# 第 1 章 向量代数与空间解析几何

## 一、基本要求

1．理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2．掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积），了解两个向量垂直、平行的条件.

3．掌握单位向量、方向余弦、向量的坐标表达式以及用坐标表达式进行向量运算的方法.

4．掌握平面的方程和直线的方程的求法，会利用平面和直线的相互关系解决有关问题.

5．理解曲面方程的概念，了解空间曲线方程的概念.

6．了解常见二次曲面的方程及其图形，了解以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

7．了解空间曲线的参数方程和一般方程.

8．了解曲面的交线、曲面和立体在坐标平面上的投影.

## 二、要点提示

（一） 向量代数

1.向量：既有大小，又有方向的量称为向量（或矢量），记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$ .

向量的大小称为向量的模，记作 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$ ，模为 1 的向量称为单位向量.

若两个向量的大小和方向都相同，则它们相等.

若点 $A$ 的坐标为 $(x_1, y_1, z_1)$ ，点 $B$ 的坐标为 $(x_2, y_2, z_2)$ ，则

$\overrightarrow{AB}$ 的分解表示为 $\overrightarrow{AB} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ ，

$\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示为 $\overrightarrow{AB} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ ，

其中 $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$ 在 $x, y, z$ 轴上的投影． $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为沿 $x, y, z$ 轴正向的单位向量，它们称为空间直角坐标系的基本单位向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的模： $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$ .

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角、方向余弦：

设 $\alpha, \beta, \gamma$ 分别为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $x, y, z$ 轴正向夹角 $(0 \le \alpha \le \pi, 0 \le \beta \le \pi, 0 \le \gamma \le \pi)$ ，则 $\alpha, \beta, \gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角． $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

向量的方向余弦满足： $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ .

设 $\boldsymbol{a}^{\mathbf{0}}$ 为与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right).$$

2.向量的代数运算

（1）加法：设 $\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\right).$$

运算律：

① 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

② 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

（2）数乘：$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\lambda$ 为实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

运算律：

①结合律 $\lambda\left(\mu\boldsymbol{a}\right)=\mu\left(\lambda\boldsymbol{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\boldsymbol{a}$；

②分配律 $\left(\lambda+\mu\right)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$

(3) 数量积(点积, 内积)

定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{Prj}_{\vec{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$

特例：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\left(\text{也记为}\boldsymbol{a}^2\right)$

运算律：

① 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

② 与数乘结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

③ 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

两向量夹角公式：设 $\boldsymbol{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$，$(|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0)$，则

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}},$$

其中 $\theta$ 为的 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角 $(0\le\theta\le\pi)$.

（4）向量积（叉积，外积）

定义：若由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定的向量 $\boldsymbol{c}$ 满足：

① $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直，其方向按从 $\boldsymbol{a}$ 转动角 $\theta$（$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，$0\le\theta\le\pi$）到 $\boldsymbol{b}$ 的右手规则确定（图 7.1）；

② $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是：

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

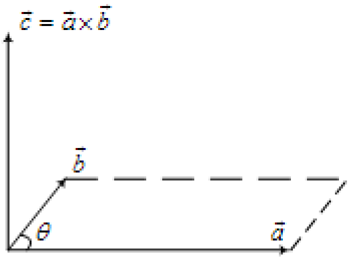

图 7-1

坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，

则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

特例：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

运算律：

① 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

② 与数乘的结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

③ 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

两向量平行、垂直的等价条件：

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}\ (|\boldsymbol{a}|\ne0,|\boldsymbol{b}|\ne0)$$

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\ (|\boldsymbol{a}|\ne0,|\boldsymbol{b}|\ne0).$$

*（5）混合积

定义：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]$.

坐标表达式：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 的几何意义：表示以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

特例：$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0，或 \boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}（\lambda,\mu 为实数）.$$

运算律：$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]=-[\boldsymbol{bac}]=-[\boldsymbol{acb}]=-[\boldsymbol{cba}]$

3．几点注意：

（1）向量的坐标与一个点的坐标不同，前者是向量在坐标轴上的投影，等于向量的终点坐标减去始点坐标.

（2）记号 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 与 $A(x,y,z)$ 不同，前者向量,也可看作起点在原点的向量（称为向径），它的坐标数值上与终点的坐标相同；后者表示点.

**（二）平面**

1. 平面方程

（1）点法式：若平面过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则该平面的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

（2）一般式：$Ax+By+Cz+D=0$（$A,B,C$ 不同时为零）.

（3）截距式：若 $a,b,c$ 分别为平面在 $x,y,z$ 轴上的截距（$a,b,c$ 均不为零），则该平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

2. 两平面的夹角　两平面的法向量所成的不超过 $\frac{\pi}{2}$ 的夹角，称为两平面的夹角，平面 $\Pi_1$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，平面 $\Pi_2$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的夹角 $\theta$ 的余弦为：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

3. 点到平面的距离　平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到该平面的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**（三）空间直线**

1. 直线方程

（1）一般式方程（交面式）$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ $(A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2)$

（2）点向式方程（对称式）：若 $(x_0,y_0,z_0)$ 是直线上的已知点且 $(m,n,p)$ 是直线的方向向

量，则该直线的方程为$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

（3）参数方程：若设$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则直线的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$.

2. 直线与直线、直线与平面的夹角

两直线的方向向量所成的不超过$\dfrac{\pi}{2}$的夹角称为两直线的夹角．直线和它在平面上的投影直线所成的不超过$\dfrac{\pi}{2}$的夹角称为直线与平面的夹角.

设直线$L_1$和$L_2$的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$和$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，平面$\Pi$的法线向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则直线$L_1$与$L_2$的夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

直线$L_1$与平面$\Pi$的夹角$\theta$的正弦为

$$\sin\theta=\frac{|Am_1+Bn_1+Cp_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}.$$

**（四）二次曲面**

1. 二次曲面的标准方程

（1）球面　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

（2）椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

（3）柱面

① 椭圆柱面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a=b$时为圆柱面）;

② 双曲柱面　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

③ 抛物柱面$x^2=2py$.

（4）锥面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$（$a=b$时为圆锥面）.

（5）单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

（6）双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

（7）椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.

（8）双曲抛物面（马鞍面）$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

2.旋转曲面的方程：

曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $x$ 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$；

曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$；

曲线 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 $x$ 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$；

曲线 $\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f\left(\pm\sqrt{y^2+x^2},z\right)=0$；

曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f\left(y,\pm\sqrt{z^2+x^2}\right)=0$；

曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转所形成的旋转曲面方程为 $f\left(\pm\sqrt{y^2+x^2},z\right)=0$.

**（五）空间曲线、曲面和立体向坐标面的投影**

求空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 向坐标面 $xOy$ 的投影曲线方程，首先消去曲线方程中的变量 $z$，得到投影柱面，设为 $H(x,y)=0$，再将其与坐标面 $z=0$ 联立，得 $xOy$ 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

投影曲线的研究过程：空间直线 $\Rightarrow$ 投影柱面 $\Rightarrow$ 投影曲线.

类似地，可求得空间曲线在其他坐标面上的投影.

$yOz$ 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

$xOz$ 面上的投影曲线方程

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

注意曲面和立体在坐标面上的投影是平面区域，一般用不等式来表示区域.