# 3.3 三重积分的计算

你要认识：

三元函数在空间有界闭区域 $\Omega$ 上的积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

要掌握三重积分的计算法：

化为一个单积分和一个二重积分来计算

## 3.3.1 投影法（先一后二）

## 3.3.2 截面法（先二后一）

$$\int_G f(P)\,dg = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$ 三重积分

其中Ω是空间有界闭区域.

计算方法是将三重积分化为

一个单积分和一个二重积分构成的累次积分

继续将二重积分化为二次积分，

最终将三重积分化为三次积分

先一后二或　先二后一

# 3.3.1 投影法（先一后二）

## 体积元素

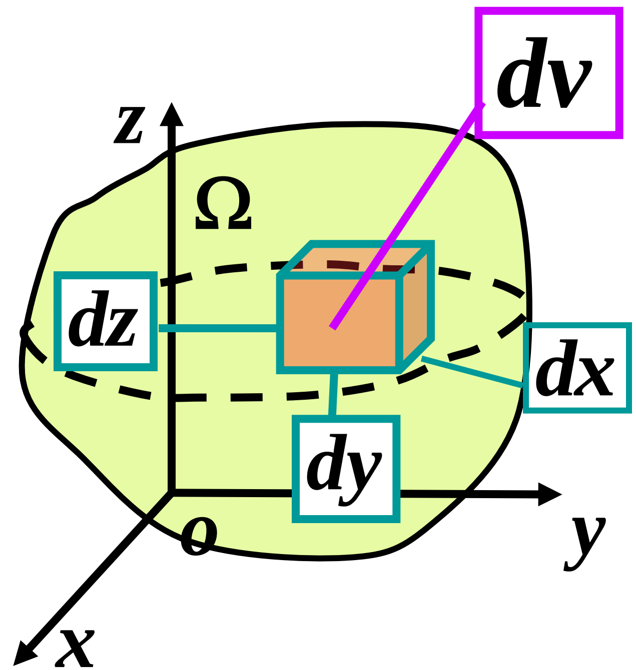
用平行于坐标面的平面族:

$x=$常数，$y=$常数，$z=$常数

去分割积分区域 $\Omega$,

除边界外每个小块都是

一个长方体，于是得到




**体积元素** $dv = d$?$xdydz$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

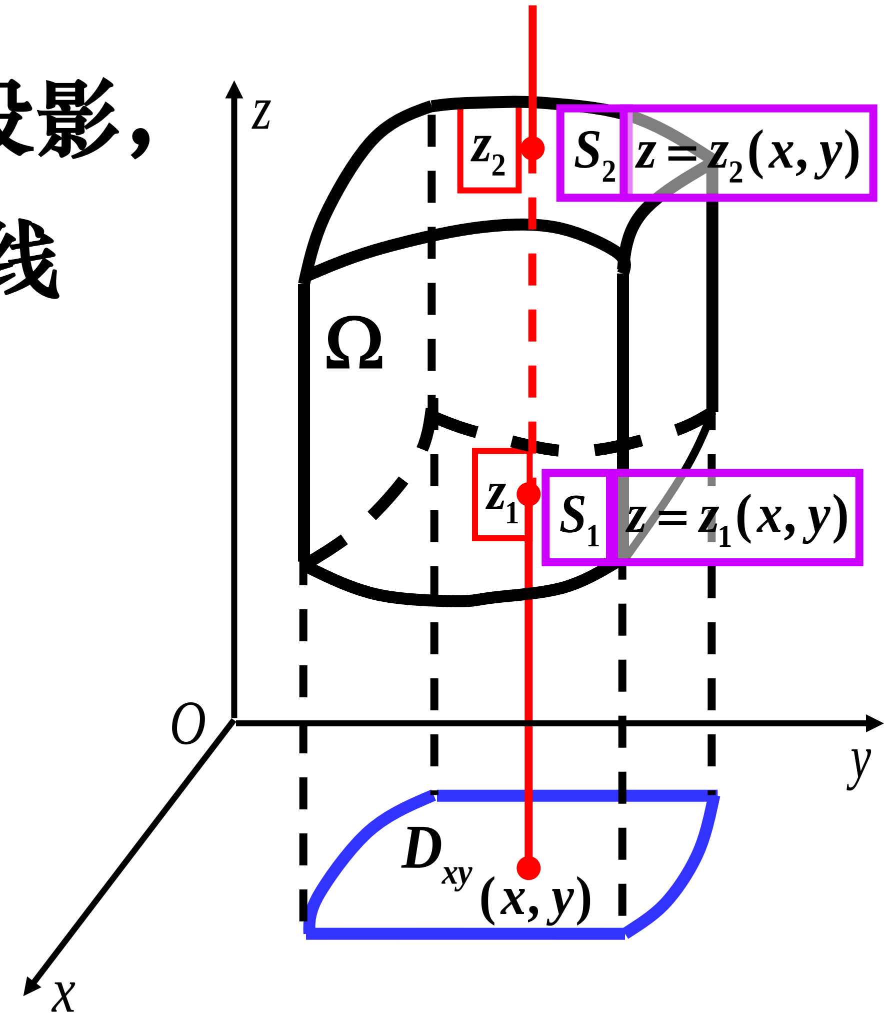
# 投影法

设 $\Omega$ 如图,将 $\Omega$ 向 $xoy$ 面投影,得 $D_{xy}$,以 $D_{xy}$ 的边界为准线母线平行于 $z$ 轴的柱面把 $\Omega$ 分为下上两个边界:

$$z=z_1(x,y), z=z_2(x,y)$$

$\forall\left(x,y\right)\in D_{xy}$, $z$ 从 $z_1(x,y)$ 变到 $z_2\left(x,y\right)$, 于是

$$\Omega: z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),(x,y)\in D_{xy}$$



积分区域可表示为

$$\Omega: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}$$

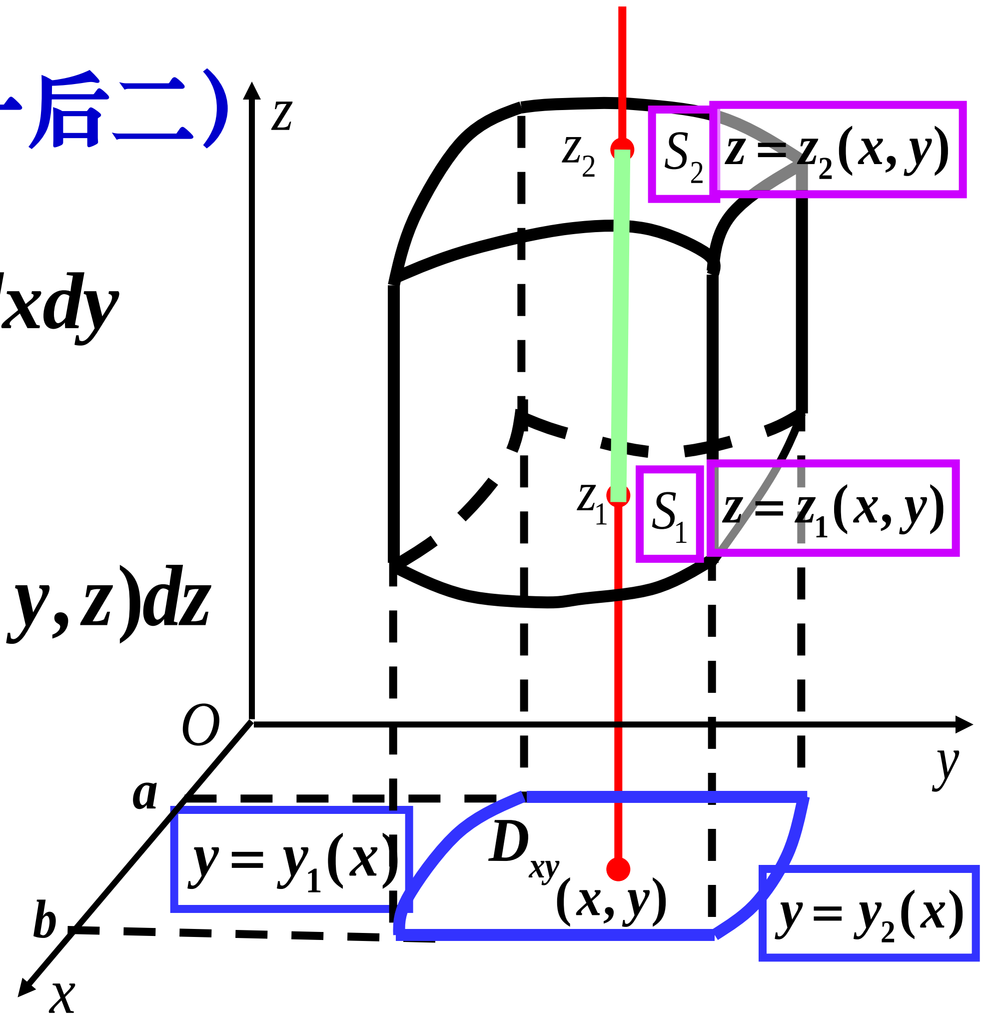
则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ (先一后二)

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

$D_{xy}$ : $y_1(x) \le y \le y_2(x)$,

$a \le x \le b$.



$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

(先一后二)

若根据 $D_{xy}$ 是$X$型域或$Y$型域，确定二重积分的积分限,就得到化为三次积分的公式.

若 $D_{xy}$ 为$X$型域，则有

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz}$$

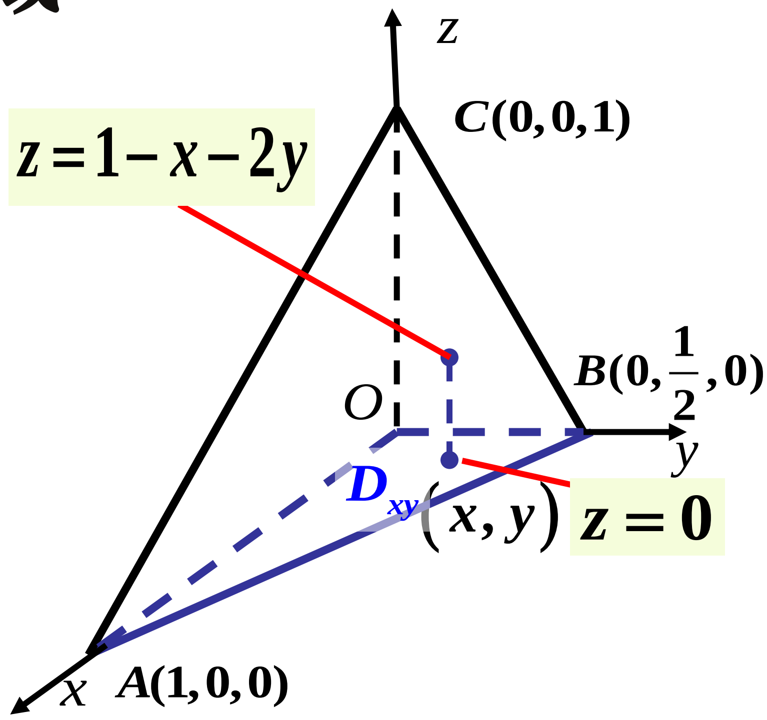
这是先对$z$，次对$y$，最后对$x$的三次积分

也可以用其他顺序做三次积分.

**例1** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x dv$，其中 $\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的区域.

**解** $\Omega$ 在 $xoy$ 面上的投影为 $D_{xy}$

$$\Omega:\ 0 \le z \le 1-x-2y,\ (x,y)\in D_{xy}$$




$$\iiint\limits_{\Omega} x dv = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\int_0^{1-x-2y} x dz\right] dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} x[z]_0^{1-x-2y} dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} x(1-x-2y) dxdy$$

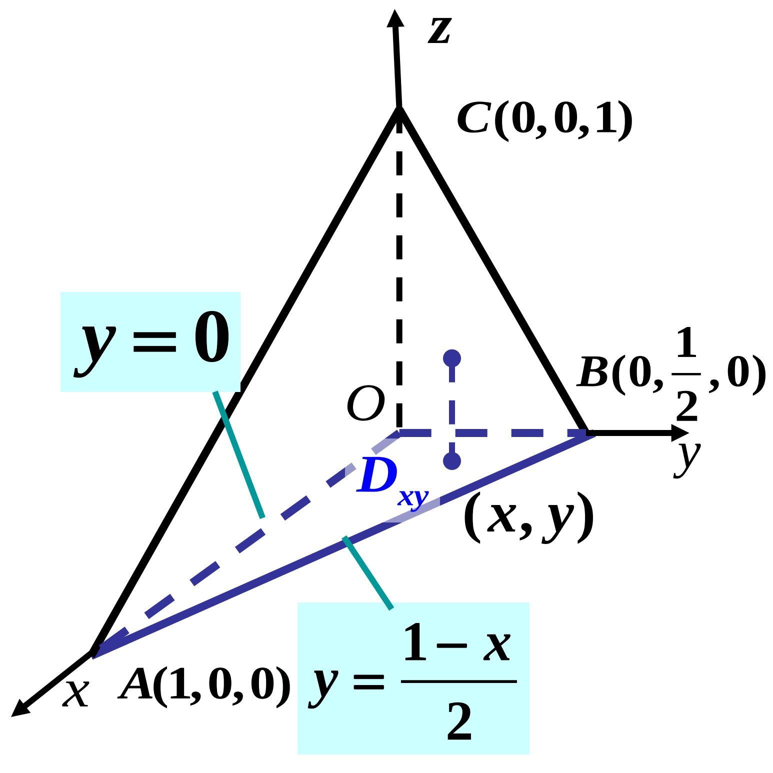
若$D_{xy}$看成X型域，则 $D_{xy}: 0 \le y \le \dfrac{1-x}{2}, 0 \le x \le 1$

$$\iiint_{\Omega} x dv = \iint_{D_{xy}} [\int_0^{1-x-2y} x dz] dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} x dz$$

$$= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx$$

$$= \frac{1}{48}$$



**例2** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z dv$,

其中 $\Omega$ 是由上半球面 $x^2+y^2+z^2=4 \quad (z \geq 0)$

和旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的区域.

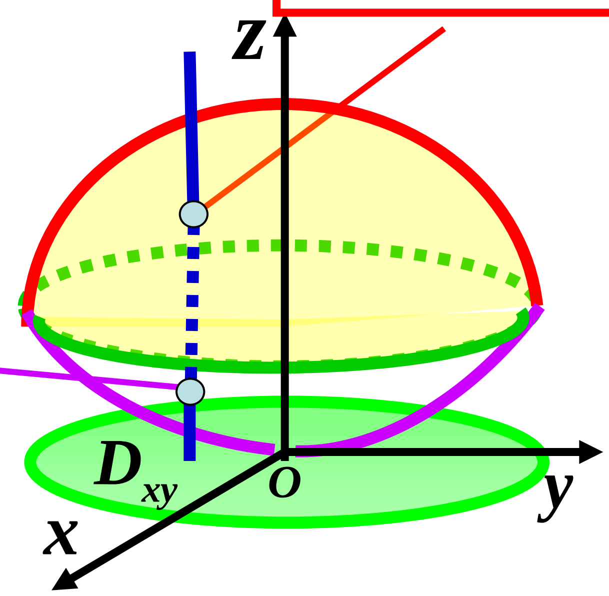
**解** 将积分区域 $\Omega$ 向 $xoy$ 面投影，得

$$D_{xy}: x^2+y^2 \leq 3$$

$$\Omega: \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, \\ D_{xy}: x^2+y^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$z=\frac{x^2+y^2}{3}$$



$$\Omega:\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{3}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\\ D_{xy}: x^2+y^2\le 3\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdv=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\left[4-x^2-y^2-\frac{1}{9}(x^2+y^2)^2\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\rho\theta}}\left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9}\right)\rho d\rho d\theta$$

$$(D_{\rho\theta}: 0\le\rho\le\sqrt{3}, 0\le\theta\le 2\pi)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9}\right)\rho d\rho=\frac{13}{4}\pi$$

**例3** 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$

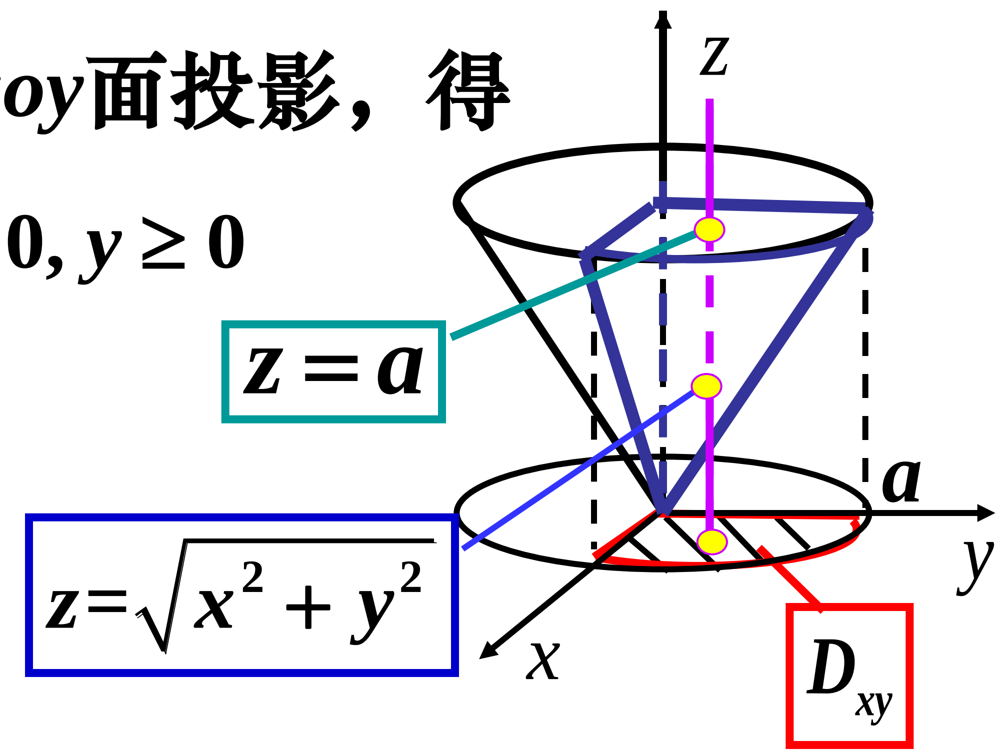
其中 $\Omega$由锥面$x^2 + y^2 = z^2, x = 0, y = 0$和

$z = a\left(a > 0\right)$所围成第一卦限部分.

**解** 将积分区域 $\Omega$ 向$xoy$面投影，得

$$D_{xy}: x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0$$

$$\Omega: \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le a, \\ D_{xy}: x^2 + y^2 \le 3 \end{cases}$$



$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv \qquad \Omega:\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le a,\\ D_{xy}:x^2+y^2\le a^2\end{cases}$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a}(x^2+y^2)dz\right]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)(a-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\iint_{D_{\rho\theta}}\rho^2(a-\rho)\rho d\rho d\theta \quad (D_{\rho\theta}:0\le\rho\le a,0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\rho^2(a-\rho)\rho d\rho$$

$$=\frac{\pi}{40}a^5.$$

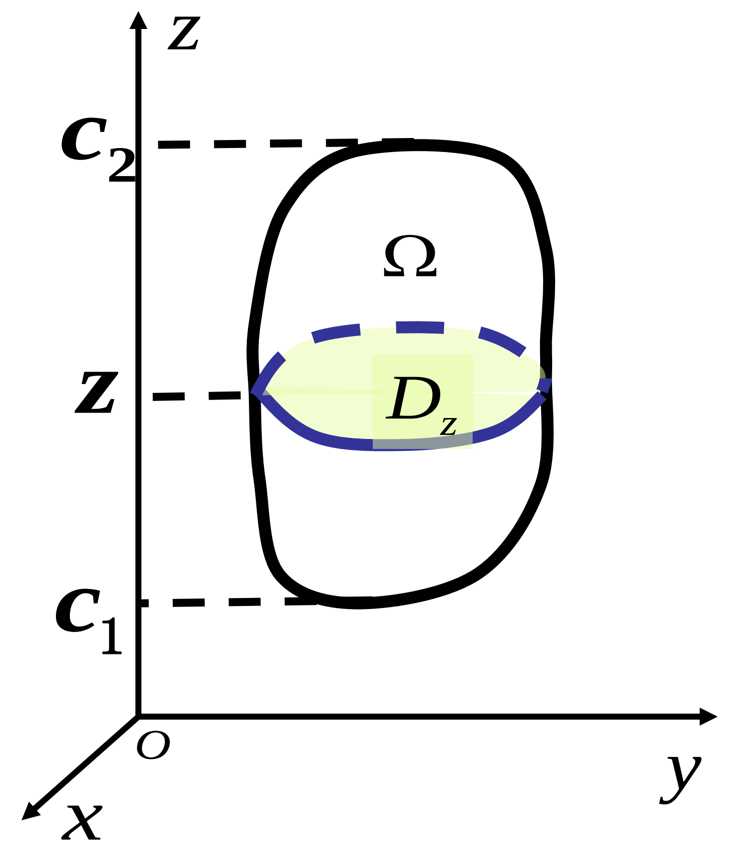
前面介绍的三重积分的计算法是将三重积分化为由一个单积分和一个二重积分构成的累次积分，单积分就是定积分，而二重积分根据具体情况，或利用直角坐标计算，或利用极坐标来计算，实际上后者就是在柱面坐标下计算三重积分的方法.

关于柱面坐标下计算三重积分的方法在这里不做介绍了，请参看教科书.

## 3.3.2 截面法（先二后一）

计算三重积分时，先求一个二重积分，再求一个定积分的方法

设区域$\Omega$的$z$值的最大值和最小值为$c_1$和$c_2$，过$(c_1,c_2)$内任一点$z$，作平行于$xoy$的平面与$\Omega$交出截面$D_z$，就是二重积分的积分区域.




先在$D_z$上对$x,y$积分，然后在$[c_1,c_2]$上对$z$积分.

$$\Omega:(x,y)\in D_z, c_1\le z\le c_2$$

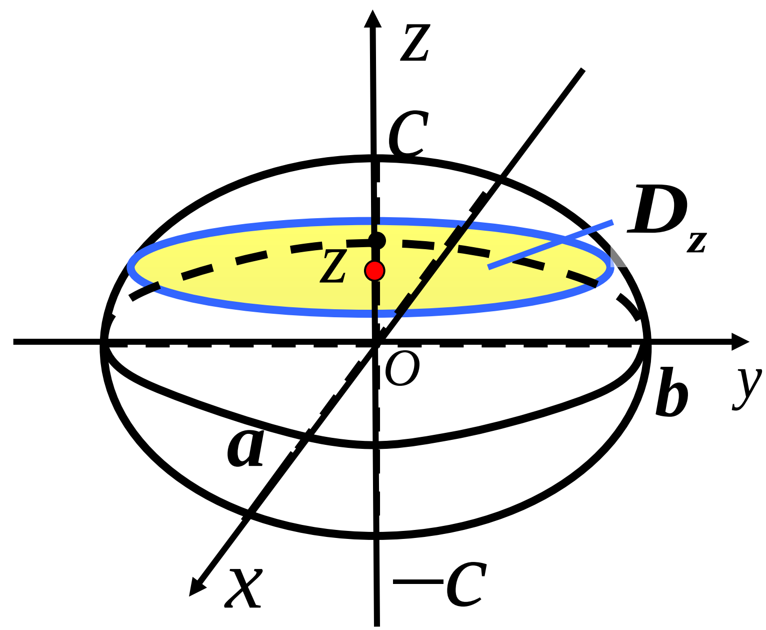
$$\Omega:(x,y)\in D_z, c_1\le z\le c_2$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_{c_1}^{c_2}[\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy]dz$$

$\boxed{\text{先二后一}}$

先求出 $D_z$ 上的二重积分再求定积分.

**例4** 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$，其中$\Omega$是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.




**解** 用先二后一法：

$z$的最小值和最大值为

$-c$ 和 $c$，即 $-c \le z \le c$

$$\Omega\begin{cases} D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}, \\ -c\le z\le c \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_{-c}^{c} dz \iint_{D_z} z^2 dxdy = \int_{-c}^{c} z^2 dz \underline{\iint_{D_z} dxdy}$$

$\because \iint_{D_z} dxdy = D_z$ 的面积为

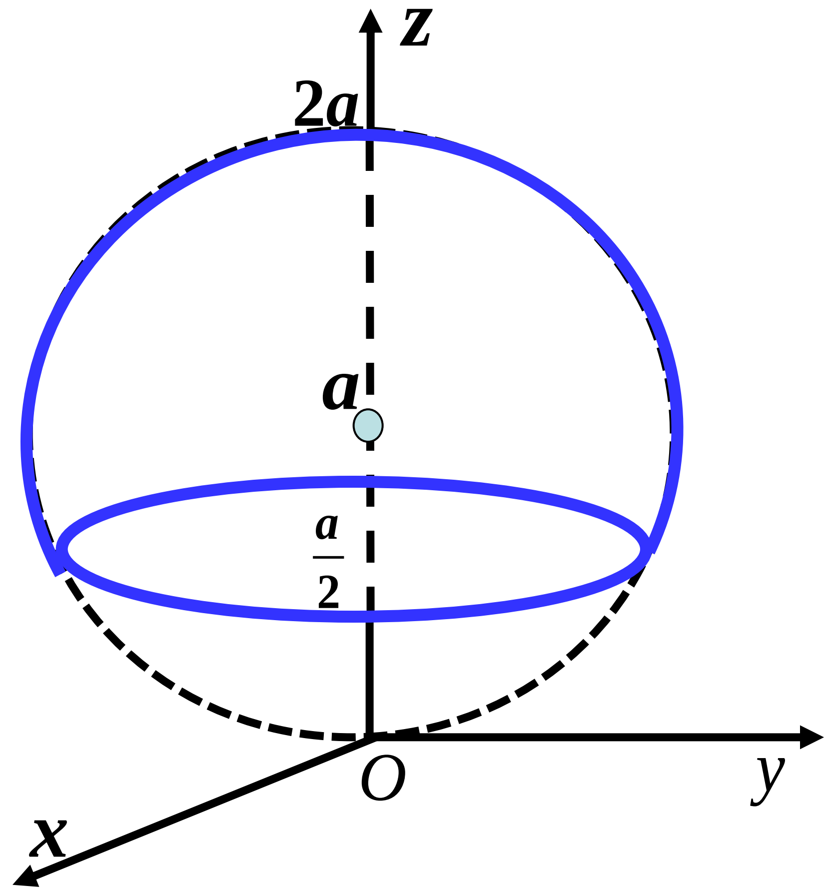
$$\boxed{D_z : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2},}$$

$$\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\, b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}} = \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} z^2 dxdydz = \int_{-c}^{c} z^2 \cdot \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz$$

$$= \pi ab \int_{-c}^{c} (z^2 - \frac{z^4}{c^2})dz = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

**例5** 求半径为$a$的球面与平面 $z=\dfrac{a}{2}$ 所围成的较大立体的体积(如图).




**解** 球面的方程

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

即 $x^2+y^2+z^2-2az=0$

$$V=\iiint_{\Omega}dv \quad \Omega: x^2+y^2+z^2-2az\le 0, \frac{a}{2}\le z\le 2a$$

# 采用先二后一法计算

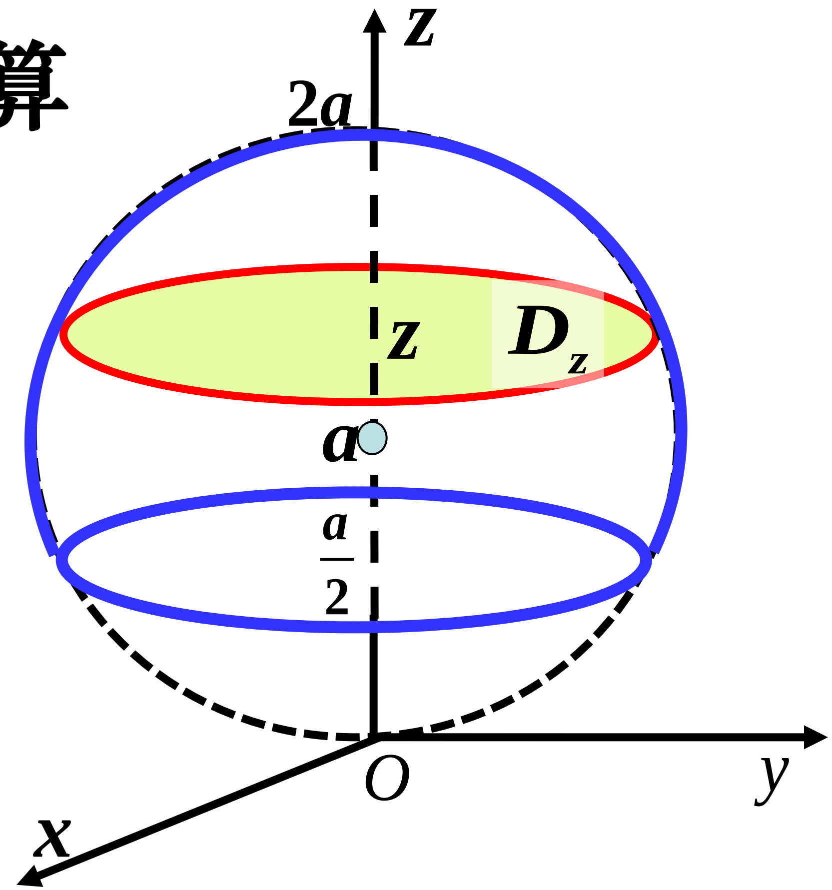
$$\frac{a}{2} \le z \le 2a$$

$$D_z : \underline{x^2 + y^2 \le 2az - z^2},$$

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dz \underline{\iint_{D_z} dxdy}$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \pi(2az - z^2)dz$$

$$= \frac{25}{24}\pi a^3$$



三重积分可以在球面坐标下计算，不过“先二后一法”基本上就可以处理了，在此我们不做详细讨论，有兴趣的同学可以参考教科书.

# 小　结

三重积分的计算方法是将三重积分化为：

一个单积分和一个二重积分构成的累次积分

投影法（先一后二）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} [\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dxdy$$

可替代“柱面坐标下的计算方法”

截面法（先二后一）

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2} [\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy]dz$$

可替代“球面坐标下的计算方法 ”