第六章 常微分方程

一、基本要求

1. 了解微分方程的基本概念：微分方程及其阶、解、通解、特解和初值条件等.

2. 能熟练识别变量可分离方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利方程等四种类型的微分方程，并掌握它们的解法.

3. 掌握下列三种特殊高阶微分方程: $y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$ 和 $y''=f(y,y')$ 的降阶法.

4. 理解二阶线性微分方程解的结构.

5. 熟练掌握二阶常系数齐次线性方程的解法，自由项为 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 和 $f(x)=e^{\lambda x}[A\cos\omega x+B\sin\omega x]$（$A,B$ 为常数）的二阶常系数非齐次线性微分方程的解法.

6.初步了解用微分方程解决实际问题的主要步骤：

①建立微分方程；确定定解条件（即初始条件）；

②求解方程；

③检验解是否满足实际问题.

二、要点提示

（一）一阶微分方程：要根据方程的特点先分清类型，再求解.

1．可分离变量方程：

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$.

解法 分离变量后，两边求不定积分即得通解:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx，\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx.$$

2．齐次微分方程：

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$.

解法 作变换，令 $u=\dfrac{y}{x}$（即 $y=xu$），则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

化为可分离变量的方程：

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u) \quad 即\, x\frac{du}{dx}=f\left(u\right)-u.$$

再用分离变量法求解，最后回代.

3．一阶线性微分方程

（1）齐次

形如：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$.

解法 用分离变量法，求得通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$（这里的不定积分代表一个原函数）

（2）非齐次

形如：$\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$.

解法 ①常数变易法，令代换 $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$，代入原方程得到关于 $C\left(x\right)$ 的可分离变量方程，求出 $C\left(x\right)$ 即得通解 y.

②公式法：$y = e^{-\int P(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C]$（这里的不定积分代表一个原函数）.

4．贝努利方程

形如：$\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0、1)$.

解法 令 $z = y^{1-n}$，将其化为一阶线性微分方程 $\dfrac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$.

（二）高阶微分方程

1.可降阶方程

① 形如：$y^{(n)} = f(x)$

解法 两端做 n 次积分即可得通解(注意:必须含 n 个相互独立的任意常数).

② 形如：$y'' = f(x, y')$（不显含未知函数 y）

解法 令 $y' = p$（即 $p(x)$），则 $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$，原方程化为一阶微分方程 $p' = f(x, y')$，求出其通解 $p = \varphi(x, C_1)$ 即 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$，再积分得原方程的通解.

③ 形如：$y'' = f(y, y')$（不显含自变量 x）

解法 令 $y' = p$（即 $p\left(y\right)$），则 $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为一阶微分方程 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, y')$ 求出其通解 $p = \varphi(y, C_1)$ 即 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$，再分离变量积分得原方程的通解.

2．二阶常系数线性微分方程.

(1) 二阶常系数齐次线性方程（特征根法）

形如：$y'' + py' + qy = 0$.

解法 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$,求出特征值 $r_{1、2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

① 若 $r_1 \neq r_2$ 实根，则通解：$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$

② 若 $r_1 = r_2 = r$ 实根，则通解：$y = (c_1 + c_2x)e^{rx}$

③ 若 $r_{1、2} = \alpha \pm i\beta$ 共轭复根，

则通解：$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

(2) 二阶常系数非齐次线性微分方程

形如：$y'' + py' + q(x)y = f(x)$

解法 先求相应齐次方程的通解 y，再求原方程的一个特解 y^*，则通解为 $Y=y+y^*$.

可用待定系数法求特解 y^*

①若 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$，（$P_m\left(x\right)$ 为 m 次多项式），则设

$$y^*=x^k e^{\lambda x}Q_m(x).$$

其中 $k=\begin{cases}0，\lambda\text{不是特征根}\\1，\lambda\text{是特征单根}\\2，\lambda\text{是特征重根}\end{cases}$，　$Q_m(x)$ 也是 m 次的多项式.

② 若 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$（$P_l(x),P_n(x)$ 分别是 l，n 次多项式），则设

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $k=\begin{cases}0，\lambda\pm i\omega\text{不是特征根}\\1，\lambda\pm i\omega\text{是特征根}\end{cases}$，$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$ 均是 m 次多项式.