高数学习

韩海舰

January 16, 2020

1 第一章 函数, 极限, 连续性

1.1 第一周练习

1. 已知 f(x+1) 的定义域为 [0,a](a>0), 则 f(x) 的定义域为（）。

1. $[1, a+1]$
2. $[-1, a+1]$
3. $[a, a+1]$
4. $[a-1, a]$

正确答案：A 你错选为 B
2.

若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$(a 为常数），则下列说法不正确的是。

1. 数列 $\{x_n\}$ 有界。
2. $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$
3. 若 $x_n > 0$(n=1,2...n), 则 a>0
4. 常数 a 唯一。

正确答案：C 你没选择任何选项
极限的性质包括：唯一性，有界性，保号性。其中保号性是指如果极限 >0, 则 x_n>0。

1.2 第二周练习

1. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{x\to 0} f(x) = (?)$

结果为 0

2.

若 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,则（）

1. 仅当 $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$时，才有 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立。
2. 当$g(x)$为任意函数时，有 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立
3. 仅当$g(x)$为常数时，才能使 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立
4. 当$g(x)$有界时，能使 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$成立

答案是 4.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

是无穷小，无穷小与有界函数之积是无穷小。

3.

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{sinx}} = (?)$$

1. 1
2. e
3. e^{-1}
4. e^{-2}

正确答案：C 你错选为 B

1.3 第三周练习

等价无穷小：

$$\boxed{\begin{array}{ll} sin(x) \sim x, & tan(x) \sim x \\ arcsin(x) \sim x & \\ e^x - 1 \sim x, & a^x - 1 \sim x \ln a \\ \ln(x+1) \sim x, & 1 - cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x & \end{array}} \tag{1}$$

有用极限：

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \tag{2}$$

无穷小的关系：

$\alpha = lim f(x) = 0, \beta = \lim g(x) = 0,$ 均是无穷小

高阶无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta} = 0$	α是β的高阶无穷小
等价无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta} = 1$	α是β的等阶无穷小
同价无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta} = c \quad (c \neq 0)$	α是β的同阶无穷小
k 价无穷小：	$\frac{\alpha}{\beta^k} = c \quad (c \neq 0)$	α是β的 k 阶无穷小

matlab 中求极限

```
limit(f,x,a)
f 是表达式，可以直接用'xxx'，也可用 syms 来定义。
x 表示自变量，a 表示趋向。
例如：
limit('(exp(x)+exp(-x))/sin(x)',x,0)
or
syms x y;
y=(exp(x)+exp(-x))/sin(x);
limit(y,x,0)
结果为 2
```

2 导数与微分

2.1 第四周练习

1. 设函数 f(u) 可导，且 $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 x=1 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f^{'}(1) = ()$.

1. 0.1
2. 1
3. -0.5
4. -1

正确答案：C 你错选为 D
2. 函数 y=f(x) 在 x_0 处连续、可导、可微的关系中不正确的是：

1. 可导是可微的充分必要条件
2. 可微是连续的充分条件
3. 连续是可导的充分必要条件
4. 连续式可微的必要条件

正确答案：C 你错选为 A
连续：

1. f(x) 在 x_0 处有定义
2. f(x) 在 x_0 处有极限
3. $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = f(x0)$

可导：

1. f(x) 在 x_0 的邻域内有定义
2. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
   存在
3. $f_+^{'}(x_0) = f_-^{'}(x_0)$

可导 $\Longrightarrow$ 连续，但连续未必可导。可导 $\Longleftrightarrow$ 可微
二阶导数：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$$

3 第三章微分中值定理与导数应用

3.1 第六周练习

1. 求 $\lim_{x \to 0} \left\{\frac{sinx}{x}\right\}^{\frac{1}{1-cosx}} = ()$

   1. 1
   2. $e^{-\frac{1}{3}}$
   3. $e^{\frac{1}{6}}$
   4. e^2

正确答案：B 你错选为 A

2 . 求 $lim_{x \to 1} \left\{\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x}\right\} = ()$

1. -1
2. 0
3. ∞
4. 1

正确答案：D 你错选为 C
通分

3 . 函数 $y = x^2 + 4x - 5$ 在区间 [-6,6] 上

1. 先单调减少再单调增加
2. 先单调增加再单调减少
3. 单调增加
4. 单调减少

正确答案：A 你错选为 C
注意 x 的区间，判断 y' 的符号

3.2 第七周练习

1 . 函数 $y = \frac{lnx}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内，

1. 无极值
2. 最大值为 $\frac{1}{e}$
3. 最小值为 $\frac{1}{e}$
4. 无最大值

正确答案：B 你错选为 A
求导，x=e，

2 . 曲线 $y = e^{-(x-1)^2}$ 的渐近线是

1. x=1 为铅直渐近线，y=1 是水平渐近线
2. x=1 为铅直渐近线，y=0 是水平渐近线
3. y=0 是水平渐近线
4. x=0 为铅直渐近线，y=0 是水平渐近线

正确答案：C 你错选为 A
$lim_x \to \infty f(x) =?$ 判断水平渐近线， $lim_x \to x0 f(x) =?$ 判断铅直渐近线。
拐点：凹凸转折点。
拐点的充分必要条件：f(x) 在 (a,b) 内二阶可导， $f^{''}(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$，而且 $f^{''}(x_0)$ 处两边符号不相等

曲　率：反应曲线的弯曲程度。直线的曲率为 0，圆的曲率为 1/R. 圆的半径越大，则曲率越小，否则曲率越大。

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\alpha}{\Delta S}$$

α 是弧的转角。曲率的计算公式：

$$\boxed{\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{3}$$

`matlab` 中的函数
定义符号：`syms x`
求导：`diff(f)`
例如：`f=sin(x);diff(f);`
积分：
符号积分：
`int(fun,x)` 计算不定积分
`int(fun,x,a,b)`：计算定积分
例如：
```
f=sinx;int(f)
int(f,-pi,pi);
```

数值积分：
`trapz(x,y)`：梯形积分
例如：`x=-1:0.01:1`
```
y=tan(x);
trapz(x,y);
```

`quad(fun,x,a,b)` 辛普森积分
`fun` 可以是匿名函数 `@(x)`，或内联函数 `inline()`
比如 `y=cosx`，可以表示成：
```
y=@(x)cos(x)
y=inline('cos(x)')
```
例如：
```
y=@(x)tan(x)
quad(y,-1,1)
```

`pretty(fx)` 人性化显示公式

4　第四章一元函数积分学

4.1　第九周练习

1.f(x) 在 [a,b] 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 的（）

1. 充分必要条件

2. 必要非充分条件
3. 既非充分也非必要条件
4. 充分而非必要条件

正确答案：D 你错选为 C

若　f(x) 在 [a,b] 连续，则其上界函数 $\int_a^x f(t)dt$ 必然是其原函数，即函数连续必有原函数。

2　. 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$
正确答案：　$ln|x+\sqrt{x^2-9}|-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-9}+C$

3　. 求 $\int_a^b f(mx+n)dx =$
正确答案：　$\frac{1}{m}\int_{ma+n}^{mb+n} f(x)ds$

4　求 $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
正确答案：　$\pi/12-\sqrt{3}/8$

5　求 $\int_{-2}^{2}(e^{x^2}sinx^3-\sqrt{4-x^2})dx$
正确答案：　-2π

4.2　第十一周练习

1　. 求 $\int(x^2+1)e^{2x}dx$
正确答案：　$\frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

2　. 已知 f(x) 的原函数是 tan^2x, 则 $\int_0^1 xf^{'}(x)dx =?$
答案是：　$2tan1sec^2 1+tan^2 1$

3　. 求 $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$
答案是：　$1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

4　. 求 $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx$
答案是发散。由于积分区间中存在瑕点。

5　第五章积分应用

5.1　第十二周练习

1　. 计算心形 $\rho = 1+cos\theta$ 和圆 $\rho = 3cos\theta$ 所围公共部分面积。
正确答案：　$5\pi/4$

2 . 已知一弹簧原长 1 米，把它压缩 1 厘米所用的力为 0.05 牛顿，把弹簧从 80 厘米压缩到 60 厘米所做的功（）
正确答案：0.3（N.m）

计算曲线面积
直角坐标：$ds = y * dx$
极坐标：$ds = \frac{\rho^2 d\theta}{2}$

计算曲线长度：
直角坐标：$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$
参数方程：$ds = \sqrt{dx^2(t) + dy^2(t)}$
极坐标：$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\theta$

常用积分公式

$$\boxed{\begin{array}{l} \int lnxdx = xlnx - x + C \\ \int sin^2xdx = \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C \\ \int cos^2xdx = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + C \\ \int cos^m xsin^n xdx = \frac{1}{m+n}cos^{m-1}xsin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int cos^{m-2}xsin^n x + C \end{array}} \tag{4}$$

6 第六章 微分方程

6.1 第十三周练习

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的一条积分曲线与直线 $y = 2x + 3$ 相切，则切点为：
正确答案：(1,5)
直线斜率为 2，积分曲线切线斜率为 y'=2x,$2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow y = 5$

2 . 微分方程 $xy' + y = y(lnx + lny)$ 的通解为：
正确答案：$y = \frac{1}{x}e^{Cx}$
用换元法，u=xy

3 . 设 y(x) 满足微分方程 $xy' + y - y^2 lnx = 0, y(1) = 1$, 则，y(e)=?
正确答案：1/2
用换元法，u=1/y, 将方程转换成 u，x 的非齐次线性方程，然后用公式，最后代回。

6.2 第十四周练习

1 .$y'' = e^x$ 的通解为：
正确答案：$e^{-x} + C_1x + C_2$

2 . 微分方程 $xy'' + xy'^2 - y' = 0$ 的通解
正确答案： $y = ln(x^2 + 2C_1) + C_2$
化简后方程变为： $y'' + y'^2 - y'/x = 0$ 。符合 $y'' = f(x, y')$ 格式，所以用 $p = y'$ 替换，替换后变成伯努立方程，两边同除 p^2, 然后用公式。

6.3 第十五周练习

1. 微分方程 $y'' + y = x + sinx$ 的特解是：y=（）

1. $Ax + B + Ccosx + Dsinx$
2. $Ax + B + Cxsinx$
3. $Ax + B + x(Ccosx + Dsinx)$
4. $Ax + x(Ccosx + Dsinx)$

正确答案 C，错答为 B

2 . 微分方程 $y'' + 3y' + 2y = x^2e^{-2x}$ 的特解是：y=（）

1. $y = ax^2e^{-2x}$
2. $y = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
3. $y = x(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
4. $y = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$

正确答案 C，错答为 D
$\lambda = -2, m = 2, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, k = 1$

3 . 微分方程 $y'' - y' = e^x + 1$ 的通解是：y=（）

1. $y = C_1 + C_2e^x$
2. $y = axe^x + b$
3. $y = C_1 + C_2e^x + xe^x - x$
4. $y = C_1 + C_2e^x - x$

正确答案 C，错答为 D
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。齐次方程的通解为 $y = C_1 + C_2e^x$, 特解为 $xe^x - x$

3 . 微分方程 $y'' + 4y = 1/2cos2x$ 的通解是：y=（）

1. $y = x(ACos2x + Bsin2x)$
2. $y = Acos2x + Bsin2x + 1/8xsin2x$
3. $y = Acos2x + Bsin2x$
4. $y = A + Be^{-4x} + 1/8xcos2x$

正确答案 B，错答为 C
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。特征根 $0 \pm 2i$, 齐次方程的通解为 $y = C_1cos2x + C_2sin2x$, 特解只能选 B。

4 . 微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 9$ 的通解是：y=（）

1. $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$
2. $y = e^x(C_1cos3x + C_2sin3x) - 3$
3. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 3$
4. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 3x^2$

正确答案 C，错答为 A
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。特征根为 1，3，齐次方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$, 将待选的特解带入方程只有选 C。

微分方程定义: 含有未知函数和未知函数导数的方程称为微分方程。
注意不是所有含有未知函数导数的方程都是微分方程，比如 u'v+uv'=(uv)' 就是一个恒等式，它不是微分方程。

微分方程的分类: 导数的最高阶数称为微分方程的阶。
含有一个未知变量的函数，称为常微分方程;
含有 2 个以上未知变量的函数，称为偏微分方程。

微分方程的解:
微分方程的解是函数。将该函数带入原方程使得原方程恒成立，将此函数称为微分方程的解
含有微分方程阶数的个数个独立常数的解称为微分方程的通解。
不含常数的解称为微分方程的特解。
含有初始条件的微分方程称为初始问题。

一阶常微分方程:

方程名称	方程格式	方程解
可分离变量方程	$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)(g(y)\neq 0)$ 或 $f(x)dx=g(y)dy$	
齐次方程	$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$	
齐次线性方程	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ 或 $y'+p(x)y=0$	$y=Ce^{-\int p(x)dx}$
非齐次线性方程	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 或 $y'+p(x)y=q(x)$	$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$ 或常数变量法
伯努力方程	$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n, n\neq 0,1$	两边除以 y^n, 转换成非齐次线性方程，然后用公式法或常数变量法求解。

二阶微分方程
可降阶的微分方程： $y^{''}=f(x,y,y^{'})$，思路是将二阶降为一阶

方程形式	降阶方法
$y^{''}=f(x)$	逐级不定积分
$y^{''}=f(x,y^{'})$	令 $y^{'}=p(x)$
$y^{''}=f(y,y^{'})$	令 $y^{'}=p(y)$,$y^{''}=dp/dy*p$

二阶线性常微分方程:

方程名	方程格式	解格式
二阶齐次线性常微分方程	$y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=0$	$y=C_1y1+C_2y2$ y1，y2 是线性无关的解
二阶非齐次线性常微分方程	$y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=f(x)$	$y=y+Y$ Y 是对应齐次方程的通解，y 是方程特解。

二阶常系数线性常微分方程：

<table>
<tr><th>方程名</th><th>方程格式</th><th>解格式</th></tr>
<tr><td>二阶常系数齐次线性常微分方程</td><td>$y^{''}+py^{'}+qy=0$</td><td>根据 $r^2+pr+q=0$ 特征方程结果
<table>
<tr><td>p^2-4q 的结果</td><td>根</td><td>通解</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q>0$</td><td>λ_1,λ_2, 单根</td><td>$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q=0$</td><td>λ, 重根</td><td>$(C_1+x)e^{\lambda}x$</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q<0$</td><td>$\alpha\pm i\beta$, 共轭根</td><td>$e^{\alpha x}[C_1cos(\beta x)+C_2sin(\beta x)]$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>二阶常系数非齐次线性常微分方程</td><td>$y^{''}+py^{'}+qy=f(x)$</td><td>通解： $y=y+Y$
Y 是对应齐次方程的通解，y 是方程特解
自由项情况 1： $f(x)=e^{\lambda x}Q_m(x)$ $Q_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式
根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 根的结果和 $2\lambda+p$ 的情况
特解： $y=x^ke^{\lambda x}P_m(x)$,$P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式
<table>
<tr><td>特征方程结果</td><td>k</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$</td><td>k=0</td><td>$\lambda$ 不是特征方程的根</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p\neq 0$</td><td>k=1</td><td>λ 是单根</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p=0$</td><td>k=2</td><td>λ 是重根</td></tr>
</table>
自由项情况 2： $f(x)=e^{\lambda x}(P_l(x)cos\omega x+P_n(x)sin\omega x)$
$P_l(x),P_n(x)$ 是 x 的 l,n 次多项式
根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 根的结果
特解： $y=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)cos(\omega x)+R_m^{(2)}(x)sin(\omega x)]$
m=max(l,n),$R_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式
<table>
<tr><td>特征方程结果</td><td>k</td></tr>
<tr><td>$\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根</td><td>k=0</td></tr>
<tr><td>$\lambda+i\omega$ 是特征方程的根</td><td>k=1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

```
matlab 中的微分方程:
符号微分方程:
dsolve('eq1,eq2..','con1,con2','v')
eq1,eq2.. 微分方程,
con1, con2.. 初始条件,
v 变量
Dy 表示导数 y'
例子:
求 y'+3xy=4x 的通解
syms y x;
dsolve('Dy+3*x*y=4*x','x')
ezplot(y);
ans =

4/3+exp(-3/2*x^2)*C1


>> pretty(ans)

                                                 2
                              4/3 + exp(- 3/2 x ) C1
```

7 期末考试

1 . 当 $x \to 0$ 时，下列哪一个无穷小时对于 x 的三阶无穷小（）

1. $x^3 + 0.0001x^2$
2. $\sqrt{a+x^3} - \sqrt{a} \quad (a > 0)$
3. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$
4. $\sqrt[3]{tanx}$

正确答案 B，错选 A
高阶无穷小的概念是 $lim\frac{\alpha}{\beta^k} = C, C \neq 0$, 只有
$lim\frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3} = C$, 所以选 B。

2 .$\int xf''(x)dx = ()$

1. $xf(x) - \int f(x)dx$
2. $xf''(x) - xf'(x) - f(x) + C$
3. $xf'(x) + f(x) + C$
4. $xf'(x) - f(x) + C$

正确答案 D，错选 C

3 . 当 $x \to 0$ 时，与 $sin2x + 5x^2$ 等价无穷小的量时 ()

1. $5x^2$
2. x
3. x^2
4. $2x$

正确答案 D，错选 A

4 .$\int_{-1}^{1} \frac{2+x^3 sin^2 x}{\sqrt{4-x^2}} dx =$()

1. $\pi/2$
2. $2/3\pi$
3. π
4. 2π

正确答案 B

5 . 设 $f(x) = \int_{2x}^{1} \frac{sint}{t} dt$, 则 $f'(x) =$()

1. $-\frac{sin2x}{2x}$
2. $\frac{sin2x}{2x}$
3. $\frac{sin2x}{x}$
4. $-\frac{sin2x}{2x}$

正确答案 D

6 .$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$()

1. -1
2. 2
3. 1
4. 0

正确答案 C, 错选为 A

7 .$\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx =$()

1. 0
2. $\frac{1}{3}\pi$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{2}$

正确答案为 A

8 . 微分方程 $y'' + 2y' + y = x$ 的通解是 ()

1. $y = x + C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$
2. $y = x - 2 + C_1xe^{-x} + C_2e^{x}$
3. $y = x - 2 + C_1xe^{-x} + C_2e^{-x}$
4. $y = x - 2 + C_1e^{-x} + C_2e^{x}$

正确答案为 C, 错选为 A。
首先确定齐次方程的根为 -1，所以齐次方程通解为 $(C_1 + C_2x)e^{-x}$,
其次，确定非齐次方程右边为 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 格式， $\lambda = 0, m = 1$, 而 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根
所以非齐次方程的特解中 k=0，特解为 $y = ax + b$, 带入方程得到
$a = 1, b = -2$

8 附录 1 常用公式

双曲函数

$sh(x) = \frac{e^(x)-e^{-(x)}}{2}$	$ch(x) = \frac{e^2+e^{-x}}{2}$	$th(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
$sh'(x) = ch(x)$	$ch'(x) = sh(x)$	$th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$
$arcsh(x) = ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$arcch(x) = ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$arcth(x) = \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$ $x \in (-1,1)$
$arcsh'(x) = \frac{1}{x^2+1}$	$arcch'(x) = \frac{1}{x^2-1}$	$arcth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$ch^2(x) + sh^2(x) = ch(2x)$

欧拉公式	$e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$
万能公式	$tan\alpha = \frac{2tan(\frac{\alpha}{2})}{1-tan(\frac{\alpha}{2})^2}$ $sin\alpha = \frac{2tan(\frac{\alpha}{2})}{1+tan(\frac{\alpha}{2})^2}$ $cos\alpha = \frac{1-tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1+tan(\frac{\alpha}{2})^2}$

9 附录 2 不定积分的常用方法

9.1 基本初等函数积分公式

9.1.1 幂函数

$$\int x^\mu dx = \begin{cases} \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C & \mu \neq -1 \\ ln|x| + C & \mu = -1 \end{cases}$$

9.1.2 指数函数

$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

9.1.3 对数函数

$\int lnxdx = x * lnx - x + C$
$\int log_a xdx = x * log_a x - xlog_a e + C$

9.1.4 三角函数

$\int sinxdx = cosx + C$ $\quad$ $\int cosxdx = -sinx + C$
$\int tanxdx = -ln|cosx| + C$ $\quad$ $\int cotxdx = ln|sinx| + C$
$\int secxdx = ln|secx + tanx| + C$ $\quad$ $\int cscxdx = ln|cscx - cotx| + C$

9.1.5 反三角函数

$\int arcsinx = x * arcsinxdx + \sqrt{1-x^2} + C$ $\quad$ $\int arccosxdx = x * arccosx - \sqrt{1-x^2} + C$
$\int arctanxdx = x * arctanx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$ $\quad$ $\int arccotxdx = x * arccotx + \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$
$\int arcsecxdx = x * arcsecx - ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ $\quad$ $\int arccscxdx = x * arccscx + ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$

9.2 常用积分公式

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\|\frac{x-a}{x+a}\| + C$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + C$	$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = arccos(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + C$	$\int \frac{-dx}{1+x^2} = arccot(x) + C$

9.3 常用方法

1. 凑微分
$\int f(\varphi(x))\varphi^{'}(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$
将 $\varphi^{'}(x)dx$ 凑到 $d(\varphi(x))$ 中。
2. 换元法
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt$
用 $x = \varphi(t)$ 进行替换变量，进行积分
常用换元：

型式	换元
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a*tan(\alpha), x=a*cot(\alpha), x=a*sh(\alpha),$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a*sin()\alpha), x=a*cos(\alpha),$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a*sec(\alpha), x=a*csc(\alpha),$

3. 分部积分
$\int udv = uv - \int vdu$
换一种形式积分

9.4 常用形式

9.4.1 含 $ax+b$

1) 采用凑微分方法, 将 $ax+b$ 凑到微分中。
2) 因式分解

9.4.2 含 $\sqrt{ax+b}$

1) 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。
2) 利用已经获得的结果，分部积分。
参考例子:
$\int \sqrt{ax+b}dx$, 凑微分。
$\int x\sqrt{ax+b}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或分部积分。
$\int x^2\sqrt{ax+b}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或分部积分。
$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或先求出 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$, 再分部积分。
$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或先求出 $\int x/\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$, 再分部积分。
$\int \frac{dx}{x*\sqrt{ax+b}}$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号, 然后利用
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$ 来积分，。需要根据 b>0,b<0 选择积分型式。
$\int \frac{dx}{x^2*\sqrt{ax+b}}$, 需要先分解因式，然后利用 $\int \frac{dx}{x*\sqrt{ax+b}}$ 结果。

9.4.3 含 $a^2 \pm x^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C\end{array}}$$

9.4.4 含 ax^2+b

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{ax^2+b}$, 利用 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$
- $\int \frac{xdx}{ax^2+b}$, 凑微分

- $\int \frac{x^2dx}{ax^2+b}$，分解
- $\int \frac{dx}{x*(ax^2+b)}$，分解
- $\int \frac{dx}{x^2*(ax^2+b)}$，分解
- $\int \frac{dx}{x^3*(ax^2+b)}$，利用上一个分解的结果分解

9.4.5 含 $ax^2+bx+c,(a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$,
  方法 1：考虑将 ax^2+bx+c 分解成 $(Ax+B)^2+C^2$ 形式，然后利用 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$。因为 $\sqrt{b^2-4ac}$ 结果不定，所以有两个结果
  方法 2：由于 $\frac{1}{x-r1} * \frac{1}{x-r2} = \frac{1}{r1-r2}(\frac{1}{x-r1} - \frac{1}{x-r2})$, 将 ax^2+bx+c 分解成:$\frac{1}{a}\frac{1}{r1-r2}(\frac{1}{x-r1} - \frac{1}{x-r2})$ 形式，r1，r2 是该方程的根。然后凑微分即可积分。
- $\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c}$,
  凑微分，将 x 凑到 dx 中。 $\frac{x}{ax^2+bx+c} = \frac{ax+b-b}{ax^2+bx+c}$

9.4.6 含 $\sqrt{x^2+a^2},(a>0)$

1) 用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = arcsh\frac{x}{a}+C = ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$
  用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
  利用 $\int secx = ln|secx+tanx|+C$ 公式。注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$.
  用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。
- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
  用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。
- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$.
  用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
方法 1：用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号，注意用此方法需要计算 $\int sec^3\alpha d\alpha$, 在计算的时候会循环，从而求得。
方法 2：将分子拆解成 $x^2+a^2-a^2$, 然后利用现成公式。需要计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$。注意用此方法需要计算 $\int sec^3\alpha d\alpha$, 在计算的时候会循环，从而求得。

- $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$.
方法 1：用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号

- $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$.
用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号
注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \sqrt{x^2+a^2}^3dx$
用 $x = a * sh\alpha$ 利用 $1 + sh^2\alpha = ch^2\alpha$ 换元来脱根号, 得到 $\int a^4ch^4\alpha d\alpha$, 然后积分

- $\int x\sqrt{x^2+a^2}^3dx$
凑微分

- $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}^3dx$
分部积分?
x 在分母

- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$
用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号

- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$
用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号, 化简得到 $\int cot\alpha * csc\alpha d\alpha = csc\alpha$ 积分形式

- $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx$
用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号, 化简后，分解得到 $a\int (\frac{sin\alpha}{1-sin^2\alpha} + \frac{1}{sin\alpha})d\alpha$ 积分形式

- $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$
用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号, 化简后，分解得到 $\int (\frac{1}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{1-cos^2\alpha})d\alpha$ 积分形式

9.4.7 含 $\sqrt{x^2-a^2}, (a > 0)$

1) 用 $x = a * sec\alpha$ 利用 $\sqrt{1+sec^2\alpha} = tan\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$
  用 $x = a*sec\alpha$ 利用 $\sqrt{1+sec^2\alpha} = tan\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

9.4.8 含 $\sqrt{a^2-x^2}, (a>0)$

1) 用 $x = a*sin\alpha$ 利用 $\sqrt{1-sin^2\alpha} = cos\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin(x/a)+C$
  直接套用公式，凑微分；或者令 $x = asin\alpha$ 来脱根号。
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

9.4.9 含 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}, (a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C, a>0$
  将 ax^2+bx+c 分解成
  $\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+4ac-b^2] = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2]$, 然后利用
  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 公式积分。
- $\int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}arcsin(\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}})+C, a>0$
  将 $-ax^2+bx+c$ 分解成
  $\frac{1}{4a}[-(2ax+b)^2+4ac+b^2] = \frac{1}{4a}[-(2ax+b)^2+(\sqrt{b^2+4ac})^2]$, 然后利用
  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 公式积分。

9.4.10 含 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x+a}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$

1)$t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, 变量代换去根号
参考例子:

- $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}dx$
  两次代换，第一次 $t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, 第二次 $t = seck$

9.4.11 含三角函数