第五章 定积分的应用

一、基本要求

1. 掌握将实际问题表达成定积分的元素法.

2. 会建立简单几何量和物理量的积分表达式.

二、要点提示

1. 定积分的元素法：

设所求量U是与一个变量例如x的变化有关，x的变化区间为$\left[a,b\right],a<b,U$对于区间$\left[a,b\right]$具有数量的可加性，如果U在区间$\left(a,b\right)$内任一区间$\left[x,x+dx\right]$上的部分量ΔU可近似地表示为$f(x)dx$，其中$f(x)$为$\left[a,b\right]$上的已知连续函数，并且满足$\Delta U\approx f(x)dx$，其误差为Δx的高阶无穷小.则$dU=f(x)dx$称为U的元素.积分得到$U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$，以上求$U$的方法称为定积分的元素法.

2. 定积分的几何应用

（1）平面图形的面积

若图形由连续曲线$y=f(x)$，直线$x=a,x=b(a<b)$及x轴围成，则面积元素为$dA=\left|f(x)\right|dx$，面积为$A=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$.

若图形由连续曲线$x=g(y)$，直线$y=c,y=d(c<d)$及y轴围成，则面积元素为$dA=\left|g(y)\right|dy$，面积为$A=\int_c^d\left|g(y)\right|dy$.

若图形由连续曲线$y=f(x)$，$y=h\left(x\right)$,直线$x=a,x=b(a<b)$所围成，则面积元素为$dA=\left|f(x)-h\left(x\right)\right|dx$，面积为$A=\int_a^b\left|f(x)-h\left(x\right)\right|dx$.

若图形（图 5-1）由极坐标表示的连续曲线$\rho=\rho(\theta)$，射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$围成，则面积元素为$dA=\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta$，面积为 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta$.

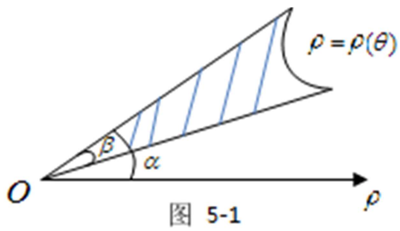

图 5-1

（2）立体的体积

（i）旋转体的体积：连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成的立体，体积元素为 $dV=\pi f^2(x)dx$，体积为 $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

连续曲线 $x=g(y)$，直线 $y=c,y=d(c<d)$ 及 y 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周形成的立体体积元素为 $dV=\pi g^2(y)dy$，体积为 $V=\pi\int_c^d g^2(y)dy$.

（ii）平行截面面积已知的立体体积：设过点 $x\in[a,b]$ 且垂直于 x 轴的平面与立体相交的截面面积为 $A(x)(a\le x\le b)$，则立体的体积元素为 $dV=A(x)dx$，体积为

$$A=\int_a^b A(x)dx.$$

（3）平面曲线弧长

设曲线弧是光滑的，则

	曲线弧	弧元素（弧微分）ds	弧长
直角坐标	$y=f(x)(a\le x\le b)$ $x=g(y)(c\le y\le d)$	$\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ $\sqrt{1+g'^2(y)}dy$	$s=\int_a^b\sqrt{1+y'(x)^2}dx$ $s=\int_c^d\sqrt{1+g'^2(y)}dy$
参数方程	$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\ (\alpha\le t\le\beta)$	$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$	$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$
极坐标	$\rho=\rho(\theta),(\alpha\le\theta\le\beta)$	$\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$	$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta$

3．定积分的物理应用

（1）变力沿曲线作功：

变力 $F(x)$（大小变化，方向不变）沿 x 轴从点 a 移动到点 b，则在 $[x,x+dx]$ 上的功元素为 $dW=F(x)dx$，所作功为：$W=\int_a^b F(x)dx$

（2）液体侧压力：

设液体比重为 γ，由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形平

板铅直放在液体内部（图 5-2），则在$\left[x, x+dx\right]$上压力元素为

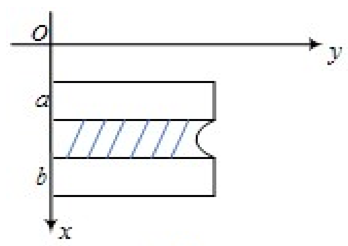

图 5-2

$$dP = \gamma x f(x) dx\text{，}$$

该平板的一侧所受的液体压力为$P = \gamma \int_a^b x f(x) dx$.

（3）引力

设一细直棒长度为l，线密度为ρ，质点M的质量为m，距直棒距离为a，求该棒对质点M的引力.

取坐标系如图 5-3，其中$d = l + c$，在$\left[x, x+dx\right]$上的部分引力ΔF的大小为$G\dfrac{m\rho dx}{a^2 + x^2} = \left|dF\right|$，

引力在铅直方向分力F_y的元素为

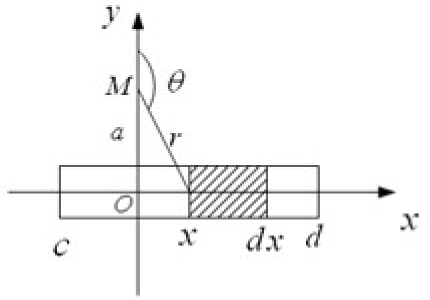

图 5-3

$$dF_y = \left|dF\right| \cos\theta = -G\frac{am\rho dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\text{，}$$

引力在水平方向分力F_x的元素为

$$dF_x = \left|dF\right| \sin\theta = G\frac{m\rho y dy}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\text{，}$$

故　　$F_x = \int_c^d dF_x$，　$F_y = \int_c^d dF_y$.

注　不可将$\left|dF\right|$当作引力元素，来得到引力$\int_c^d G\dfrac{m\rho}{a^2 + x^2} dx$. 因为引力是向量，方向不同，不可用数量加法，故不能直接用定积分计算.