E 为紧致集，故可以用有限个这样的小圆来覆盖之. 这样可以得到：$f_{n_k}^*\sigma$ 在 E 上是有界的. 得到矛盾.

由 Marty 判别法，可以导出如下的 Montel 定理.

定理8(Montel 定理) 若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上的亚纯函数族，P,Q,R 为三个不同的点，如果 $\mathscr{F}$ 中的任一函数取值于 $\boldsymbol{C}^*\backslash\{P,Q,R\}$，则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

证明 用分式线性变换将 P,Q,R 三点变为 $P=0,Q=1$ 及 $R=\infty$. 于是只要证明：全纯函数族中任一函数如不取 $P=0,Q=1$，则此函数族为正规族. 即在 $\boldsymbol{C}_{0,1}=\boldsymbol{C}\backslash\{0,1\}$ 上取值的全纯函数族成正规族. 这只要证明：对 Ω 中任一圆 $D(z_0,\alpha)=\{z||z-z_0|<\alpha\}\subseteq\Omega$ 中，$\mathscr{F}$ 成为正规族即可，且不妨设 $z_0=0$. 在 §5.4中已经构造了度量 μ，将 μ 乘以常数 a(仍记作 μ)，使得其曲率的上界为 -1. 由 §5.2中的一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理(定理2)，得到：对于任一 $f\in\mathscr{F}$ 有

$$f^*\mu(z)\leqslant\lambda_\alpha^A(z),$$

即

$$\mu(f(z))\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|\leqslant\frac{2\alpha}{\sqrt{A}\,(\alpha^2-|z|^2)} \tag{5.4}$$

对每个 $z\in D(0,\alpha)$ 都成立.

将球度量 $\sigma(w)$ 与 $\mu(w)$ 在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$ 中作比较，显然，当 $w\to0$，或是 $w\to1$，或是 $w\to\infty$ 时

$$\frac{\sigma(w)}{\mu(w)}=\frac{2/(1+|w|^2)}{a(1+|w|^{1/3})^{1/2}(1+|w-1|^{1/3})^{1/2}/[|w|^{5/6}|w-1|^{5/6}]}$$
$$\to 0.$$

故存在正的常数 M,使得 $\sigma(w)\leqslant M\mu(w)$. 于是由(5.4),当 $z\in D(0,\alpha)$时,

$$f^*\sigma(z)=\sigma(f(z))\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|\leqslant M\mu(f(z))\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|$$
$$=Mf^*\mu(z)\leqslant M\lambda_\alpha^A=\frac{2\alpha M}{\sqrt{A}(\alpha^2-|z|^2)}$$

成立. 故 $f^*\sigma$ 在 $D(0,\alpha)$的紧致集上有界,且界不依赖于 $f\in\mathscr{F}$. 由 Marty 判别法(定理7),导出 $\mathscr{F}$ 为正规族.

在证明过程中,还证明了

定理9(Montel 定理) 若 $\mathscr{F}$ 为域 Ω 上的全纯函数族,对 $\mathscr{F}$ 中的每一个函数,如均不取相同的两个复数,则 $\mathscr{F}$ 为正规族.

§5.6 Picard 大定理

第三章§3.2定理3为 Weierstrass 定理:若 $f(z)$在 $D'(0,r)=D(0,r)\setminus\{0\}$中全纯,而 $z=0$为 $f(z)$的本性奇点,则 $f(z)$在 $D'(0,r)$中能取到的值在 $\boldsymbol{C}$ 中是稠密的.

Picard 大定理将进一步刻画函数在本性奇点附近的值分布.

定理10(Picard 大定理) 若 $f(z)$在 $D'(0,r)$中全纯,而 $z=0$ 为 $f(z)$的本性奇点,则 $f(z)$在 $z=0$点的任意邻域中可取到 $\boldsymbol{C}$ 中任意的值最多除去一个例外点,当然以任一点 z 来替代 $z=0$,结论依然成立.

显然 Picard 大定理是 Weierstrass 定理的深化,也是 Picard 小定理的推广.

在第三章§3.3中已经知道,若 $f(z)$为整函数,且 $f(z)$在无穷远点处为极点,则 $f(z)$为多项式. 由代数基本定理(第二章

§2.4定理10)，$f(z)$可以取 C 中任何值，若 $f(z)$在无穷远点处为可去奇点，则 $f(z)$为有界整函数，由 Liouville 定理，$f(z)$必为常数. 若 $f(z)$在无穷远点处为本性奇点，则由 Picard 大定理，$f(z)$在无穷远点附近可以取 C 的任何值，最多除去一个例外点. 这就导出了 Picard 小定理.

因此，Picard 小定理是 Picard 大定理的推论.

现在应用上节的结果，来证明 Picard 大定理.

定理10的证明 用反证法. 若 Picard 大定理不成立，不妨设 $f(z)$在 $D'(0,1)$上全纯，f 将 $D'(0,1)$映到的区域不取0，1两点，来证明：$z=0$必为 $f(z)$的可去奇点或极点，这样就得到矛盾.

定义 $f_n(z)=f\left(\dfrac{z}{n}\right)$，$0<|z|<1$，作全纯函数族 $\mathscr{F}=\{f_n\}$，$\mathscr{F}$ 取值于 $C_{0,1}$. 由定理9，$\mathscr{F}$ 为正规族. 因此，在$\{f_n\}$中存在子序列$\{f_{n_k}\}$，或是正规收敛，或是紧发散. 若$\{f_{n_k}\}$是正规收敛，则$\{f_{n_k}\}$在 $D'(0,1)$的任一紧致集上一致收敛，故有界. 特别在$\left\{z \,\middle|\, |z|=\dfrac{1}{2}\right\}$上有界 M，此即 $f(z)$在$\left\{z \,\middle|\, |z|=\dfrac{1}{2n_k}\right\}$上有界 M. 由最大模原理，f 在$0<|z|<\dfrac{1}{2}$上有界 M，故 $z=0$为 $f(z)$的可去奇点(第二章§2.3定理9).

若$\{f_{n_k}\}$为紧发散，则用同样的办法可证：$\dfrac{1}{f}\to 0$，当 $z\to 0$，即 $f\to\infty$，当 $z\to 0$，故 $z=0$为 $f(z)$的极点. 这就证明了定理.

尽管 Picard 大定理及 Picard 小定理是复分析尤其是值分布理论中最为重要的定理之一，但是一般大学基础课教材中不讲这些定理，原因是这些定理的证明要用到椭圆模函数，比较困难. 自从 Picard 定理证明后，有不少简化的证明，本章选用了微分几何的证明. L. V. Ahlfors[2]于1938年建立起极为重要的 Ahlfors-Schwarz 引理(定理1)，1939年 R. M. Robinson[1]就沿着这个想法，用微分几何的方法，而不用椭圆模函数来证明 Picard 定理等.

之后，就有不少进展，如 H. Grauert and H. Reckziegel[1]，Z. Kobayashi[1]，L. Zalcman[1]，D. Minda and G. Schober[1]以及 S. G. Krantz[1]等人的工作. 本章就是参考了上述文献，尤其是 Minda 与 Schober 以及 Krantz 的工作所写成的. 这样写法的好处不仅是使得 Picard 定理的证明简单明了，而且也开始了解了如何用微分几何来处理复分析的问题. 不但如此，这里用微分几何来证明 Picard 大定理、Picard 小定理的方法，还可以用来证明其他一些复分析中的重要定理，如 Bloch 定理、Landau 定理、Schottky 定理等等. 现在叙述 Bloch 定理、Landau 定理及 Schottky 定理如下，而不给出证明，有兴趣的读者可参阅上述文献以及 L. V. Ahlfors[2],[3]，J. B. Conway[1].

Bloch 定理 若 $f(z)$在单位圆盘 D 上全纯，且 $f'f(0)=1$，则 $f(D)$一定包有一个以 B 为半径的圆，这里 B 是一个不依赖于 f 的正的常数.

Landau 定理 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots(a_1\neq 0)$为 $D(0,r)$上的全纯函数，f 不取0，1两点，则 $r\leqslant R(a_0,a_1)$，这里 $R(a_0,a_1)$为只依赖于 a_0,a_1的常数.

Schottky 定理 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$为 $D(0,r)$中的全纯函数，f 不取0，1两点，则对每个 $\theta\in(0,1)$，存在只依赖于 a_0及 θ 的常数 $M(a_0,\theta)$，使得 $|f(z)|\leqslant M(a_0,\theta)$对所有 $|z|\leqslant\theta r$ 都成立.

在证明 Picard 小定理及 Picard 大定理的过程中，我们在 $\boldsymbol{C}_{0,1}$ 上构造了度量 μ. 这是证明过程中很关键的一步. 对这个度量要求其曲率有负的上界，且存在正的常数 M，使得 $\sigma\leqslant M\mu$ 成立，满足这样性质的 μ 当然不只是本章中给出的(4.1)这一个，还可以构造出其他的度量也满足上述的要求，有兴趣的读者可参阅 R. M. Robinson[1].

习 题 五

1. 证明：$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$，这里 $z=re^{i\theta}$.

2. 证明：由(1.2)所定义的曲率是与微分几何中通常定义的 Gauss 曲率相一致的.

3. 证明：欧氏度量是在欧氏运动群下的不变量.

4. 若 $P=(x_1,x_2,x_3)$ 及 $P'=(x'_1,x'_2,x'_3)$ 为 Riemann 球上的两点，证明：过 P,P' 的大圆上的圆弧 $\widehat{PP'}$ 的弧长为

$$d(P,P')=2\arctan\sqrt{\frac{1-x_1x'_1-x_2x'_2-x_3x'_3}{1+x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3}}.$$

若 z,z' 为 P,P' 的球面投影的对应的点，利用(1.5)，这又等于

$$d(z,z')=2\arctan\left|\frac{z-z'}{1+z\bar{z}'}\right|,$$

并证明其相应的度量为

$$ds^2=\frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}.$$

5. 验证：欧氏度量的曲率为0，Poincaré 度量的曲率为-1，球度量的曲率为$+1$.

6. 验证 Picard 小定理对函数 e^z 的正确性.

7. 函数 e^z+1的例外值是什么？

8. 证明 $\cosh z$ 与 $\sinh z$ 能取所有的复数值.

9. 在 $z=0$点附近，对函数 $e^{\frac{1}{z}}$验证 Picard 大定理.

10. 证明定理2.

第六章　多复变数函数浅引

§6.1　引　　言

在本书的最后一章讲一点点多复变数函数是为了让读者看到单复变数与多复变数函数论之间的一些根本差别，从而达到对单复变数函数论有更深入一步理解的目的.

如同其他的数学理论那样，从一维推广到高维，其中一部分是可以没有多大困难平行推广过去的，还有一部分是在高维情形下所特有的，在一维情形下所没有的，而后一部分往往是要着重讨论的.

多复变数函数论的研究如同单复变数函数论的研究那样，已有很长的历史，由于本世纪开始前后，多复变数的两个重要定理的发现，揭开了多复变数函数论发展的崭新的一页，这两个定理是 Poincaré 定理及 Hartogs 定理. Poincaré 定理说：不存在双全纯映射将 $\boldsymbol{C}^n$ $(n\geqslant 2)$ 中的单位球映为多圆柱，这里 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in \boldsymbol{C}^n$，单位球定义为 $B(0,1)=\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$，多圆柱定义为 $D^n(0,1)=\{z\in \boldsymbol{C}^n \mid |z_1|<1,\cdots,|z_n|<1\}$. 映射 $f(z)=(f_1(z),f_2(z),\cdots,f_n(z))$ 称为在域（连通开集）$\Omega\subseteq \boldsymbol{C}^n$ 上全纯，若每个 $f_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为在域 Ω 上是全纯函数. 函数 $g(z)=g(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$ 称为在域 $\Omega\subseteq \boldsymbol{C}^n$ 上全纯，若固定任意的 $n-1$ 个变数，$g(z)$ 是余下那个变数的全纯函数. 全纯映射称为是**双全纯**（biholomorphic），如果映射是一一的，且映上，且 f^{-1} 也是全纯的（最后一个要求是多余的，但证明复杂）. Poincaré 定理说，在高维（维数 $\geqslant 2$）的情形下，第四章中的 Riemann 映射定理

是不成立的. Hartogs 定理说：在 $C^n(n\geqslant 2)$ 中存在这样的区域，当函数在这区域上全纯时，一定在一个比它更大一些的区域上全纯，也就是说：在 $C^n(n\geqslant 2)$ 中存在这样的区域，如函数在这区域上全纯，一定可以全纯开拓到一个更大一些的区域上去. 这个现象在单复变数时是不存在的，由 Hartogs 定理立即产生一个根本性的问题，我们应该在怎样的区域上讨论函数论.

经过二百多年的努力，单复变数函数论已经成熟，而人们对多复变数函数论的了解只是开始.

在这一章中，先叙述一些可以从单复变数函数论并不困难地推广到多复变数函数论的结果，然后来证明 Poincaré 定理及 Hartogs 定理，以作为对多复变数函数论的理解的敲门砖. 为简单起见，这里只讨论两个复变数的情形，即在 $C^2=C\times C$ 中讨论，而对 Hartogs 定理也只是在特殊情形下证明.

以下的这些定理只叙述结果而不证，其证明的方法与单复变数的情形是相仿的，读者可参照单复数的相应定理的证明来证明这些定理.

定理1（Cauchy 积分公式） 设 $w=(w_1,w_2)\in C^2$， $r>0$，$D^2(w,r)=\{z=(z_1,z_2)\in C^2\mid |z_1-w_1|<r,|z_2-w_2|<r\}$ 为以 w 为中心，以 r 为半径的双圆柱，若 $f(z)$ 在 $\overline{D}^2(w,r)$ 上全纯，则

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\partial D(w_1,r)}\int_{\partial D(w_2,r)}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{1.1}$$

对任意的 $z\in D^2(w,r)$ 都成立.

这只要应用两次单复变数全纯函数的 Cauchy 积分公式即可得到.

如同单复变数的情形一样，由(1.1)立即得到 $f(z)$ 的任意次偏导数都存在，且有

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f(z)$$
$$=\frac{j!k!}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\partial D(w_1,r)}\int_{\partial D(w_2,r)}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1-z_1)^{j+1}(\zeta_2-z_2)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2,$$

这里 j,k 为任意非负整数,由此立即得到 Cauchy 不等式

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f(z)\right|\leqslant\frac{Mj!k!}{r^{j+k}},$$

这里 $M=\sup\limits_{|\zeta_1-z_1|=r,|\zeta_2-z_2|=r}|f(\zeta)|$,其中 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$.

如同单复变数的情形一样,如果 $f(z)$ 在 $\overline{D^2}(w,r)$ 的邻域上全纯,则 $f(z)$ 可以展开成 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}(z_1-w_1)^j(z_2-w_2)^k,$$

且在 $\overline{D^2}(w,r)$ 绝对一致收敛,且

$$a_{jk}=\frac{1}{j!k!}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f(w).$$

如同单复变数的情形一样,可以证明

定理2 若 $f(z)$ 在域 $U\subseteq \boldsymbol{C}^2$ 上全纯,且在 U 中的一个开集上,$f(z)$ 等于零,则 $f(z)$ 在 U 上恒等于零.

定理3(最大模原理) 若 U 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的有界域,$f(z)$ 在 U 上全纯,$M=\sup\limits_{\zeta\in\partial U}\varlimsup\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in U}}|f(z)|$,则 $|f(z)|<M$ 对所有 $z\in U$ 都成立,除去 f 是常数的情形.

同样也有类似于第三章§3.1定理1(Weierstrass 定理).

定理4(Weierstrass 定理) 若 Ω 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的域,$\{f_n\}$ 为 Ω 上的全纯函数序列,且在 Ω 的每一紧致子集上一致收敛,则 $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ 在 Ω 上全纯,且 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f_n\right\}$ 在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛到 $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^k f$.

也可以有类似于第四章§4.2定理3(Montel 定理).

定理5(Montel 定理) 若 $\mathscr{F}=\{f_n\}$ 为 $\Omega\subseteq \boldsymbol{C}^2$ 上的全纯函数族，且存在 $M>0$ 使得 $|f(z)|\leqslant M$ 对所有 $z\in\Omega, f\in\mathscr{F}$ 都成立，则 $\mathscr{F}$ 中任一序列 $\{f_n\}$ 一定有子序列在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛，即 $\mathscr{F}$ 为一正规族.

§6.2 Cartan 定理

在第二章§2.5中我们定出了单位圆上的全纯自同构群，现在要来定出 $\boldsymbol{C}^2$ 中的单位球及双圆柱上的全纯自同构群，并藉此来证明 Poincaré 定理.

回顾在定出单位圆上的全纯自同构群时，主要是用了 Schwarz 引理，在多复变数的情形，我们要应用推广了的 Schwarz 引理，在这里是 Cartan 的两条定理.

定理6(Cartan 定理) 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}^2$ 为有界域，$P\in U$，若 $f=(f_1, f_2)$ 为全纯映射将 U 映入到 U，且 $f(P)=P$，$J_f(P)=I$，则 $f(z)\equiv z$，这里 $J_f(z)$ 为 f 在 z 点的 Jacobi 矩阵，即

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{pmatrix}.$$

I 为单位方阵，即

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

证明 不妨设 $P=0$，用反证法. 如果定理不成立，则 $f(z)$ 在0点可以展开成 Taylor 级数

$$f(z_1,z_2)=z+A_m(z)+\cdots,$$

这里 $A_m(z)=\left(A_m^{(1)}(z), A_m^{(2)}(z)\right)$ 为第一个出现不为0的项，这里 $A_m^{(1)}(z), A_m^{(2)}(z)$ 为 m 次齐次多项式($m\geqslant 2$).

记 $f^1=f, f^2=f\circ f,\cdots, f^j=f^{j-1}\circ f\,(j\geqslant 2)$，于是

$$
\begin{aligned}
f^1(z) &= z + A_m(z) + \cdots, \\
f^2(z) &= f(z) + A_m(f(z)) + \cdots \\
&= z + A_m(z) + A_m(z) + \cdots \\
&= z + 2A_m(z) + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^j(z) &= z + jA_m(z) + \cdots.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

由于 U 是有界域，f 将 U 映入到 U，故由定理5（Montel 定理），$\{f^j\}$ 为正规族，即有子序列 $\{f^{j_l}\}$ 当 $j_l\to\infty$ 时，$f^{j_l}\to F$. 由定理4（Weierstrass 定理），f^{j_l}的 m 阶导数在0点的值收敛到 F 的 m 阶导数在0点的值. 由(2.1)，f^{j_l}的 m 阶导数在0点的值当 $j_l\to\infty$时是趋于∞的. 另一方面，F 的 m 阶导数在0点的值不可能为∞，由此得到矛盾. 故 $A_m(z)\equiv 0$必须在 U 上成立，即 $f(z)\equiv z$.

这条 Cartan 定理，在单复变数的情形 U 为单位圆 D 时成为：若全纯函数 $f(z)$将 D 映入到 D，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $f(z)\equiv z$，即 Schwarz 引理等号成立的那部分.

下面来叙述及证明另一条 Cartan 定理.

若 $U\subseteq \boldsymbol{C}^2$ 为域，称此域为**圆型域**(circular domain)，若对任一点$(z_1,z_2)\in U$，任意的复数 μ，$|\mu|<1$，必有$(\mu z_1,\mu z_2)\in U$.

定理7（Cartan 定理） 若 $U\subseteq \boldsymbol{C}^2$ 为有界圆型域，f 为将 U 映到 U 自身的双全纯映射，且 $f(0)=0$，则 f 为线性映射，即 $f(z)=zA$，这里 A 为一常数方阵.

证明 令 $\theta\in[0,2\pi]$，$\rho_\theta(z_1,z_2)=(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)$，考虑映射 $g=\rho_{-\theta}\circ f^{-1}\circ\rho_\theta\circ f$，则

$$
J_g(0) = \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix} J_f^{-1}(0) \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} J_f(0) = I.
$$

由于 $g(z)$将 U 映入到 U，且 $g(0)=0$，$J_g(0)=I$，故由定理6，$g(z)\equiv z$. 此即

$$
f\circ\rho_\theta=\rho_\theta\circ f. \tag{2.2}
$$

将 f 在0点附近展开成收敛的幂级数

$$f(z)=\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}z_1^jz_2^k=\left(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}z_1^jz_2^k\right),$$

于是

$$\rho_\theta\circ f=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f_1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f_2)=\left(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1^jz_2^k\right),$$

而

$$\begin{aligned}f\circ\rho_\theta&=\left(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1)^j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_2)^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1)^j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_2)^k\right)\\&=\left(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+k)\theta}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+k)\theta}z_1^jz_2^k\right).\end{aligned}$$

由(2.2)，比较系数即得所有 $a_{jk}=0$除去 $j+k=1$，即得 $f(z)$在0点附近为线性的，故由定理2，$f(z)$在整个 U 上为线性的.

这条 Cartan 定理，在单复变数的情形 U 为单位圆 D 时成为：若全纯单叶函数 $f(z)$将 D 映到 D 自身且 $f(0)=0$，则 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.

有了这两条 Cartan 定理就可以定出 $\boldsymbol{C}^2$ 中的单位球及双圆柱上的全纯自同构群.

§6.3 单位球及双圆柱上的全纯自同构群

若 U 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的域，如果存在将 U 映为自身的双全纯映射 $f(z)$，则称此映射为 U 上的全纯自同构(holomorphic automorphism)或双全纯自同构(biholomorphic automorphism). U 上所有的全纯自同构的全体组成一个群，这个群称为 U 上全纯自同构群(group of holomorphic automorphism)，记作 $\mathrm{Aut}(U)$.

定理8 $\mathrm{Aut}(D^2(0,U))$是由双全纯映射

$$w=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\frac{z_1-a_1}{1-\bar{a}_1z_1},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\frac{z_2-a_2}{1-\bar{a}_2z_2}\right)\tag{3.1}$$

及

$$w=\left(e^{i\theta_2}\frac{z_2-a_1}{1-\bar{a}_1z_2},\quad e^{i\theta_1}\frac{z_1-a_2}{1-\bar{a}_2z_1}\right)\tag{3.2}$$

的全体所组成,这里 $z=(z_1,z_2)\in D^2(0,1)$, $a_1,a_2\in D(0,1)$, $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$.

证明 若 $\varphi(z)\in \mathrm{Aut}(D^2(0,1))$,且 $\varphi(0)=\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$,定义 $\psi(z)=\left(\frac{z_1-\alpha_1}{1-\bar{\alpha}_1z_1},\frac{z_2-\alpha_2}{1-\bar{\alpha}_2z_2}\right)$,则 $g\equiv\psi\circ\varphi\in \mathrm{Aut}(D^2(0,1))$,且 $g(0)=0$. 由定理7(Cartan 定理),

$$\begin{aligned}g(z)&=zA=(z_1,z_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\\&=(a_{11}z_1+a_{21}z_2,a_{12}z_1+a_{22}z_2).\end{aligned}$$

由于 $g\in \mathrm{Aut}(D^2(0,1))$,故

$$|a_{11}z_1+a_{21}z_2|<1,\quad |a_{12}z_1+a_{22}z_2|<1$$

对任意 $(z_1,z_2)\in D^2(0,1)$ 都成立,这立即导出 $|a_{ij}|<1(i,j=1,2)$. 取

$$z^{1,k}=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\bar{a}_{11}}{|a_{11}|},\quad \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\bar{a}_{21}}{|a_{21}|}\right)\in D^2(0,1),$$

$$z^{2,k}=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\bar{a}_{12}}{|a_{12}|},\quad \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\bar{a}_{22}}{|a_{22}|}\right)\in D^2(0,1),$$

则

$$g(z^{1,k})=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{11}|+|a_{21}|),*\right)\in D^2(0,1),$$

$$g(z^{2,k})=\left(*,\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{12}|+|a_{22}|)\right)\in D^2(0,1),$$

于是

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{11}|+|a_{21}|)<1,$$

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)(|a_{12}|+|a_{22}|)<1.$$

让 $k\to\infty$,即得

$$|a_{11}|+|a_{21}|\leqslant 1,\quad |a_{12}|+|a_{22}|\leqslant 1.\tag{3.3}$$

另一方面

$$\left(1-\frac{1}{k},0\right)\in D^2(0,1),\quad \left(0,1-\frac{1}{k}\right)\in D^2(0,1),$$

$$g\left(1-\frac{1}{k},0\right)=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)a_{11},\quad \left(1-\frac{1}{k}\right)a_{12}\right)\in D^2(0,1),$$

$$g\left(0,1-\frac{1}{k}\right)=\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)a_{21},\quad \left(1-\frac{1}{k}\right)a_{22}\right)\in D^2(0,1),$$

当 $k\to\infty$ 时，$\left(1-\frac{1}{k},0\right)$ 及 $\left(0,1-\frac{1}{k}\right)$ 趋于 $\partial D^2(0,1)$，故

$$(a_{11},a_{12})\in\partial D^2(0,1),\quad (a_{21},a_{22})\in\partial D^2(0,1),$$

于是

$$\max\{|a_{11}|,|a_{12}|\}=1,\quad \max\{|a_{21}|,|a_{22}|\}=1.\tag{3.4}$$

要(3.3)，(3.4)同时成立，只有下列两种情形：

(1) $|a_{11}|=1, a_{12}=0, a_{21}=0, |a_{22}|=1$,

(2) $|a_{12}|=1, a_{11}=0, a_{22}=0, |a_{21}|=1$,

也就是 A 只有下列两种情形：

(1) $A=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0\end{pmatrix}$.

于是得到

(1) $\psi\circ\varphi(z)=z\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2}\end{pmatrix}=(z_1e^{i\theta_1},\ z_2e^{i\theta_2})$,

或是

(2) $\psi\circ\varphi(z)=z\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0\end{pmatrix}=(z_2e^{i\theta_2},\ z_1e^{i\theta_1})$.

若 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$，则(1)即是

$$\left(\frac{\varphi_1-\alpha_1}{1-\bar{\alpha}_1\varphi_1},\ \frac{\varphi_2-\alpha_2}{1-\bar{\alpha}_2\varphi_2}\right)=(z_1e^{i\theta_1},z_2e^{i\theta_2}),$$

即

$$\frac{\varphi_1-\alpha_1}{1-\bar{\alpha}_1\varphi_1}=z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\quad \frac{\varphi_2-\alpha_2}{1-\bar{\alpha}_1\varphi_2}=z_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

从中解出

$$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\frac{\alpha_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}+z_1}{1+\bar{\alpha}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\frac{\alpha_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}+z_2}{1+\bar{\alpha}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}z_2}\right),$$

而此即为(3.1)的形式. 同样在(2)的情形,φ 为(3.2)的形式. 证毕.

下面要定出单位球上的全纯自同构群,可以直接验证

$$\varphi_a(z_1,z_2)=\left(\frac{z_1-a}{1-\bar{a}z_1},\ \frac{(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}z_2}{1-\bar{a}z_1}\right)\in \mathrm{Aut}(B(0,1)),\tag{3.5}$$

这里 $a\in\boldsymbol{C}$, $|a|<1$. 由于

$$\left|\frac{z_1-a}{1-\bar{a}z_1}\right|^2+\left|\frac{(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}z_2}{1-\bar{a}z_1}\right|^2 =\frac{|z_1|^2-2\mathrm{Re}\bar{a}z_1+|a|^2+(1-|a|^2)|z_2|^2}{|1-\bar{a}z_1|^2},$$

上式右边小于等于

$$\frac{1-|a|^2-2\mathrm{Re}\bar{a}z_1+|a|^2+|a|^2|z_1|^2}{|1-\bar{a}z_1|^2}=1$$

当且仅当 $(z_1,z_2)\in B(0,1)$. 故(3.5)成立. 显然 $(\varphi_a)^{-1}=\varphi_{-a}$,二行二列的方阵 U 称为酉方阵(unitary matrix),若 $U\overline{U}'=I$,这里 $\overline{U}'$ 为 U 的共轭转置. 映射 $w=zU$ 称为酉旋转,记作 $w=U(z)$.

定理9 若 $g(z)\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$,且 $g(0)=0$,则 g 为酉旋转,即 $g(z)=zA$,而 A 为酉方阵.

证明 由于 $B(0,1)$ 为圆型域,故由定理7(Cartan 定理)$g(z)=zA$,而 g 将单位向量映到单位向量. 若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},$$

(α,β) 为单位向量,则

$$(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=(\gamma,\delta)$$

也是单位向量，而

$$\gamma=a_{11}\alpha+a_{21}\beta,\quad \delta=a_{12}\alpha+a_{22}\beta.$$

于是

$$|a_{11}\alpha+a_{21}\beta|^2+|a_{12}\alpha+a_{22}\beta|^2=1. \tag{3.6}$$

取 $\alpha=1,\beta=0$ 及 $\alpha=0,\beta=1$，得到

$$|a_{11}|^2+|a_{12}|^2=1,\quad |a_{21}|^2+|a_{22}|^2=1. \tag{3.7}$$

将(3.7)代入(3.6)得到

$$\mathrm{Re}((a_{11}\bar{a}_{21}+a_{12}\bar{a}_{22})\alpha\bar{\beta})=0.$$

取 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\alpha=\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}},\beta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则得

$$\mathrm{Re}(a_{11}\bar{a}_{21}+a_{12}\bar{a}_{22})=0,$$

$$\mathrm{Im}(a_{11}\bar{a}_{21}+a_{12}\bar{a}_{22})=0,$$

所以

$$a_{11}\bar{a}_{21}+a_{12}\bar{a}_{22}=0. \tag{3.8}$$

由(3.7)，(3.8)即得 A 为酉方阵.

定理10 $\mathrm{Aut}(B(0,1))$中每个元素均可表为最多两个酉旋转及一个 φ_a 的复合，即 $\mathrm{Aut}(B(0,1))$是由酉旋转及 φ_a 及其复合所组成.

证明 若 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$，$f(0)=\alpha$，则有酉方阵 U，使得 $\alpha U=(|\alpha|,0)$. 作 $g(z)=\varphi_{|\alpha|}\circ U\circ f(z)$，这里 $\varphi_{|\alpha|}$ 由(3.5)所定义，将$(|\alpha|,0)$映为0点. 于是 $g(z)\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$，且

$$g(0)=\varphi_{|\alpha|}\circ U\circ f(0)=\varphi_{|\alpha|}\circ U\circ\alpha=0.$$

由定理9，

$$g(z)=zV=V(z),$$

这里 V 为酉方阵，于是

$$f(z)=U^{-1}\circ\varphi_{-|\alpha|}\circ V(z).$$

这就证明了定理10.

§6.4 Poincaré 定理

现在可以来证明重要的 Poincaré 定理.

定理11(Poincaré 定理) 不存在双全纯映射 Φ 将 $D^2(0,1)$映到 $B(0,1)$上.

证明 用反证法.如果存在这样的双全纯映射 φ 将 $D^2(0,1)$映为 $B(0,1)$,且 $\varphi(0)=\alpha$,则 $\Phi=\varphi_\alpha\circ\varphi$ 也是一个双全纯映射,将 $D^2(0,1)$映为 $B(0,1)$且 $\Phi(0)=\varphi_\alpha\circ\varphi(0)=0$,这里 φ_α 由(3.5)所定义.若 $h\in\mathrm{Aut}(D^2(0,1))$,则

$$h\to\Phi\circ h\circ\Phi^{-1}\in\mathrm{Aut}(B(0,1))\tag{4.1}$$

建立起这两个群之间的同构.若$(\mathrm{Aut}(D^2(0,1))_0$与$(\mathrm{Aut}B(0,1))_0$分别表示 $\mathrm{Aut}(D^2(0,1))$及 $\mathrm{Aut}B(0,1)$的包含有单位元的分支,于是(4.1)建立起了$(\mathrm{Aut}(D^2(0,1))_0$与$(\mathrm{Aut}B(0,1))_0$之间的同构,特别取在其中使原点不变的子群,分别记作 $\mathrm{Aut}_0(D^2(0,1))$及 $\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$,则(4.1)建立起这两个子群之间的群同构.

由定理8,$\mathrm{Aut}_0(D^2(0,1))$是由所有的双全纯映射 $w=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}z_1,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}z_2)=(z_1,z_2)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\end{pmatrix}$($\theta_1,\theta_2$为实数)组成,也就是这个群由所有的$\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\end{pmatrix}\right\}$组成.

由定理10,$\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$由所有的双全纯映射

$$w=zVU^{-1}$$

组成,这里 U,V 为酉方阵,由于酉方阵之逆及乘积仍为酉方阵,故 $\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$由所有的 $w=zX$ 组成,这里 X 为酉方阵,也就是这个群由所有的酉方阵所组成,即为酉群.

如果存在双全纯映射将 $D^2(0,1)$映到 $B(0,1)$,则由(4.1)建立起 $\mathrm{Aut}_0(D^2(0,1))$到 $\mathrm{Aut}_0(B(0,1))$的群同构,即群

$\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\right\}$与酉群相同构，但这是不可能的，因为群 $\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}\right\}$为 Abel 群即可交换群，而酉群不是 Abel 群，于是得矛盾. 故这样的双全纯映射 Φ 是不存在的，这就证明了 Poincaré 定理.

在第四章中的 Riemann 映射定理说：对任一边界点至少两点的单连通区域 Ω，一定存在一个全纯单叶函数将 Ω 映为单位圆，即两个区域如拓扑等价一定导出全纯等价. Poincaré 定理说：C^n $(n\geqslant 2)$时，这是不对的，即两个区域是拓扑等价的未必导出全纯等价. 于是就引出了 C^n 中区域的分类问题，即如果两个区域拓扑等价，什么时候全纯等价，这个问题距离解决还很远. 已经知道：任给两个拓扑等价的区域是全纯等价的概率为零，即几乎所有拓扑等价的域相互都不全纯等价.

这里反过来看出第四章中的 Riemann 映射定理是一个非常深刻的定理，这个定理只在一维时才成立，由此出发可以得到只有在一维情形下成立的一系列深刻的定理.

§6.5 Hartogs 定理

在单复变数的情形，若 Ω 为 C 中的域，$a\in C\backslash\Omega$，那末一定存在一个在 Ω 上的全纯函数 f，使得这个函数不可能解析开拓到 a 点，这是容易做到的，例如取 $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$即可. 但是到了多复变数，这件事就不成立，这种现象称之为 Hartogs 现象(Hartogs phenomenon). 一般的 Hartogs 定理可叙述如下.

定理12(Hartogs 定理) 若 $\Omega\subseteq C^n$ 为域，$n\geqslant 2$，K 为 Ω 中紧致子集，且 $\Omega\backslash K$ 为连通的，若 f 为 $\Omega\backslash K$ 上全纯函数，则存在一个在 Ω 上的全纯函数 F，使得 F 在 $\Omega\backslash K$ 上等于 f.

也就是说：如果函数在 $\Omega\backslash K$ 上全纯，一定可以全纯开拓到 Ω 上去.

这里不给出这个定理的证明，只是在一些特殊情形下来证明 Hartogs 定理.

若 R 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的一个域，R 称为一个 Reinhardt 域，若 $z=(z_1, z_2)\in R$ 导出 $(e^{i\theta_1}z_1, e^{i\theta_2}z_2)\in R$ 对任意实数 θ_1,θ_2 都成立.

定理13 若 R 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的一个 Reinhardt 域，$f(z)$ 为 R 上的全纯函数，则 f 在 R 上可以展开成 Laurent 级数

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk}z_1^jz_2^k, \tag{5.1}$$

这个级数在 R 中任一紧致子集上一致收敛到 f，且这样的级数展开式是唯一的.

证明 先证唯一性. 取 $w=(w_1,w_2)\in R$，且 $w_1\neq 0, w_2\neq 0$. 因 (5.1) 在 R 中任一紧致子集上一致收敛，令 $z_1=w_1e^{i\theta_1}, z_2=w_2e^{i\theta_2}$，则 $(z_1,z_2)\in R$，当 $-\pi\leqslant\theta_1\leqslant\pi, -\pi\leqslant\theta_2\leqslant\pi$ 时，所有 (z_1,z_2) 是 R 中的一个紧致子集，于是

$$a_{jk}=\frac{w_1^{-j}w_2^{-k}}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(w_1e^{i\theta_1},w_2e^{i\theta_2})e^{-i(j\theta_1+k\theta_2)}d\theta_1d\theta_2,$$

即所有的 a_{jk} 由 f 所唯一确定.

再证 (5.1) 的存在性.

首先可以看出：若 $f(z)$ 在 $\Omega=\{z\in\boldsymbol{C}^2 \mid r_1<|z_1|<R_1, r_2<|z_2|<R_2\}$ 上全纯，则可以两次应用单复变数函数的 Laurent 展开，得到 $f(z)$ 在 Ω 上的 Laurent 展开式

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} b_{jk}z_1^jz_2^k,$$

且在 Ω 中任一紧致子集上一致收敛.

若 $w=(w_1,w_2)\in R$，则可取 ε 充分地小，使得

$$\begin{aligned}\Omega(w,\varepsilon)=\{z\in\boldsymbol{C}^2 \mid\ & |w_1|-\varepsilon<|z_1|<|w_1|+\varepsilon,\\ & |w_2|-\varepsilon<|z_2|<|w_2|+\varepsilon\}\subseteq R,\end{aligned}$$

这是能做到的. 于是 $f(z)$ 在 $\Omega(w,\varepsilon)$ 上有 Laurent 展开式

$$f(z) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk}(w) z_1^j z_2^k, \quad z \in \Omega(w, \varepsilon),$$

且在 w 的一个邻域中一致收敛于 f.

若 $w' \in \Omega(w,\varepsilon)$，而 $f(z)$在 w' 点有 Laurent 展开式

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk}(w') z_1^j z_2^k,$$

由 Laurent 展开式的唯一性，$a_{jk}(w') = a_{jk}(w)$，也就是 $a_{jk}(w)$在 R 中局部为常数，由于 R 为连通的，故 $a_{jk}(w) = a_{jk}$是一个不依赖于 w 的常数，于是 $f(z)$在 R 中有 Laurent 展开式

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{jk} z_1^j z_2^k,$$

且在任一点 $z \in R$ 的邻域中一致收敛，故在 R 中任一紧致子集上一致收敛.

由定理13即可导出

定理14 若 R 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的一个 Reinhardt 域，在 R 中存在这样的点，既含有第一个坐标为0的点，也含有第二个坐标为0的点，即有点 $z=(z_1,z_2)$，或是 $z_1=0$，或是 $z_2=0$，那末在 R 上全纯的函数 $f(z)$一定可以在 R 中有展开式

$$f(z) = \sum_{j,k\geqslant 0} a_{jk} z_1^j z_2^k, \tag{5.2}$$

且在 R 的任意紧致子集上，级数一致收敛.

证明 由定理13，$f(z)$可以有展开式(5.1)，由于 R 中有这样的点$(0,z_2)$，所以在(5.1)中所有 $j<0$的 a_{jk}全为零，否则(5.1)不可能在$(0,z_2)$的邻域中一致收敛，同样由于在 R 中存在这样的点$(z_1,0)$，所以在(5.1)中所有 $k<0$的 a_{jk}全为零. 于是定理获得证明.

定理15(Reinhardt 域上的 Hartogs 定理) 若 R 为 $\boldsymbol{C}^2$ 中的 Reinhardt 域，且在 R 中存在这样的点，其第一个坐标为0或是第二个坐标为0，即 $z_1=0$或 $z_2=0$，于是任意在 R 上全纯的函数$f(z)$一定可以全纯开拓到 $R' = \{(\rho_1 z_1, \rho_2 z_2) \in \boldsymbol{C}^2 \mid 0 \leqslant \rho_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \rho_2 \leqslant 1,$

$(z_1,z_2)\in R\}$，即在 R' 上存在一个全纯函数 F，使得当 $z\in R$ 时，$F=f$.

定理的证明是显然的. 由于 $f(z)$ 在 R 中可以展开成(5.2)，对任意 $z\in R$，(5.2)在 z 的邻域中是一致收敛的，若 $(\rho_1z_1,\rho_2z_2)\in R'$，于是

$$\sum_{j,k\geqslant 0} a_{jk}\rho_1^j\rho_2^k z_1^j z_2^k$$

是收敛的，因此(5.2)在 (ρ_1z_1,ρ_2z_2) 的邻域是一致收敛的. 记其收敛的函数为 F，这就是我们所要的 F.

下面立即可以举出两个具体的例子来说明 Hartogs 现象.

例1 令 $B_r(0,1)=\{z=(z_1,z_2)\in \boldsymbol{C}^2 \mid r<|z_1|^2+|z_2|^2<1\}$，则 $B_r(0,1)$ 为一个 Reinhardt 域，这里 $0<r<1$. 所以如果 $f(z)$ 在 $B_r(0,1)$ 上全纯，那末一定可以全纯开拓到 $B(0,1)=\{z=(z_1,z_2)\in \boldsymbol{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$，即开拓到单位球上.

例2 $D_r^2(0,1)=\{z=(z_1,z_2)\in \boldsymbol{C}^2 \mid r_1<|z_1|<1, r_2<|z_2|<1\}$，则 $D_r^2(0,1)$ 为 Reinhardt 域，这里 $0<r_1<1$，$0<r_2<1$，所以如果 $f(z)$ 在 $D_r^2(0,1)$ 上全纯，那末一定可以全纯开拓到 $D^2(0,1)=\{z=(z_1,z_2)\in \boldsymbol{C}^2 \mid |z_1|<1, |z_2|<1\}$，即开拓到双圆柱上.

以上讨论了 Reinhardt 域上的 Hartogs 定理，由于在多复变数中有 Hartogs 定理，那末怎样的域才是我们该讨论的？粗略地讲，应该讨论那些没有 Hartogs 现象的域，这类域称为全纯域(domain of holomorphy). 对全纯域的研究是本世纪多复变数函数论研究的最主要的主题之一，有兴趣的读者可参阅有关多复变数函数论的书，例如，S. G. Krantz[2]，R. Narasimhan[2].

这一章的讨论是在 $\boldsymbol{C}^2$ 中进行的，不难看出，这些结果都可以无困难地推广到 $\boldsymbol{C}^n$ 中去.

参 考 文 献

华罗庚

[1] 高等数学引论,第二卷,科学出版社,1982.

庄圻泰和张南岳

[1] 复变函数,北京大学出版社,1984.

余家荣

[1] 复变函数,高等教育出版社,1980.

范莉莉和何成奇

[1] 复变函数论,上海科学技术出版社,1987.

龚昇和张声雷

[1] 简明微积分,第一册,第二册,第三册,高等教育出版社,1983(第一版);中国科学技术大学出版社,1993(第二版).

Ahlfors, L. V.

[1] Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] An Extension of Schwarz's Lemma, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **43**(1938), 359—364.

[3] Conformal in variants, McGraw-Hill, 1973.

Ahlfors, L. V. and Sario, L.

[1] Riemann Surfaces, Princeton University Press, 1960.

Bell, S. R.

[1] The Cauchy Transform Potential Theory and Conformal Mappings, CRC Press, 1992.

Berenstein, C. A. and Gay, R.

[1] Complex Variables, An Introduction, Springer-Verlag, 1991.

Cartan, H.

[1] Théorie Elémentaire des Fonctions Analytique d'une ou Plusieurs Variables Complexes, Paris, 1961.

Carathéodory, C.

[1] Conformal Representation, Cambridge University Press, 1958.

[2] Theory of functions of a complex variable, Vol. I, II, chelsea, 1954.

Conway, J. B.

[1] Function of One Complex Variable, Springer-Verlag, 1986.

Fuchs, W. H. J.

[1] The Theory of Function of One Complex Variable, Van Nostrand, 1967.

Grauert, H. and Reckziegel, H.

[1] Hermiteschen Metriken und Normale Familien Holomorpher Abbildungen, *Math. Z.*, **89**(1956), 108—125.

Greene, R. E. and Krantz, S. G.

[1] Biholomorphic Self-Maps of Domains, *Lecture Notes*, no. 1276, Springer-Verlag, 136-207.

Heins, M.

[1] Complex Function Theory, Academic Press, 1968.

Hill, E.

[1] Analytic Function Theory, Chelsea, 1959.

Hurwitz, A. and Courant, R.

[1] Funktionen Theorie, 4th ed. Springer-Verlag, 1964.

Jordan, C.

[1] Cours d'Analyse, Gauthier-Villars, 1893.

Kobayashi, Z.

[1] Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, 1970.

Krantz, S. G.

[1] Complex Analysis: The Geometric Viewpoint, MAA, 1990.

[2] Theory of Several Complex Variables, John Wiley and Sons, 2nd ed., 1991.

[3] Partial Differential Equations and Conformal Analysis, CRC Press, 1992.

Lang, S.

[1] Complex analysis, 2nd ed, Springer-Verlag, 1985.

Markushevich, A. I.

[1] Theory of functions of a complex variable, chelsea, 1977.

Minda, D. and Schober, G.

[1] Another Elementary Approach to the Theorems of Landau, Montel, Picard and Schottky, *Complex Variables*, **2**(1983), 157—164.

Narasimhan, R.

[1] Complex Analysis in One Variable, Birkhäuser, 1984.

[2] Several Complex Variables, Chicago, University of Chicago Press, 1971.

Nevanlinna, R.

[1] Analytic Functions, Springer-Verlag, 1970.

Palka, B. P.

[1] An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag, 1991.

Robinson, R. M.

[1] A Generalization of Picard's and Related Theorems, *Duke Math. J.*, **5** (1939), 118—132.

Rudin, W.

[1] Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, 1966.

Saks, S. and Zygmund, A.

[1] Analytic Functions, Elsevier, 1971.

Siegel, C. L.

[1] Topics in Complex Function Theory, John Wiley and Sons, 1969.

Titchmarch, E. C.

[1] The Theory of Functions, Oxford University Press, 1939.

Zalcman, L.

[1] A Heuristic Principle in Complex FunctionTheory, *Amer. Math. Soc. Monthly*, **82**(1975), 813—817.