3.2 二重积分的计算

你要认识:

二元函数在平面有界闭区域 D 上的积分

$$\iint_D f(x,y)d\sigma$$

要熟练掌握二重积分的计算法:

在直角坐标或极坐标下化为二次积分

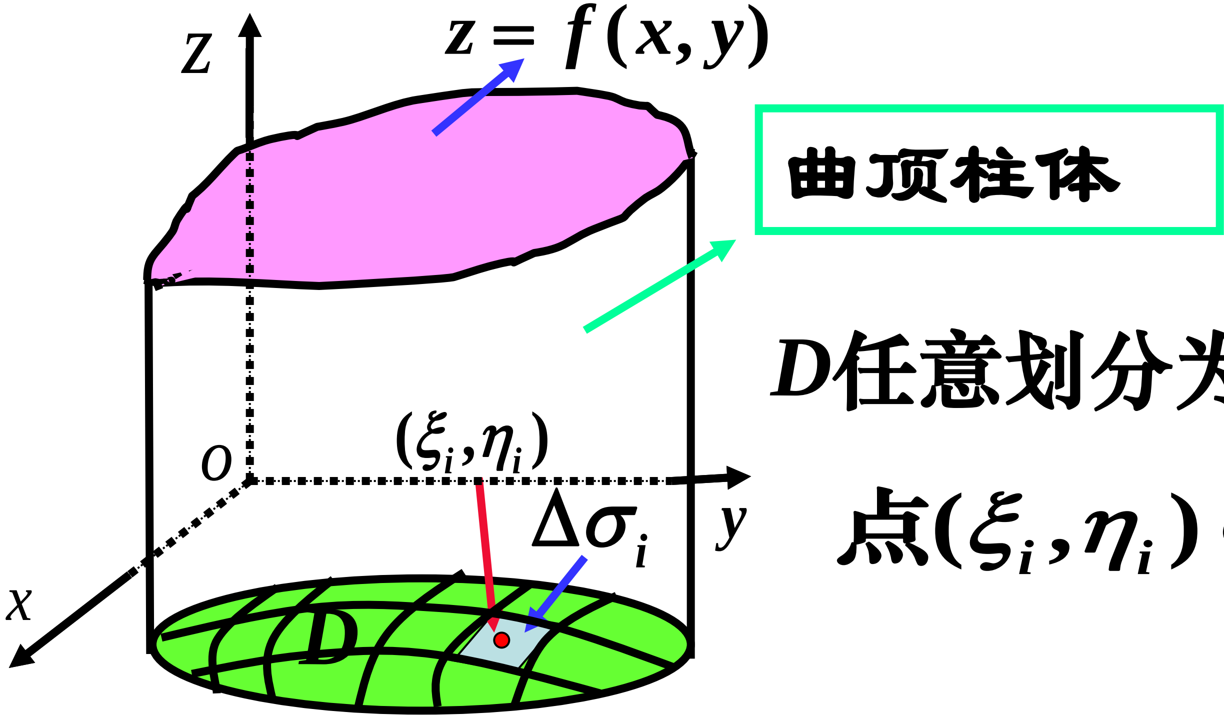
3.2.1 直角坐标系下二重积分的计算

3.2.2 极坐标系下二重积分的计算

3.2.1(1) 二重积分的几何意义

设$z=f(x,y)$在有界闭区域D连续，

由定义 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$



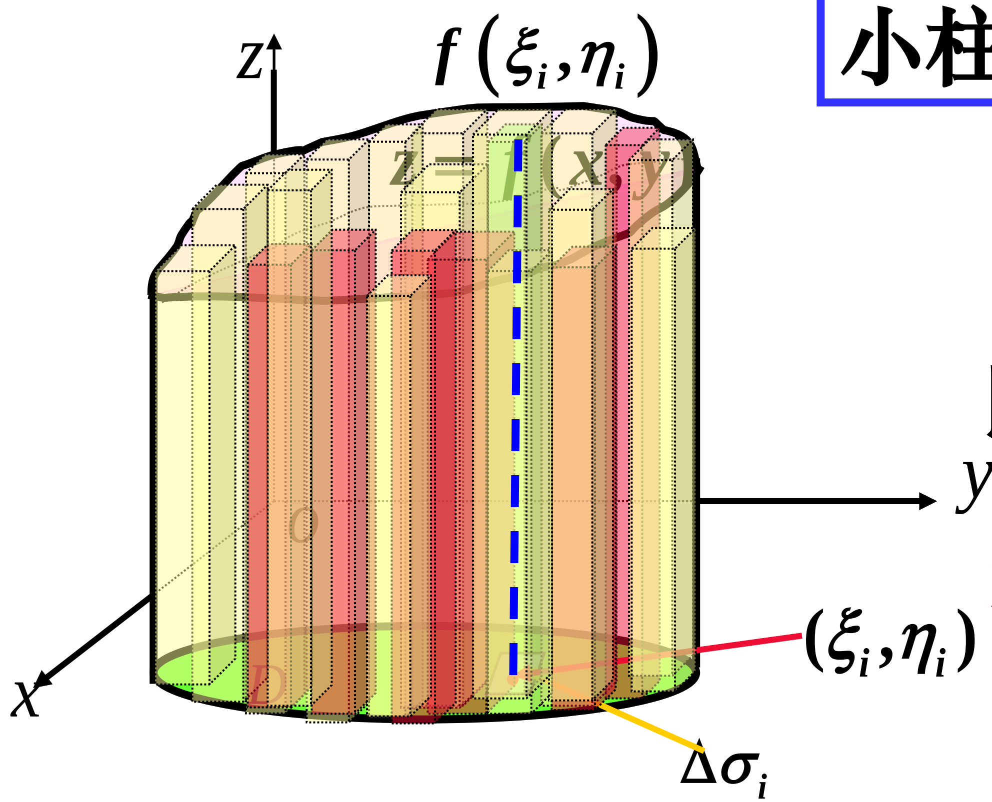
D任意划分为n个子域$\Delta\sigma_i$

点$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$

小的平顶柱体体积

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \boxed{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}} \boxed{f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i} = V$$

小柱体体积无限累加



得到以曲面为顶，

区域D为底的**曲顶**

柱体的体积V.

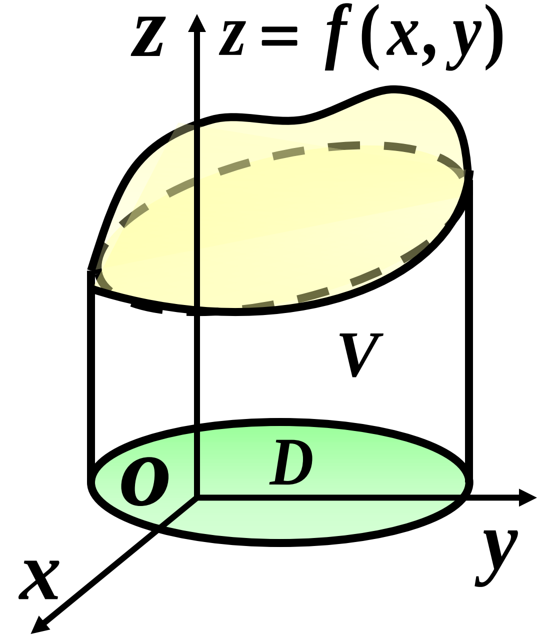
二重积分的几何意义

当被积函数$f(x,y)\ge 0$时，

二重积分是曲面 $z=f(x,y)$为顶，

其投影D为底曲顶柱体的体积.

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = V$$



当被积函数 $f(x,y)\le 0$时，

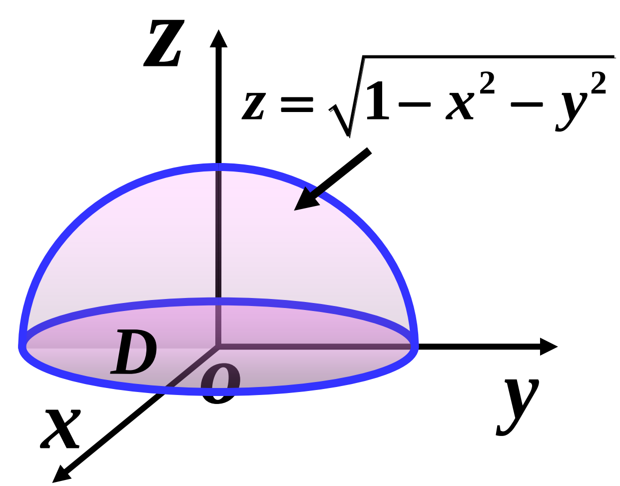
二重积分是曲顶柱体的体积的负值.

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = -V$$

例1 由几何意义求二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$，

其中 $D: x^2+y^2 \le 1.$

解 由几何意义知，该二重积分



表示由以上半球面

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

为顶，单位圆域为底的曲顶柱体即半球体的体积.

故

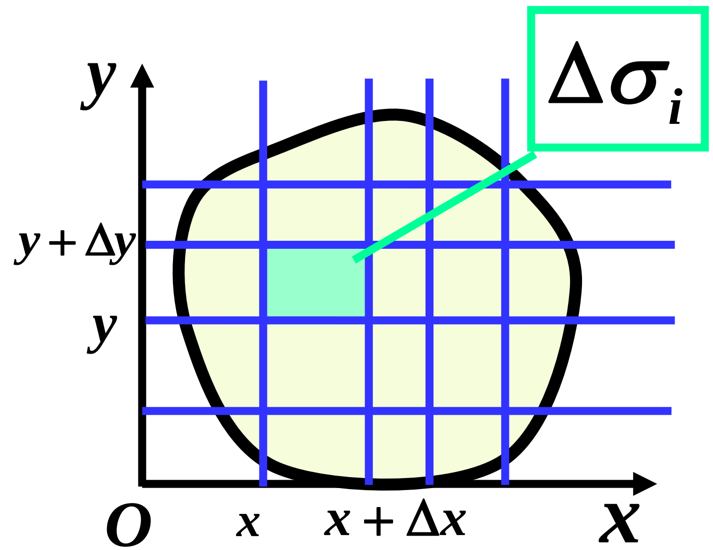
$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{2}{3}\pi$$

3.2.1(2) 二重积分化为二次积分

二重积分是乘积和式的极限，但一般情况下这个极限很难求出，需要寻找计算二重积分的有效方法.

函数$z = f(x,y)$在有界区域D可积，

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$



面积元素 $d\sigma = ?$

$$\Delta\sigma_i \approx dxdy$$

直角坐标系下的面积元素

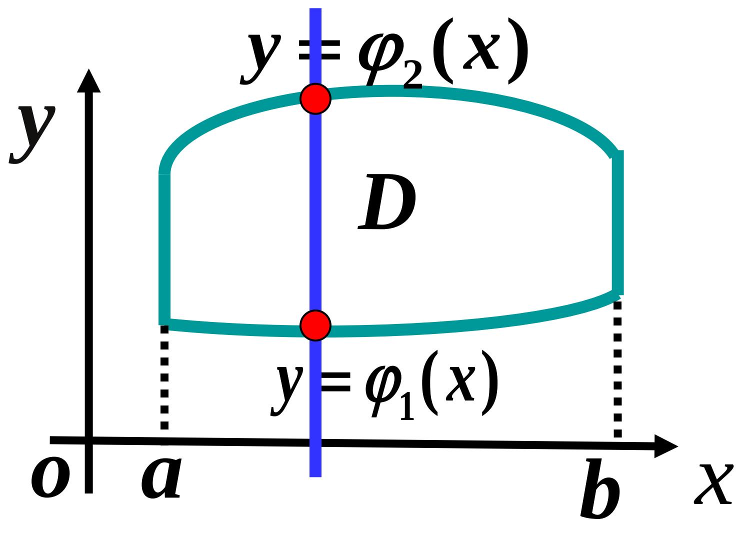
$$d\sigma = dxdy$$

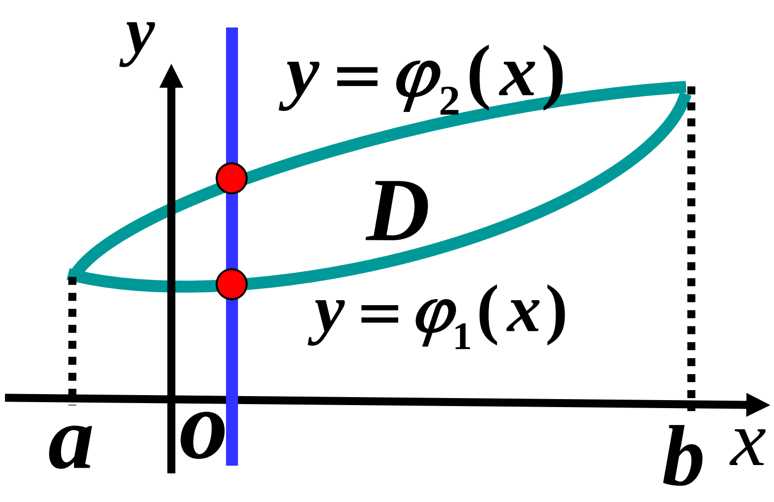
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

二重积分的值与被积函数和积分区域有关

积分区域的类型

1. X-型区域 $D: \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b$

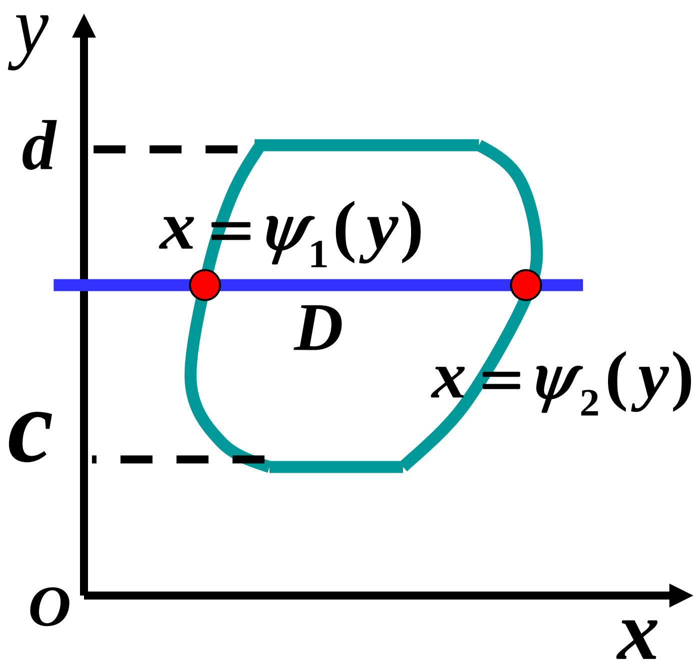


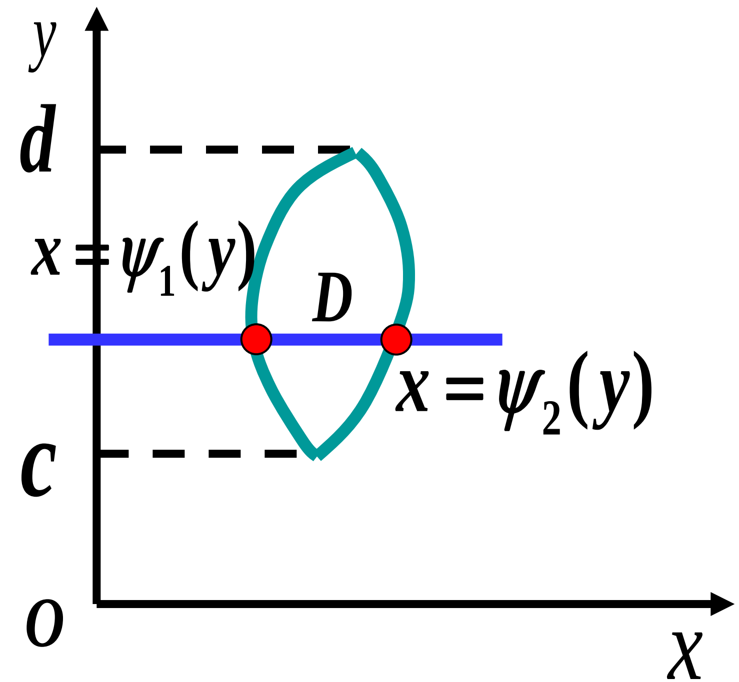


特点：穿过D内部且平行于y轴的直线、

与D的边界相交不多于两点.

2.*Y*-型区域 $D: \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$





特点：穿过*D*内部且平行于*x*轴的直线、

与*D*的边界相交不多于两点.

计算$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

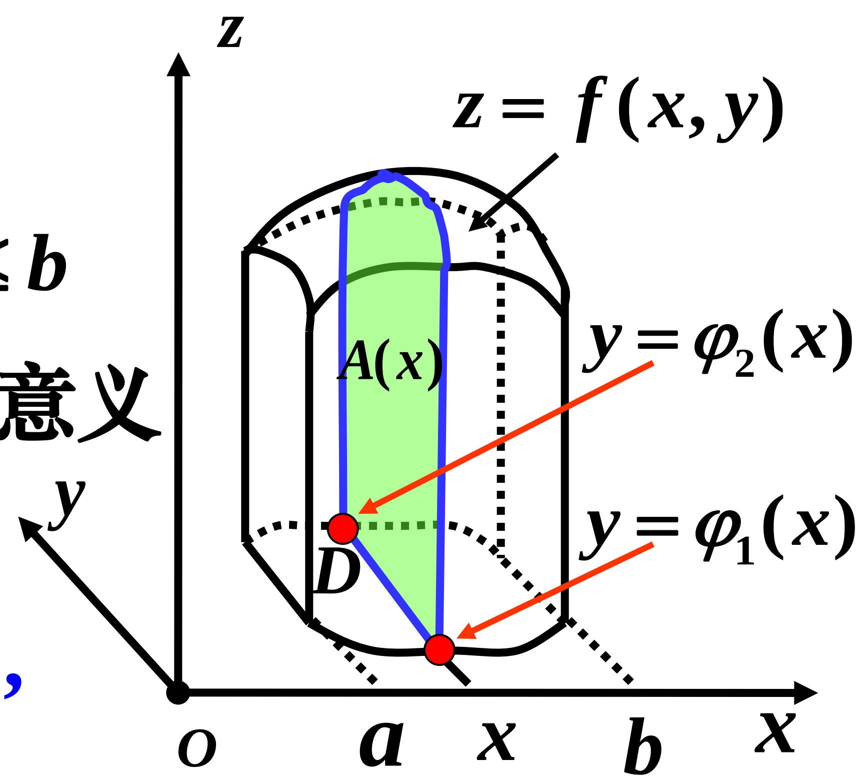
$D:\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b$

不妨设 $f(x,y)\ge 0$, 由几何意义

求曲顶柱体的体积

利用平行截面面积已知,

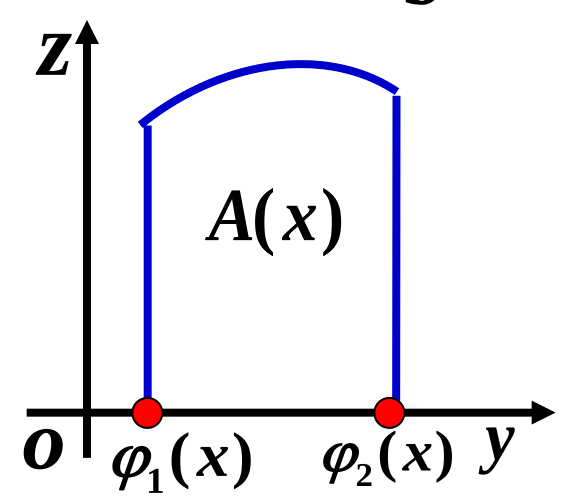
求立体体积的方法:



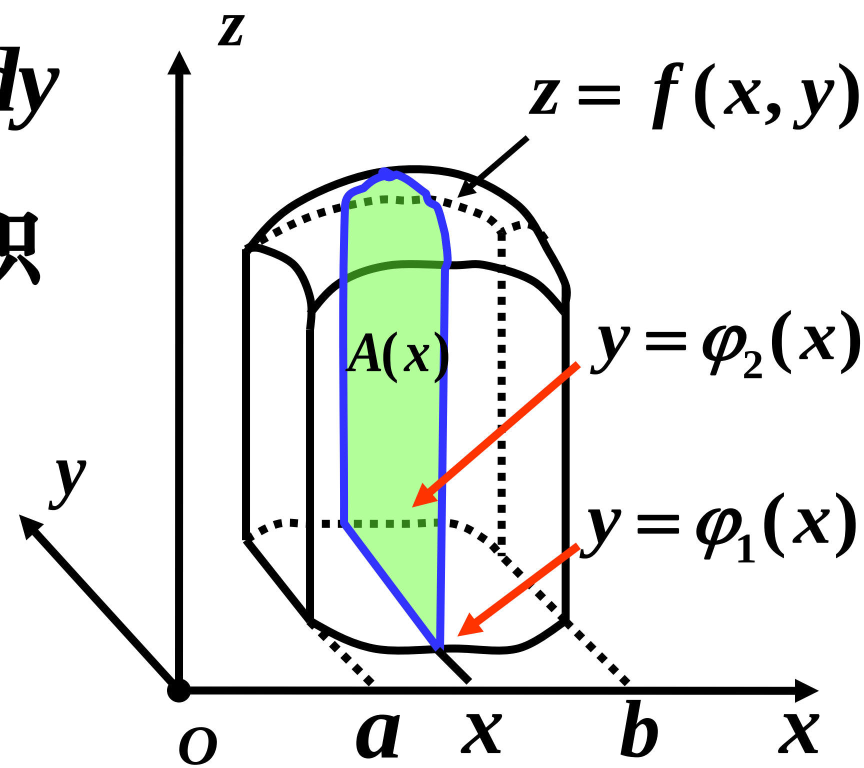
取$x\in[a,b]$, 则有曲边梯形,

由定积分的几何意义,面积

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$



$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$



利用已知平行截面面积求立体体积的方法:

$$V=\int_a^b A(x)dx$$

$$=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}$$

（先对y后x积分）

先把 x看成常数，把函数看作一元函数对y做定积分，再对一元函数$A(x)$做定积分.

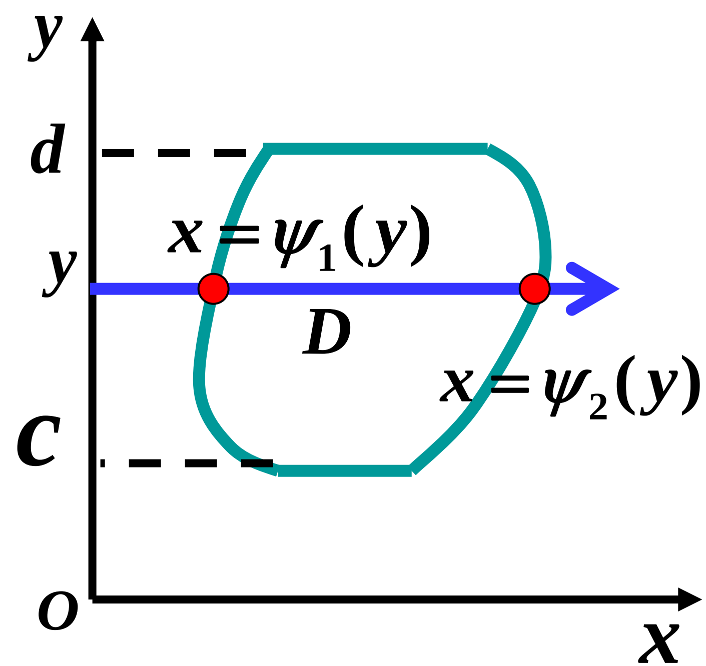
二重积分转化为二次积分.

若D为(Y型区域):

$$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$$

则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$= \int_c^d [\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx]dy$$

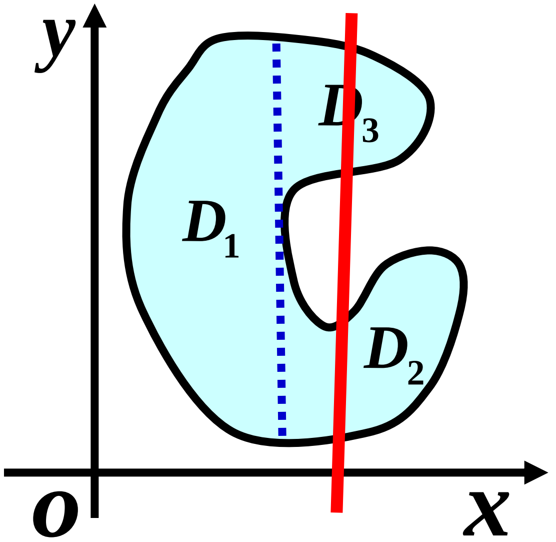


$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx}$$

(先对x后y积分)

若D不是X型(或Y型)区域,则将D分为若干个区域, 使它们为X型(或Y型),若干个区域上的积分之和就是所给二重积分的值.

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$



由区域可加性，得

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

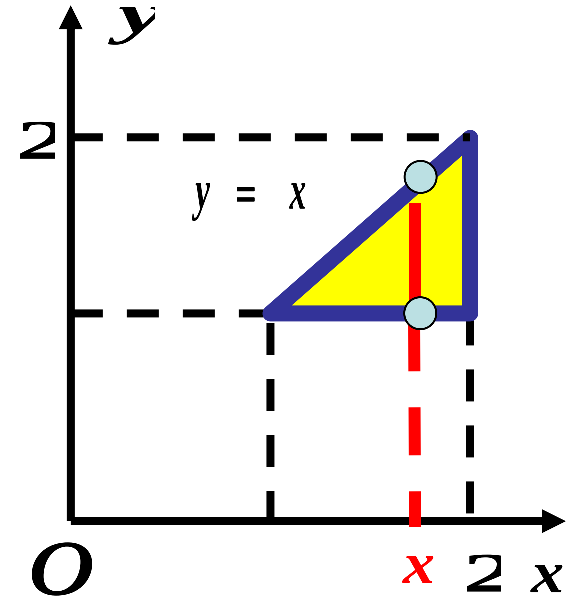
$$= \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_3} f(x,y)d\sigma$$

求二重积分的方法：

将二重积分化为两个定积分（二次积分）

3.2.1(3) 计算二重积分的例题

例1 计算 $\iint\limits_D xyd\sigma$ 其中D是由直线 $y=1$, $x=2$ 及 $y=x$ 所围区域.



解法1 把D看成X型区域,则

$$D: 1 \le y \le x, 1 \le x \le 2,$$

$$\iint\limits_D xyd\sigma = \int_1^2 dx \int_1^x xydy$$

$$= \int_1^2 [x \cdot \frac{y^2}{2}]_1^x dx = \int_1^2 (\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2})dx$$

$$= [\frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{4}]_1^2 = \frac{9}{8}$$

解法2 把D看成Y型区域，则

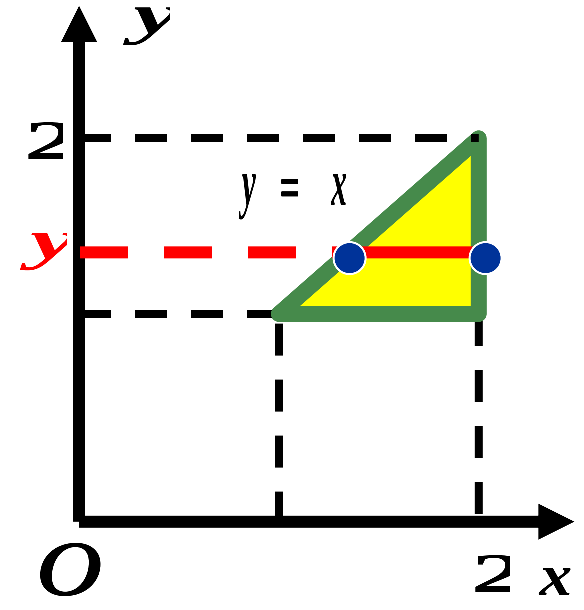
$$D: y \le x \le 2, 1 \le y \le 2,$$

$$\iint_D xy d\sigma = \int_1^2 dy \int_y^2 xy dx$$

$$= \int_1^2 [y \cdot \frac{x^2}{2}]_y^2 dy$$

$$= \int_1^2 (2y - \frac{y^3}{2}) dy$$

$$= [y^2 - \frac{y^4}{8}]_1^2 = \frac{9}{8}$$



例2 计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中$D$是由抛物线

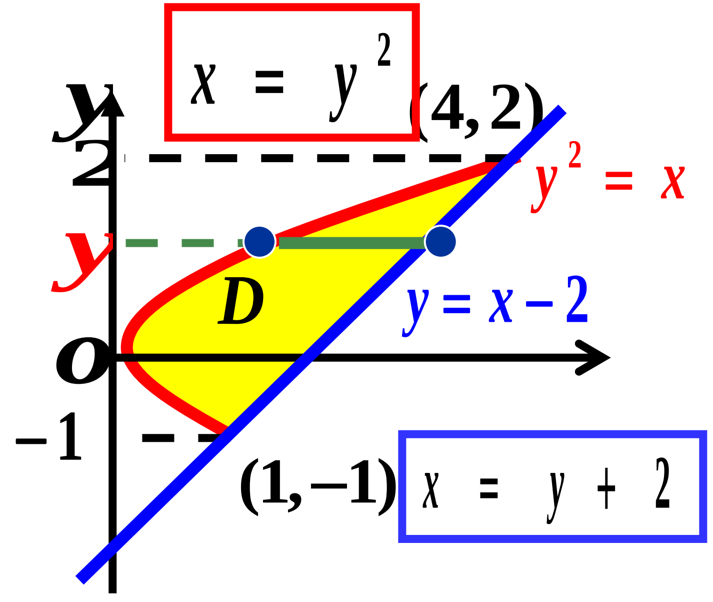
$y^2 = x$及直线 $y = x - 2$ 所围成的区域.

解 把D看作Y型区域

$$D: y^2 \le x \le y+2, -1 \le y \le 2,$$

$$\iint\limits_D xy\,d\sigma = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} xy\,dx$$

$\boxed{\text{先}\, x \,\text{后}\, y}$



$$\iint_D xy\,d\sigma = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} xy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} [y \cdot \frac{x^2}{2}]_{y^2}^{y+2} dy$$

$$= \int_{-1}^{2} (y(y+2)^2 - y^5) dy$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6}]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{45}{8}$$

若把D看作X型区域, 由于在[0,1]和[1,4]上下边界的表达式不同，所以要用直线 $x=1$

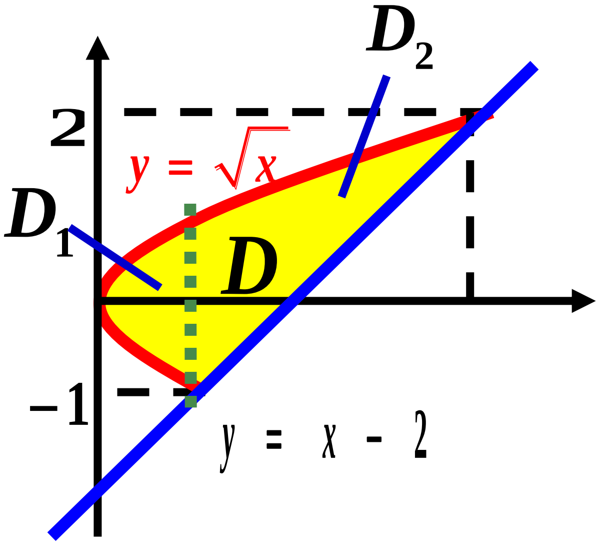
将D分成两个区域 D_1和D_2.

它们分别用以下不等式表示:

$$D_1: -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 1$$

$$D_2: x-2 \le y \le \sqrt{x},\ 1 \le x \le 4$$

$$\therefore \iint_D xyd\sigma = \iint_{D_1} xyd\sigma + \iint_{D_2} xyd\sigma$$



$$\therefore \iint_{D} xy d\sigma = \iint_{D_1} xy d\sigma + \iint_{D_2} xy d\sigma$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy$$

$$= 0 + \frac{45}{8} = \frac{45}{8}$$

例3 求$I=\iint\limits_D e^{y^2}d\sigma, D: y=x, y=1, x=0$所围成.

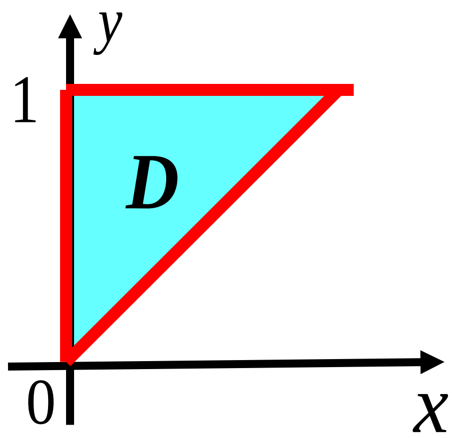
分析 若先 y后x积分，则 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy$

无法积分

解 先x后y积分,$(Y$型$)$ $D: 0\le x\le y, 0\le y\le 1$

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 e^{y^2}\cdot x\Big|_0^y dy$$

$$=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}dy^2=\frac{1}{2}(e-1)$$



由以上例题可知，在化二重积分为二次积分时，为了计算简便，需要选择恰当的二次积分的次序.

在选择二次积分次序时，既要考虑积分区域D的形状，又要考虑被积函数的特性.

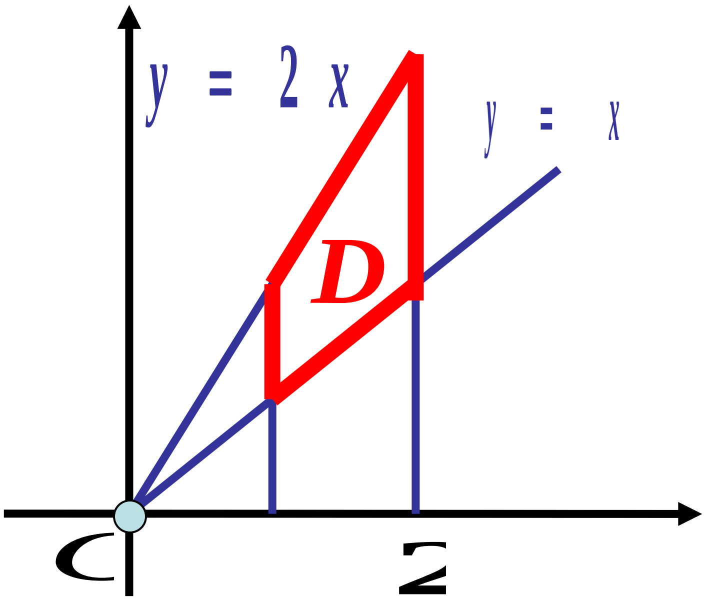
例4 改变下列积分次序

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$$

解 (从给出的积分限知)

积分区域为

$D: 1 \le x \le 2, \quad x \le y \le 2x.$



即D由四条直线

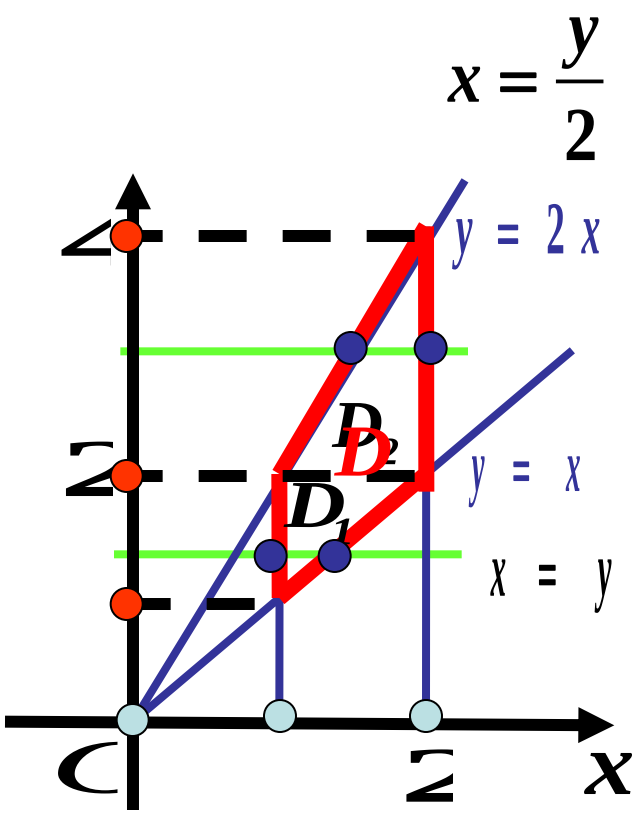
$y = x, \quad y = 2x, \quad x = 1, \quad x = 2$

所围成的区域.

若改为先对x后对y积分，

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy = \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)dx$$

$$+\int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx.$$



$$D_1: 1 \le x \le y, 1 \le y \le 2$$

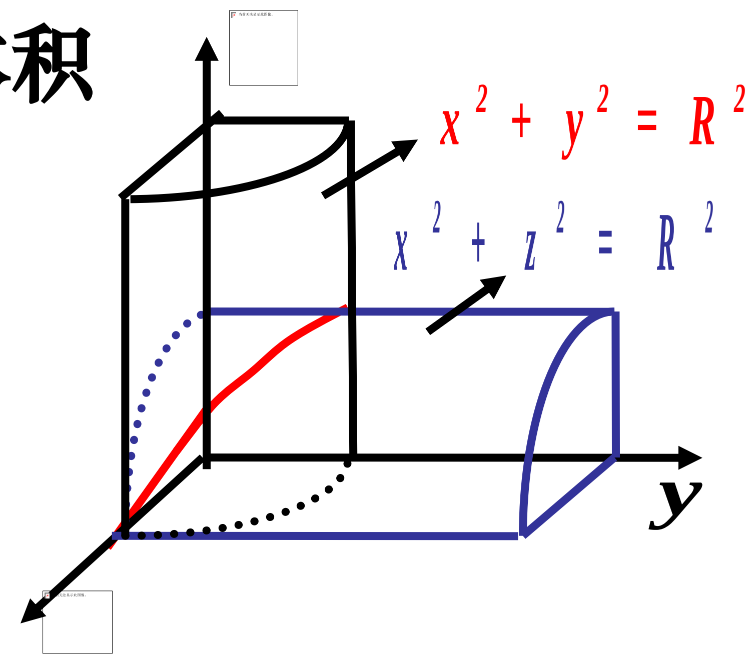
$$D_2: \frac{y}{2} \le x \le 2, 2 \le y \le 4$$

例5 求两个底面半径相同的直交圆柱所围立体的体积.

解 设圆柱底面半径为 R. 两个圆柱面方程分别为 $x^2+y^2=R^2$, $x^2+z^2=R^2$.

利用对称性，所求立体的体积

$$V=8V_1$$



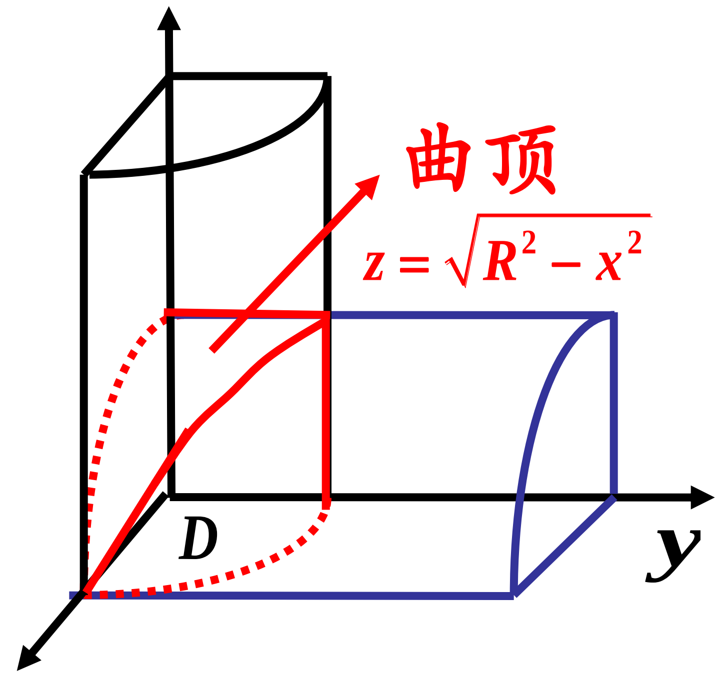
$$V_1=\iint_D z\,d\sigma=\iint_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma$$

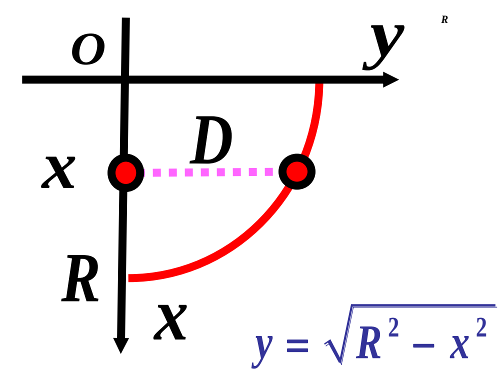
$$=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

$$=\int_0^R\left[\sqrt{R^2-x^2}\cdot(y)\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\right]dx$$

$$=\int_0^R (R^2-x^2)\,dx$$

$$=\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R=\frac{2}{3}R^3.$$



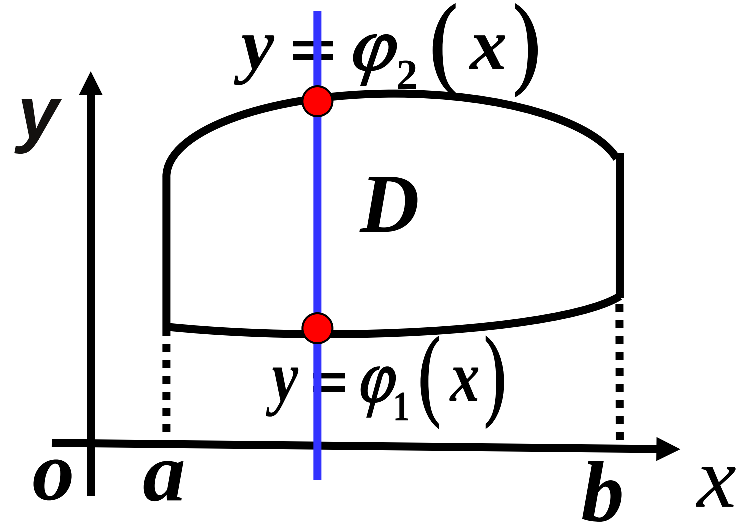


所求体积为 $V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3.$

小 结

一、计算二重积分

----利用直角坐标将二重积分化为二次积分



若D（X型）：

$$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b$$

则$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

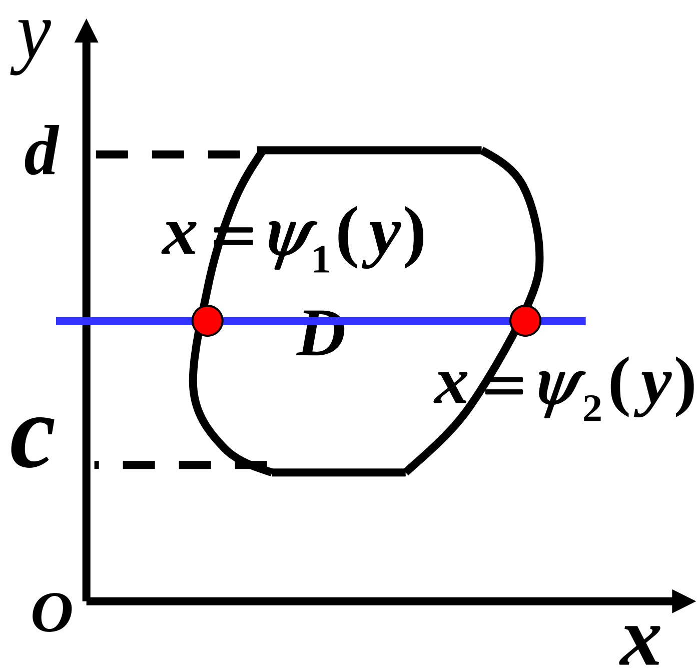
(先y后x积分)

若D为（Y型）：

$$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$$

则 $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

（先对x后y积分）



对于一般区域可利用

区域可加性，将重积分

化为若干个重积分之和.

二、改变二次积分的次序的步骤：

X型域

(先对y后x积分)

按定限规则

积分区域D

按题目要求

Y型域

(先对x后y积分)

按定限规则