3.2.2 极坐标下的二重积分计算

有些二重积分在直角坐标系下计算比较复杂或无法计算，就需要尝试在其他坐标系下来处理.

问题:

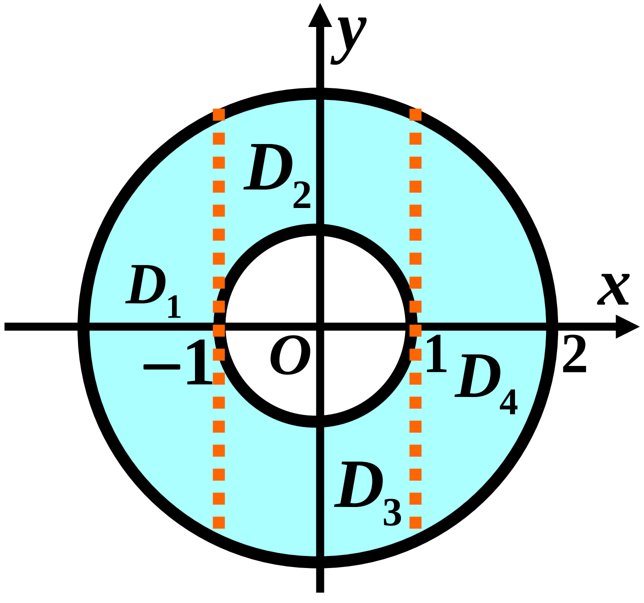
计算$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$　其中$D:1\le x^2+y^2\le 4.$

在直角坐标系下，若把积分区域看作X型，须划分为四个子域，再由可加性，计算量较大.

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

$$+\iint\limits_{D_3} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_4} f(x,y)d\sigma$$



$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$$

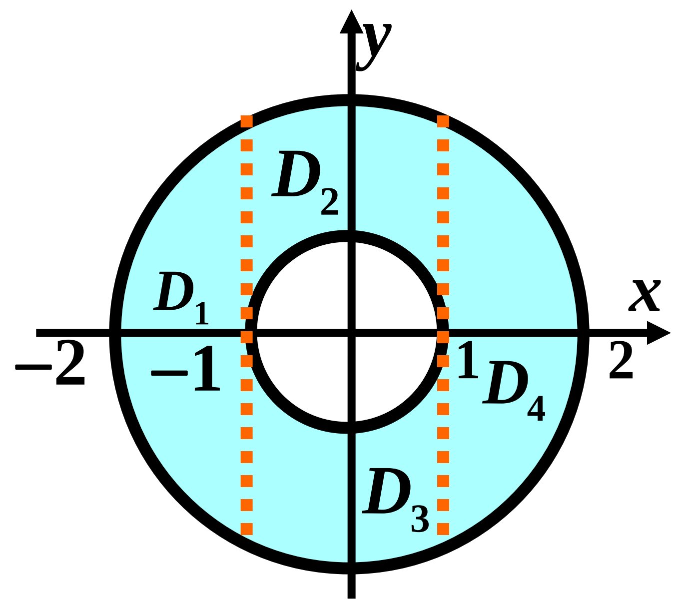
$$+\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{1}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy$$

注意到圆 $x^2+y^2=a^2$

的极坐标表示：

$\rho=a$ （半径）

考虑在极坐标下求二重积分



极坐标下面积元素 $\boxed{d\sigma = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta}$

用极坐标曲线网

ρ =常数，（同心圆族）

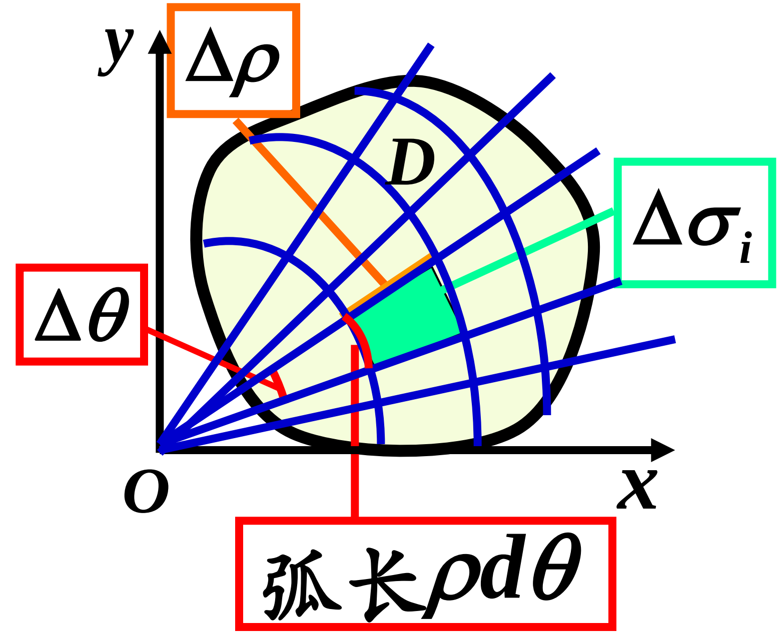
θ =常数，（射线族）

来划分积分域.规则的子域 $\Delta\sigma_i$ 的面积

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}[(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta - \rho^2\Delta\theta]$$

$$= \rho\Delta\rho\Delta\theta + \boxed{\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\Delta\theta}$$

$$\approx \rho\Delta\rho\Delta\theta$$ 高阶项 略去



由直角坐标和极坐标的对应关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

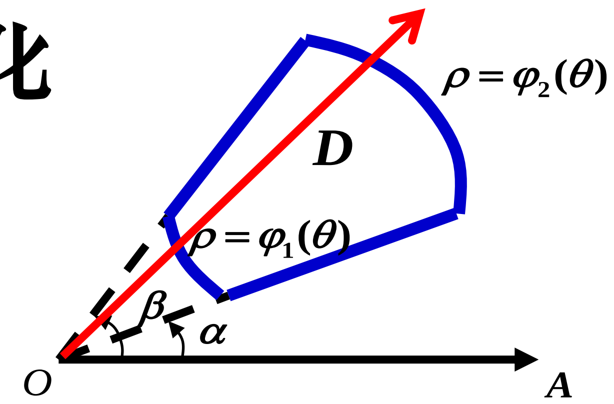
得到二重积分在极坐标下的形式

$$\iint\limits_D f(x,y)\underline{d\sigma} = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\underline{\rho d\rho d\theta}$$

面积元素 $\boxed{d\sigma = \rho d\rho d\theta}$

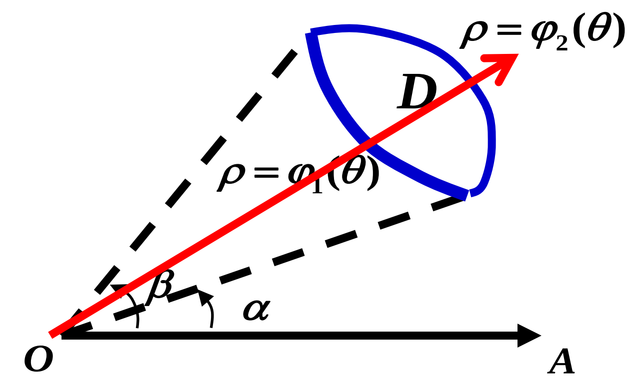
若积分区域D：$\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$

于是得到在极坐标下二重积分化为二次积分的公式：



$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$=\int_\alpha^\beta[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho]d\theta$$



或写作

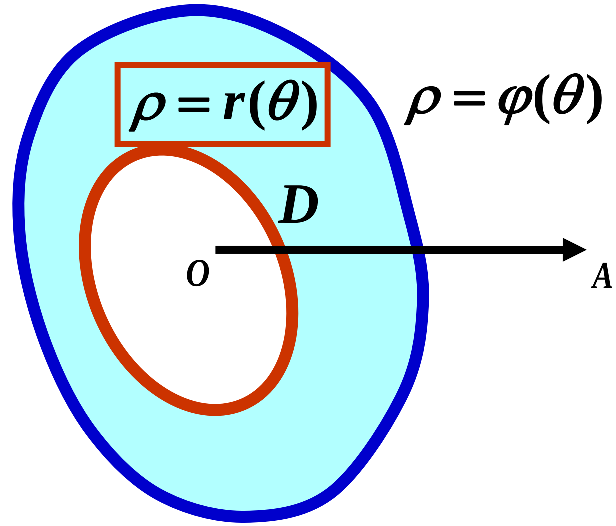
$$\boxed{\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho}$$

若极点在D的内部

则D可以用不等式表示:

$$0 \le \rho \le \varphi(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

这时有



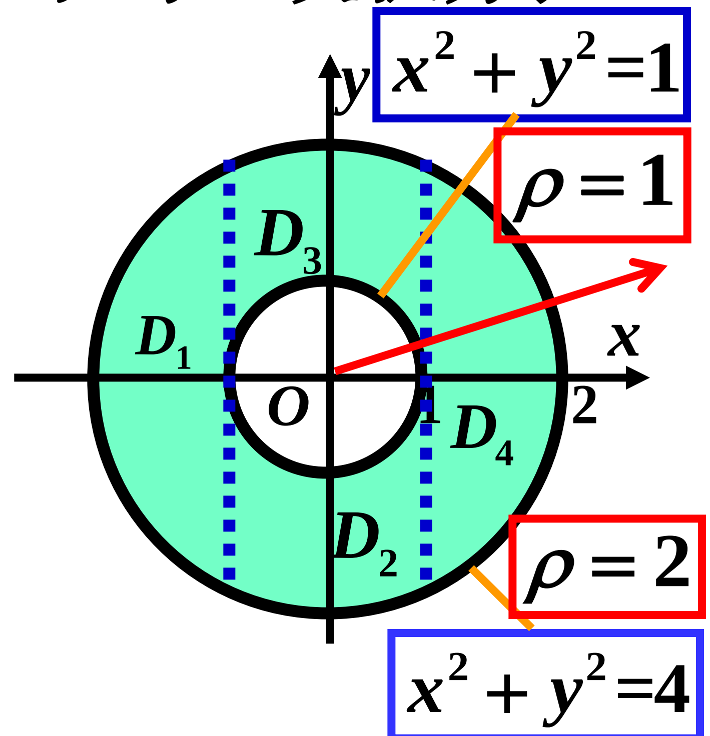
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

若D由两条封闭曲线围成(如图)，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\boxed{r(\theta)}}^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

前例：计算$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 其中$D: 1 \le x^2+y^2 \le 4.$

解 把$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$化为极坐标下的二次积分，



直角坐标

$x^2+y^2=1 \longrightarrow \rho=1$

$x^2+y^2=4 \longrightarrow \rho=2$

极坐标

$$D: 1 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$$

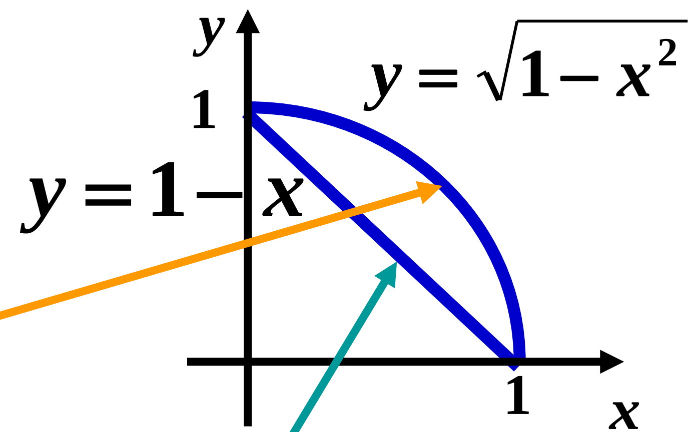
$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,d\rho$$

例1 将$\iint_D f(x,y)d\sigma, D: 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$,

$0 \le x \le 1$，化为极坐标下的二次积分.

解 利用$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$把积分区域的边界曲

线化为极坐标形式:



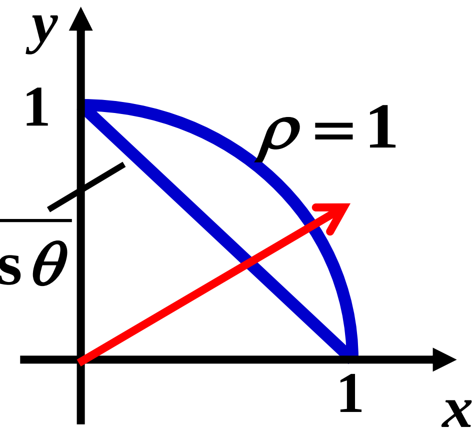
圆：$y = \sqrt{1-x^2} \longrightarrow \rho = 1$,

直线：$y = 1 - x \longrightarrow \rho = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

$$\boxed{D: 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le 1,}$$

于是

$$D: \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\, d\rho$$

例2 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma$

其中D是以原点为圆心，半径为a的圆域.

解 D可以表示成: $0\le\rho\le a, 0\le\theta\le 2\pi$

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_D e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho=\int_0^{2\pi}[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}]_0^a d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}d\theta=\pi(1-e^{-a^2})$$

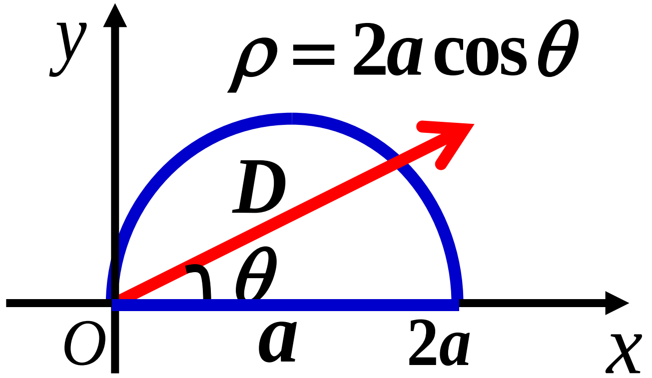
问题 为何不在直角坐标系下计算?

例3 计算 $\iint\limits_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$，其中$D$为 $x^2 + y^2 = 2ax \quad (y \ge 0)$ 和x轴所围成的区域，并说明该积分的几何意义.

解 圆的方程：$x^2 + y^2 = 2ax$

表示成极坐标形式：

$$\rho = 2a\cos\theta$$



所以D可表示为

$$0 \le \rho \le 2a\cos\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$D: 0 \le \rho \le 2a\cos\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

利用极坐标得:

$$\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho d\rho$$

$$= \frac{8}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta) d\theta = \frac{8}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,\quad D: x^2 + y^2 \le 2ax, (y \ge 0)$$

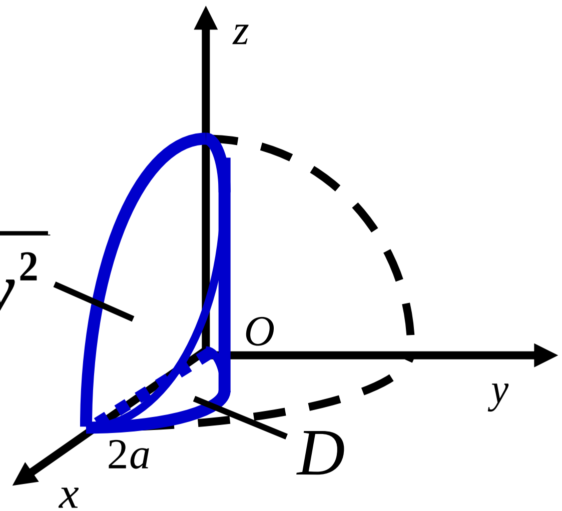
- **几何意义**

$\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ 是球面 $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$,

圆柱面 $y = \sqrt{2ax - x^2}$, xOz面及xOy面所围成

的立体的体积.

顶: $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$

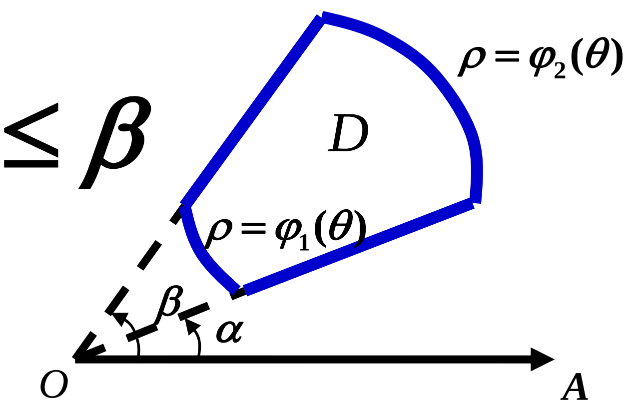


小　结

一、利用极坐标将二重积分化为二次积分

若积分区域

$$D:\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta),\alpha\le\theta\le\beta$$



面积元素　$d\sigma=\rho d\rho d\theta$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

二、什么条件下用极坐标计算二重积分?

当积分区域为(部分)圆、扇形或扇面等形状时，函数含有 x^2+y^2, 常用极坐标计算.

利用直角坐标与极坐标的关系：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad 0\le\rho<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi$$

把直角坐标表示的区域化为极坐标的表示.