1.5 曲面及其方程

认识曲面

记住二次曲面的图形

1.5.1 曲面方程

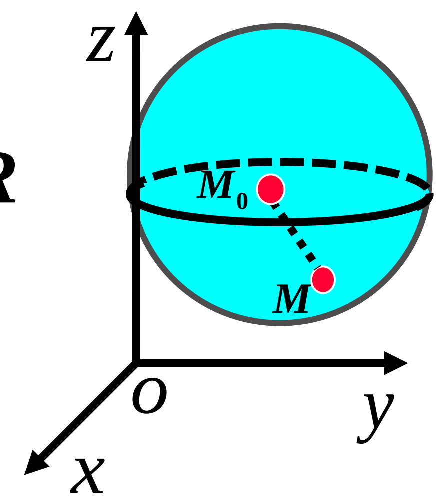
这节先介绍曲面方程的概念，然后我们一起来建立柱面和旋转面的方程.

先看两个例题

例1 求动点到定点$M_0(x_0,y_0,z_0)$距离为 R 的轨迹方程.

解 设轨迹上动点为$M(x,y,z)$,

依题意 $|M_0M| = R,$



即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$

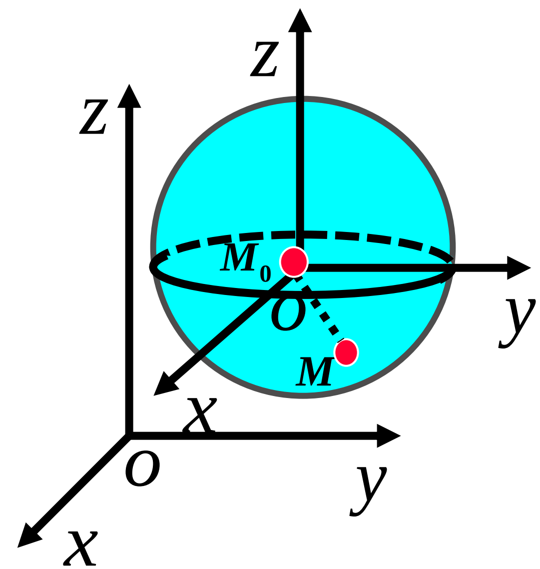
故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

这是M_0为球心,R为半径的球面方程.

M_0为球心,R为半径的球面方程:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$



当M_0在原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

点$M(x,y,z)$的纵坐标:

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上半球面.

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示下半球面.

例2 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示: 球心为 $M_0(1,-2,0)$,

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

一般地如下形式的三元二次方程 (A≠ 0)

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

都可通过配方研究它的图形.

其图形可能是一个球面, 或点, 或虚轨迹.

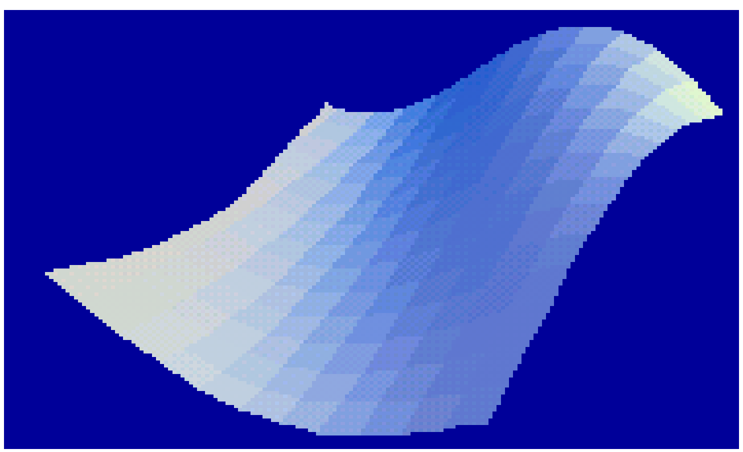
定义 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

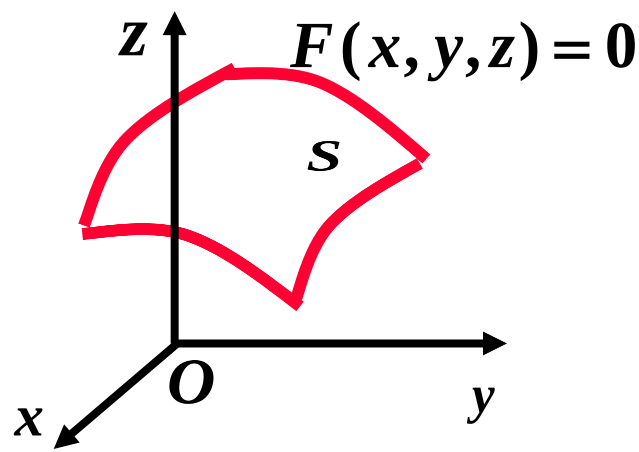
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的**方程**,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.



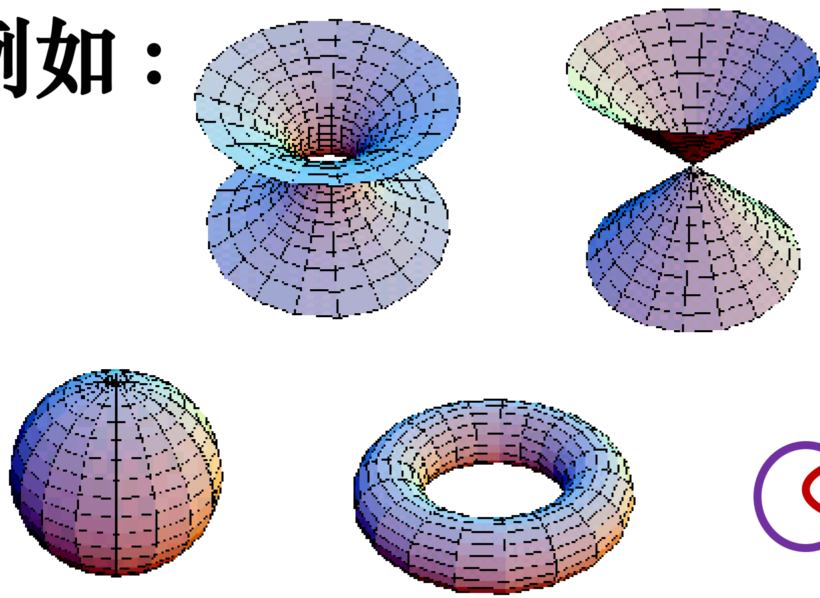


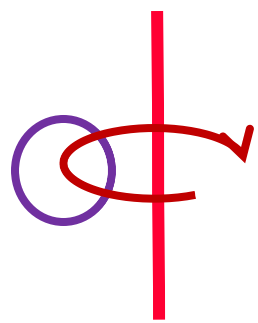
旋转曲面

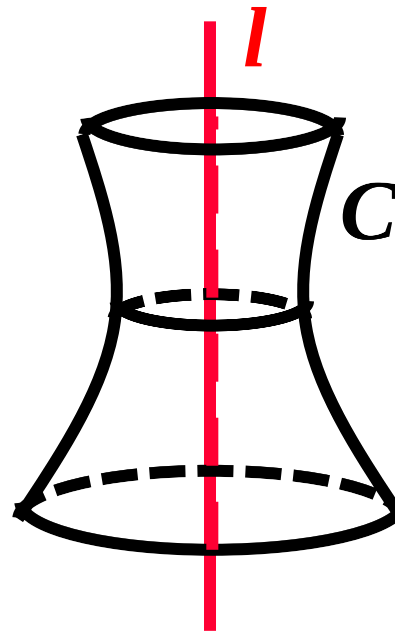
定义 一条平面曲线C绕其平面上一条定直线 l 旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**.

该定直线称为**旋转轴** .

例如：







建立yoz面上曲线绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

给定 yoz 面上曲线 C: $f(y,z)=0$

在曲面上任取一点 $M(x,y,z)$,

当绕 z 轴旋转时, 该点转到点

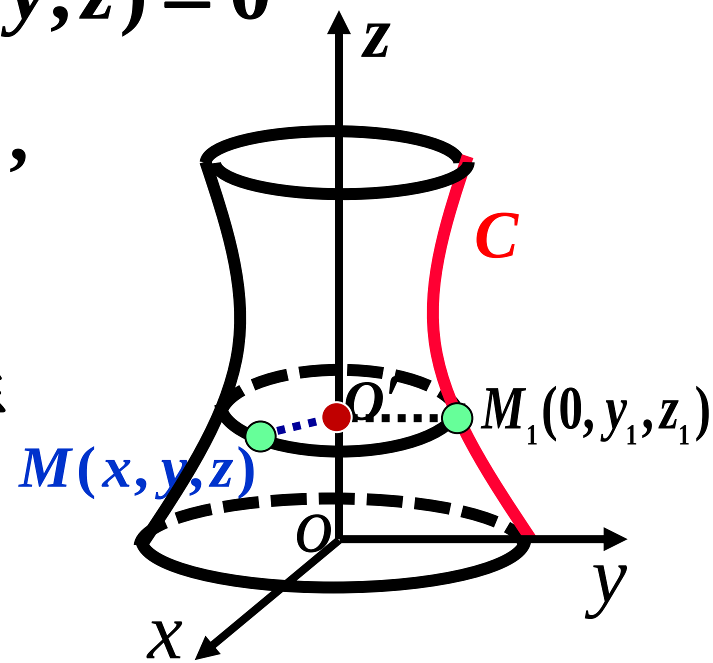
$M_1(0,y_1,z_1)\in C$, 满足曲线方程

$$f(y_1,z_1)=0$$

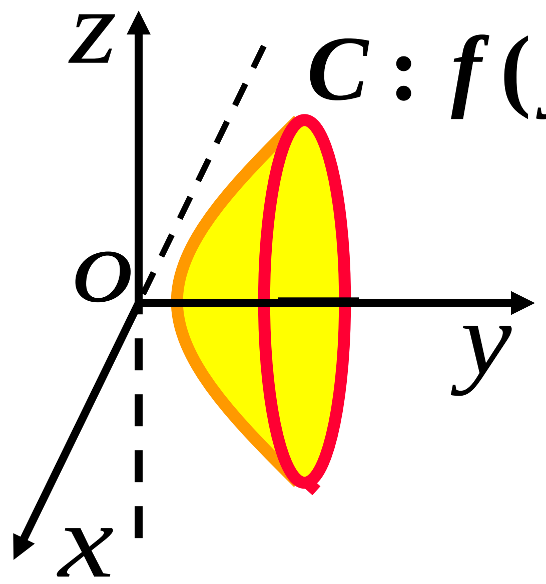
由于 $|O'M|=|O'M_1|=|y_1|$,

则有 $|O'M|=|y_1|$, 即 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$, $z=z_1$,

故旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$



思考：当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何?



$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例3 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α的圆锥面方程.

解 在yoz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

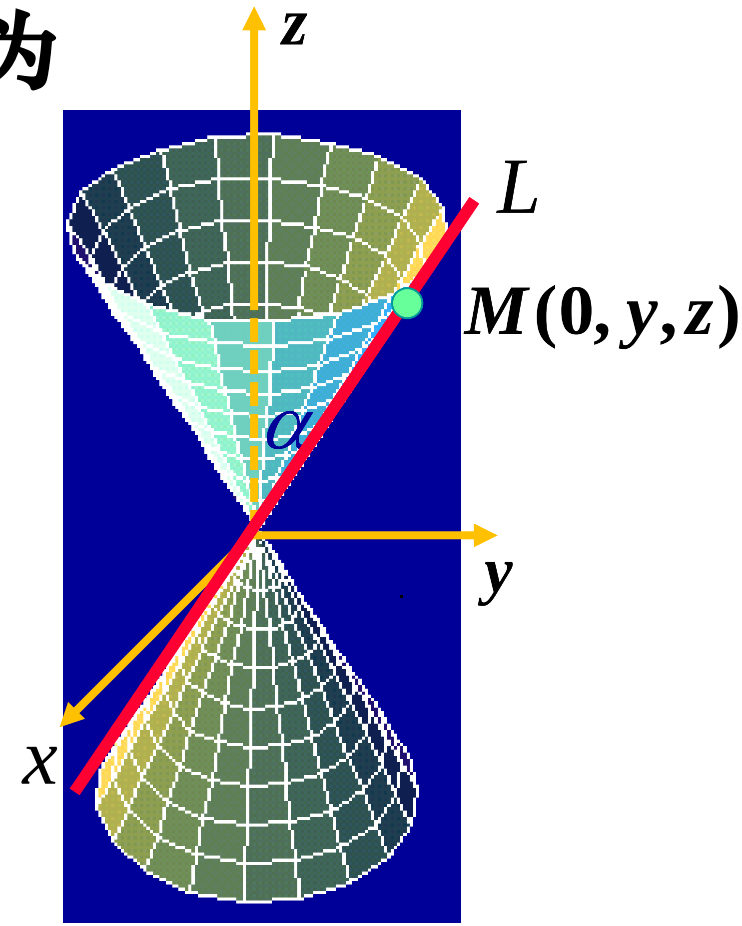
绕z 轴旋转时,圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

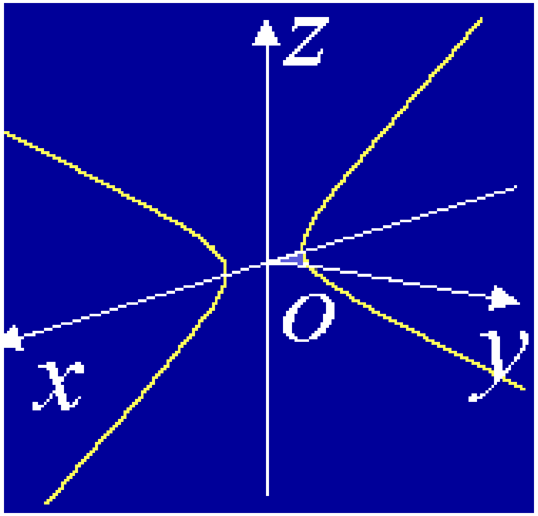
令 $a = \cot\alpha$

两边平方

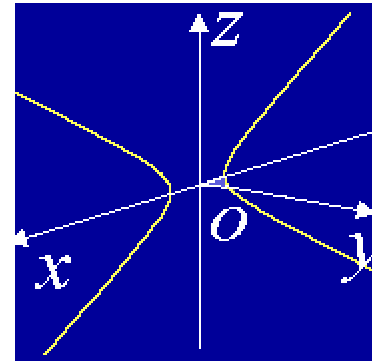
$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$



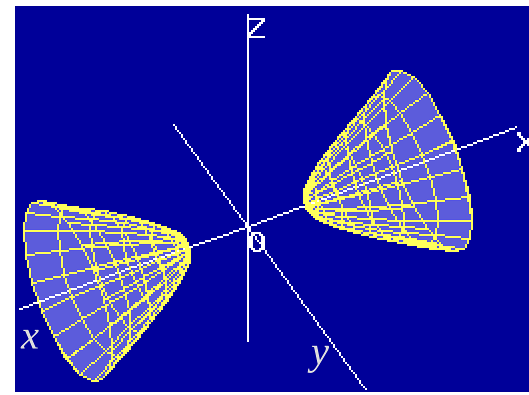
例4 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.



解 绕 x 轴旋转所成曲面方程为



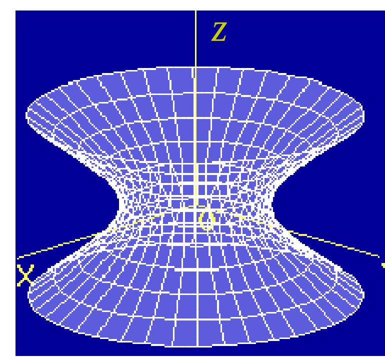
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$



这种曲面都叫做**旋转双叶双曲面**.

绕 z 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \longrightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



这种曲面都叫做**旋转单叶双曲面**.

2. 柱面

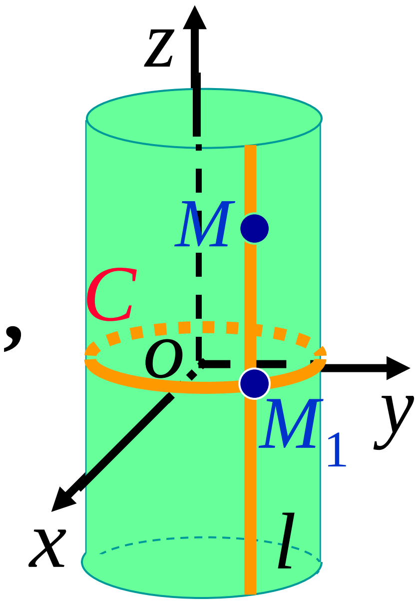
引例 分析方程$x^2+y^2=R^2$表示怎样的曲面.

解 在xoy面上，$x^2+y^2=R^2$ 表示圆C,

在圆C上任取一点 $M_1(x,y,0)$,

过此点作平行 z 轴的直线 l，对任意 z，

点$M(x,y,z)$的坐标也满足方程



$$x^2+y^2=R^2$$

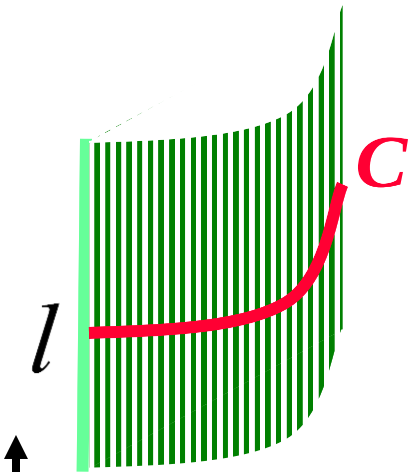
沿曲线C平行于z 轴的一切直线所形成的曲面

称为**圆柱面**.其上所有点的坐标都满足此方程,

故在空间中 $x^2+y^2=R^2$ 表示圆柱面.

定义　平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**.

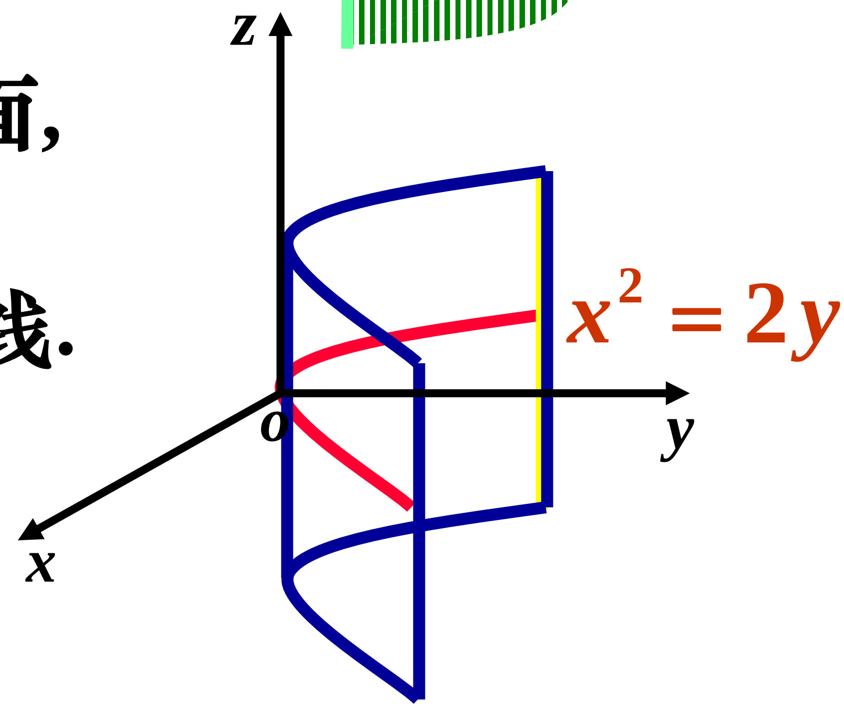
C 叫做**准线**，l 叫做**母线**.



$x^2 = 2y$　表示抛物柱面，

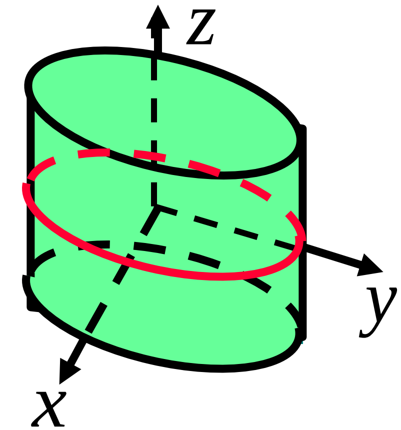
准线C为xoy 面上的抛物线.

母线平行于 z 轴;



- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

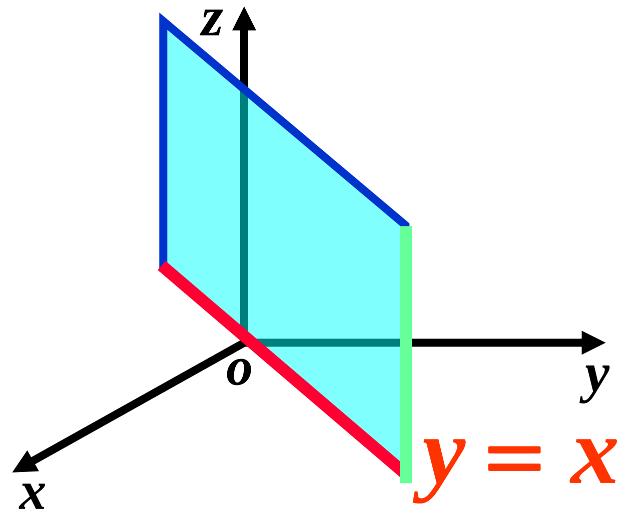
表示母线平行于z 轴的椭圆柱面.



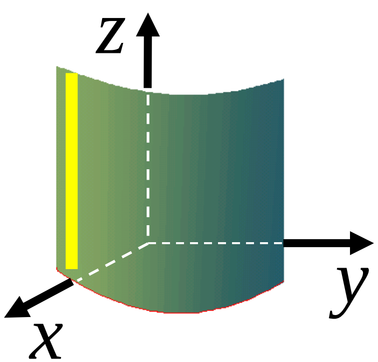
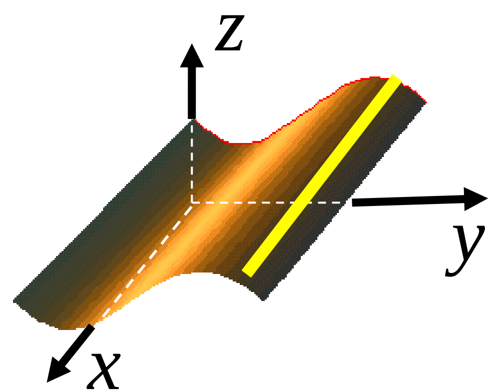
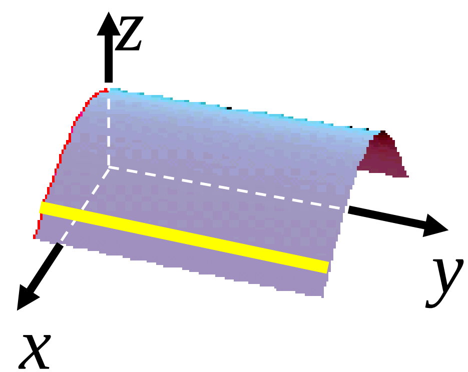
- $x-y=0$

表示母线平行于z 轴的平面.

(且 z 轴在平面上)



一般地,在三维空间中的二元方程表示柱面

<table>
<tr><td>方程</td><td>$F(x,y)=0$</td><td>$G(y,z)=0$</td><td>$H(z,x)=0$</td></tr>
<tr><td>母线</td><td>平行于z 轴</td><td>x 轴</td><td>y 轴</td></tr>
<tr><td>准线</td><td>在xoy 面</td><td>yoz 面</td><td>xoz 面</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

1.5.2 二次曲面

由曲面的概念知

方程 $F(x, y, z) = 0$与曲面 S一一对应

由三元一次方程所定义的曲面----平面.

由三元二次方程所定义的曲面----二次曲面.

三元二次方程（二次项系数不全为 0）

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

的图形通常为二次曲面.

基本类型有:

椭球面,抛物面,双曲面和锥面等,

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,

下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

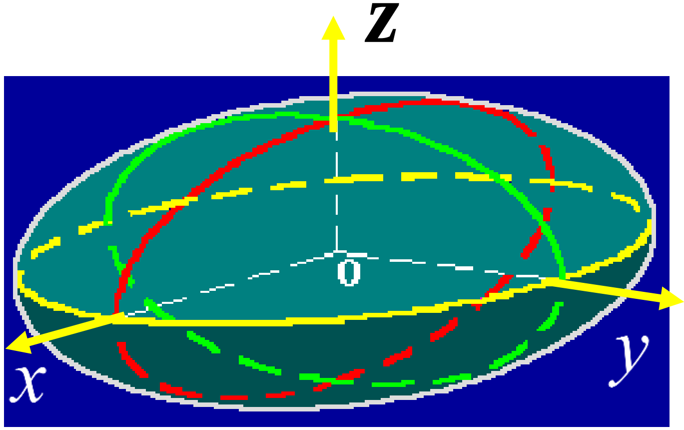
研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法

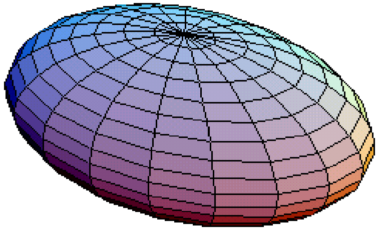
1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(1)范围：

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$



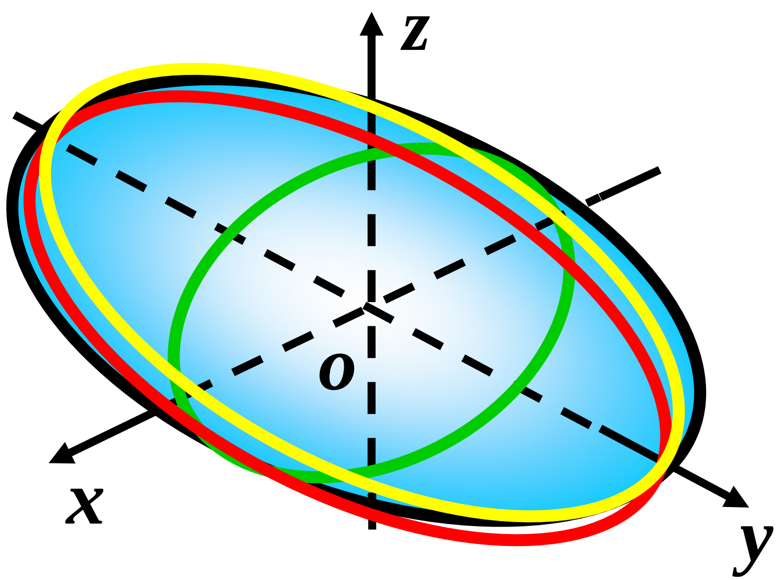


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(2)与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0\end{cases}$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

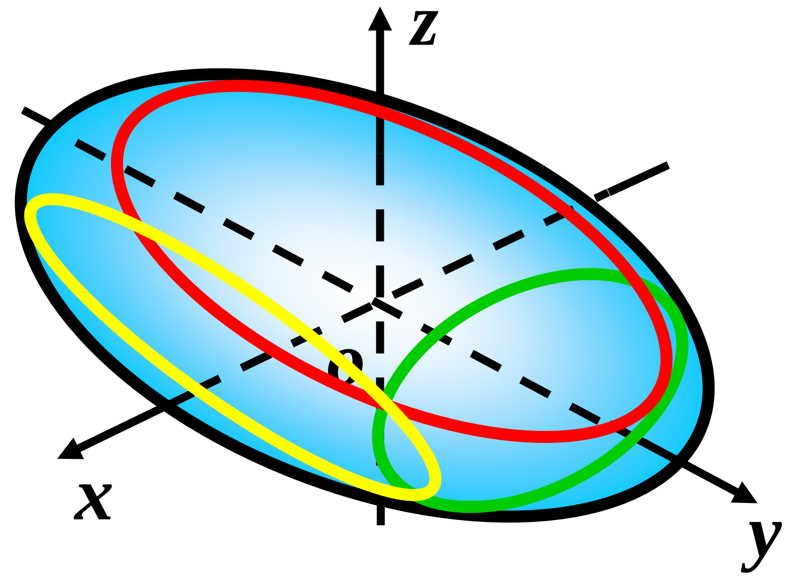
(3) 截痕：与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

同样 $y=y_1\ (|y_1|\le b)$ 及

$x=x_1\ (|x_1|\le a)$

的截痕也为椭圆.



(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 或 \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

由看作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

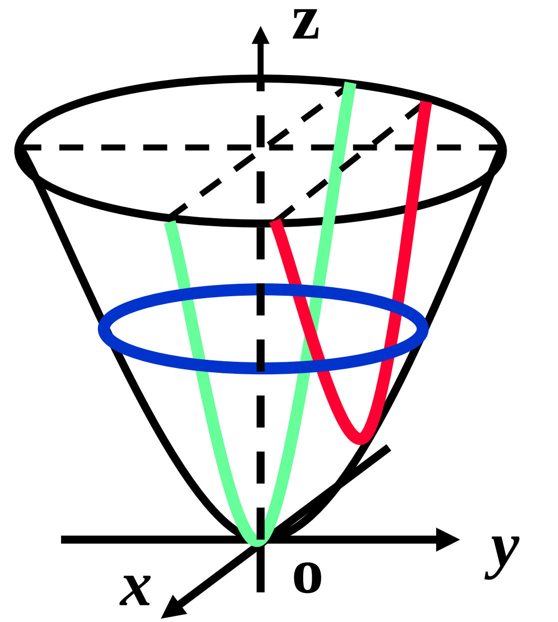
当 $a=b=c$ 时为球面:

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

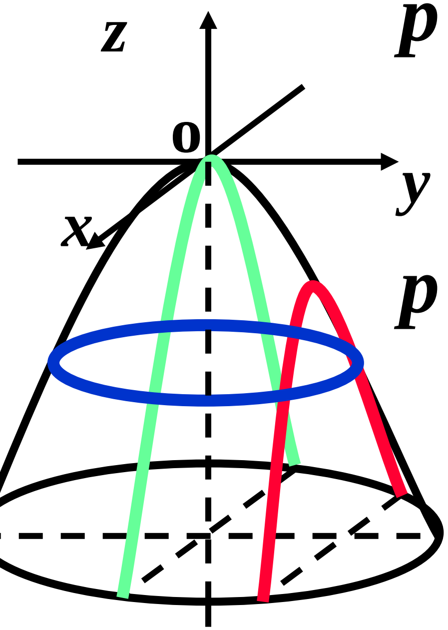
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad (p,q \text{ 同号})$$



$p>0, \quad q>0$

特别,当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

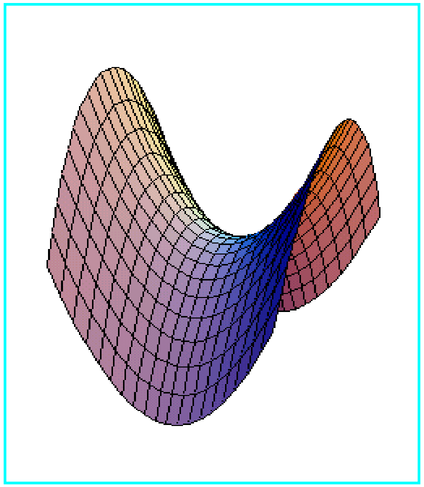
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$$

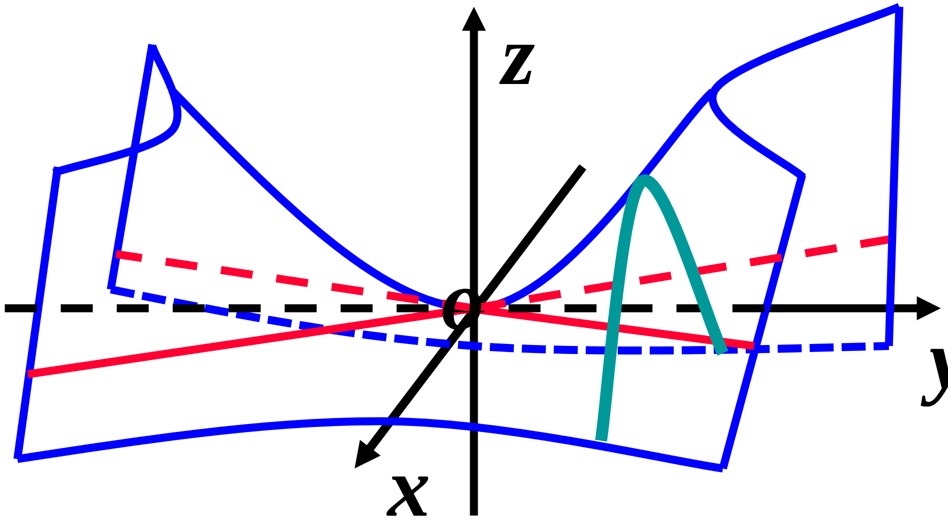


$p<0, \quad q<0$

(2) 双曲抛物面（鞍形曲面）

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\text{ 同号})$$



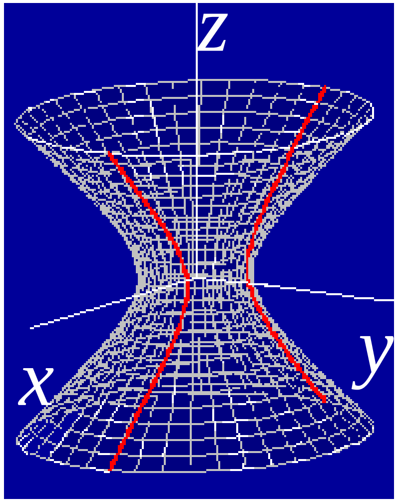


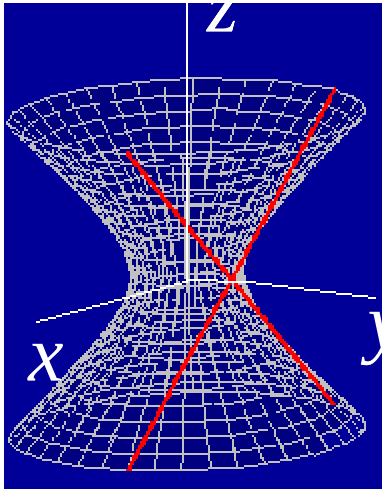
3. 双曲面

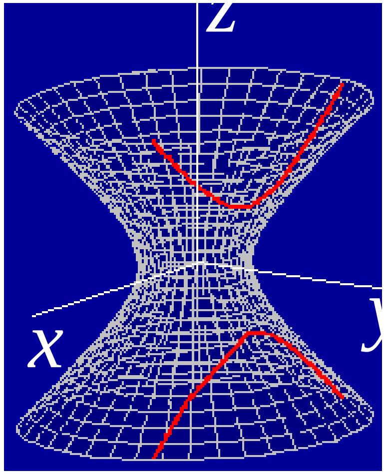
(1)单叶双曲面

广州电视塔图片

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \ (a,b,c\ \text{为正数})$$

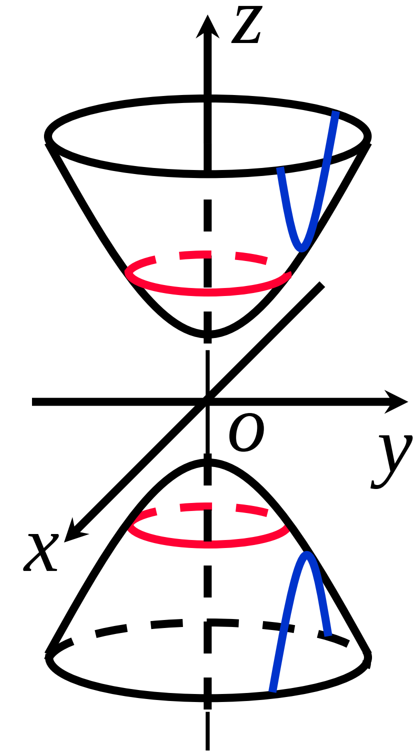






(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为双曲线

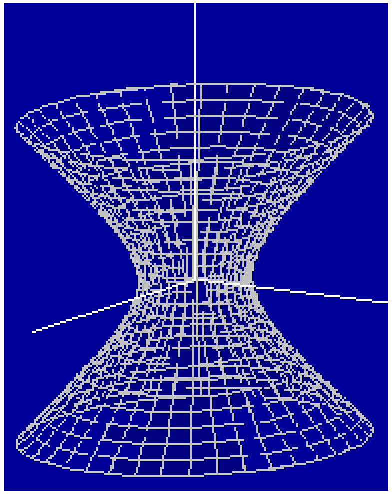
平面 $x=x_1$ 上的截痕为双曲线

平面 $z=z_1$ $(|z_1|>c)$上的截痕为椭圆

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

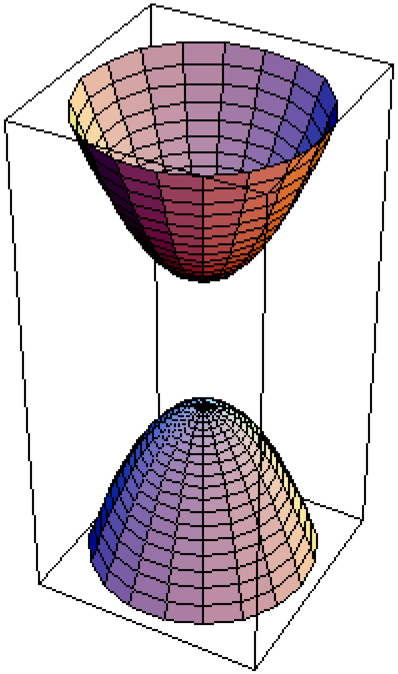
单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



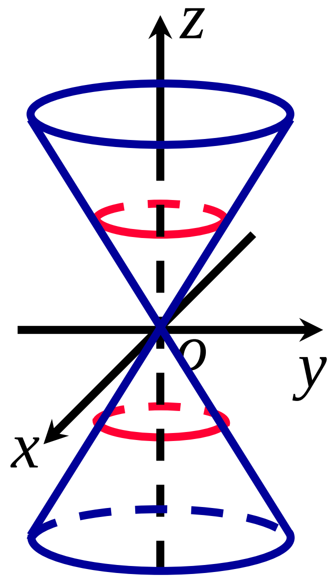
双叶双曲面

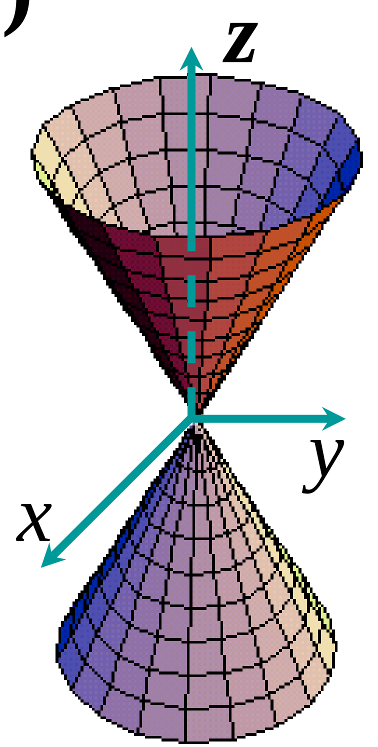
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a,b\text{为正数})$$





当$a=b$时是圆锥面 $x^2+y^2=a^2z^2$

希望同学要熟悉常用的二次曲面：椭球面,抛物面,双曲面和锥面等的标准方程和图形，在学习多元函数微积分时，要用这些图形作为几何参考.