第 4 章 无穷级数

一、基本要求

1． 理解无穷级数收敛、发散以及和的概念，了解无穷级数的基本性质，熟悉无穷级数收敛的充分必要条件和必要条件.

2． 掌握正项级数收敛的比较审敛法和比值审敛法，了解根值审敛法.

3． 掌握交错级数收敛的莱布尼兹判别法，理解绝对收敛和条件收敛的概念.

4． 理解幂级数收敛半径的概念，掌握收敛半径和收敛区间的求法.

5． 了解幂级数的主要性质.

6． 会求较简单函数的幂级数展开式及和函数，并会利用和函数求常数项级数的和.

7． 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理，会将定义在$\left[-\pi,\pi\right)$和$\left[-l,l\right)$上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在$\left[0,l\right)$上的函数展开为傅里叶正弦或余弦级数.

二、要点提示

（一）常数项级数

1．常数项级数敛散性的概念

给定常数项无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，称$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和.

若$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$s$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$，此时称$r_n=s-s_n$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的余项.

收敛的充分必要条件：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$.

2．级数的基本性质

（1）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=ks$（$k$为常数），

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$发散（$k$是不为零的常数）；

（2）若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n=s\pm\sigma$；

反之不然，但对于正项级数可以成立.

注意 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散$\not\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散.

（3）在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性；

（4）收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原来的和.由此推出，若加括号后所成的级数是发散的，则原来的级数也是发散的.

3．几个重要的级数的敛散性

（1）等比级数：$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}(a\neq0)$，当$|q|<1$时收敛于$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geq1$时发散.

（2）调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$是发散的.

（3）p级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$（常数$p>0$），当$p>1$时收敛；当$0<p\leq1$时发散.

4．级数收敛的必要条件

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

逆否命题成立：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，可用来判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

5．常数项级数敛散性的判别法

（1）正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$（$u_n\geq0$）敛散性的判别法

①正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是：部分和数列$\{s_n\}$有界.

②比较审敛法及其极限形式

比较审敛法 设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，

若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，且$u_n\leq v_n$（$n>N,N$为正整数），则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，且$u_n \geq v_n$（$n > N, N$为正整数），则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

比较审敛法的极限形式　设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，

若$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l(v_n \neq 0, 0 < l < +\infty)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$有相同的敛散性.

当$l = 0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

当$l = +\infty$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

使用比较判别法时，必须熟记一些敛散性已知的正项级数作为“参照”级数，如几个重要级数：等比级数，调和级数，$p-$级数等.

③比值审敛法（达朗贝尔判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，若$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$（或为$+\infty$），则当$\rho < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当$\rho > 1$（或$+\infty$）时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；当$\rho = 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性不能肯定.

④根值审敛法（柯西判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，若$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$（或为$+\infty$），则当$\rho < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；当$\rho > 1$（或$+\infty$）时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；当$\rho = 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性不能肯定.

（2）交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$敛散性的判别法

莱布尼兹判别法　若 ① $u_n > 0, u_n \geq u_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$，② $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$收敛，其和$s \leq u_1$，　其余项$r_n$的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$.

注意　莱布尼兹判别法的条件是交错级数收敛的充分条件，而不是必要条件，因此，当不满足条件时，不能判定交错级数发散.

（3）任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$（u_n为任意实数）敛散性的判别法

若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

注意 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必发散，但如果用比值审敛法判定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

（二）幂级数

1．函数项级数的概念

给定函数项级数 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

如果在 x_0 处 $(x_0 \in X)$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ 收敛，则称 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ 的收敛点，收敛点的全体称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ 的收敛域.

对于收敛域内任意一个 x 值，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 都有一个确定的和 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，称 $S(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ 的和函数. 注意：和函数的定义域是函数项级数的收敛域.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ 在收敛域上，$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$，其中 $S_n(x)$ 是前 n 项和，$r_n(x)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$ 的余项.在收敛域上，$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

2．幂级数

（1）定义：形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的函数项级数称为幂级数. 不失一般性，仅研究幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

（2）阿贝尔定理：

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0\left(x_0\neq 0\right)$ 时收敛，则适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛. 反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_0\left(x_0\neq 0\right)$ 时发散，则适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的

一切 x 使这幂级数发散.

可见，幂级数的收敛域是一个区间（特别地可以是一个孤立点$\{0\}$）.

（3）收敛半径 R 的求法

对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$

① $\rho\neq 0$，则 $R=\frac{1}{\rho}$； ② $\rho=0$，则 $R=+\infty$； ③ $\rho=+\infty$，则 $R=0$.

再考虑端点 $x=\pm R$ 的敛散性，得到

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域：$(-R,R)\cup\{收敛的端点\}$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 或 $\{0\}$.

开区间 $(-R,R)$ 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间.

对于缺项的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$，可由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1$（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1$）求出 x 的范围 (x_1,x_2)，从而收敛域为 $(x_1,x_2)\cup\{收敛的端点\}$.

注 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，可设 $t=x-x_0$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$，若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 收敛半径是 R，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛区间是 (x_0-R,x_0+R).

（4）重要性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R，则

①它的和函数 $s(x)$ 在收敛区间是连续函数；

②在收敛区间内可逐项求导、逐项积分，且逐项求导或逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径 R. 但在收敛区间的端点 $x=\pm R$ 处收敛性可能改变.

3．函数展开成幂级数

（1）泰勒级数：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶导数，则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数.

当泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

中的余项$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$时，泰勒级数收敛于 $f(x)$，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

上式称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

当$x_0=0$时，泰勒级数变为

$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数；

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数展开式.

注意

① 只要函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶导数，则泰勒级数就能写出来，但它未必收敛于 $f(x)$，只有对于该邻域内的一切 x，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，泰勒级数才收敛于 $f(x)$；

② 如果函数 $f(x)$ 能表为$(x-x_0)$的幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

那末这个幂级数与 $f(x)$ 的泰勒级数是一致的，即系数为$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，亦即 $f(x)$ 的幂级数展开式是唯一的.

（2）常用函数的幂级数展开式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,(-1<x<1);$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,(-1<x\le 1);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1),$$

上式中当$x=\pm 1$时展开式是否成立，要根据m值而定.

（3）函数展开成幂级数的方法：

直接展开法：

按公式 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 计算级数的系数，再证明余项 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$（通常证明较困难）

得到 $f(x)$ 的展开式： $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

间接展开法：

利用已知函数的展开式，通过恒等变形、变量代换，幂级数的代数运算及逐项求导或积分，把函数展开成幂级数.

展开时要注意两点：

第一，要熟记几个常用初等函数的麦克劳林展开式，尤其是 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式. 如果用到了逐项求导或逐项积分，则展开后的幂级数端点处的敛散性需要检验.

第二，根据已知展开式写出所求展开式相应的收敛区间.

4．幂级数在收敛区间内和函数的求法

幂级数求和与函数展开成幂级数在某种意义上讲，它们是互逆问题. 可以利用基本展开式和幂级数的性质，借助逐项求导、逐项积分等性质以及恒等变形和变量代换的方法来求和函数.

（三）傅里叶级数

1．傅里叶级数与傅里叶系数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在区间 $\left[-\pi, \pi\right]$ 上可积，则称

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx (n = 1, 2, \cdots)$$

为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

用傅里叶系数写成的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (11.1)$$

称为 $f\left(x\right)$ 的傅里叶级数.

当 $f(x)$ 是奇函数时， $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$ ， $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx (n = 1, 2, \cdots)$,

级数（11.1）变为正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$；

当$f(x)$是偶函数时，$b_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$，$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx (n = 0, 1, 2, \cdots)$，

级数（11.1）变为余弦级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

2．狄里克莱收敛定理：设$f(x)$是周期为2π的函数，如果它满足条件：在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点，则$f(x)$的傅里叶级数收敛，并且

（1）当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$；

（2）当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right]$.

3．周期为$2l$的函数展开成傅里叶级数

设周期为$2l$的函数$f(x)$满足收敛定理的条件，则$f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{11.2}$$

其中 $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx (n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \cdots)$$

当x为$f(x)$的连续点时，级数（11.2）收敛于$f(x)$；

当x为$f(x)$的间断点时，级数（11.2）收敛于$\frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right]$.

当$f(x)$是奇函数时，$a_n = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$，$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx (n = 1, 2, \cdots)$，

级数（11.2）变为正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$；

当$f(x)$是偶函数时，$b_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$，$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx (n = 0, 1, 2, \cdots)$，级数（11.2）变为余弦级数$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$.

4．非周期函数展开成傅里叶级数

（1）将函数展开成$\left[-\pi, \pi\right]$（或$\left[-l, l\right]$）上的傅里叶级数

设函数$f(x)$在$\left[-\pi, \pi\right]$上满足收敛定理的条件，对$f(x)$作周期延拓，则$f(x)$在

$[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$， $x\in(-\pi,\pi)$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx(n=0,1,\cdots)$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx(n=1,2,\cdots)$

根据收敛定理，该级数在区间端点 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}$.

设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足收敛定理的条件，对 $f(x)$ 作周期延拓，则 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的傅里叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$， $x\in(-l,l)$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx(n=0,1,2,\cdots)$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(n=1,2,\cdots)$

根据收敛定理，该级数在区间端点 $x=\pm l$ 处收敛于 $\frac{f(l^-)+f(-l^+)}{2}$.

（2）将函数展开成 $[0,\pi]$（或 $[0,l]$）上的正弦级数或余弦级数.

函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$（或 $[0,l]$）上满足收敛定理的条件，则 $f(x)$ 可以展开成 $[0,\pi]$（或 $[0,l]$）上的正弦级数或余弦级数.

对函数 $f(x)$ 作奇延拓，则 $f(x)$ 的正弦级数为 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$， $x\in(0,\pi)$，

其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx(n=1,2,\cdots)$

（或 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$， $x\in(0,l)$，其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx(n=1,2,\cdots)$）.

级数在端点处的收敛性由狄里克雷收敛定理确定.

对函数 $f(x)$ 作偶延拓，则 $f(x)$ 的余弦级数为 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$， $x\in(0,\pi)$，

其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx(n=0,1,2,\cdots)$，

（或 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$， $x\in(0,l)$，其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx(n=0,1,2,\cdots)$）.

级数在端点处的收敛性由狄里克雷收敛定理确定.