第 2 章 多元函数微分学及其应用

一、基本要求

1．理解多元函数的概念，会求定义域.

2．了解多元函数的极限和连续的概念.

3．理解偏导数的概念，掌握偏导数及高阶偏导数的求法.

4．掌握多元复合函数的微分法.

5．理解全微分的概念，了解全微分形式的不变性.

6．掌握隐函数的求导法.

7．会求曲线的切线及法平面方程，曲面的切平面及法线方程.

8．了解方向导数的概念和计算公式.

9．了解梯度的概念和计算方法以及梯度与方向导数之间的关系.

10．掌握多元函数无约束极值和有约束（条件）极值的求法（拉格朗日乘数法）及最大（小）值的求法.

二、要点提示

（一）多元函数、极限与连续

注意从一元函数推广以及多元函数与一元函数的区别.

1．多元函数的定义

二元函数：设 D 是平面上的点集，如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x,y 的二元函数，记为 $z=f(x,y)$，其图形为空间一曲面.

点函数的定义：设 Ω 是一个点集，如果对于每一个点 $P\in\Omega$，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是点 P 的函数，记为 $z=f(P)$.

当 $P\in\Omega\subset R$ 时，$z=f(P)=f(x)$ 为一元函数；

当 $P\in\Omega\subset R^2$ 时，$z=f(P)=f(x,y)$ 为二元函数；

当 $P\in\Omega\subset R^3$ 时，$z=f(P)=f(x_1,x_2,x_3)$ 为三元函数；

…　…

当 $P\in\Omega\subset R^n$ 时，$z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 为 n 元函数.

2．极限

点函数极限的描述性定义：设函数 $z=f(P)$ 在区域（开或闭）D 内有定义，P_0 是 D 的内点或边界点，如果当点 $P\in D$ 无限趋近于 P_0 时，函数 $f(P)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

当 $D\subset R^2$ 时，有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

注 （1）在一元函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与二元函数的极限（称为二重极限）$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 中，动点趋于定点的方式都是任意的，但前者由于动点 x 和定点 x_0 都是 x 轴上的点，所以点 x 趋于点 x_0 的方式只有三种：左趋向 $\left(x\to {x_0}^-\right)$、右趋向 $\left(x\to {x_0}^+\right)$ 和左右跳动趋向；后者由于动点 $\left(x,y\right)$ 是平面上的点，所以趋向于点 $\left(x_0,y_0\right)$ 的方式有无穷多种.

（2）二重极限的存在是指点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限趋近于 A，因此，可采用让 P 沿不同的路径趋于 P_0，使函数趋近于不同的值的方法来判断函数的极限不存在.

3．连续

设函数 $f(P)$ 在区域（开或闭）D 内有定义，$P_0\in D$ 是 D 的内点或边界点，如果 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称函数 $f(P)$ 在 P_0 连续.

多元连续函数与一元连续函数有类似的性质.

4．多元初等函数：

由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成，可用一个式子所表示的函数，称为多元初等函数. 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

（二）偏导数与全微分

1．偏导数

（1）定义：偏导数是函数的偏增量与自变量增量之比的极限.

二元函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 和 y 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

（2）计算 $z=f(x,y)$ 的偏导数实际上是一元函数的微分法问题. 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 y 暂时看作常量，而对 x 求导；求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 时，只要把 x 暂时看作常量，而对 y 求导数. 对三元以上的函数求偏导的方法类似，对一个变量求导，暂时将其余变量看作常数.

2．全微分

（1）定义：如果函数 $z=f(x,y)$ 的全增量可表为

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 称为函数的全微分，记为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

（2）微分公式：若 $z=f(x,y)$ 的全微分存在，则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

（3）全微分形式的不变性：设函数 $z=f(u,v)$ 有连续偏导数，则不论 u,v 是自变量还是中间变量，总有 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$.

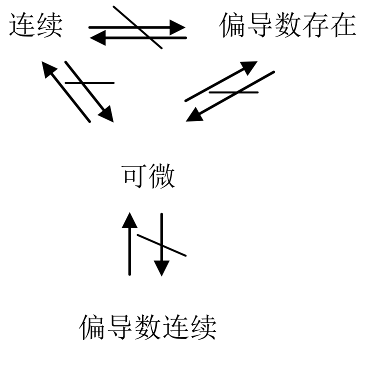
（三）多元函数连续、偏导存在与可微之间的关系

对一元函数来说，函数可导 $\Leftrightarrow$ 函数可微，函数可导 $\Rightarrow$ 连续，对于多元函数来说，

$$\text{多元函数的偏导数连续}\Rightarrow\text{函数可微}\begin{cases}\Rightarrow\text{函数的偏导数存在}\\ \Rightarrow\text{函数连续}\end{cases}$$

但上述关系不可逆，且函数连续与函数的偏导数存在之间没有关系.

多元函数连续、偏导存在与可微之间的关系可以如下表示：



（四）多元函数微分法

1．多元复合函数求导法

（1）链式法则

链式法则的实质是函数必须对中间变量求导. 依据函数的复合结构，可按照“连线相乘，分线相加”的原则来进行：从函数到自变量有几种不同的 “路径”，就要有几项相加，而每一项都是该路径中各条连线上对应变量的偏导（或导）数相乘.

（2）求带有抽象符号的复合函数的二阶偏导数要注意：

① 设复合函数 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$，其一阶偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_u\left(u,v\right)\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\left(u,v\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

其中函数对中间变量的偏导数 $f_u(u,v)$ 和 $f_v(u,v)$（记为 f_1' 和 f_2'）仍然是中间变量 u,v 的二元函数，且与函数 $z=f\left[u\left(x,y\right),v\left(x,y\right)\right]$ 具有相同的复合结构，因此在求 $\frac{\partial f_1'}{\partial x},\frac{\partial f_2'}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial f_1'}{\partial y},\frac{\partial f_2'}{\partial y}$ 时仍需利用复合函数的求导法则，即先对中间变量求 u,v 偏导再乘以 u 或 v 对 x 或 y 的偏导数，例如 $\frac{\partial f_1'}{\partial x}=\frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，这一点是求带有抽象符号的复合函数的二阶偏导数的关键所在，切勿疏忽，否则所求的高阶偏导数常易漏项而导致计算错误.

② 若已知 f 有连续的二阶偏导数，则应根据 $f_{12}''=f_{21}''$ 对计算结果作相应化简.

2．隐函数求导法

隐函数的求导公式：

设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$；

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)};$$

对于由方程组确定的隐函数，可以对方程两端求（偏）导数，然后求解关于所求（偏）导数的线性方程组，例如，

设 $xu-yv=0,yu+xv=1$ 确定 $u=u\left(x,y\right),v=v\left(x,y\right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 方程两端对 x 求偏导数并移项，得

$$\begin{cases} x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial x}=-u, \\ y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial v}{\partial x}=-v \end{cases}$$

解出 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yu-xv}{x^2+y^2}.$$

同理，得到 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}.$$

对隐函数求导可采用三种方法：

（1）利用隐函数公式；

（2）对方程（组）两边求偏导数，解出所求偏导数；

（3）对方程（组）两边求全微分，由全微分公式得出偏导数.

（五）微分法在几何上的应用

1．空间曲线的切线及法平面

（1）设空间曲线Γ：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$（$t$为参数），$M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲线$\Gamma$上一点，其相应的参数为$t_0$，则曲线$\Gamma$在点$M_0$处切向量为$\boldsymbol{T}=\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right),z'\left(t_0\right)\right)$，

曲线Γ在点M_0处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$，

曲线Γ在点M_0处的法平面方程为 $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

（2）若曲线Γ的方程表示为$\begin{cases}y=y\left(x\right)\\z=z\left(x\right)\end{cases}$，则$\Gamma$在点$M_0$处切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left(1,y'\left(x_0\right),z'\left(x_0\right)\right).$$

曲线Γ在点M_0处的切线方程为$\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}$，

曲线Γ在点M_0处的法平面方程为 $x-x_0+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$.

（3）若曲线Γ的方程表示为隐函数$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则利用隐函数求导法求出$\Gamma$在点$M_0$处切向量，例如

$$\boldsymbol{T}=\left(1,y'\left(x_0\right),z'\left(x_0\right)\right).$$

可参看（2）.

2．曲面的切平面及法线

（1）设曲面方程为$F(x,y,z)=0$（隐函数形式），$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面上一点，设函数$F(x,y,z)$在点M_0处有连续偏导数，且在点M_0处F_x,F_y,F_z不全为零，则曲面在点M_0处

的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0)),$$

曲面在点M_0处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

曲面在点M_0处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

（2）若曲面方程为$z=f(x,y)$（显函数形式），则可写为隐函数形式：$f(x,y)-z=0$，由情形（1）可推得曲面在点M_0处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$$

曲面在点M_0处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

曲面在点M_0处的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

（六）方向导数

1．定义：设二元函数$z=f(x,y)$定义在点$P(x,y)$的某邻域$U(P)$内．l为一以P为起点的空间射线，$\boldsymbol{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$是与$l$同方向的单位向量，若极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta)-f(x,y)}{t}$$

存在，则称此极限值为$f(x,y)$在点P处沿方向l的**方向导数**，记作$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$，即

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta)-f(x,y)}{t}.$$

2．计算公式：若$z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{8.1}$$

其中α为方向l与x轴正向夹角，β为方向l与y轴正向夹角.

若$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处可微，则

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{8.2}$$

其中α、β、γ为方向l的方向角.

3．方向导数与偏导数的区别和联系：

方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta)-f(x,y)}{t}$是单侧极限，即在极限过程中$t>0$，故方向导数是函数沿射线的变化率；而偏导数

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

$$f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

是双侧极限，即在极限过程中Δx（或Δy）可正可负，故偏导数是函数沿平行于坐标轴的切线的变化率.

一般地，方向导数存在$\not\Rightarrow$偏导数存在.

（七）梯度

1. 定义　设二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处的偏导数连续，则称向量$(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$为该函数在$P_0(x_0,y_0)$处的梯度向量（简称梯度），记作$\boldsymbol{grad}\ f(x_0,y_0)$或$\nabla f(x_0,y_0)$，即

$$\boldsymbol{grad}\ f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)),$$

其中$\nabla=(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y})$称为向量微分算子或Nabla算子.

2.梯度与方向导数的关系　梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，它的模为方向导数的最大值.

（八）函数的极值、最大值和最小值

1．存在极值的必要条件：

若$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处有极值，且$f_x(x_0,y_0)$及$f_y(x_0,y_0)$都存在，则$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

使$z=f(x,y)$的两个偏导数为零的点称为$z=f(x,y)$的驻点.

2．充分条件：

设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有连续的二阶偏导数，且

$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，记$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极值.

当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值；

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值；

（3）$AC-B^2=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 可能是极值，也可能不是极值.

注意　三元及三元以上的函数不能用二元函数极值存在的充分条件来判定.

3．有约束极值：函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值称为有约束或条件极值.

求约束极值的方法：可将约束条件代入函数，转化为无约束极值问题；也可以用拉格朗日乘数法，求出 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

拉格朗日乘数法：构造函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$（$\lambda$ 为常数），解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

求出 $x=x_0, y=y_0$，则 (x_0,y_0) 就是可能的极值点.

注意　（1）因为 $f(x,y)$ 中的 x,y 要满足 $\varphi(x,y)=0$ 所以两个变量 x,y 只有一个是独立的，另一个受条件 $\varphi(x,y)=0$ 的约束，而 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 中的 x,y 都是独立的；

（2）在可能的极值点 (x_0,y_0) 处，φ_x,φ_y 不同时为零时才能使用拉格朗日乘数法.

当自变量多于两个，而约束条件多于一个（约束条件的个数必须少于自变量的个数，否则求不出条件极值）时，上面的拉格朗日乘数法可以推广到三元以上的函数和多个约束条件的情形.

4．函数的最大值和最小值

求函数在有界区域 D 上的最大值和最小值的方法是：先求出该函数在 D 内的所有驻点和偏导数不存在的点，再求出在 D 的边界上可能的最大值点、最小值点（包括端点），然后求出函数在上述各点处的函数值，比较大小，其中最大者就是最大值，最小者就是最小值.

在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定驻点是否为最值点.