3.7 对坐标的曲线积分

如何计算变力沿曲线所作的功?

什么是对坐标的曲线积分?

怎样计算对坐标的曲线积分?

3.7 对坐标的曲线积分

3.7.1 对坐标的曲线积分的概念

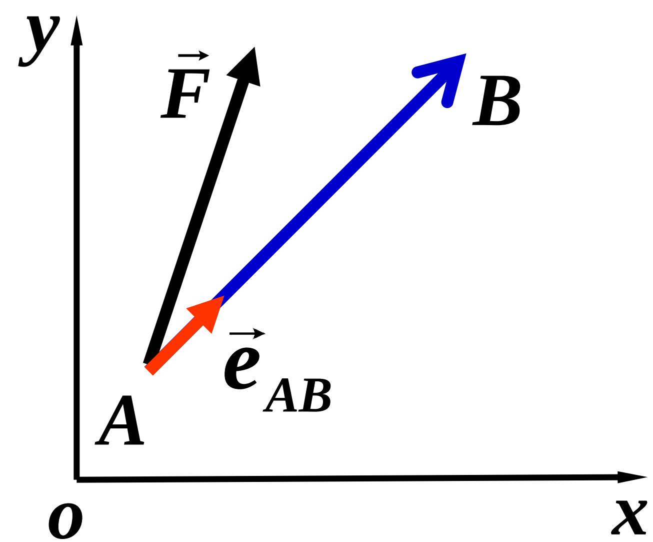
3.7.2 对坐标的曲线积分的计算法

3.7.1 对坐标的曲线积分的概念

1.引例: 计算变力沿曲线所作的功.

设光滑曲线段$L: A \to B$,

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

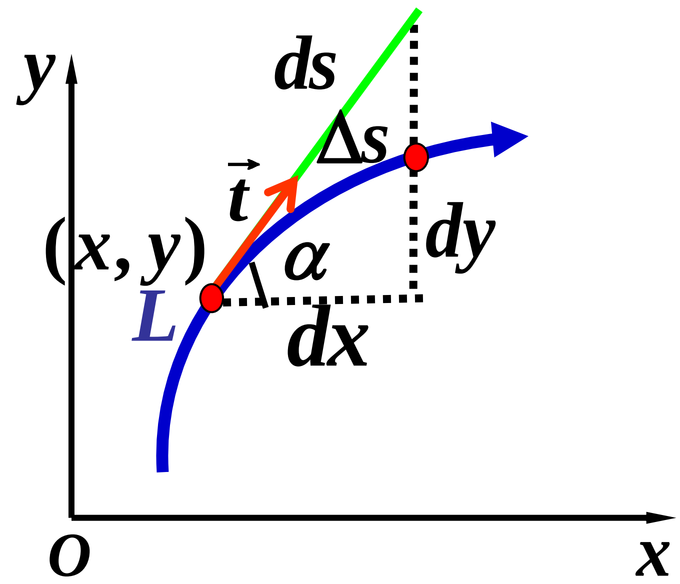


常力$\vec{F}$沿直线AB所作的功

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{F} \cdot \vec{e}_{AB})|AB|$$

常力沿直线作功 $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = (\vec{F}\cdot\vec{e}_{AB})\left|AB\right|$

讨论： 变力$\vec{F}(x,y)$沿弧段L从起点到终点所作的功.



在L取一小段弧Δs，$\vec{F}(x,y)$近似看作不变，移动的方向看成切向量$\vec{t}$，长度为ds，$\vec{F}$沿ds所作功为：

$$dW = (\vec{F}\cdot\vec{e}_t)ds \qquad 其中\vec{e}_t = (\cos\alpha,\cos\beta)$$

是ds上点的移动方向的单位切向量.

$\vec{F}$沿小弧段Δs所作功：

$$\Delta W \approx dW = (\vec{F}\cdot\vec{e}_t)ds \qquad \vec{e}_t = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

功元素

$$= \left[P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\right]ds$$

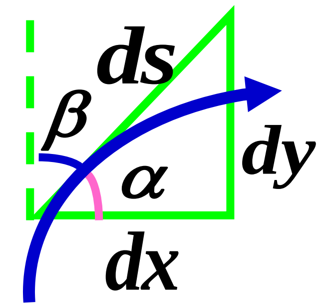
所以，F沿L所作的功为：

$$W = \int_L \left[P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\right]ds$$

对弧长的曲线积分

F沿L所作的功为:

$$W=\int_L\left[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\right]ds$$



$$=\int_L[P(x,y)\underbrace{\cos\alpha ds}_{\boxed{dx}}+Q(x,y)\underbrace{\cos\beta ds}_{\boxed{dy}}]$$

记为另一种形式:

对坐标的曲线积分

$$W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

L称为**有向曲线弧**.

2.对坐标的曲线积分的定义

定义 设L为xOy面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧,函数$P(x,y),Q(x,y)$在L上有界.

α,β是L上点(x,y)处沿L方向的切向量的方向角. 如果曲线积分

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta] ds$$

存在,则将它记为

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

称 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 为函数$P(x,y)$,

$Q(x,y)$在有向线段L上的 对 坐 标 的 曲 线 积 分 ,

（也称第二类曲线积分）．

其中$P(x,y)$, $Q(x,y)$叫做被积函数,

L叫有向积分弧段.

当L为简单封闭曲线时，记为

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

注：

(1) 当$P(x,y),Q(x,y)$在光滑曲线弧 L上连续时，第二类曲线积分存在.

（2）两类曲线积分的联系：

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L [P\cos\alpha + Q\cos\beta]ds$$

其中α,β是有向曲线弧L在点(x,y)处的切向量的方向角. $dx = \cos\alpha ds, dy = \cos\beta ds$.

（3）向量形式

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{ds}$$

其中 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),\ Q(x,y))$

为向量值函数，$\overrightarrow{ds}=(dx,\ dy)$.

$$\boxed{\text{变力}\vec{F}\text{ 沿弧段}L\text{作功 } W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{ds}}$$

(4) 空间有向曲线弧Γ上的第二类曲线积分为

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_{\Gamma} \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right] ds$$

$$= \int_{\Gamma} \vec{A}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{ds}$$

其中$\vec{A} = (P, Q, R), \overrightarrow{ds} = (dx, dy, dz)$

α, β, γ**为Γ上点(x, y, z)处沿Γ方向的切线的方向角.**

性质

1. 线性性质（λ和μ为常数）

$$\int_L \lambda P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy$$

$$=\lambda\int_L P(x,y)dx+\mu\int_L Q(x,y)dy$$

2. 对区域可加性

$$\int_{L_1+L_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{L_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{L_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

（L分成两段光滑的有向曲线弧L_1和L_2）

(3) 设L是有向曲线弧, $-L$是与L方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_{L} Pdx + Qdy$$

$\boxed{\text{对坐标的曲线积分有方向性}}$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

3.7.2 对坐标的曲线积分的计算

——化为定积分来计算

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L\left[P\cos\alpha+Q\cos\beta\right]ds$$

$$\int_L \underbrace{P(x,y)}_{(x,y)\text{在}L\text{上变化}}dx+\underbrace{Q(x,y)}_{(x,y)\text{在}L\text{上变化}}dy$$

设平面有向光滑曲线弧L的参数方程为

$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t: 从\alpha变到\beta\left(记为\alpha \to \beta\right)$$

其中$x(t), y(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)有连续导数，且$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$在L上连续.

设 $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t:\alpha \to \beta$ $\quad dx = x'(t)dt$

$dy = y'(t)dt$

代入对坐标的曲线积分，得计算公式:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ P\left[x(t),y(t)\right]x'(t) + Q\left[x(t),y(t)\right]y'(t) \right\} dt$$

$\boxed{\text{注}}$ 下限$\alpha \leftrightarrow L$的起点，上限$\beta \leftrightarrow L$的终点.

与对弧长的曲线积分不同 $\boxed{\alpha < \beta}$

其他情形

(1) $L: y = y(x), x \in [a,b]$, x起点为a，终点为b.

则 $\int_L Pdx + Qdy$

$$= \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx.$$

(2) $L: x = x(y), y \in [c,d]$, y起点为d,终点为c.

则 $\int_L Pdx + Qdy$

$$= \int_d^c \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$$

(3) 推广 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$ t 的起点α,终点β.

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

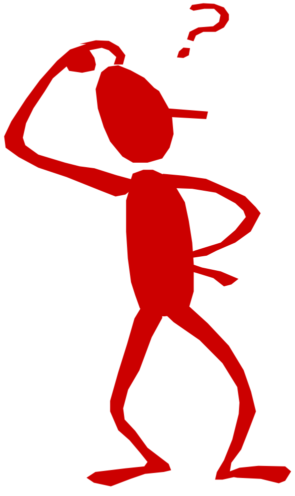
$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

例1 计算 $\int_L y^2 dx$, 其中 L 为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.



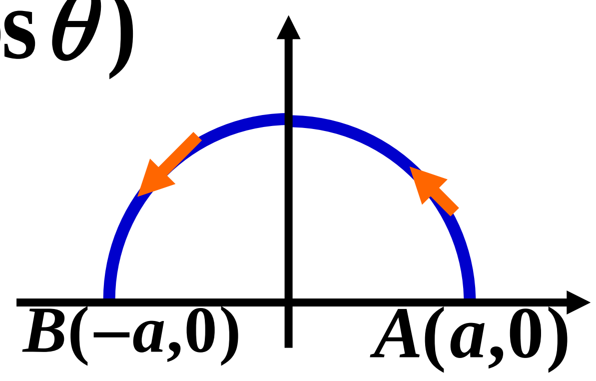
解 (1) L:按逆时针方向绕行的上半圆周;

$$\because \quad L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}, \qquad \theta \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } \pi,$$

$$\therefore \int_L y^2 dx = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)d(\cos\theta)$$

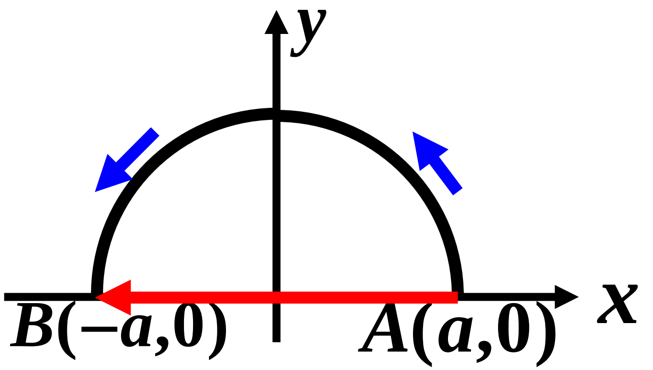
$$= -\frac{4}{3}a^3.$$



(2)L: 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

$\because \quad L: y=0, \quad x$ 从 a 变到 $-a$,

$$\therefore \int_L y^2 dx = \int_a^{-a} 0 dx = 0.$$



沿圆弧 $\int_L y^2 dx = -\dfrac{4}{3}a^3$

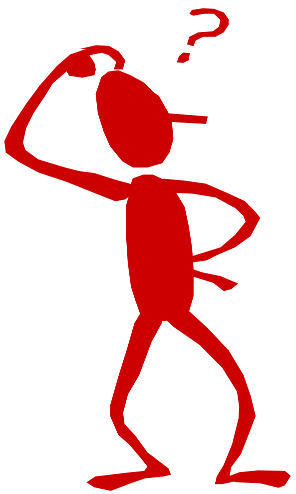
被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同积分结果不同.

例2 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$ 上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$ 上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)(1,0),(1,1)$.



(1) 抛物线 $y = x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧

解 (1) 化为对 x 的积分.

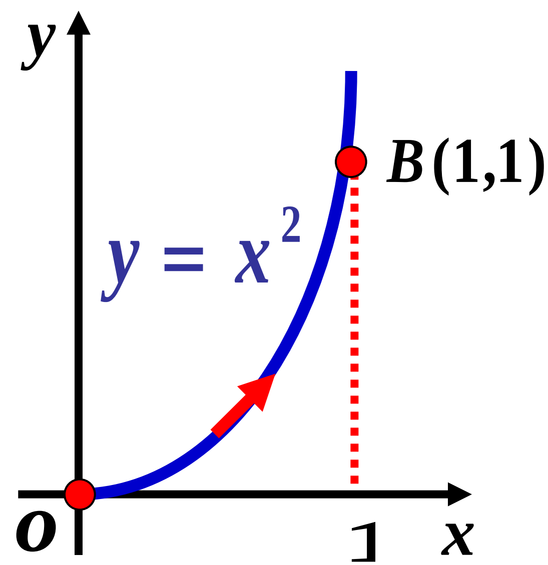
$OB: y = x^2$, x 从0变到1,

$$\int_L 2xydx + x^2dy$$

$$= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx$$

$$= 4\int_0^1 x^3 dx$$

$$= 1.$$



(2) 抛物线 $x = y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧

解 化为对 y 的积分.

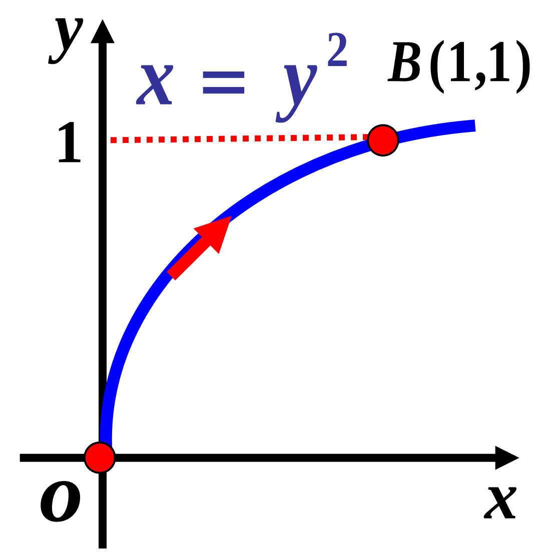
$OB: x = y^2$, y 从 0 变到 1,

$$\int_L 2xydx + x^2dy$$

$$= \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4)dy$$

$$= 5\int_0^1 y^4 dx$$

$$= 1.$$



(3) L: 有向折线OAB

$$\int_L 2xydx + x^2dy$$

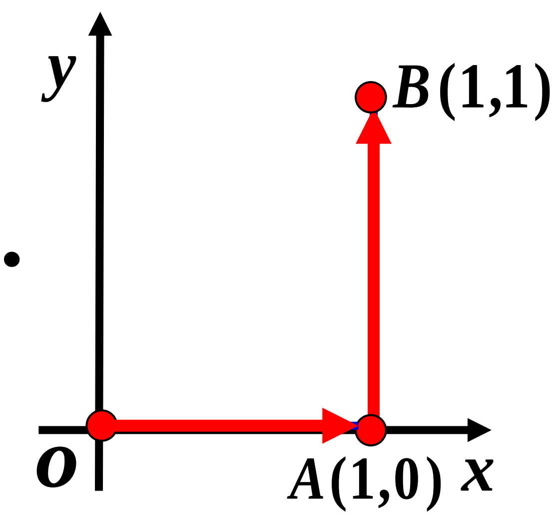
$$= \int_{OA} 2xydx + x^2dy + \int_{AB} 2xydx + x^2dy$$

在 OA 上, $y = 0$, x从 0 变到 1,

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + x^2 \cdot 0)dx = 0.$$

在 AB 上, $x = 1$, y 从 0 变到 1,

$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 1)dy = 1.$$



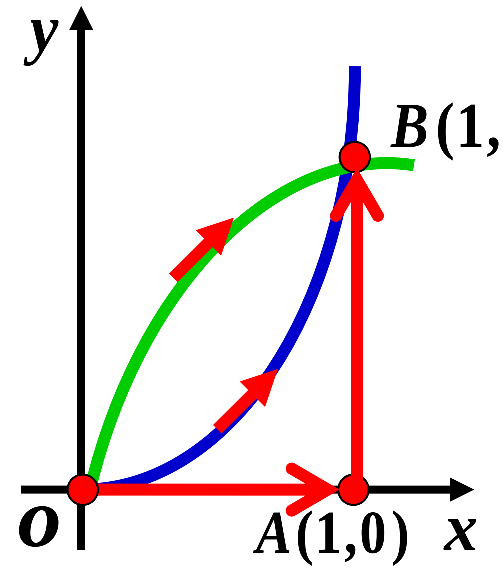
$\therefore$ 原式 $= 0 + 1 = 1$

$$L: O \to B \quad \text{沿} y = x^2$$

$$\text{沿} x = y^2$$

$$\text{沿折线} OA, AB$$

$$\int_L 2xydx + x^2dy = 1$$



被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同而积分结果相同.

思考题

设 L： $x = a\cos t, y = a\sin t, a>0,$ 试问 L 为顺时针方向,相应的参数 t 怎样变化?

若 t 从0变到 2π ，则 L 的方向怎样?

思考题解答

当L取顺时针方向时，t从2π变到 0.

当t从 0 变到2π时，L取逆时针方向.

曲线方向由参数的变化方向而定.