# 第三章 中值定理及导数的应用

## 一、基本要求

1．理解罗尔定理、拉格朗日中值定理，会用它们证明一些等式或不等式.

2．了解柯西中值定理及泰勒中值定理的条件和结论，掌握简单函数的泰勒公式及麦克劳林公式.

3．熟练掌握洛必达法则，并利用它求未定式的极限.

4．理解函数单调性与导数正负号的关系，会判断函数的单调性.

5．理解极值的概念、极值存在的必要条件和充分条件，掌握极值的求法.

6．掌握最大(小)值的求法，会解简单最大（小）值的应用问题.

7．了解函数图形的凹凸性与拐点的概念，并会判断曲线的凹凸性与拐点.

8．了解微分作图法.

9．了解弧微分和曲率的概念，并会求曲率和曲率半径.

## 二、要点提示

（一） 中值定理

1． 罗尔定理

设函数 $f(x)$：(1)在 $[a,b]$ 上连续;（2）在 $(a,b)$ 内可导;（3） $f(a)=f(b)$.

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi)=0$.

2． 拉格朗日定理

设函数 $f(x)$：(1)在 $[a,b]$ 上连续;（2）在 $(a,b)$ 内可导,

则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$ ,使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

注意：①中值定理的条件是充分的，不是必要的，即当满足定理条件时结论一定成立，若不满足定理条件时结论可能成立，也可能不成立.

②无论 $a<b$, 还是 $a>b$，等式总成立.

③拉格朗日公式的几种形式：

（1） $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，($\xi$ 在 $a,b$ 之间);

（2） $f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)$，($x$ 在 $a,b$ 之间);

（3） $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$，($\xi$ 在 $x$ 与 $x+\Delta x$ 之间);

（4） $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,(0<\theta<1)$.

3． 柯西定理

设函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上都连续，在 $(a,b)$ 内都可导，且 $F'(x)\neq 0,(a<x<b)$，则在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

4．泰勒定理

设函数 $f(x)$ 在含有 $x_0$ 的某个开区间 $(a,b)$ 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，则对于 $(a,b)$ 内一点 $x$,有泰勒公式（*）

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(0<\theta<1)$.

在泰勒公式（*）中，若 $x_0=0$，则称为麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x).$$

泰勒公式中的余项主要有三种形式

① $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，称为皮亚诺型余项；

② $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},(0<\theta<1)$ 称为拉格朗日型余项，较常用；

③ $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},(0<\theta<1)$，称为柯西型余项.

不是任何函数都能在它的定义域内任一点展开为它的 $n$ 阶泰勒公式，例如，$f(x)=x^{\frac{5}{2}}$ 在 $x_0=1$ 处只存在一阶和二阶导数. 因此 $f(x)=x^{\frac{5}{2}}$ 只能在 $x_0=0$ 处展开为 0 阶、一阶至多二阶泰勒公式；又例如 $f(x)=\ln x$ 在 $x=0$ 处无定义，所以在 $x=0$ 处不能展开为泰勒公式.

5. 三个中值定理及泰勒定理之间的关系

罗尔定理 $f'(\xi)=0$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ 拉格朗日定理 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ $\xrightarrow{\text{推广}}$ 柯西定理 $\dfrac{(b)-f(a)}{(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

柯西定理 $\xrightarrow{\text{特殊情形 } F(x)=x}$ 拉格朗日定理 $\xrightarrow{\text{特殊情形 } f(a)=f(b)}$ 罗尔定理

拉格朗日定理 $\xrightarrow{\text{推 广}}$ 泰勒定理；泰勒定理 $\xrightarrow{\text{特殊情况 } n=0}$ 拉格朗日定理

泰勒定理

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\qquad(*)$$

（二）洛必达法则

若在自变量$x$的某一变化过程中，

（1）$\lim f\left(x\right)=\lim g\left(x\right)=0$或$\lim f\left(x\right)=\infty,\lim g\left(x\right)=\infty$，

即$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式；

（2）$f(x)$，$g(x)$可导，且$g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或$\infty$,

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

运用洛必达法则求未定式极限是非常有效的方法，但是必须注意下面两点：

(1) 先检查法则的条件是否具备，特别要注意极限是否未定式、$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$是否存在或$\infty$.

(2) 配合使用其它求极限的方法，例如，化简、分子(分母)有理化、先求出非零因式的极限，以及利用等价无穷小替代等，可以使运算简便.

对于$0\cdot\infty,\infty-\infty$及$0^0$，$\infty^0$，$1^\infty$型未定式，可通过变形转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，再运用洛必达法则.

（三）导数的应用

1．判定函数单调性的方法

若$f'(x)>0$，$x\in\left(a,b\right)$，则$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；

若$f'(x)<0$，$x\in(a,b)$，则$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

**注** 若在区间$(a,b)$内除个别点$f'\left(x\right)=0$外，均有$f'\left(x\right)>0$（或$f'\left(x\right)<0$），则上述结论仍然成立.

2．判定曲线$y=f(x)$凹凸的方法

若$f''(x)>0$，$x\in(a,b)$，则$f\left(x\right)$在$[a,b]$上的图形是凹的；

若$f''(x)<0$，$x\in(a,b)$，则$f\left(x\right)$在$[a,b]$上的图形是凸的.

**注** 若在区间$(a,b)$内除个别点$f''\left(x\right)=0$外，均有$f''\left(x\right)>0$（或$f''\left(x\right)<0$），则上述结论仍然成立.

3． 极值

设$f\left(x\right)$连续，则$f\left(x\right)$的可能极值点为：驻点和不可导点.

判定极值的方法：

（1） 第一种充分条件：

设 $x_0$ 为可能极值点，考察 $x_0$ 两侧导数 $f'(x)$ 是否改变符号.若变号，则该点为极值点，否则不是极值点.

（2） 第二种充分条件：若 $f''(x_0)\neq 0$，$f'(x_0)=0$，则

当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极大值；

当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值.

当 $f''(x_0)=0$ 时，方法失效.

4.拐点

连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点( $x_0, f(x_0)$ ).

可能的拐点为：使 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$ 不存在时曲线上相应的点( $x_0, f(x_0)$ ).

判定( $x_0, f(x_0)$ )是拐点的方法：考察 $x_0$ 左右两侧二阶导数 $f''(x)$ 是否改变符号.

（四）最大值与最小值

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值为

$$M=\max\{f(a), f(b), (a,b)\text{内驻点的函数值}\},$$

$$m=\min\{f(a), f(b), (a,b)\text{内驻点的函数值}\},$$

若 $f(x)$ 在端点不连续，则可用端点的左右极限替换上式中的 $f(a), f(b)$ 进行比较.

（五）曲线的渐近线

1.水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，则直线 $y=a$ 是曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线（把 $x\to\infty$ 换成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 仍有同样的结论）；

2. 铅直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ （或 $+\infty, -\infty$ ），则直线 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线（把 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0+0$ 仍有同样的结论）；

*3. 斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$ 都存在，则直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线（把 $x\to\infty$ 换成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 仍有同样的结论）.

（六）函数作图

利用导数作函数 $f(x)$ 的图形的一般步骤：

（1）确定函数 $f(x)$ 的定义域、间断点，并考察 $f(x)$ 的奇偶性、周期性；

（2）求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$，并求出 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在 $f(x)$ 的定义域内（或图形所讨论范围内）的点，找出使 $f'(x)$、$f''(x)$ 不存在的点，这些点及函数的间断点把 $f(x)$

的定义域（或图形所讨论范围）分成几个小区间；

（3）确定这些小区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，从而确定函数图形的升降和凹凸，极值点和拐点，把上述结果列成表格；

（4）确定曲线的渐近线或其它变化趋势.

综合以上几个步骤，即可描点做出函数 $f(x)$ 的图形.为了把图形画得准确些，可再求一些辅助点，如曲线与坐标轴的交点等.

（七）弧微分，曲率

1．弧微分：

若曲线方程为 $y=f(x)$，则弧微分 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$，

若曲线的方程为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$， 则 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

2．曲率 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$，曲率半径 $R=\dfrac{1}{k}$.