第 3 章 多元函数积分学及其应用

一、基本要求

1．理解多元函数积分（二、三重积分、曲线和曲面积分）的概念. 了解两类曲线积分的关系.

2．了解多元函数积分的性质，理解

多元函数在几何形体上的积分是定积分的推广.

3. 掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），会计算简单的三重积分（直角坐标、柱面坐标、*球面坐标）.

4. 掌握平面上的曲线和曲面积分的基本计算方法，了解空间中第一类曲线积分的计算方法.

5．掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件.

6．了解高斯公式，斯托克斯公式，并会用高斯公式计算曲面积分.

7. 了解元素法，会用多元函数积分求一些几何量和物理量（弧长、质量、重心、转动惯量、引力、功和流量等）.

*8．了解向量场的通量、散度和旋度的概念并会计算.

二、要点提示

（一） 多元函数积分的概念与性质

1. 定义 设 $f(p)$ 是几何形体 G 上的有界函数. 将 G 任意分成 n 个部分，记为 Δg_i（$i=1,2,\ldots,n$，Δg_i 也代表该部分的几何度量）. 在每个部分 Δg_i 上任取一点 p_i，作和式 $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta g_i$，如果当各部分的直径的最大值 $\lambda \to 0$ 时，和式的极限

$$\lim_{\lambda -> 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta g_i$$

存在，则称这个极限为**函数 $f(p)$ 在几何形体 G 上的积分**. 记为 $\int_G f(p)dg$ 即

$$\int_G f(p)dg = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta g_i$$

当 G 为不同的几何形体时，对应的积分有固定的名称和符号：

当G为平面有界闭区域（常记为D）时，称为**二重积分**，记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$；

当G为空间有界闭区域（常记为Ω）时，称为**三重积分**，记为$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$；

当G为平面有限曲线段（常记为L）或空间有限曲线段（常记为Γ）时，称为**第一类曲线积分**（也称为**对弧长的曲线积分**），记为$\int_L f(x,y)ds$或$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$；

当G为空间有限曲面片（常记为Σ）时，称为**第一类曲面积分**（也称为**对面积的曲面积分**），记为$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS$.

（这里被积函数f随几何形体的不同，分别为二元函数或三元函数．读者应该熟记各种积分的记号）.

与定积分类似，当$f(p)$在G上连续时，积分$\int_G f(p)dg$必定存在.

2. 积分$\int_G f(p)dg$具有与定积分类似的性质.

性质 1　（线性性）

$$\int_G kf(p)dg = k\int_G f(p)dg \qquad (k\text{ 为常数}),$$

$$\int_G [f(p)\pm h(p)]dg = \int_G f(p)dg \pm \int_G h(p)dg.$$

性质 2（对积分域的可加性）　若G分为两部分$G=G_1+G_2$，则有

$$\iint\limits_D f(p)dg = \int_{G_1} f(p)dg \pm \int_{G_2} f(p)dg.$$

性质 3　若在G上$f(p)=1$，则有$\int_G dg = G$的度量（比如面积，体积，弧长等).

例如　$\iint\limits_D d\sigma = D$的面积.

性质 4（比较性）如果在G上$f(p)\le h(p)$，则有

$$\iint_G f(p)dg \le \iint_G h(p)dg$$

性质 5（估值性） 若 M， m 分别是 $f(p)$ 在 G 上的最大值和最小值，则有

$$m\sigma \le \iint_G f(p)d\sigma \le M\sigma \quad （\sigma \text{ 为 } G \text{ 的度量}）.$$

性质 6 （二重积分的中值定理）若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，满足等式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma \quad （\sigma \text{ 为 } D \text{ 的面积}）.$$

3. 几何形体上积分的物理意义

如果一个非均匀物体，其形状如上述几何形体 G，其密度为 G 上的函数 $\rho(p)$，则在 G 的元素 dg 上，其质量应是 $\rho(p)dg$，于是该物体的总质量为

$$M = \int_G \rho(p)dg .$$

4. 二重积分的几何意义

设 $f(x,y)$ 是平面上有界闭区域 D 上的非负连续函数，则二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于由 D 为底面、$z=f(x,y)$ 为顶以及曲面 $z=f(x,y)$ 的投影柱面为侧面的曲顶柱体的体积.

（二）二重积分的计算方法

将二重积分化为二次积分来计算，其关键问题是根据积分区域的形状定出两个定积分的积分上下限.定限时注意上、下限与表示积分区域的不等式之间的关联.

1. 在直角坐标系下计算二重积分

（1）若 D 为 $X-$ 型区域，即 D 可表为：$\begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \quad （先 \ y \ 后 \ x）.$$

（2）若 D 为 $Y-$ 型区域，即 D 可表为：$\begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad （先 x 后 y）.$$

（3）若 D 不是 $X-$型或 $Y-$型区域，则可以通过对区域 D 做适当的分割，使之成为若干个 $X-$型或 $Y-$型的区域，化为二次积分，再用积分的可加性来计算二重积分.

在计算二重积分时，有时需要改变二次积分的积分次序.

2. 在极坐标系下计算二重积分

极坐标与直角坐标的关系如下：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$,

于是 $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$，

其中 $\rho d\rho d\theta$ 是在极坐标系中的面积元素.

根据积分区域 D 的形状，将二重积分化为二次积分.

（1）若 D 表示为 $\begin{cases} \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta) \\ \alpha\le\theta\le\beta \end{cases}$，则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（2）若极点在 D 的边界上，D 表示为 $\begin{cases} 0\le\rho\le\rho(\theta) \\ \alpha\le\theta\le\beta \end{cases}$，则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（3）若极点在 D 的内部，D 表示为 $\begin{cases} 0\le\rho\le\rho(\theta) \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$，则

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

注意　在利用极坐标系计算二重积分时，一定要把被积函数和积分区域都化为极坐标表示.

（三）三重积分的计算方法

1. 将三重积分化为一个二重积分和一个定积分来计算.

设 $f(x,y,z)$ 在空间有界区域 Ω 上连续，利用直角坐标来计算.

（1）“先一后二”法（投影法）

若 Ω 可表示为：$\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases}$，

其中 $z=z_1(x,y)$ 和 $z=z_2(x,y)$ 分别为 Ω 的下半边界曲面和上半边界曲面，

$\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases}$ 为 Ω 在 xoy 面上的投影区域（$X-$型域），记为 D_{xy}，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

同理，可以得到其它不同积分次序的三次积分.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

中的二重积分 $\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$ 也可以在极坐标系下计算，这时等效于利用柱面坐标计算三重积分.

（2）“先二后一”法（截面法）

设 Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[\alpha,\beta]$，过 $[\alpha,\beta]$ 上任一点 z，平行于 xoy 面的 Ω 的截面，该截面为一有界闭区域 D_z，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\alpha}^{\beta}\left[\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right]dz.$$

2. 利用柱面坐标计算三重积分

柱面坐标与直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \quad (0\le\rho<+\infty, 0\le\theta\le 2\pi, -\infty<z<+\infty) \\ z=z \end{cases}$$

三重积分在柱面坐标系下的形式为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

其中 $dv=\rho d\rho d\theta dz$ 为体积元素.

假设积分区域 Ω 在柱面坐标下表示为

$\Omega:\varphi_1(\rho,\theta)\le z\le\varphi_2(\rho,\theta), \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta), \alpha\le\theta\le\beta,$

则三重积分可化为柱面坐标系下的三次积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{\alpha}^{\beta} d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho d\rho\int_{\varphi_1(\rho,\theta)}^{\varphi_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)dz.$$

*3. 利用球面坐标计算三重积分

球面坐标与直角坐标的关系是

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \quad (0 \le r < +\infty, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi) \\ z = z\cos\varphi \end{cases}.$$

三重积分在球面坐标系下的形式为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

其中$F(r,\varphi,\theta) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$，$dv = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$是体积元素.

若空间区域Ω包含原点在其内部，边界曲面为$r = r(\varphi,\theta)$，则有

$$\iiint_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr \cdot$$

（四）曲线积分的计算

1． 利用公式化为定积分计算

（1）对弧长（第一类）的曲线积分

设平面曲线L的参数方程为$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta$，其中$\varphi(t),\psi(t)$在$\left[\alpha,\beta\right]$上有连续偏导数，且$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \ne 0$，又函数$f(x,y)$在$L$上连续，则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt, \alpha < \beta .$$

如果曲线L由方程 $y = \psi(x), a \le x \le b$给出，那么可以把这种情形看作是特殊的参数方程$x = x, y = \psi(x), a \le x \le b$的情形，从而有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f\left[x,\psi(x)\right]\sqrt{1 + \psi'^2(x)}dx, a < b$$

类似地，如果曲线L由方程$x = \varphi(y), c \le y \le d$给出，则有

$$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f\left[\varphi(y), y\right]\sqrt{1 + \varphi'^2(y)}dy, c < d .$$

若L是由极坐标方程$\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$给出，则把$\theta$看作参数，且$x = \rho(\theta)\cos\theta, y = \rho(\theta)\sin\theta$，有$ds = \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}d\theta$，

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta\right] \cdot \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}d\theta, \alpha < \beta .$$

对空间曲线Γ由参数方程$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t), \alpha \le t \le \beta$给出的情形，有

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right] \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}dt, \alpha < \beta .$$

（2）对坐标（第二类）的曲线积分

设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$，

当参数t单调地由α变到β时，点$M(x,y)$从L的起点A沿L移到终点B，$\varphi(t),\psi(t)$在以α、β为端点的闭区间上具有一阶连续偏导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\left\{P\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\varphi'(t)+Q\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\psi'(t)\right\}dt.$$

如果L由方程$y=\psi(x)$给出，且L的起点A对应$x=a$，终点B对应$x=b$，则有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left\{P\left[x,\psi(x)\right]+Q\left[x,\psi(x)\right]\psi'(x)\right\}dx.$$

如果L由方程$x=\varphi(y)$给出，且L的起点A对应$y=c$，终点B对应$y=d$，则有

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d\left\{P\left[\varphi(y),y\right]\varphi'(y)+Q\left[\varphi(y),y\right]\right\}dy.$$

如果Γ是空间曲线，其参数方程为$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$，且$L$的起点$A$对应$t=\alpha$，终点$B$对应$t=\beta$，则有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{P\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\varphi'(t)+Q\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\psi'(t)+R\left[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)\right]\omega'(t)\right\}dt.$$

注意 （1） 在以上公式右端的积分中，下限对应曲线起点，上限对应曲线终点.因此下限不一定比上限小.

（2） 第二类曲线积分有方向性.记L的反方向曲线为L^-，则有

$$\int_{L^-}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

2．利用格林公式计算

如果满足格林公式条件，则可利用格林公式，将封闭曲线上的曲线积分化为二重积分来计算.

（五）曲面积分的计算

1．利用公式化为二重积分计算

（1）对面积（第一类）的曲面积分

设曲面Σ由方程$z=z(x,y)$给出，Σ在xOy面的投影为D_{xy}，函数$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有连续偏导数，被积函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，则有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy.$$

如果积分曲面Σ由方程$x=x(y,z)$或$y=y(z,x)$给出，也可类似地把对面积的曲面积分别化为在yoz面或xoz面的投影区域D_{yz}或D_{xz}上的二重积分.

（2）对坐标（第二类）的曲面积分

设曲面Σ是由方程$z=z(x,y)$所给出的曲面上侧（即$\cos\gamma>0$），Σ在xOy面上的投

影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，被积函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy\,.$$

积分曲面取在 Σ 的下侧，这时 $\cos\gamma<0$，则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]dxdy$$

类似地，如果 Σ 由 $x=x(y,z)$ 给出，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P\left[x(y,z),y,z\right]dydz$$

积分曲面取在 Σ 的前侧 $\left(\cos\alpha>0\right)$ 时为正，取在 Σ 的后侧 $\left(\cos\alpha<0\right)$ 时为负.

如果 Σ 由 $y=y(z,x)$ 给出，则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q\left[x.y(z,x),z\right]dzdx\,.$$

积分曲面取在 Σ 的右侧 $\left(\cos\beta>0\right)$ 时为正，取在 Σ 的左侧 $\left(\cos\beta<0\right)$ 时为负.

2．利用高斯公式计算

如果满足高斯公式条件，则可利用高斯公式，将封闭曲面上的曲面积分化为三重积分来计算.

（六）两类积分之间的关系

1．曲线积分

(1) $$\int_{L} Pdx+Qdy=\int_{L}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta\right)ds$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是有向曲线弧 L 上点 (x,y) 的切向量的方向余弦.

（**注意** $\cos\beta=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，它在解题时常常用到）.

(2) $$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{\Gamma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds\,,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是有向曲线弧 Γ 上点 (x,y,z) 处的切向量的方向余弦.

第二类曲线积分可以表示成向量形式：

$$\int_{L} Pdx+Qdy=\int_{L}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{L}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$$

或 $$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{L}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{L}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds,$$

其中 $\boldsymbol{A}=\left(P,Q\right)$ 或 $\boldsymbol{A}=\left(P,Q,R\right)$，$\boldsymbol{t}=\left(\cos\alpha,\cos\beta\right)$ 或 $\boldsymbol{t}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$，$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}ds=\left(dx,dy\right)$ 或 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}ds=\left(dx,dy,dz\right)$ 称为有向曲线元.

注意 以下关系式在解题时常常用到：

$$dx = \cos\alpha ds, dy = \cos\beta ds, dz = \cos\gamma ds$$

或 $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

其中 ds 为 Γ 的弧微分.

2．曲面积分

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的方向余弦.

第二类曲面积分可表示为向量形式：

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}dS$$

其中 $\boldsymbol{A} = (P, Q, R), \boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$， $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS = (dydz, dzdx, dxdy)$ 称为有向曲面元.

注意 以下关系式在解题时常常用到：

（1） $dydz = \cos\alpha dS, dzdx = \cos\beta dS, dxdy = \cos\gamma dS$.

（2） 设 Σ： $z = f(x, y)$，则可将三个曲面积分化为一个曲面积分：

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} \left[P(-z_x) + Q(-z_y) + R\right]dxdy$$

利用上面关系式有时可以简化计算第二类曲面积分.

注：关系式 $dydz = (-z_x)dxdy,\ dzdx = (-z_y)dxdy$ 的推导：

由 $\dfrac{\cos\alpha}{-z_x} = \dfrac{\cos\beta}{-z_y} = \dfrac{\cos\gamma}{1}$, 得 $\cos\alpha = -z_x\cos\gamma, \cos\beta = -z_y\cos\gamma$.

因此， $dydz = \cos\alpha dS = (-z_x)\cos\gamma dS = (-z_x)dxdy$,

$dzdx = \cos\beta dS = (-z_y)\cos\gamma dS = (-z_y)dxdy$.

（七）两个重要公式和等价命题

1. 格林公式----平面上曲线积分与二重积分的关系

设有界闭区域 D 由分段光滑的曲线围成，函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则格林公式成立，即有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

注意（1） 若 L 为 D 的反向边界曲线，则格林公式为

$$\oint_L Pdx+Qdy=-\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy\,.$$

（2） 若D为复连通区域，则公式中的L表示取正向的全部内外边界曲线.

2. 单连通域上的四个等价命题.

若函数$P(x,y),Q(x,y)$及其一阶偏导数在单连通域D上连续，则由格林公式可推出四个等价命题：

（1）$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$在$D$上恒成立；

（2）$\oint_L Pdx+Qdy=0$，其中L是D内任意光滑闭曲线；

（3）曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$在D内与路径无关；

（4）表达式$Pdx+Qdy$是D上某个二元函数$u\left(x,y\right)$的全微分，即

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

其中$u(x,y)$称为$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$的一个原函数.

3. 高斯公式——曲面积分与三重积分的关系

设空间有界闭区域Ω由分片光滑的曲面围成，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导数，则高斯公式成立，即有

$$\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\,,$$

其中Σ是Ω的整个边界曲面的外侧.

注意（1） 若Ω为复连通区域，则公式中的Σ表示取区域外侧的全部内外边界曲面.

(2) 若Σ取内侧，则$\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=-\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy\,.$