1.4　空间直线及其方程

你要认识空间直线

你要学会建立空间直线的方程

1.4.1 空间直线的方程

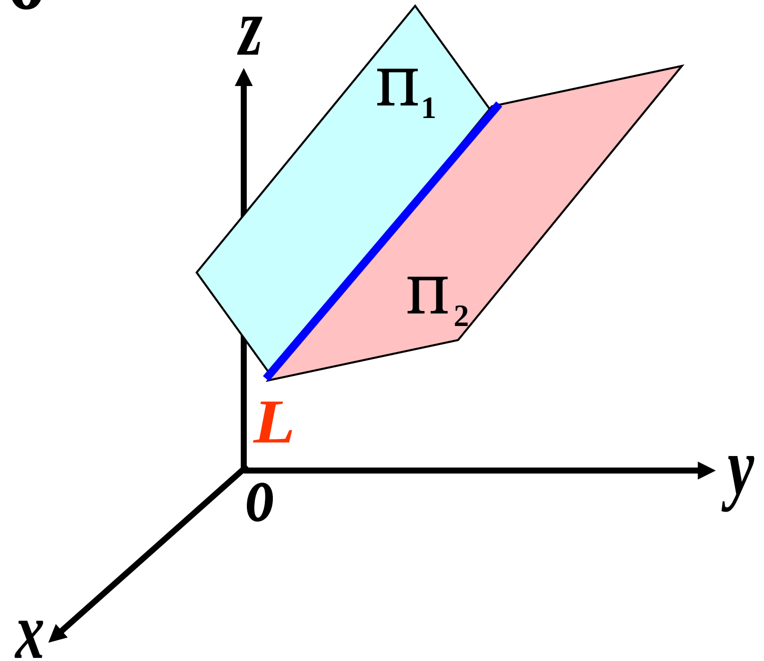
空间直线也是空间点的基本轨迹，我们借助平面图形和向量来建立它的方程.

1. 空间直线的一般方程

定义 空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

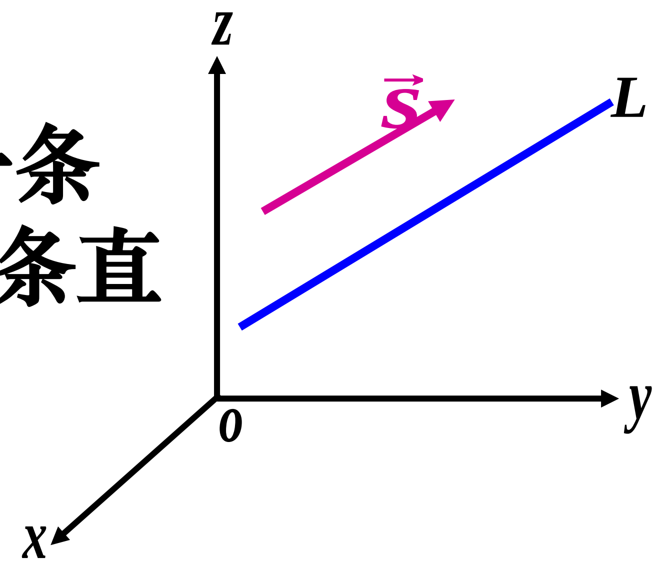


空间直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

2. 空间直线的对称式方程与参数方程

方向向量的定义：



如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的**方向向量**.

记为$\vec{s}=(m, n, p)$.

直线的任一方向向量的三个坐标m,n,p叫做该直线的一组**方向数**.

方向向量的余弦称为**直线的方向余弦**.

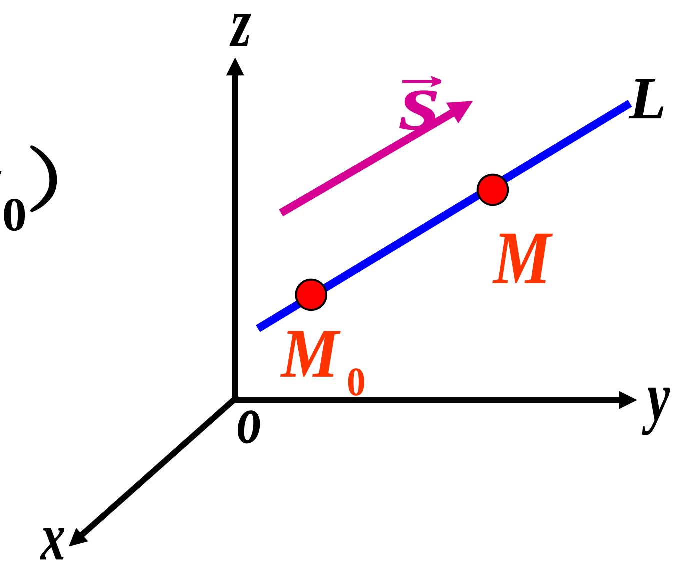
建立直线方程

设直线上点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{s}=(m,n,p)$．

$\forall M(x,y,z)\in L,$

有 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

且 $\overrightarrow{M_0M}\mathbin{/\!/}\vec{s}$



即 $$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

直线的对称式方程 或点向式方程

$M_0(x_0,y_0,z_0)$是直线上的点，$\vec{s}=(m,n,p)$是方向向量.

说明:

在直线方程中某些分母为零时，其分子也理解为零.

例如 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+5}{2}$ 表示 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$,

即平行于z轴的直线.

而 $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+5}{2}$ 表示 $\begin{cases} \dfrac{y}{3}=\dfrac{z+5}{2} \\ x=2 \end{cases}$

即平行于yOz面（在平面$x=2$上）的直线.

在点向式方程 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 中

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$ 则

直线的参数方程 $$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$ t为参数

例1 一直线过点 $A(2,-3,4)$,且与直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 平行，求其方程.

解 已知直线的方向向量为 $\vec{s}_1=(4,-1,3)$,

依题意,所求直线与已知直线平行,

故可取直线的方向向量 $\vec{s}=\vec{s}_1=(4,-1,-3)$,

因此所求直线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{3}.$$

例2　把直线的一般方程：

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

转化为用对称式方程及参数方程表示.

解　在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0=1$, 有 $\begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases}$,

解得　$y_0=0$,　$z_0=-2$

故该点的坐标为 $(1,0,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$,

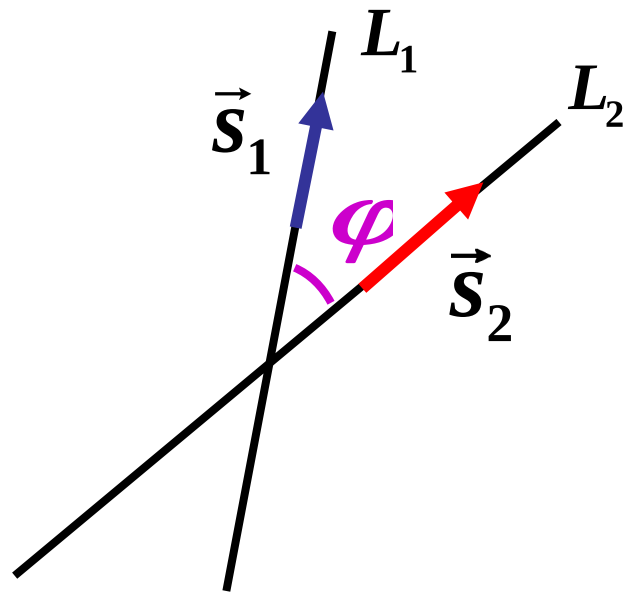
对称式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}$,

令 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}=t$,

得参数方程 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$.

1.4.2 两直线及直线与平面的夹角

1.定义 两直线的方向向量的夹角（锐角）称为**两直线的夹角**.



直线 L_1： $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$

直线 L_2： $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$

则两直线的**夹角公式**:

$$\cos(L_1,L_2)=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

$$=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2},$

例如，

直线 L_1： $\vec{s}_1 = (1, -4, 0),$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = (0, 0, 1),$

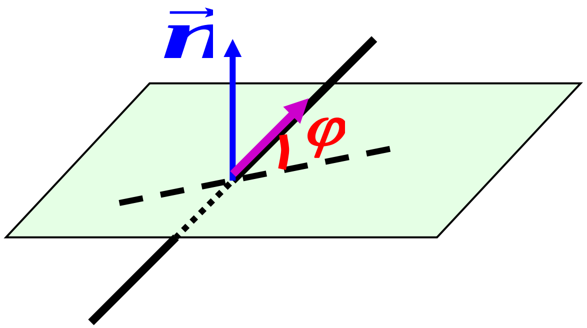
$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2,$ 即 $L_1 \perp L_2.$

2. 直线与平面的夹角

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角

$$\varphi\left(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

称为**直线与平面的夹角**.



$$L: \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{s}=(m,n,p),$$

$$\Pi: \quad Ax+By+Cz+D=0, \qquad \vec{n}=(A,B,C),$$

由图知 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-(\vec{s},\vec{n})\right|$

$$\varphi = \left|\frac{\pi}{2} - (\vec{s},\vec{n})\right| \Longrightarrow \sin\varphi = \left|\cos(\vec{s},\vec{n})\right|$$

直线与平面的夹角公式 $\vec{s}\cdot\vec{n} = |\vec{s}||\vec{n}|\cos(\vec{s},\vec{n})$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的位置关系

(1) $L \perp \Pi \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L // \Pi \iff Am + Bn + Cp = 0.$

例3 设直线 $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$

平面 Π: $x-y+4z=3$

求直线 L 与平面 Π 的夹角.

解 $\vec{s}=(1,2,-2)$, $\vec{n}=(1,-1,4)$,

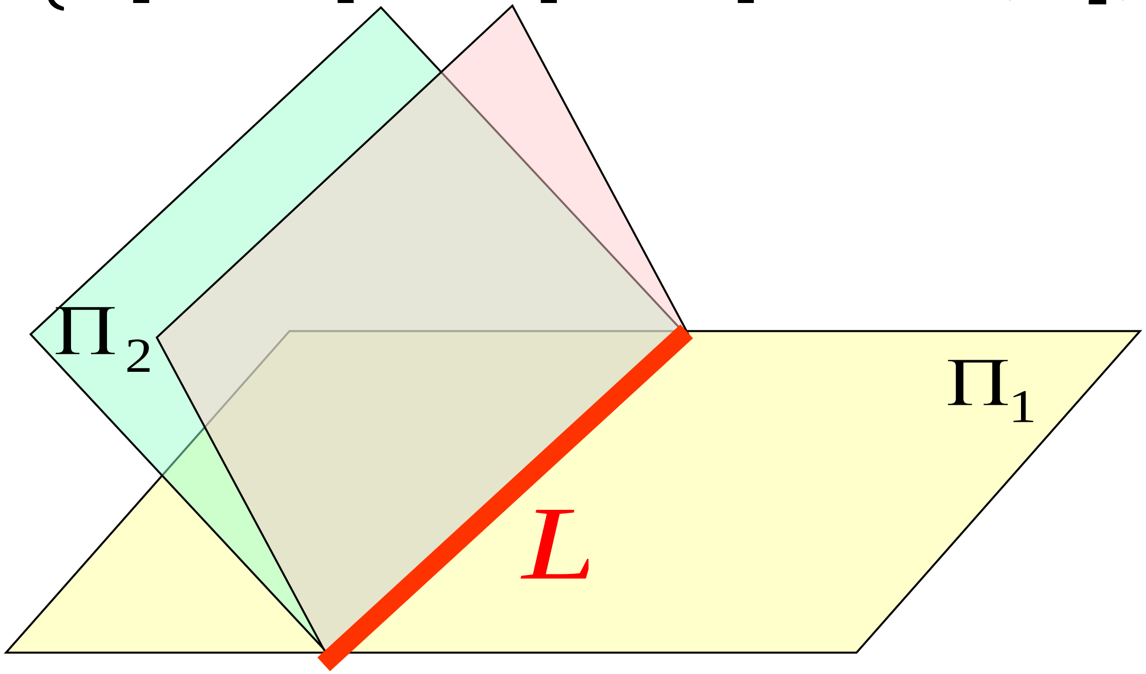
$$\because \sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times1+2\times(-1)+(-2)\times2|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\ \varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$ 为所求夹角.

利用平面束的方程解题

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (\Pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. & (\Pi_2) \end{cases}$$



通过定直线的所有平面的全体称为**平面束**.

设直线 L 由方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

所确定，　其中系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例.

$$\boxed{\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1z+D_1 \\ &\qquad +\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \end{aligned}}$$

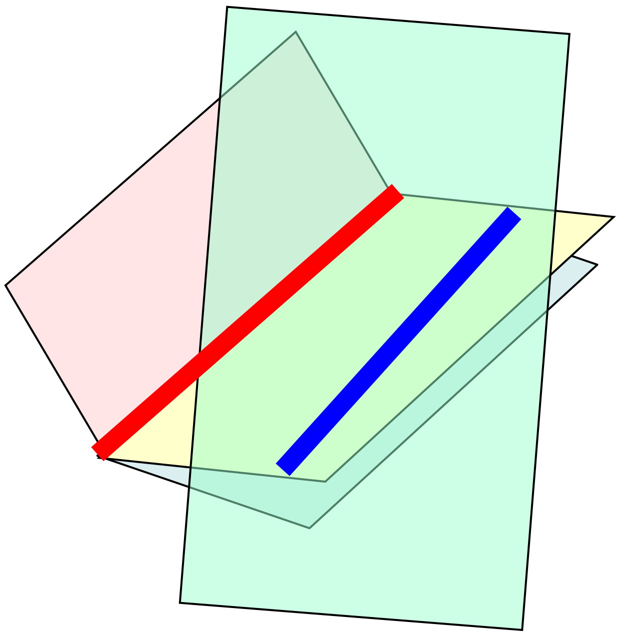
称为通过 L 平面束方程

例4 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$

在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

思路

平面束中总有一个平面与已知平面垂直，它与已知平面的交线就是**投影直线**.



解　通过 L 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0, \qquad (*)$$

即　$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z=0.$

这平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直条件是

$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$，　解出　$\lambda=-1,$

代入 $(*)$，得投影平面方程为

$2y-2z-2=0$　即　$y-z-1=0.$

所求投影直线的方程为 $\begin{cases} y-z-1=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

小结　直线方程三种不同形式:

空间直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

点向式方程

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

直线的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$