高数学习

韩海舰

January 15, 2020

1 第一章 函数, 极限, 连续性

1.1 第一周练习

1. 已知 f(x+1) 的定义域为 [0,a](a>0), 则 f(x) 的定义域为（）。

   1. $[1, a+1]$
   2. $[-1, a+1]$
   3. $[a, a+1]$
   4. $[a-1, a]$

正确答案：A 你错选为 B
2.

若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$(a 为常数），则下列说法不正确的是。

   1. 数列 $\{x_n\}$ 有界。
   2. $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$
   3. 若 $x_n > 0$(n=1,2...n), 则 a>0
   4. 常数 a 唯一。

正确答案：C 你没选择任何选项
极限的性质包括：唯一性，有界性，保号性。其中保号性是指如果极限 >0, 则 x_n>0。

1.2 第二周练习

1. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{x\to 0} f(x) = (?)$

结果为 0

2.

若 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,则（）

1. 仅当 $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$时，才有 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立。
2. 当$g(x)$为任意函数时，有 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立
3. 仅当$g(x)$为常数时，才能使 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立
4. 当$g(x)$有界时，能使 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立

答案是 4.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

是无穷小，无穷小与有界函数之积是无穷小。

3.

$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{sinx}} = (?)$

1. 1
2. e
3. e^{-1}
4. e^{-2}

正确答案：C 你错选为 B

1.3 第三周练习

等价无穷小：

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ln(x+1) \sim x, & 1-cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \\ sin(x) \sim x, & tan(x) \sim x \\ e^x - 1 \sim x, & a^x - 1 \sim x \ln a \end{array}} \tag{1}$$

有用极限：

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \tag{2}$$

无穷小的关系：

$\alpha = lim f(x) = 0, \beta = \lim g(x) = 0,$均是无穷小

高阶无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta} = 0$	α是β的高阶无穷小
等价无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta} = 1$	α是β的等阶无穷小
同价无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta} = c \quad (c \neq 0)$	α是β的同阶无穷小
k 价无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta^k} = c \quad (c \neq 0)$	α是β的 k 阶无穷小

matlab 中求极限

```
limit(f,x,a)
f 是表达式，可以直接用'xxx'，也可用 syms 来定义。
x 表示自变量，a 表示趋向。
例如：
limit('(exp(x)+exp(-x))/sin(x)',x,0)
or
syms x y;
y=(exp(x)+exp(-x))/sin(x);
limit(y,x,0)
结果为 2
```

2 导数与微分

2.1 第四周练习

1. 设函数 f(u) 可导，且 $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 x=1 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f^{'}(1) = ()$.

1. 0.1
2. 1
3. -0.5
4. -1

正确答案：C 你错选为 D
2. 函数 y=f(x) 在 x_0 处连续、可导、可微的关系中不正确的是：

1. 可导是可微的充分必要条件
2. 可微是连续的充分条件
3. 连续是可导的充分必要条件
4. 连续式可微的必要条件

正确答案：C 你错选为 A
连续：

1. f(x) 在 x_0 处有定义
2. f(x) 在 x_0 处有极限
3. $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = f(x0)$

可导：

1. f(x) 在 x_0 的邻域内有定义

2. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
存在

3. $$f_{+}^{'}(x_0) = f_{-}^{'}(x_0)$$

可导 $\Longrightarrow$ 连续，但连续未必可导。可导 $\Longleftrightarrow$ 可微
二阶导数：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$$

3 第三章微分中值定理与导数应用

3.1 第六周练习

1. 求

$$\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{sinx}{x} \right\}^{\frac{1}{1-cosx}} = ()$$

1. 1
2. $e^{-\frac{1}{3}}$
3. $e^{\frac{1}{6}}$
4. e^2

正确答案：B 你错选为 A

拐　点：凹凸转折点。
拐点的充分必要条件：f(x) 在 (a,b) 内二阶可导， $f^{''}(x_0) = 0, x_0 \in (a,b)$，而且 $f^{''}(x_0)$ 处两边符号不相等

曲　率：反应曲线的弯曲程度。直线的曲率为 0，圆的曲率为 1/R. 圆的半径越大，则曲率越小，否则曲率越大。

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\alpha}{\Delta S}$$

α 是弧的转角。曲率的计算公式：

$$\boxed{\frac{|y^{''}|}{(1+y^{'2})^{\frac{3}{2}}}} \tag{3}$$

`matlab` 中的函数
定义符号：`syms x`
求导：`diff(f)`
例如：`f=sin(x);diff(f);`

积分:
符号积分:
`int(fun,x)` 计算不定积分
`int(fun,x,a,b)`: 计算定积分
例如:
```
f=sinx;int(f)
int(f,-pi,pi);
```

数值积分:
`trapz(x,y)`: 梯形积分
例如: `x=-1:0.01:1`
```
y=tan(x);
trapz(x,y);
```

`quad(fun,x,a,b)` 辛普森积分
`fun` 可以是匿名函数 `@(x)`,或内联函数 `inline()`
比如 `y=cosx`, 可以表示成:
```
y=@(x)cos(x)
y=inline('cos(x)')
```
例如:
```
y=@(x)tan(x)
quad(y,-1,1)
```

`pretty(fx)` 人性化显示公式

4 第四章一元函数积分学

4.1 第九周练习

1.f(x) 在 [a,b] 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 的()

1. 充分必要条件
2. 必要非充分条件
3. 既非充分也非必要条件
4. 充分而非必要条件

正确答案:D 你错选为 C

若 f(x) 在 [a,b] 连续,则其上界函数 $\int_a^x f(t)dt$ 必然是其原函数,即函数连续必有原函数。

2 . 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$
正确答案: $ln|x+\sqrt{x^2-9}|-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-9}+C$

3 ．求 $\int_a^b f(mx+n)dx =$
正确答案： $\frac{1}{m}\int_{ma+n}^{mb+n} f(x)ds$

4 求 $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
正确答案： $\pi/12 - \sqrt{3}/8$

5 求 $\int_{-2}^{2}(e^{x^2} sinx^3 - \sqrt{4-x^2})dx$
正确答案： -2π

4.2 第十一周练习

1 ．求 $\int(x^2+1)e^{2x}dx$
正确答案： $\frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

2 ．已知 f(x) 的原函数是 tan^2x, 则 $\int_0^1 xf^{'}(x)dx =?$
答案是： $2tan1sec^21 + tan^21$

3 ．求 $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$
答案是： $1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

4 ．求 $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx$
答案是发散。由于积分区间中存在瑕点。

5 第五章积分应用

5.1 第十二周练习

1 ．计算心形 $\rho = 1 + cos\theta$ 和圆 $\rho = 3cos\theta$ 所围公共部分面积。
正确答案： $5\pi/4$

2 ．已知一弹簧原长 1 米，把它压缩 1 厘米所用的力为 0.05 牛顿，把弹簧从 80 厘米压缩到 60 厘米所做的功（）
正确答案：0.3（N.m）

计算曲线面积
直角坐标： $ds = y * dx$
极坐标： $ds = \frac{\rho^2 d\theta}{2}$

计算曲线长度：
直角坐标： $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$
参数方程： $ds = \sqrt{dx^2(t) + dy^2(t)}$
极坐标： $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\theta$

常用积分公式

$$\boxed{\begin{array}{l}\int lnxdx = xlnx - x + C \\ \int sin^2xdx = \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C \\ \\ \int cos^2xdx = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + C \\ \\ \int cos^m xsin^n xdx = \frac{1}{m+n}cos^{m-1}xsin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int cos^{m-2}xsin^n x + C\end{array}} \tag{4}$$

6 第六章 微分方程

6.1 第十三周练习

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的一条积分曲线与直线 $y = 2x + 3$ 相切，则切点为:
正确答案：(1,5)
直线斜率为 2，积分曲线切线斜率为 y’=2x,$2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow y = 5$

2 . 微分方程 $xy' + y = y(lnx + lny)$ 的通解为:
正确答案： $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$
用换元法，u=xy

3 . 设 y(x) 满足微分方程 $xy' + y - y^2lnx = 0, y(1) = 1$, 则，y(e)=?
正确答案：1/2
用换元法，u=1/y, 将方程转换成 u，x 的非齐次线性方程，然后用公式，最后代回。

6.2 第十四周练习

1 .$y^{''} = e^x$ 的通解为:
正确答案： $e^{-x} + C_1x + C_2$

2 . 微分方程 $xy^{''} + xy^{'2} - y' = 0$ 的通解
正确答案： $y = ln(x^2 + 2C_1) + C_2$
化简后方程变为： $y^{''} + y^{'2} - y^{'}/x = 0$ 。符合 $y^{''} = f(x, y^{'})$ 格式，所以用 $p = y^{'}$ 替换，替换后变成伯努立方程，两边同除 p^2, 然后用公式。

6.3 第十五周练习

1. 微分方程 $y'' + y = x + sinx$ 的特解是：y=（）

1. $Ax + B + Ccosx + Dsinx$
2. $Ax + B + Cxsinx$
3. $Ax + B + x(Ccosx + Dsinx)$
4. $Ax + x(Ccosx + Dsinx)$

正确答案 C，错答为 B

2 . 微分方程 $y'' + 3y' + 2y = x^2 e^{-2x}$ 的特解是：y=（）

1. $y = ax^2 e^{-2x}$
2. $y = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
3. $y = x(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
4. $y = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$

正确答案 C，错答为 D
$\lambda = -2, m = 2, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, k = 1$

3 . 微分方程 $y'' - y' = e^x + 1$ 的通解是：y=（）

1. $y = C_1 + C_2 e^x$
2. $y = axe^x + b$
3. $y = C_1 + C_2 e^x + xe^x - x$
4. $y = C_1 + C_2 e^x - x$

正确答案 C，错答为 D
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。齐次方程的通解为
$y = C_1 + C_2 e^x$, 特解为 $xe^x - x$

3 . 微分方程 $y'' + 4y = 1/2cos2x$ 的通解是：y=（）

1. $y = x(ACos2x + Bsin2x)$
2. $y = Acos2x + Bsin2x + 1/8xsin2x$
3. $y = Acos2x + Bsin2x$
4. $y = A + Be^{-4x} + 1/8xcos2x$

正确答案 B，错答为 C
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。特征根 $0 \pm 2i$, 齐次方程的通解为 $y = C_1cos2x + C_2sin2x$, 特解只能选 B。

4 . 微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 9$ 的通解是：y=（）

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$
2. $y = e^x(C_1cos3x + C_2sin3x) - 3$
3. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 3$
4. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + 3x^2$

正确答案 C，错答为 A
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。特征根为 1，3，齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, 将待选的特解带入方程只有选 C。

微分方程定义: 含有未知函数和未知函数导数的方程称为微分方程。
注意不是所有含有未知函数导数的方程都是微分方程，比如 u'v+uv'=(uv)' 就是一个恒等式，它不是微分方程。

微分方程的分类: 导数的最高阶数称为微分方程的阶。
含有一个未知变量的函数，称为常微分方程;
含有 2 个以上未知变量的函数，称为偏微分方程。

微分方程的解:
微分方程的解是函数。将该函数带入原方程使得原方程恒成立，将此函数称为微分方程的解
含有微分方程阶数的个数个独立常数的解称为微分方程的通解。
不含常数的解称为微分方程的特解。
含有初始条件的微分方程称为初始问题。

一阶常微分方程:

方程名称	方程格式	方程解
可分离变量方程	$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)(g(y)\neq 0)$ 或 $f(x)dx=g(y)dy$	
齐次方程	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$	
齐次线性方程	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 或 $y'+p(x)y=0$	$y=Ce^{-\int p(x)dx}$
非齐次线性方程	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 或 $y'+p(x)y=q(x)$	$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$ 或常数变量法
伯努力方程	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n, n\neq 0,1$	两边除以 y^n, 转换成非齐次线性方程，然后用公式法或常数变量法求解。

二阶微分方程
可降阶的微分方程： $y^{''}=f(x,y,y^{'})$，思路是将二阶降为一阶

方程形式	降阶方法
$y^{''}=f(x)$	逐级不定积分
$y^{''}=f(x,y^{'})$	令 $y^{'}=p(x)$
$y^{''}=f(y,y^{'})$	令 $y^{'}=p(y)$,$y^{''}=dp/dy*p$

二阶线性常微分方程:

方程名	方程格式	解格式
二阶齐次线性常微分方程	$y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=0$	$y=C_1y1+C_2y2$ y1，y2 是线性无关的解
二阶非齐次线性常微分方程	$y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=f(x)$	$y=y+Y$ Y 是对应齐次方程的通解，y 是方程特解。

二阶常系数线性常微分方程：

<table>
<tr><th>方程名</th><th>方程格式</th><th>解格式</th></tr>
<tr><td>二阶常系数齐次线性常微分方程</td><td>$y^{''}+py^{'}+qy=0$</td><td>根据 $r^2+pr+q=0$ 特征方程结果<table>
<tr><td>p^2-4q 的结果</td><td>根</td><td>通解</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q>0$</td><td>λ_1,λ_2, 单根</td><td>$C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q=0$</td><td>λ, 重根</td><td>$(C_1+x)e^{\lambda}x$</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q<0$</td><td>$\alpha\pm i\beta$, 共轭根</td><td>$e^{\alpha x}[C_1cos(\beta x)+C_2sin(\beta x)]$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>二阶常系数非齐次线性常微分方程</td><td>$y^{''}+py^{'}+qy=f(x)$</td><td>通解：　$y=y+Y$
Y 是对应齐次方程的通解，y 是方程特解
自由项情况 1：　$f(x)=e^{\lambda x}Q_m(x)$　$Q_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式<hr>根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 根的结果和 $2\lambda+p$ 的情况
特解：　$y=x^ke^{\lambda x}P_m(x)$,$P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式<table>
<tr><td>特征方程结果</td><td>k</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q\neq0$</td><td>k=0</td><td>$\lambda$ 不是特征方程的根</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p\neq0$</td><td>k=1</td><td>λ 是单根</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p=0$</td><td>k=2</td><td>λ 是重根</td></tr>
</table>自由项情况 2：　$f(x)=e^{\lambda x}(P_l(x)cos\omega x+P_n(x)sin\omega x)$<hr>$P_l(x),P_n(x)$ 是 x 的 l,n 次多项式
根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 根的结果
特解：　$y=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)cos(\omega x)+R_m^{(2)}(x)sin(\omega x)]$
m=max(l,n),$R_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式<table>
<tr><td>特征方程结果</td><td>k</td></tr>
<tr><td>$\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根</td><td>k=0</td></tr>
<tr><td>$\lambda+i\omega$ 是特征方程的根</td><td>k=1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

matlab 中的微分方程:
符号微分方程:

```
dsolve('eq1,eq2..','con1,con2','v')
```

eq1,eq2.. 微分方程,
con1, con2.. 初始条件,
v 变量
Dy 表示导数 y'
例子:
求 y'+3xy=4x 的通解

```
syms y x;
dsolve('Dy+3*x*y=4*x','x')
ezplot(y);
ans =

4/3+exp(-3/2*x^2)*C1


>> pretty(ans)

                                          2
                    4/3 + exp(- 3/2 x ) C1
```

7 期末考试

1 . 当 $x \to 0$ 时，下列哪一个无穷小时对于 x 的三阶无穷小（）

1. $x^3 + 0.0001x^2$
2. $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a} \quad (a > 0)$
3. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$
4. $\sqrt[3]{tanx}$

正确答案 B，错选 A
高阶无穷小的概念是 $lim \frac{\alpha}{\beta^k} = C, C \neq 0$, 只有
$lim \frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3} = C$, 所以选 B。

2 .$\int xf''(x)dx = ()$

1. $xf(x) - \int f(x)dx$
2. $xf''(x) - xf'(x) - f(x) + C$
3. $xf'(x) + f(x) + C$
4. $xf'(x) - f(x) + C$

正确答案 D，错选 C

3 . 当 $x \to 0$ 时，与 $sin2x + 5x^2$ 等价无穷小的量时 ()

1. $5x^2$
2. x
3. x^2
4. $2x$

正确答案 D，错选 A

4 .$\int_{-1}^{1} \frac{2+x^3 sin^2 x}{\sqrt{4-x^2}} dx =$()

1. $\pi/2$
2. $2/3\pi$
3. π
4. 2π

正确答案 B

5 . 设 $f(x) = \int_{2x}^{1} \frac{sint}{t} dt$, 则 $f'(x) =$()

1. $-\frac{sin2x}{2x}$
2. $\frac{sin2x}{2x}$
3. $\frac{sin2x}{x}$
4. $-\frac{sin2x}{2x}$

正确答案 D

6 .$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$()

1. -1
2. 2
3. 1
4. 0

正确答案 C, 错选为 A

7 .$\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx =()$

1. 0
2. $\frac{1}{3}\pi$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{2}$

正确答案为 A

8 . 微分方程 $y''+2y'+y=x$ 的通解是 ()

1. $y=x+C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$
2. $y=x-2+C_1xe^{-x}+C_2e^{x}$
3. $y=x-2+C_1xe^{-x}+C_2e^{-x}$
4. $y=x-2+C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

正确答案为 C, 错选为 A。
首先确定齐次方程的根为 -1，所以齐次方程通解为 $(C_1+C_2x)e^{-x}$,
其次，确定非齐次方程右边为 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 格式， $\lambda=0, m=1$, 而 $\lambda=0$ 不是特征方程的根
所以非齐次方程的特解中 k=0，特解为 $y=ax+b$, 带入方程得到
$a=1, b=-2$

8 附录 1 不定积分的常用方法

8.1 基本初等函数积分公式

8.1.1 幂函数

$$\int x^{\mu}dx = \begin{cases} \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C & \mu \neq -1 \\ ln|x|+C & \mu = -1 \end{cases}$$

8.1.2 指数函数

$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

8.1.3 对数函数

$\int lnxdx = x * lnx - x + C$
$\int log_a xdx = x * log_a x - xlog_a e + C$

8.1.4 三角函数

$\int sinxdx = cosx + C$ $\quad \int cosxdx = -sinx + C$
$\int tanxdx = -ln|cosx| + C$ $\quad \int cotxdx = ln|sinx| + C$
$\int secxdx = ln|secx + tanx| + C$ $\quad \int cscxdx = ln|cscx - cotx| + C$

8.1.5 反三角函数

$\int arcsinx = x * arcsinxdx + \sqrt{1-x^2} + C$ $\quad \int arccosxdx = x * arccosx - \sqrt{1-x^2} + C$
$\int arctanxdx = x * arctanx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$ $\quad \int arccotxdx = x * arccotx + \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$
$\int arcsecxdx = x * arcsecx - ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ $\quad \int arccscxdx = x * arccscx + ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$

8.2 常用方法

1. 凑微分
$\int f(\varphi(x))\varphi^{'}(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$
将 $\varphi^{'}(x)dx$ 凑到 $d(\varphi(x))$ 中。
2. 换元法
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt$
用 $x = \varphi(t)$ 进行替换变量，进行积分
3. 分部积分
$\int udv = uv - \int vdu$
换一种形式积分

8.3 常用形式

8.3.1 含 $ax + b$

1) 采用凑微分方法, 将 $ax + b$ 凑到微分中。

2) 因式分解

8.3.2 含 $\sqrt{ax+b}$

1) 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。
2) 利用已经获得的结果，分部积分。

8.3.3 含 $a^2 \pm x^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C \end{array}}$$

8.3.4 含 ax^2+b

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{ax^2+b}$, 利用 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$
- $\int \frac{xdx}{ax^2+b}$, 凑微分
- $\int \frac{x^2dx}{ax^2+b}$，分解
- $\int \frac{dx}{x*(ax^2+b)}$，分解
- $\int \frac{dx}{x^2*(ax^2+b)}$，分解
- $\int \frac{dx}{x^3*(ax^2+b)}$，利用上一个分解的结果分解

8.3.5 含 $ax^2+bx+c, (a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$,
  方法 1：考虑将 ax^2+bx+c 分解成 $(Ax+B)^2+C^2$ 形式，然后利用 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$。因为 $\sqrt{b^2-4ac}$ 结果不定，所以有两个结果
  方法 2：由于 $\frac{1}{x-r1} * \frac{1}{x-r2} = \frac{1}{r1-r2}(\frac{1}{x-r1} - \frac{1}{x-r2})$, 将 ax^2+bx+c 分解成:$\frac{1}{a}\frac{1}{r1-r2}(\frac{1}{x-r1} - \frac{1}{x-r2})$ 形式，r1，r2 是该方程的根。然后凑微分即可积分。

- $\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c}$,
  凑微分，将 x 凑到 dx 中。 $\frac{x}{ax^2+bx+c} = \frac{ax+b-b}{ax^2+bx+c}$

8.3.6 含 $\sqrt{x^2+a^2}, (a>0)$

1) 用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = arcsinh\frac{x}{a} + C = ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号
  利用 $\int secx = ln|secx + tanx| + C$ 公式。注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}.$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}.$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$
  方法 1：用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号，注意用此方法需要计算 $\int sec^3\alpha d\alpha$, 在计算的时候会循环，从而求得。
  方法 2：将分子拆解成 $x^2 + a^2 - a^2$, 然后利用现成公式。需要计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$。注意用此方法需要计算 $\int sec^3\alpha d\alpha$, 在计算的时候会循环，从而求得。

- $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}.$
  方法 1：用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号

- $\int \sqrt{x^2+a^2}dx.$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \sqrt{x^2+a^2}^3dx$
  用 $x = asinh\alpha$ 利用 $\sqrt{1+sinh^2\alpha} = cosh^2\alpha$ 换元来脱根号, 得到 $\int a^4cosh^4\alpha d\alpha$, 然后积分

- $\int x\sqrt{x^2+a^2}^3dx$
  凑微分

- $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}^3dx$
  分部积分?
  x 在分母

- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号

- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号, 化简得到
  $\int cot\alpha * csc\alpha d\alpha = csc\alpha$ 积分形式

- $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号, 化简后，分解得到 $a\int(\frac{sin\alpha}{1-sin^2\alpha} + \frac{1}{sin\alpha})d\alpha$ 积分形式

- $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx$
  用 $x = atan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec^2\alpha$ 换元来脱根号, 化简后，分解得到 $\int(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{1-cos^2\alpha})d\alpha$ 积分形式

8.3.7 含 $\sqrt{x^2-a^2}, (a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

-

8.3.8 含 $\sqrt{a^2-x^2}, (a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

-

8.3.9 含 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}, (a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

-

8.3.10 含 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x+a}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

-

8.3.11 含 $ax^2 + bx + c, (a > 0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

-