第一章　函数　极限　连续

一、基本要求

(一)函数

1．理解函数的概念，明确函数定义中的两个要素(对应关系和定义域)，会求定义域．了解函数性质(奇偶性，单调性，周期性和有界性)．

2．理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数和隐函数的概念，并会将复合函数拆成简单函数．

3．掌握基本初等函数的性质及图形．

(二)极限

1．理解极限的概念，明确变量的极限是描述变量的变化趋势．

2．了解极限的性质(唯一性，有界性和保号性)和极限存在的两个准则(夹逼和单调有界)．

3.掌握极限的四则运算法则和两个重要极限,并会利用它们求极限．

4．了解无穷小与无穷大的概念和性质，会用等价无穷小求极限．

(三)连续

1．理解函数在一点和在一个区间上连续的概念，明确连续定义的三个要素．

2．了解间断点的概念，会判断间断点的类型．

3．了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的介值定理、有界性定理与最大值和最小值定理，并会一些简单的应用．

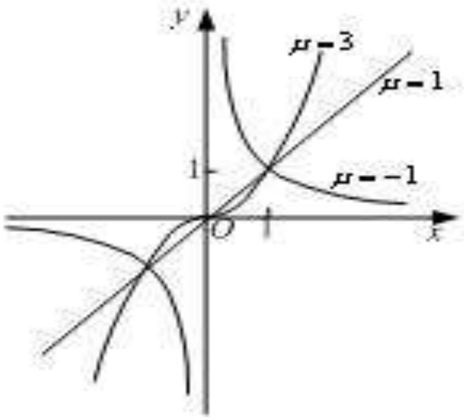
二、要点提示

（一）五种基本初等函数

1.幂函数

（1）表达式：$y=x^{\mu}$（μ是常数）

（2）图形：



（3）特性：

①当μ为正整数时，函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，图形经过点$(0,0)$且当$\mu>1$时在$(0,0)$处与x轴相切．当μ为奇数时，图形关于原点对称；当μ为偶数时，图形关于y轴对称；

②当μ为负整数时，函数的定义域为$(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$；

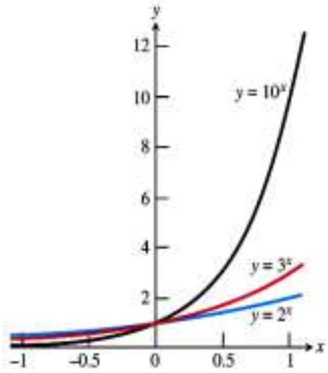
③当μ为正有理数$\frac{m}{n}$时，n为偶数时函数的定义域为$(0,+\infty)$，n为奇数时函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$；图形均经过点$(0,0)$及$(1,1)$；若$m>n$，图形与x轴相切；若$m<n$，图形与y轴相切；若m为偶数，图形关于y轴对称；若m,n均为奇数，图形关于原点对称；

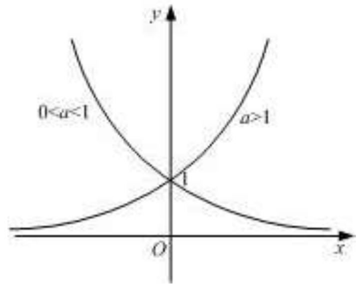
④当μ为负有理数时，n为偶数时函数的定义域为$(0,+\infty)$，n为奇数时函数的定义域为$(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$.

2．指数函数

（1）表达式：$y=a^{x}$（a是常数且$a>0,a\neq1$）

（2）图形：





（3）特性：

①定义域为$(-\infty,+\infty)$；且对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$y>0$，即图形总在$x$轴上方且通过点$(0,1)$；

②当$a>1$时函数单调增加；当$a<1$时函数单调减少；

③指数函数运算法则：

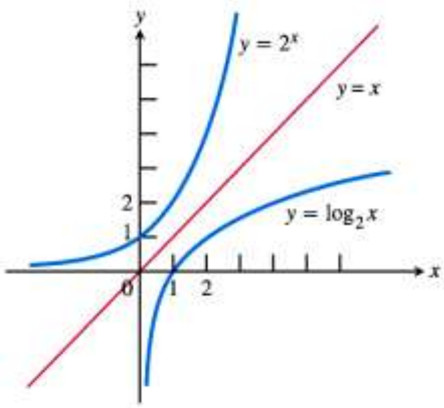
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$；$(ab)^m=a^m b^m$；

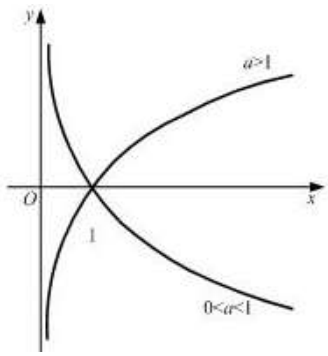
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$；$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$；$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$.

3. 对数函数

（1）表达式：$y=\log_a x$（a是常数且$a>0,a\neq1$）

（2）图形：





（3）特性：

①定义域为$(0,+\infty)$；图形位于y轴右方并通过点$(1,0)$；

②当$a>1$时函数单调增加；当$a<1$时函数单调减少；

③对数的性质与运算法则：

零与负数没有对数； $\log_a a = 1;\quad \log_a 1 = 0;$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y;\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\quad \log_a x^{\varepsilon} = \alpha \log_a x;$$

$$a^{\log_a y} = y;\quad \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a};\quad \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

④常用对数与自然对数：

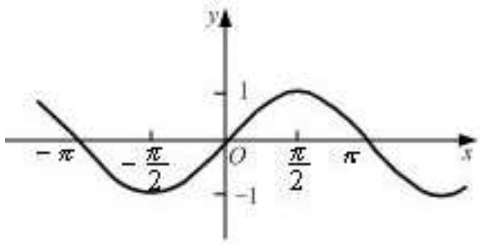
常用对数：以 10 为底的对数称为常用对数，记作 $\lg x = \log_{10} x$；

自然对数：以无理数 $e = 2.718281828459\cdots$ 为底的对数称为自然对数，记作 $\ln x = \log_e x$；

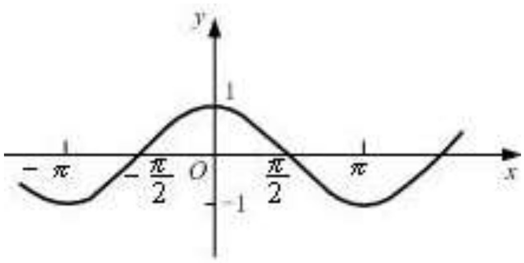
常用对数与自然对数的关系：$\lg y = M \ln y, \ln y = \frac{1}{M} \lg y,$ 式中 M 称为模数，$M = \lg e = 0.434294481903\cdots; \frac{1}{M} = \ln 10 = 2.30258509299\cdots$

4. 三角函数

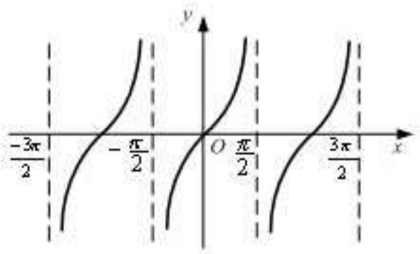
（1）正弦函数：$y = \sin x, \forall x \in (-\infty, +\infty).$ 值域为 $[-1,1]$，周期为 2π .



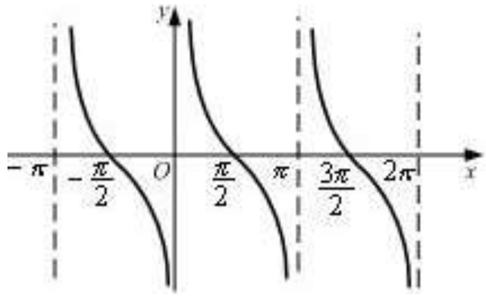
（2）余弦函数：$y = \cos x, \forall x \in (-\infty, +\infty).$ 值域为 $[-1,1]$，周期为 2π .



（3）正切函数：$y=\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$. 值域为$(-\infty,+\infty)$，周期为$\pi$.

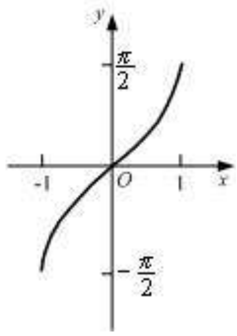


（4）余切函数：$y=\cot x, x\neq k\pi, k\in Z$. 值域为$(-\infty,+\infty)$，周期为$\pi$.

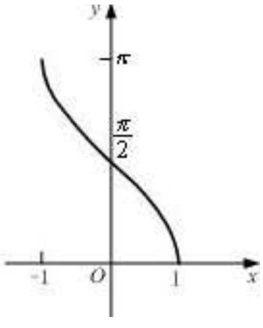


5. 反三角函数

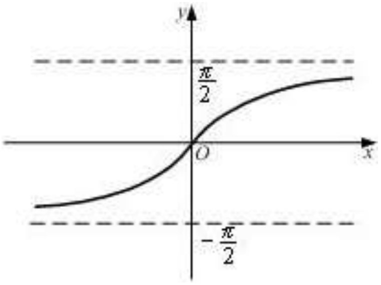
（1）反正弦函数：$y=\arcsin x, \forall x\in[-1,1]$. 值域为$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$.



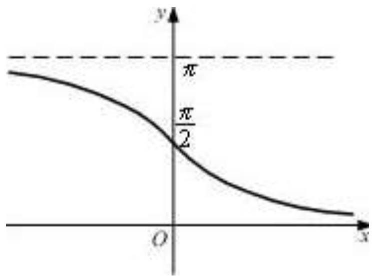
（2）反余弦函数：$y=\arccos x, \forall x\in[-1,1]$. 值域为$[0,\pi]$.



（3）反正切函数：$y=\arctan x,\forall x\in(-\infty,+\infty)$．值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



（4）反余切函数：$y=arc\cot x,\forall x\in(-\infty,+\infty)$．值域为$(0,\pi)$.



（二）关于极限的定义

1．数列的极限

描述性定义（两种）：

(1) 对于数列$\{x_n\}$, 当n无限增大时，数列$\{x_n\}$任意地接近于某一确定的数值a，即$|x_n-a|$任意小，则称数列$\{x_n\}$的极限为a，或称$\{x_n\}$收敛于a.

(2) $\forall\varepsilon>0$，当n充分大时，恒有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$, 则称$\{x_n\}$的极限是a.

分析性定义($\varepsilon-N$定义)：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$(正整数)，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$的极限是a.

记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，或$x_n \to a(n\to\infty)$.

2. 函数的极限

当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限定义：

描述性定义（两种）：

(1) 如果自变量的绝对值$|x|$无限增大时，对应的函数$f(x)$任意地接近于一个确定的数值 A，则称当$x\to\infty$时，$f(x)$的极限为A.

(2) $\forall\varepsilon>0$, 当$|x|$充分大时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当$x\to\infty$时，$f(x)$的极限为A.

分析性定义($\varepsilon - X$定义)：

$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当$x\to\infty$时，$f(x)$的极限为A.

记为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

当$x\to x_0$时，函数的极限：

描述性定义（两种）：

(1) 如果当自变量x任意接近x_0时，对应的函数值$f(x)$任意地接近一个确定的数值A，则称当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限是A.

(2) $\forall\varepsilon>0$, 当x充分接近x_0时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限是A.

分析性定义($\varepsilon-\delta$定义)：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时(即$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$)，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限是$A$.

记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，或$f(x)\to A(x\to x_0)$.

函数有极限实际上是指自变量在某一变化过程中，对应的函数值的一种变化趋势，即函数值任意接近于某一确定数值，极限的两种定义以

不同的方式给予了刻画．描述性定义比较直观，易理解，但它不够严格，它是一种“定性”的描述；分析性定义，看起来不好理解，但它是用数学语言严格的、无可挑剔的描述，它是一种“定量”的描述． 在数学推导和证明中，运用非常方便．

（三）本章中求极限的方法(以后还会有其他方法)：

1．利用极限的四则运算法则(有时需先对函数作恒等变形，变量代换，有理化，通分等)

2．利用两个重要极限

3．利用极限存在的两个准则(夹逼和单调有界)

4．利用无穷小的准则

(1) 无穷小与无穷大的关系

(2) 无穷小与有界量的乘积仍是无穷小

(3) 等价无穷小代换

5．利用函数的连续性

6．对于分段函数，在分段点利用左右极限来确定极限是否存在.

(四)连续性的等价定义

若 1．$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

或 2．$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

或 3.（$\varepsilon - \delta$ 形式）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(五)间断点的分类

按照在间断点处函数的左、右极限是否都存在来分类，若间断点处的左、右极限都存在，则为第一类，否则，间断点为第二类.

第一类包括跳跃间断点和可去间断点.

第二类包括无穷间断点和振荡间断点等.