1.6 空间曲线及其方程

认识空间曲线

学会空间曲线、曲面和立体

在坐标面上的投影

1.6.1 空间曲线的方程

空间曲线也是空间点的几何轨迹，
空间曲线的方程有两种：

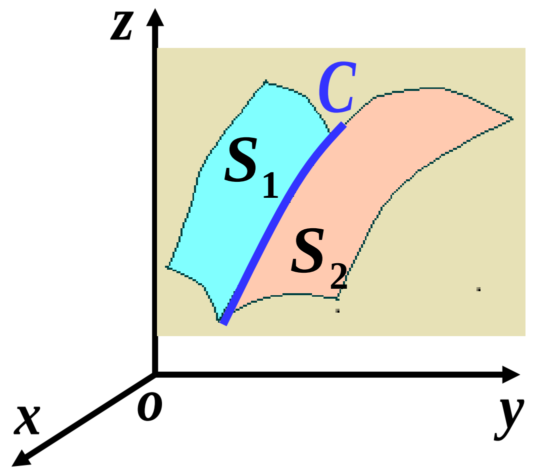
一般式和参数式

下面我们一起来看看空间曲线的方程.

类似于空间直线，空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

空间曲线的一般式方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



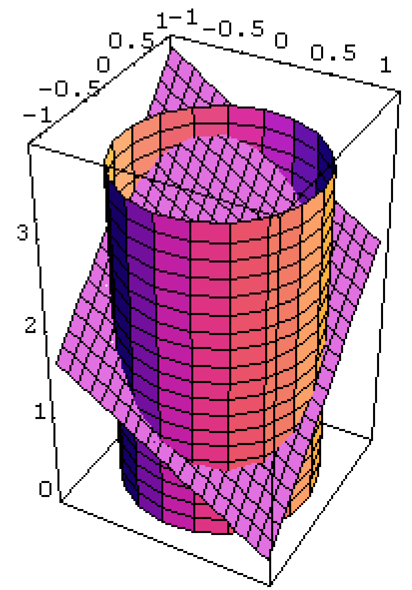
曲线 C 称为方程的图形

特点: 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

例1 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

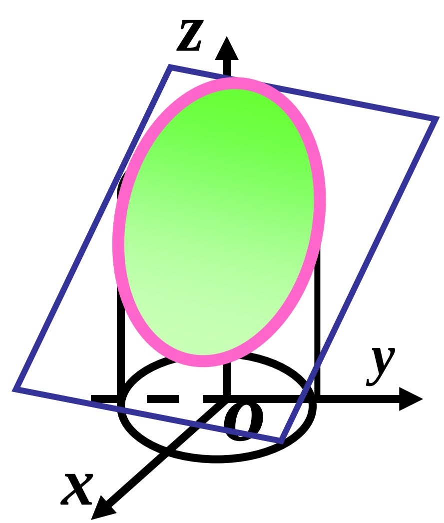
解 $x^2 + y^2 = 1$ 表示圆柱面,

$2x + 3y + 3z = 6$ 表示平面,



交线为椭圆:

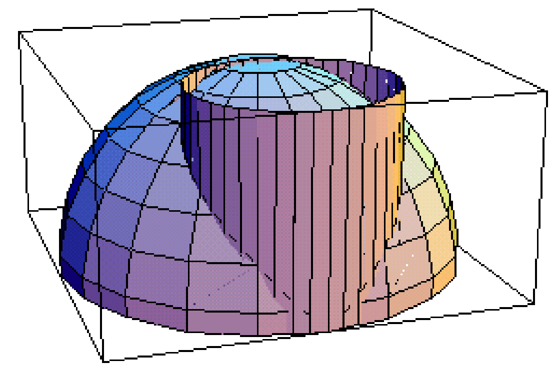
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$$



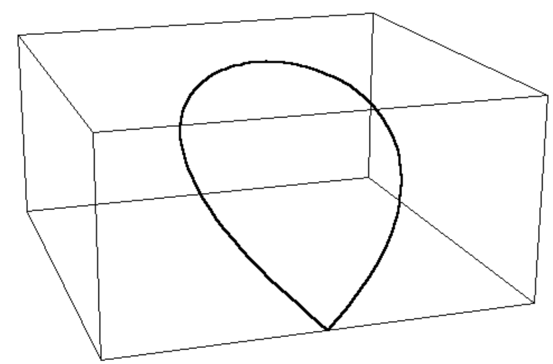
例2 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

表示上半球面,



$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 是圆柱面,



交线如图.

空间曲线的参数方程

空间曲线的参数方程

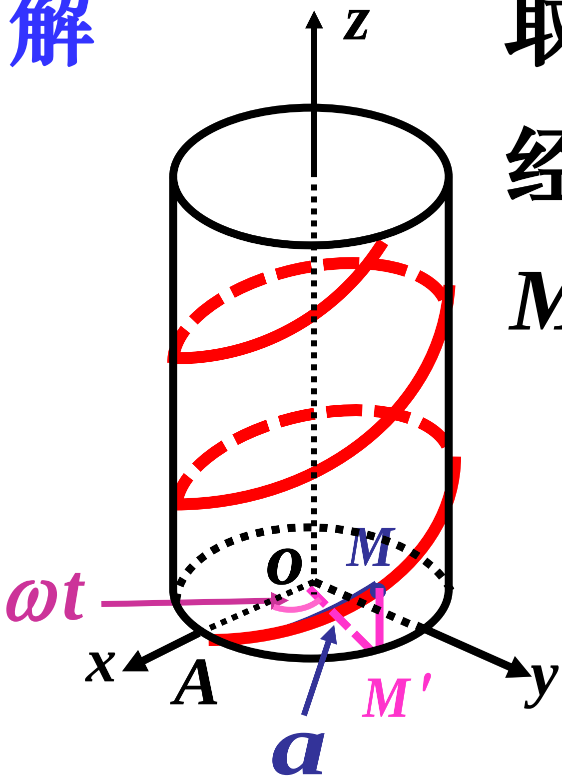
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (t\text{为参数})$$

当给定 $t = t_1$ 时,就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1), 随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

例3 如果空间一点M在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴上升，那么点M构成的图形叫做**螺旋线**. 试建立其参数方程.

解 取时间t为参数,动点从A点出发,经过t时间，运动到$M(x,y,z)$点.

M在xoy面的投影$M'(x,y,0)$



$$\boxed{\begin{aligned} x&=a\cos\omega t\\ y&=a\sin\omega t\\ z&=vt \end{aligned}}$$

螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

$$x = a\cos\omega t$$
$$y = a\sin\omega t$$
$$z = vt$$
$$(\theta = \omega t, b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质：

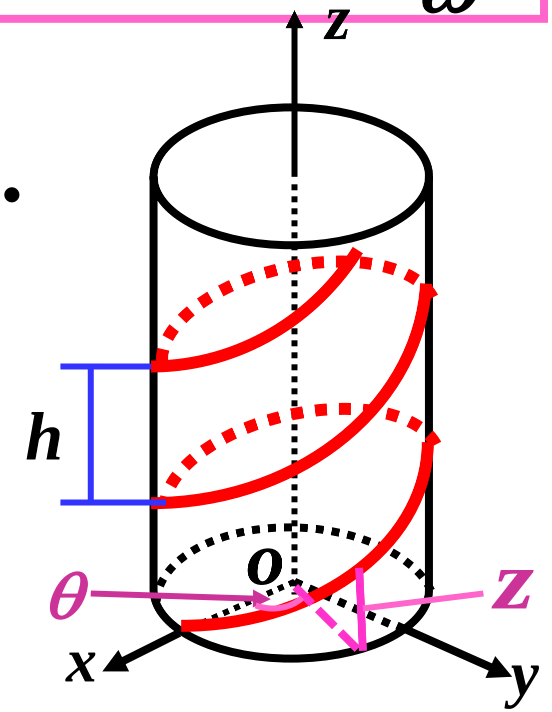
上升的高度与转过的角度成正比．

即 $\theta: \quad \theta_0 \to \theta_0 + \alpha,$

$z: \quad b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

令$\alpha = 2\pi$，则上升的高度:

$h = 2b\pi$ 称为**螺距**.



1.6.2 空间曲线在坐标面上的投影

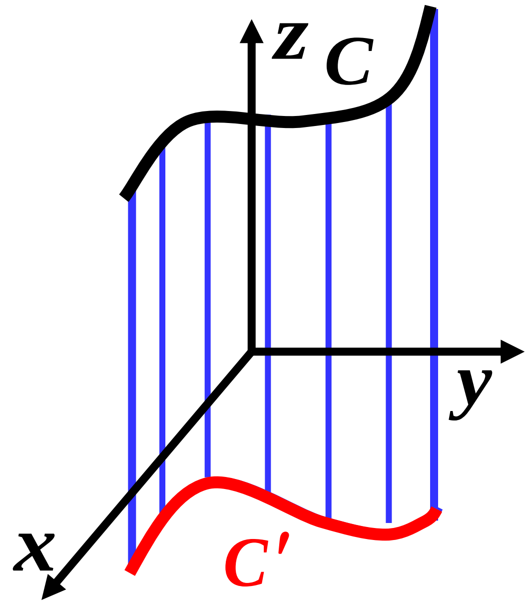
在多元函数积分学中，常常需要求一条空间曲线在坐标面上的投影.

下面就来讨论如何求空间曲线在坐标面上的投影曲线的方程.

设空间曲线C的一般方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去变量 z后得: $\boxed{H(x,y)=0}$

称为曲线C关于xOy的投影柱面.

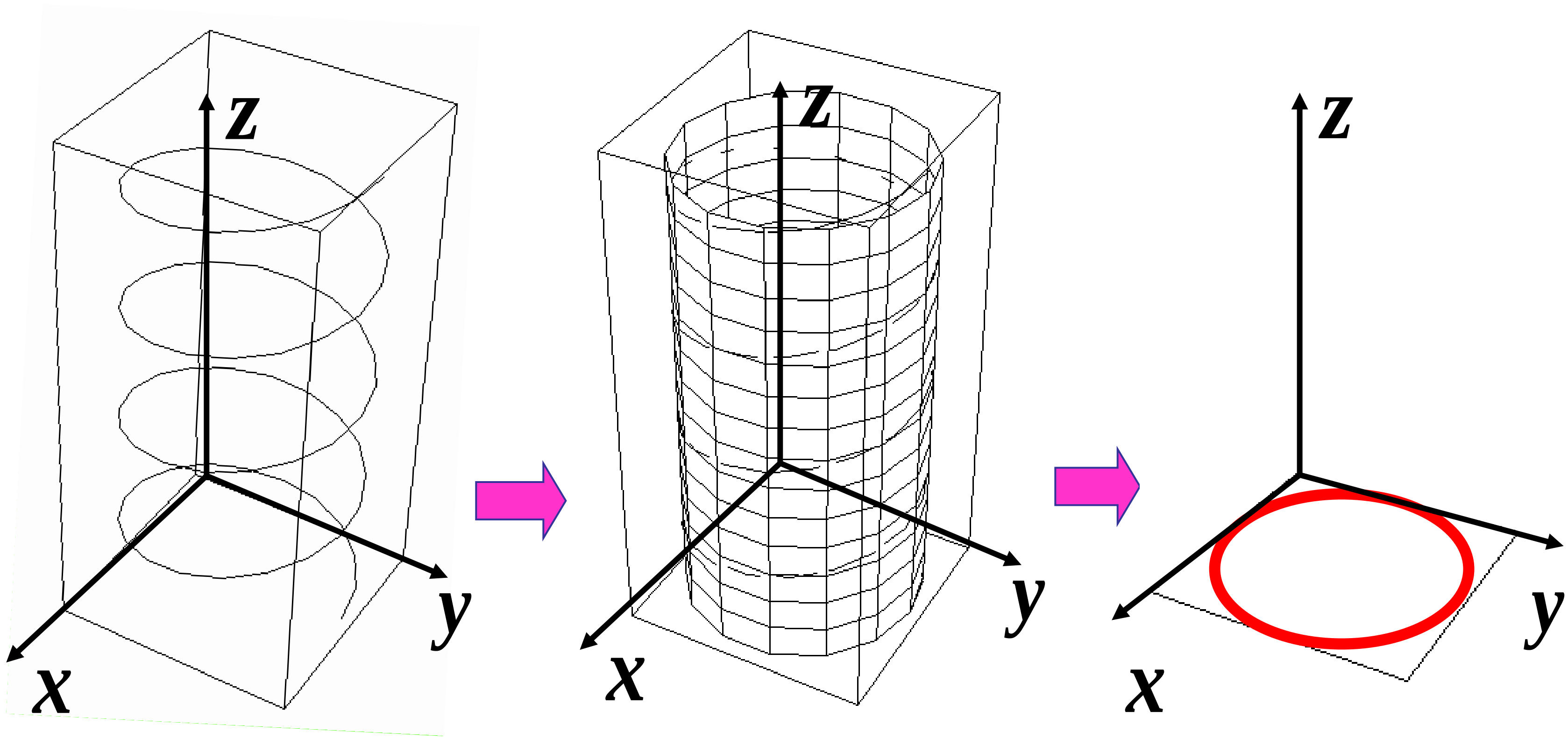


投影柱面与xOy面的交线:

$$\boxed{C':\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}}$$

称为曲线 C 在xOy面上的投影曲线.

空间曲线在xOy面上的投影曲线的研究过程：



空间曲线　　　　投影柱面　　　　投影曲线

空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的

投影曲线 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

类似地,可定义空间曲线在其他坐标面上的投影.

yoz 面上的投影曲线: $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

xoz 面上的投影曲线: $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

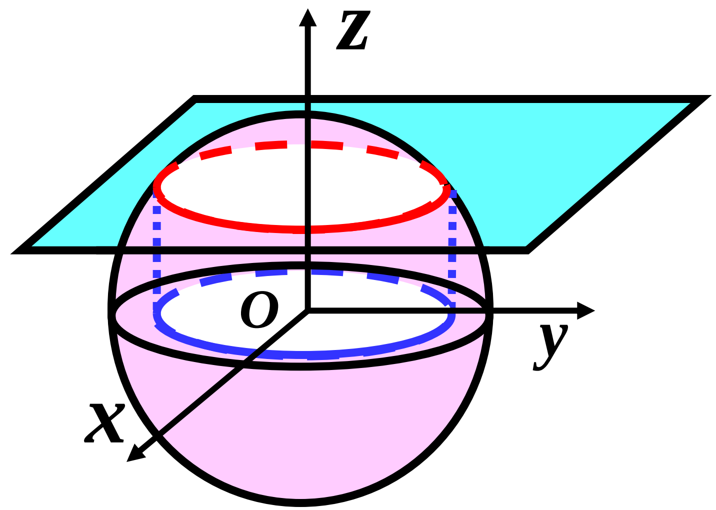
例4 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在各坐标面上的投影.

解（1）消去变量 z 后得

$$x^2+y^2=\frac{3}{4},$$

在xOy面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4}, \\ z=0 \end{cases}$$

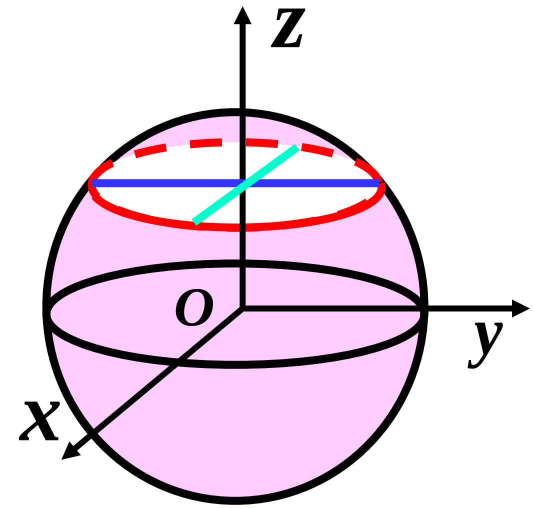


（2）因为曲线在平面 $z=\frac{1}{2}$ 上，

$$\boxed{\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}}$$

所以在yOz面上的投影为线段：

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \quad |y|\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

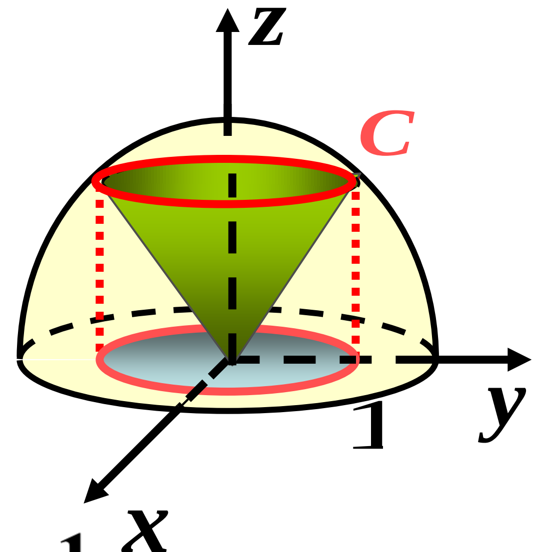


（3）同理在xOz面上的投影也为线段：

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \quad |x|\le\frac{\sqrt{3}}{2};$$

例5 求上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的立体在 xoy 面上的投影.

解 所求投影是二曲面交线在 xoy 面上的投影曲线所围之域.



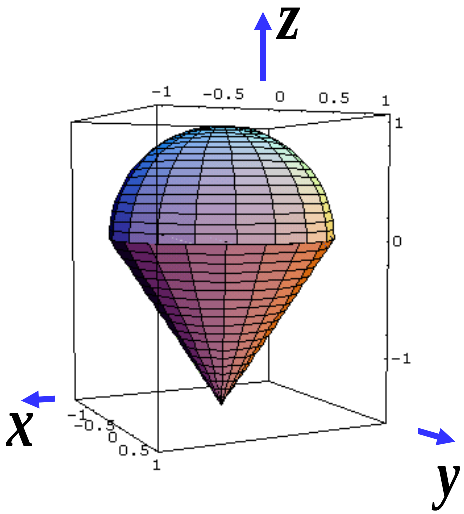
二曲面交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$

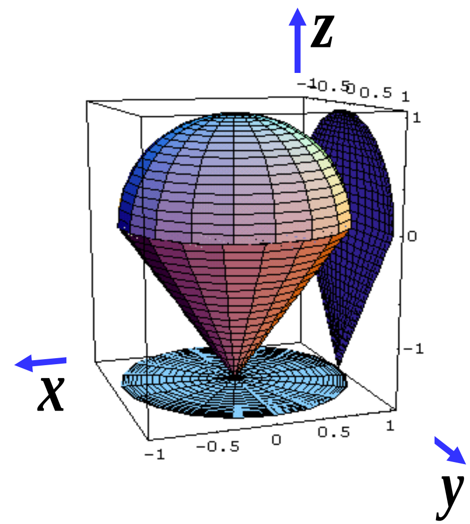
在 xoy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

所围区域为圆域: $x^2+y^2\le 1,\ z=0$.

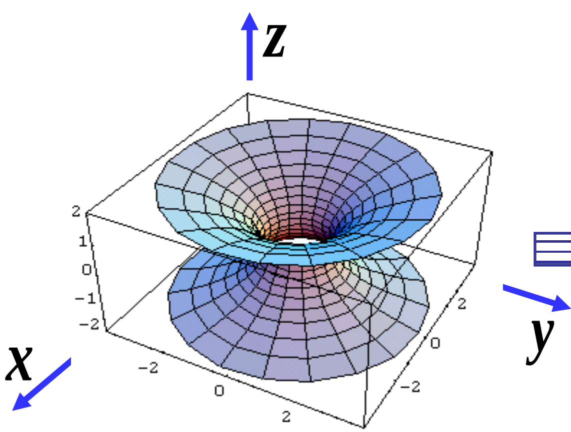
空间立体或曲面在坐标面上的投影.

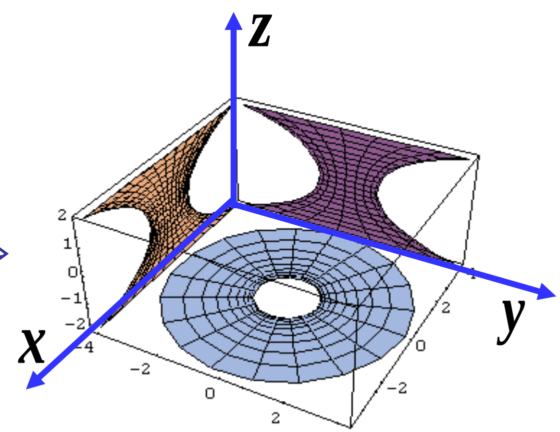
空间立体





曲面





在多元函数积分学中，需要求曲面和立体向坐标面的投影区域，一般情况下会用包围曲面或立体的轮廓曲线去求投影曲线，投影曲线所包围的部分就是所求的投影区域.