第四章 一元函数积分学

一、基本要求

1. 理解定积分概念和几何意义,了解基本性质和积分中值定理.
2. 理解原函数与不定积分的概念和性质，明确积分法是微分法的逆运算.
3. 理解积分上限函数及其基本性质，会求积分上限函数的导数.
4. 掌握牛顿—莱布尼兹公式.
5. 熟记不定积分的基本公式，并熟练运用.
6. 掌握积分的换元法（两类）和分部积分法.
7. 会求简单的有理函数，三角有理式和无理函数的积分.
8. 了解反常积分及其收敛性的概念，会求简单的反常积分.

二、要点提示

（一）求积分的方法

1.直接积分法：利用积分的基本性质和恒等变形，将被积函数化为基本积分公式的形式进行积分.

2.换元积分法：通过变量代换将被积函数化为基本积分公式的形式.

（1）第一类换元法（凑微分法）

关键是凑微分形式，使积分变为

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx=\int f\left[\varphi\left(x\right)\right]d\varphi\left(x\right)\underline{\underline{令u=\varphi\left(x\right)}}\int f(u)du=F(u)+C=F\left[\varphi\left(x\right)\right]+C.$$

其中 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数.

常见的有：

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b);$$

$$\int x^m f(ax^{m+1}+b)dx=\frac{1}{(m+1)a}\int f(ax^{m+1}+b)d(ax^{m+1}+b);$$

（常用：$\int xf(x^2)dx=\frac{1}{2}\int f(x^2)d(x^2)$； $\int\frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})dx=2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$）；

$\int f(\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\int f(\frac{1}{x})d(\frac{1}{x})$ 等）；

$$\int f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int f(\tan x)d(\tan x)；$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)；$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x);$$

$$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x); \quad \int e^x f(e^x)dx=\int f(e^x)d(e^x);$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C.$$

（2）第二类换元法

通过适当选择代换 $x=\varphi(t)$，将积分化为

$$\int f(x)dx \underline{\underline{令x=\varphi(t)}} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=\Phi(t)+C=\Phi\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C.$$

其中 $\Phi(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数. 变换 $x=\varphi(t)$ 的选择是由被积函数的形式确定的，目的是使被积函数变得简单，从而容易积分，比如：

(i) 三角函数代换（或双曲代换）：被积函数含有二次根式时，可用三角函数代换或双曲代换，消除根式.

被积函数含有	三角代换	双曲代换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t,\lvert t\rvert<\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\tan t,\lvert t\rvert<\frac{\pi}{2}$	$x=asht$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t,\lvert t\rvert<\frac{\pi}{2}$	$x=\pm acht$

(ii) 根代换：被积函数中出现一次根式可用根代换消除根式，化为有理函数的积分.

若 $\int R\left(x,\sqrt{ax+b}\right)dx,$，则令 $\sqrt{ax+b}=t$，若 $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$，则令 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$；

(iii) 倒代换：被积函数为 x 的有理式或无理式时，可试用倒代换 $x=\frac{1}{t}$，使被积函数改变，常有可能容易积分.

（3）使用定积分换元法时要注意：换元时同时要换积分限；不写出新的变量，就不用换积分限.

在定积分换元法公式

$$\int_a^b f(x)dx \underline{\underline{令x=\varphi(t)}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)\varphi'(t)]dt$$

中，换元后的下限 α 要对应换元前的下限 a，换元后的下限 β 要对应换元前的下限 b.

3.分部积分法

不定积分的分部积分公式为

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \text{ 或 } \int udv = uv - \int vdu .$$

若公式左边的积分不易求出时，可利用公式将积分转化为右边易积出的形式，关键在于适当地选择函数 u, v' (或 dv). 选取它们的一般原则是：

①从 v'（或 dv）易求出 v；②u' 比 u 简单. 最终目标是：$\int vdu$ 比 $\int udv$ 易求出.

设 $P(x)$ 为多项式函数，常见情况如下：

<table>
<tr><td>被积函数形式</td><td>选 u</td><td>选 v'</td></tr>
<tr><td>$P(x)e^{ax}$
$P(x)\sin x$
$P(x)\cos x$</td><td>$P(x)$</td><td>e^{ax}
$\sin x$
$\cos x$</td></tr>
<tr><td>$P(x)\ln x$</td><td>$\ln x$</td><td rowspan="3">$P(x)$</td></tr>
<tr><td>$P(x)\arcsin x$</td><td>$\arcsin x$</td></tr>
<tr><td>$P(x)\arctan x$</td><td>$\arctan x$</td></tr>
<tr><td>$e^{ax}\sin x$
$e^{ax}\cos x$</td><td>e^{ax} 或 $sinx$
e^{ax} 或 $\cos x$</td><td>$sinx$ 或 e^{ax}
$\cos x$ 或 e^{ax}</td></tr>
</table>

定积分的分部积分公式为

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'dx \text{ 或 } \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu .$$

注意：使用分部积分公式时，先求出的部分原函数 uv 可以先代入上、下限，即 $[uv]_a^b$.

（二）定积分的概念

1．定积分的定义：定积分是特殊和式的极限，即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i$.

当被积函数和积分限给定时,它是一个数值. 可利用定积分的定义求一些无穷和的极限.

2．定积分的性质：

（1）线性性 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\text{是常数})$$

（2）可加性 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

（3）保序性 若 $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a < b)$

特别地, 若 $f(x) \geq 0, f(x) \not\equiv 0, x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0 \quad (a < b)$.

推论 1 若 $f(x) \leq g(x), x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (a < b)$.

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$.

（4）估值性 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

（5）定积分中值定理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使下式成立

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

3．积分上限函数：

称 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 为积分上限函数，其中 x 是积分区间 $[a,x]$ 的右端点，它在 $[a,b]$ 上变化，而 t 是积分变量，它在 $[a,x]$ 上变化.

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有导数 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

上式表明 $\Phi(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，于是有 $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$.

4．牛顿—莱布尼兹公式：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

注意 公式的条件可放宽为

定理 1 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F'(x) = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段连续（除去 $f(x)$ 的有限个第一类间断点之外连续），则公式成立.

定理 2 设在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)$ 存在原函数 $F(x)$，则公式成立.

若定积分的被积函数为分段函数，则由定积分的可加性，按函数不同的表达式将积分区间分为若干子区间，分段积分后再相加.

5．常用定积分的公式：

（1）若 $f(x)$ 是 $[-a,a)$ 上的函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 0, & \text{当}f(x)\text{为奇函数时} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx & \text{当}f(x)\text{为偶函数时}. \end{cases}$$

（2）若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx$.

（3）$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

（4）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

（5）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} xdx=\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数}, \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n-1}{n}, & n\text{为大于1的奇数}. \end{cases}$

（三）反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx；$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx，\quad c\text{为瑕点}.$$

只有当上边两式右端的两个反常积分都收敛时，左端的反常积分才收敛.否则，发散.

收敛的反常积分具有与定积分类似的性质，但发散的反常积分不具有这些性质.