3.4 对弧长的曲线积分

你要认识
对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x,y)ds \qquad \int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

学会计算对弧长的曲线积分

3.4.1 对弧长的曲线积分

问题： 平面上有一曲线(L)形的非均匀构件，设其线密度是 $f(x,y)$，如何求它的质量?

非均匀直棒的质量是密度函数对直棒的长度求定积分

密度函数对曲线弧的长度求积分呢?

当G为平面或空间有限光滑(或分段光滑)曲线(L或Γ)时，积分称为对弧长的曲线积分或第一类曲线积分, 即

弧长元素

$$\int_G f(P)\,dg = \int_L f(x,y)\,ds$$

有限光滑曲线段

或 $$\int_G f(P)\,dg = \int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$$

当L(或Γ)为简单闭曲线时,对弧长的积分记为

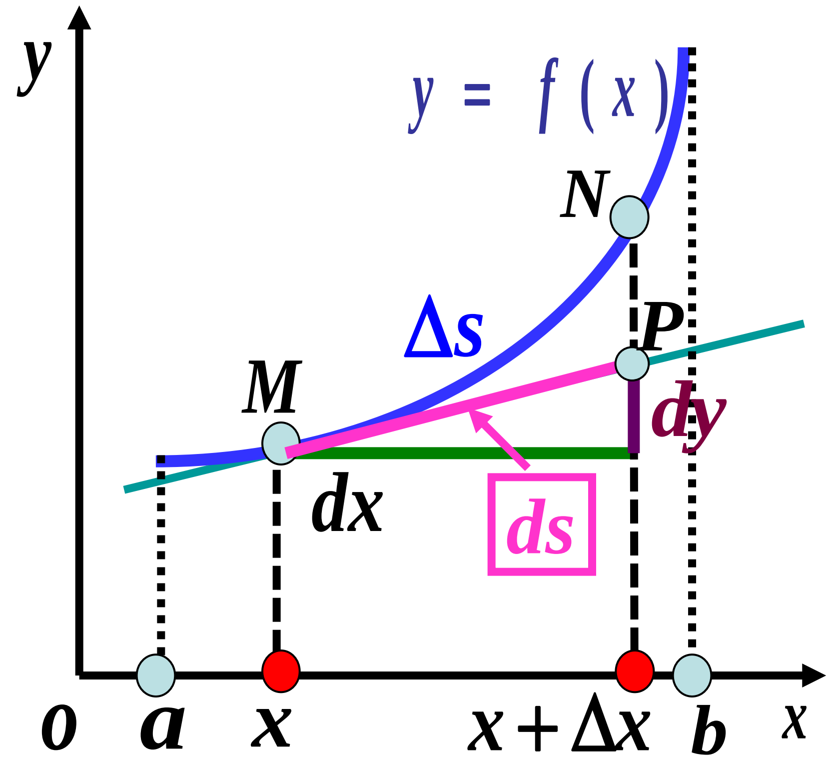
$$\oint_L f(x,y)ds \text{或} \oint_\Gamma f(x,y,z)ds$$

弧长元素

对x取Δx,有Δs,

过点M作切线,

以直代曲 $\Delta s \approx ds$,



弧微分公式

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

弧长元素为: $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

若$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$, 则 $ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$

对弧长的曲线积分的计算

计算思路：　化为定积分来计算

$$\int_L \underbrace{f(x,y)}_{\text{点在}L\text{上变化}}\underbrace{ds}_{\text{弧微分}}$$

参数方程情形

$$\int_L f(x, y) ds$$

设曲线 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$

其中 $x(t), y(t)$ 有连续的导数，且

$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$; $f(x, y)$在L上连续.

$$\boxed{L: x = x(t), y = x(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)}$$

$$\int_L f(x,y)ds \qquad \boxed{ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt}$$

$\because (x,y)$在L上变化，$\therefore f(x,y) = f[x(t), y(t)]$

因此 **计算公式**

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

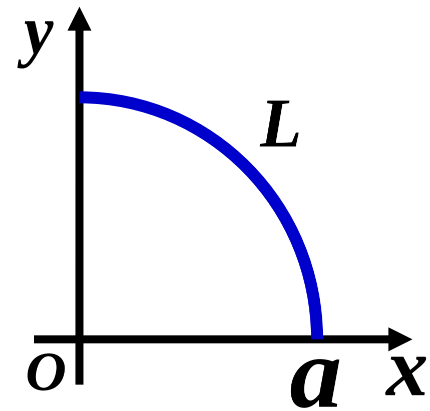
（化为对 t 的定积分）

其中$\alpha < \beta$.（定积分的下限一定要小于上限）

例1 计算 $I=\int_L xyds$，其中L的方程是

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right).$$

解 先求参数形式的弧微分



$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = a\cos t,$$

$$ds = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt = a\,dt.$$

$$\boxed{ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = a\,dt}$$

$$I = \int_L xy\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\sin t \cdot a\,dt$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d(\sin t) \qquad \boxed{(0 \le t \le \frac{\pi}{2})}$$

$$= a^3 \cdot \frac{(\sin^2 t)}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{2}.$$

(2) 直角坐标情形 $L: y = y(x),\ a \le x \le b.$

化成参数方程 $\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases} \quad a \le x \le b.$

$$\because\ ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

$$\therefore \int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

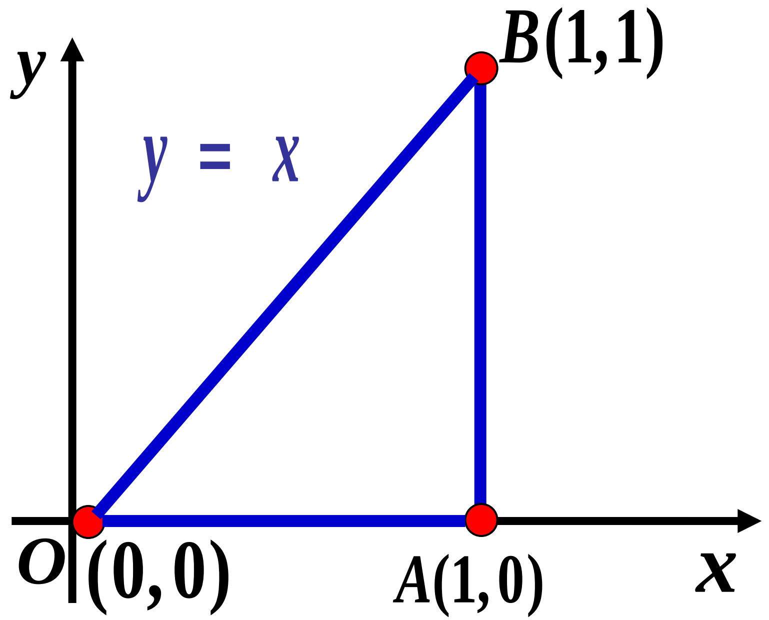
若 $L: x = x(y), c \le y \le d,$ $\boxed{ds = \sqrt{1 + x'^2(y)}dy}$

$$\therefore \int_L f(x,y)ds = \int_c^d f[x(y), y]\sqrt{1 + x'^2(y)}dy.$$

例2 计算 $I=\oint_L (x+y)\,ds$,

其中L是以 $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$ 为顶点的三角形边界.

解 L是分段光滑弧段,



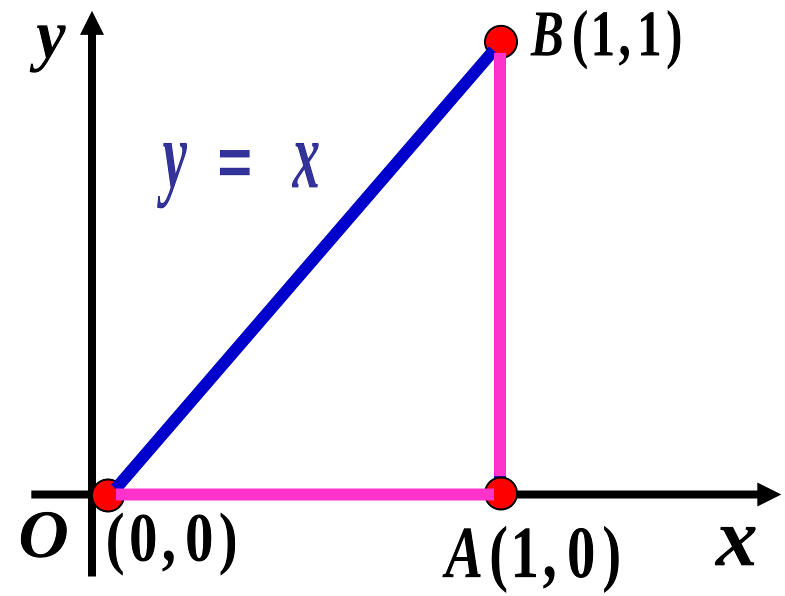
$$L = OA + OB + AB.$$

$$I=\oint_L = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$

在OA上，$y=0,\left(0\le x\le 1\right)$

$$ds=\sqrt{\left(dx\right)^2+\left(dy\right)^2}=dx$$

故$\int_{OA}\left(x+y\right)ds=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$



在AB上，

$$x=1,(0\le y\le 1)$$

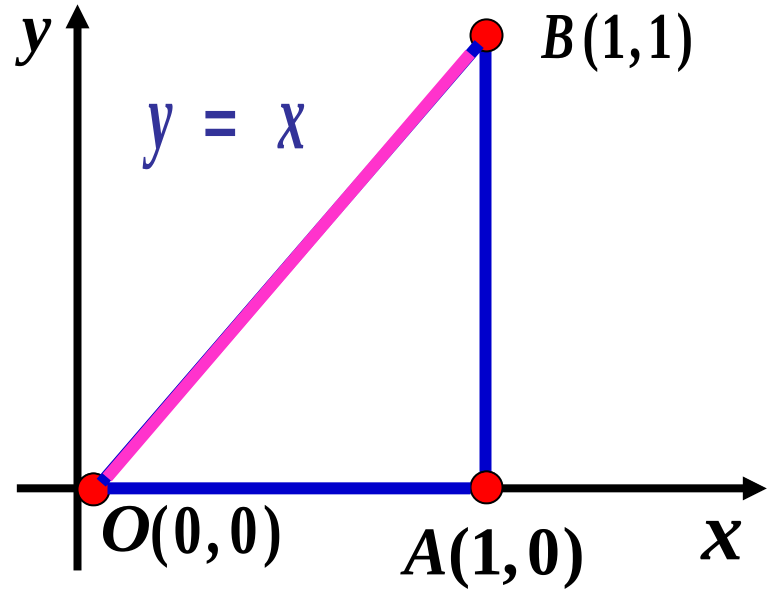
$$ds=dy$$

故 $\int_{AB}\left(x+y\right)ds=\int_0^1\left(1+y\right)dy=\frac{3}{2}$

在BO上，

$$y = x, (0 \le x \le 1)$$

$$ds = \sqrt{2}dx$$



故 $\int_{OA} (x+y)ds = \int_0^1 2x \cdot \sqrt{2}dx = \sqrt{2}$

因此 $\oint_L (x+y)ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$

设Γ是空间光滑曲线段（平面情形的推广）

$$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad (\alpha \le t \le \beta). \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$$

$$\cdot\underbrace{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt}_{ds}.$$

例3 若有不均匀的椭圆 $\left(2x^2+8y^2=1\right)$ 形构件，其上一点 (x,y) 的线密度 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2+4y^2}$，求此椭圆形构件的平均线密度.

解 平均线密度=质量M / 曲线长L

质量M= $\oint_L \mu(x,y)ds=\oint_L \dfrac{1}{x^2+4y^2}ds=\oint_L \dfrac{1}{1/2}ds=2\oint_L ds$

曲线长L= $\oint_L ds$

$$\boxed{L:2x^2+8y^2=1 \Leftrightarrow L:x^2+4y^2=\frac{1}{2}}$$

$$平均线密度=\frac{\oint_L \mu(x,y)ds}{\oint_L ds}=\frac{2\oint_L ds}{\oint_L ds}=2$$

小 结

对弧长的曲线积分的计算----化为定积分

$$\int_L f(x,y)ds$$

1.把积分路径L代入被积函数;

2.根据积分路径L的不同的表示形式，
求出弧长元素或弧微分.

3. 定出定积分的上下限，下限小于上限.