3.5 对面积的曲面积分

问题： 有一曲面(Σ)形的非均匀构件，设其面密度是 $f(x,y,z)$，如何求它的质量?

密度函数对曲面的面积求积分

这种积分就称为**对面积的曲面积分**

当几何形体G为一光滑曲面Σ时,相应的积分

$$\int_G f(P)\,dg = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$$

积分曲面

曲面面积元素

就是函数$f(x,y,z)$在曲面Σ上的

对面积的曲面积分(或第一类曲面积分)

若积分曲面是封闭的，则相应的曲面积分

记为 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$

曲面的面积元素

设有界闭曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$,

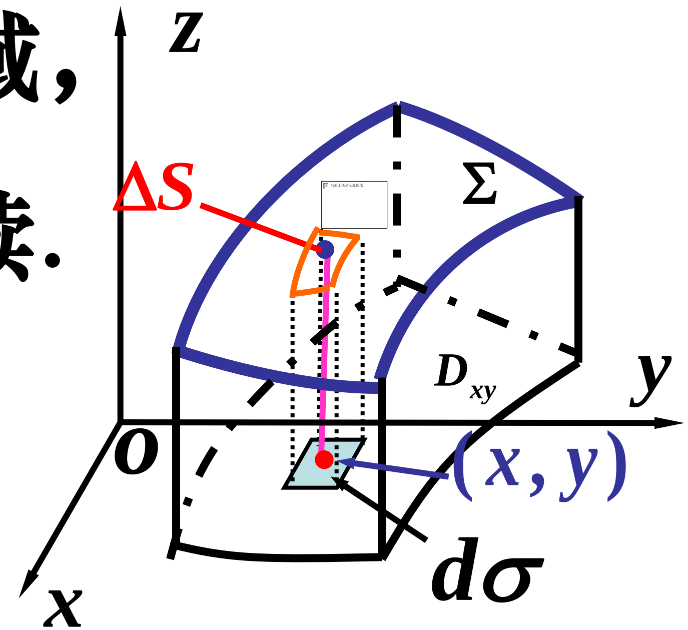
D_{xy}为Σ在xoy面上投影区域,

$z(x, y)$在D_{xy}上偏导数连续.

在Σ上任取小曲面块ΔS,

对应的投影区域为$d\sigma$,

$M(x, y, z(x, y))$为ΔS上任一点,



T为ΔS上过$M(x,y,z(x,y))$的切平面.

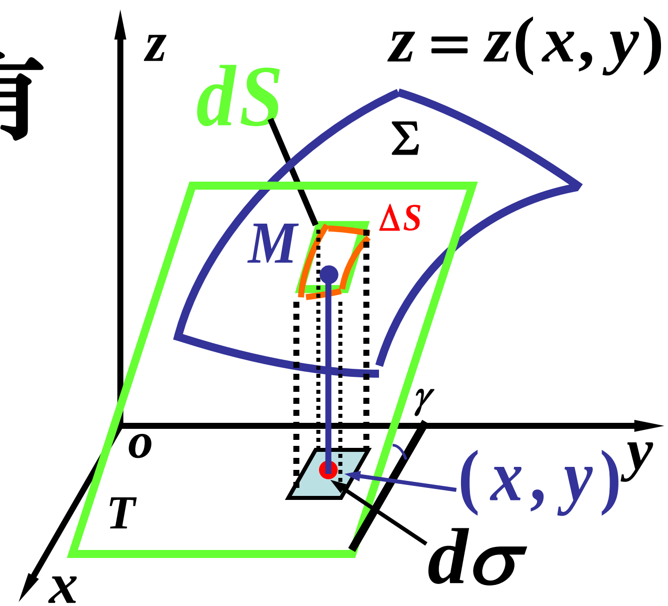
以$d\sigma$边界为准线，母线平行于z轴的小柱面截曲面Σ为ΔS; 截切平面T为dS,

(ΔS与dS在xoy面上的投影均为$d\sigma$)

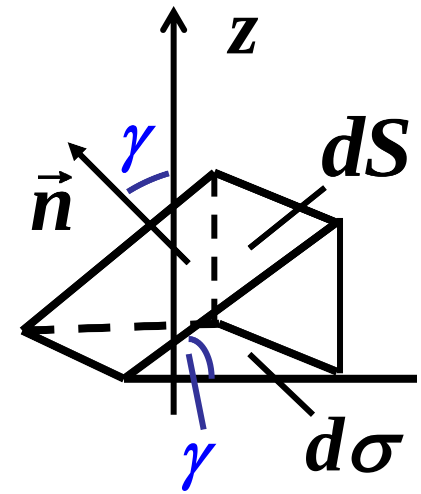
当$d\sigma$的面积很小时,则有

$$\Delta S \approx dS.$$

曲面块　　切平面块



$\boxed{\Delta S \approx dS}$



$\because d\sigma$ 为 dS 在 xoy 面上的投影,

$$\therefore d\sigma = dS \cdot \cos\gamma, \ (0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2})$$

切平(曲)面的法向量 $\vec{n} = (-z_x, -z_y, 1)$,

$$\because \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad \therefore dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma$$

Σ 的面积元素: $\boxed{dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma}$

计算对面积的曲面积分

——化为二重积分

$\boxed{\Sigma\text{向}xoy\text{面投影}D_{xy}}$

$$\iint\limits_{\Sigma} \underline{f(x,y,z)}\,\underline{dS} \qquad \Sigma: z = z(x,y)$$

$\boxed{z = z(x,y)}$

$\boxed{(x,y,z)\text{在}\Sigma\text{上变化}}$

$\boxed{dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma}$

曲面积分元素为

$$\boxed{\Sigma : z = z(x, y)}$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\, d\sigma$$

对面积的曲面积分的计算公式为

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, dS \\ &= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma\end{aligned}}$$

化为二重积分

如果曲面 Σ 的方程由

$$x=x(y,z) \quad 或 \quad y=y(x,z)$$

给出，也可类似地把对面积的曲面积分化为yoz面或xoz面上的二重积分。

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS \qquad \left(\Sigma: x = x(y,z)\right)$$

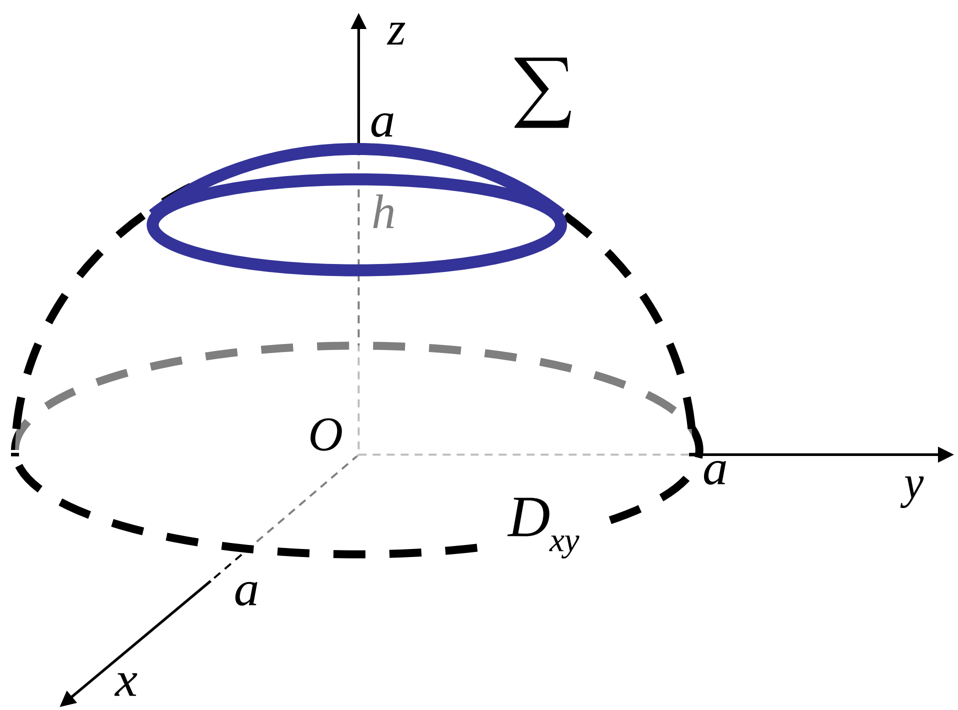
$$= \iint_{D_{yz}} f\left[x\left(y,z\right),y,z\right]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,d\sigma$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS \qquad \left(\Sigma: y = y(x,z)\right)$$

$$= \iint_{D_{xz}} f\left[x,y\left(x,z\right),z\right]\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,d\sigma$$

例1 计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}dS$，其中$\Sigma$：$x^2+y^2+z^2=a^2$

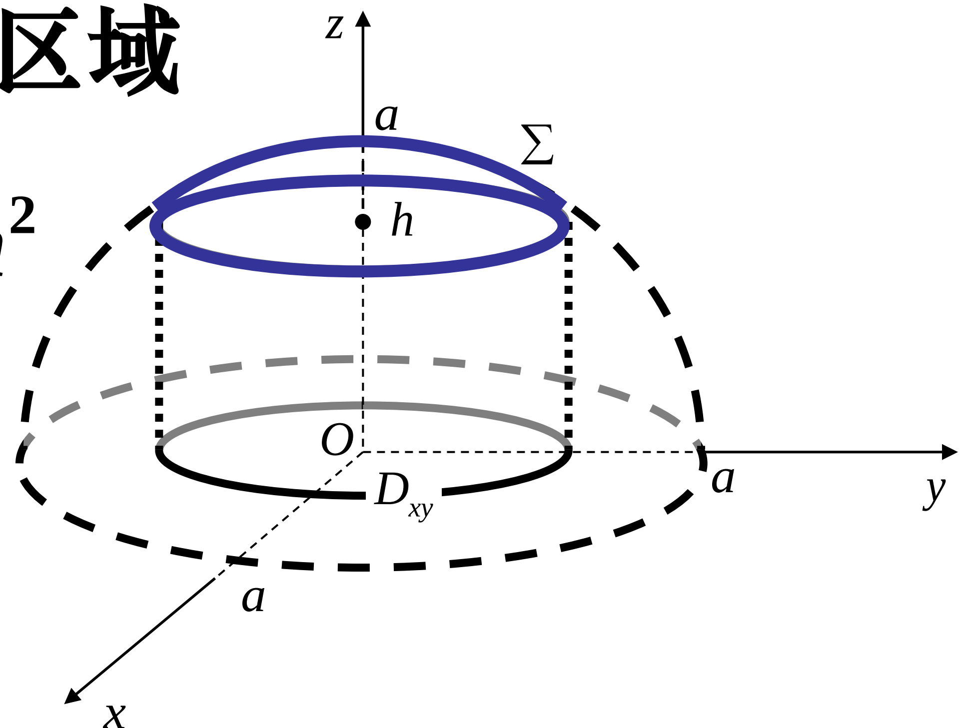
被平面 $z=h,\left(0<h<a\right)$ 截出的顶部.



解 Σ的方程为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\quad (h\le z\le a)$

它在xoy面上的投影区域

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$



曲面面积元素

$$\therefore dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma$$

$$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \ D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\Sigma\text{的面积元素}\, dS=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}dS=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}d\sigma$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy=\iint_{D_{\rho\theta}}\frac{a}{a^2-\rho^2}\rho d\rho d\theta$$

$$=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho}{a^2-\rho^2}d\rho=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例2 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Sigma$为圆柱面

$x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 和 $z=H(H>0)$

且在第一卦限的部分.

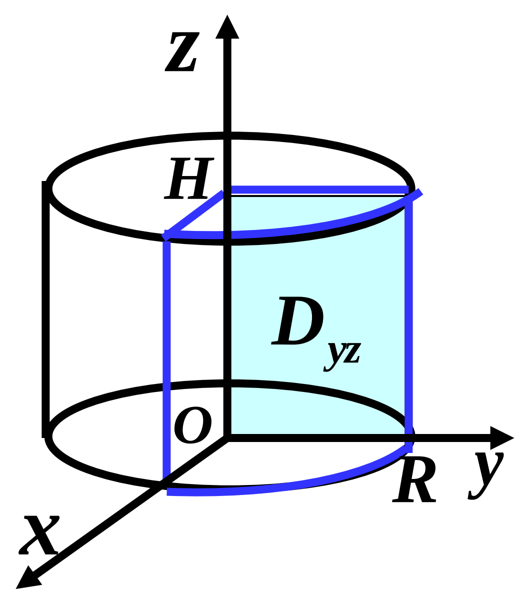
解 由于Σ不能表示成 $z=z(x,y)$ 的形式,

现写成 $x=\sqrt{R^2-y^2}$

这样就需投影到yoz面上,

投影区域 D_{yz} 为矩形:

$0 \le y \le R, 0 \le z \le H$



又 $x_y = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}, x_z = 0$

$$\boxed{\Sigma : x = \sqrt{R^2 - y^2}}$$

有 $dS = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\, d\sigma = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dydz$

于是 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{D_{yz}} \frac{1}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dydz$

$$= \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy \int_0^H \frac{1}{R^2 + z^2} dz$$

$$= \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \Big|_0^H dy$$

$$= \arctan \frac{H}{R} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy$$

$$= \arctan\frac{H}{R}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - y^2}}dy$$

瑕积分

$$= \arctan\frac{H}{R}\left[\arcsin\frac{y}{R}\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi}{2}\arctan\frac{H}{R}$$

所以 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\pi}{2}\arctan\frac{H}{R}.$

小　结

计算对面积的曲面积分

——化为二重积分

1.把积分曲面 Σ 代入被积函数;

2.根据积分曲面 Σ 的不同的表示形式，求出曲面面积元素.

3. 将 Σ 向相应的坐标面投影，得到二重积分的积分区域.

若$\Sigma: z = z(x, y)$

$$\boxed{dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

$\boxed{\Sigma\text{向}xoy\text{面投影}D_{xy}}$

$\boxed{\text{代入}z = z(x, y)}$

$$\boxed{\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f\left[x, y, z(x, y)\right]\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma}$$

1.若$\Sigma: z=z(x,y)$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\boxed{D_{xy}}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma$$

2.若$\Sigma: x=x(y,z)$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\boxed{D_{yz}}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}d\sigma$$

3.若$\Sigma: y=y(x,z)$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds=\iint_{\boxed{D_{xz}}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}d\sigma$$

Σ 的面积元素：

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma$$

曲面 Σ 的面积公式为：

$$S = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, d\sigma$$

例 计算$\oiint\limits_{\Sigma} xyzdS$,其中$\Sigma$是三个坐标面和平面$x+y+z=1$围成的四面体的整个边界曲面.

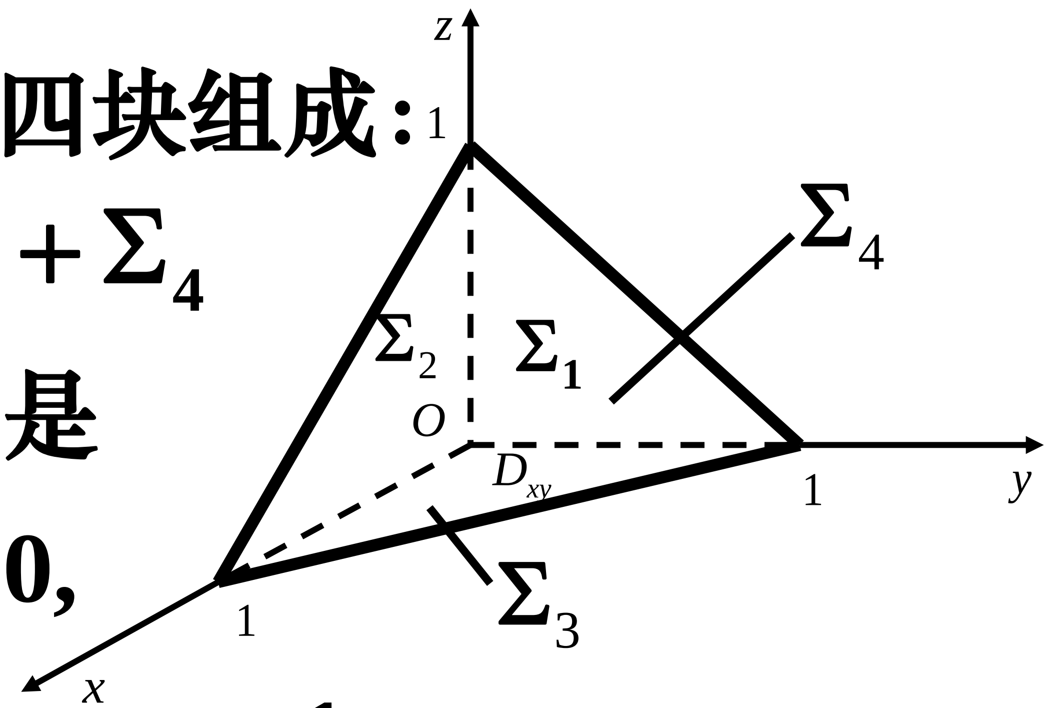
解 边界曲面Σ 由四块组成:

$$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$$

它们的表达式分别是

$$\Sigma_1: x=0, \Sigma_2: y=0,$$

$$\Sigma_3: z=0, \Sigma_4: x+y+z=1$$



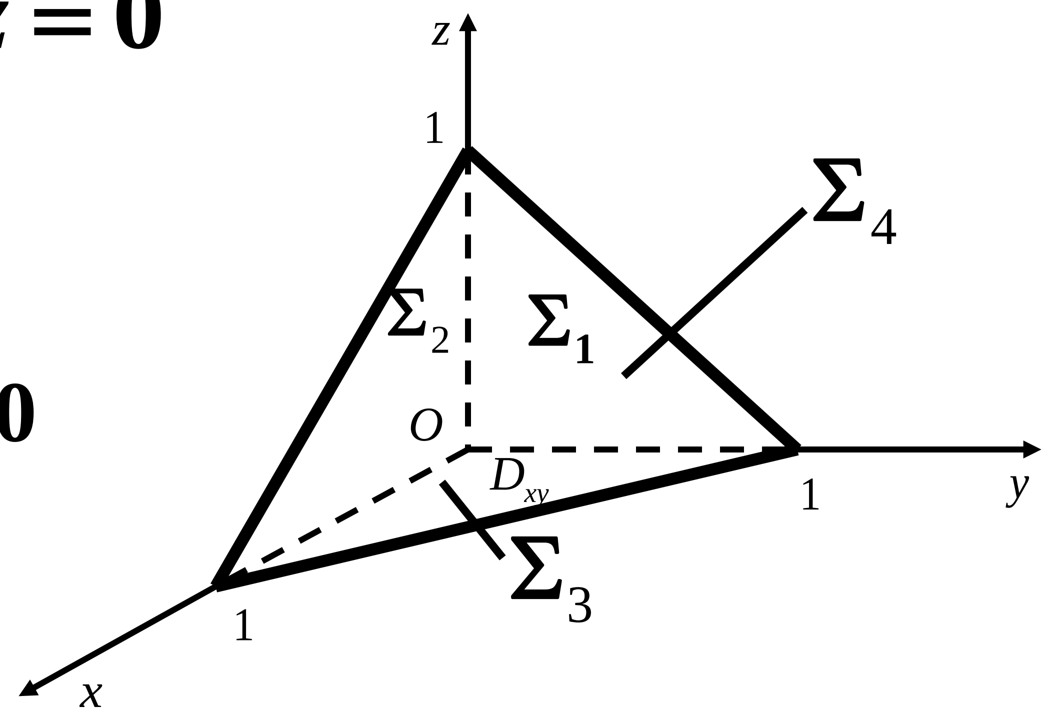
于是 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} xyzdS = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4} xyzdS$

由于在 $\Sigma_1 : x = 0,\ \Sigma_2 : y = 0, \Sigma_3 : z = 0$ 上,

$$f(x, y, z) = xyz = 0$$

所以

$$\iint_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_2} = \iint_{\Sigma_3} xyzdS = 0$$



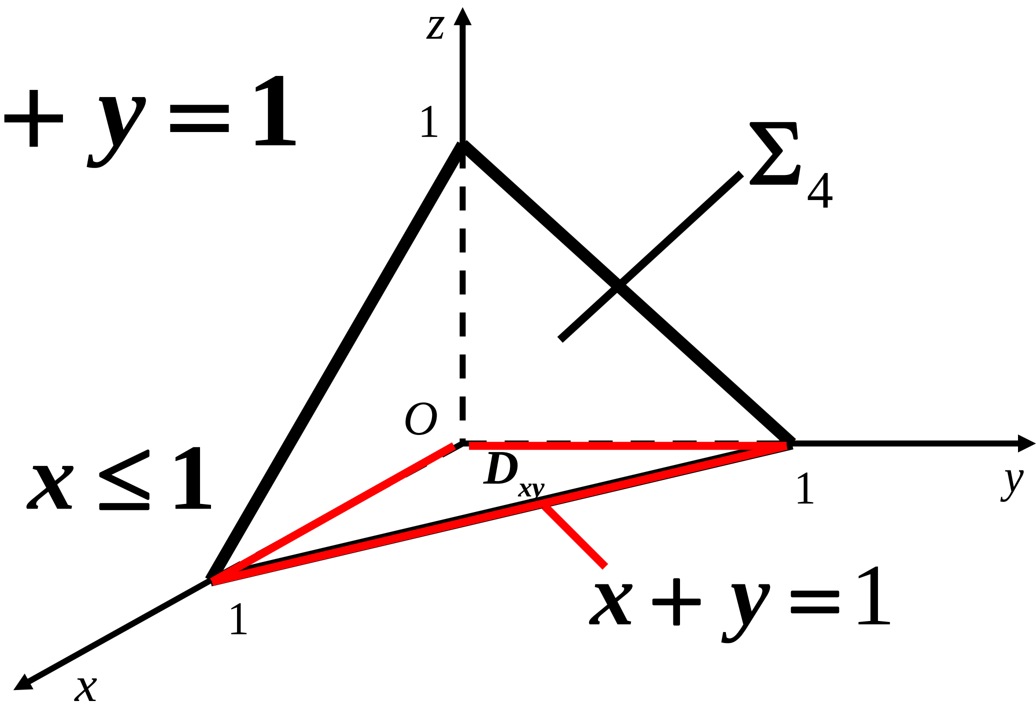
在Σ_4上：$z = 1 - x - y$,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,d\sigma = \sqrt{3}\,d\sigma$$

又Σ_4在xoy面上的投影区域 D_{xy}

是由 $x = 0, y = 0, x + y = 1$

围成的三角形.



$$D_{xy}: 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1$$

在Σ_4上： $z = 1 - x - y,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,d\sigma = \sqrt{3}\,d\sigma$$

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dS = \iint_{\Sigma_4} xyz\,dS = \iint_{D_{xy}} xy(1 - x - y)\sqrt{3}\,d\sigma$$

$$\boxed{D_{xy}: 0 \le y \le 1 - x, \quad 0 \le x \le 1}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y(1 - x - y)\,dy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[(1 - x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\frac{(1 - x)^3}{6}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{120}$$