1.3　平面及其方程

告诉你
怎么建立平面的方程

1.3.1 平面的方程

有了空间直角坐标系，可以建立数与形之间的对应关系,研究空间点的几何轨迹.

我们知道平面上的几何轨迹有曲线，那空间中的有哪些呢？我们说有曲线还有曲面.

下面以向量为工具，建立空间中最简单的图形----平面的方程.

1.平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的**法线向量**. 常记为 $\vec{n}$.

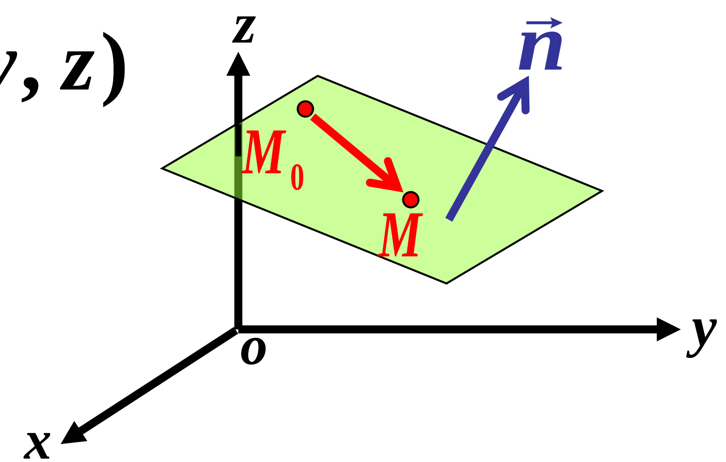
法线向量的**特征**: 垂直于平面内的任一向量.

已知平面的$\vec{n}=(A, B, C)$, 点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$



$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$$

$$\because\quad \overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

$$\therefore\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$, 已知点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

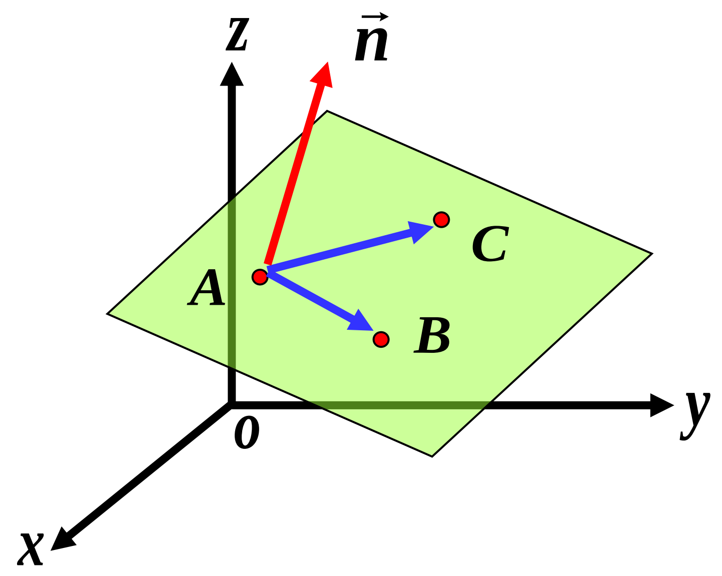
平面上的点都满足方程,不在平面上的点都不满足方程.该方程称为平面的方程，平面称为方程的图形.

例1 求过三点 $A(2,-1,4), B(-1,3,-2), C(0,2,3)$ 的平面方程.

解 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$=(14,9,-1)$,



所求平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-\underbrace{\boxed{(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \text{（三元一次方程）}$$

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

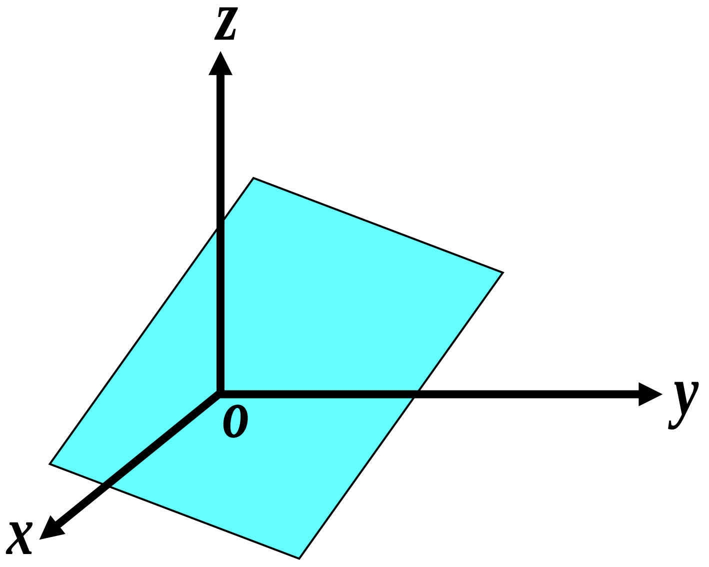
平面一般方程的几种特殊情况：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(1) $D = 0$,

$$Ax + By + Cz = 0$$

平面通过坐标原点；



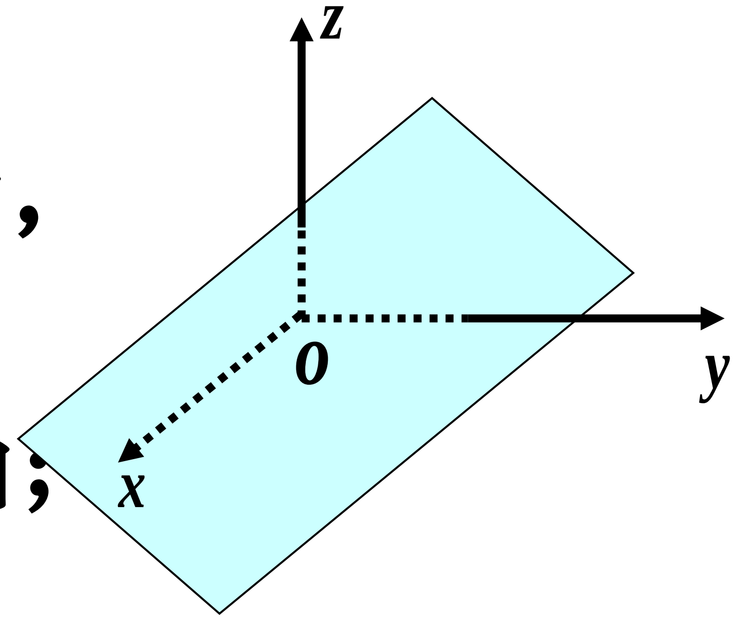
$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

(2) $A = 0$,

$$By + Cz + D = 0$$

$\vec{n} = (0, B, C)$ 垂直于Ox轴，

$\begin{cases} D = 0, & \text{平面通过}x\text{轴；} \\ D \neq 0, & \text{平面平行于}x\text{轴；} \end{cases}$



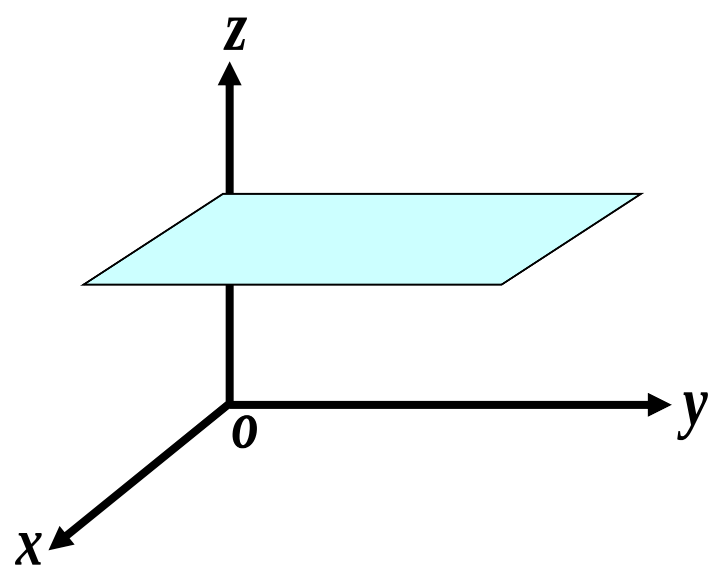
类似地可讨论

$B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$, 平面平行于y轴

$C = 0$, $Ax + By + D = 0$, 平面平行于z轴

(3) $A = B = 0$,

即$z = -\dfrac{D}{C}$ （常数）



平面平行于xOy坐标面；

类似地可讨论：

$A = C = 0$, 即$y = -\dfrac{D}{B}$,

平面平行于zOx坐标面；

$B = C = 0$, 即$x = -\dfrac{D}{A}$

平面平行于yOz坐标面；

例2 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

由平面过原点知 $D=0,$

因平面过点$(6,-3,2)$，故有

$$6A-3B+2C=0$$

$$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\},\quad \therefore 4A-B+2C=0$$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

例3 设平面与x,y,z三轴分别交于$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中$a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$），求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad A=-\frac{D}{a}, \qquad B=-\frac{D}{b}, \qquad C=-\frac{D}{c}.$$

将 $A=-\frac{D}{a}$， $B=-\frac{D}{b}$， $C=-\frac{D}{c}$ 代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

平面的截距式方程

$\boxed{x\text{轴上截距}}$ $\boxed{y\text{轴上截距}}$ $\boxed{z\text{轴上截距}}$

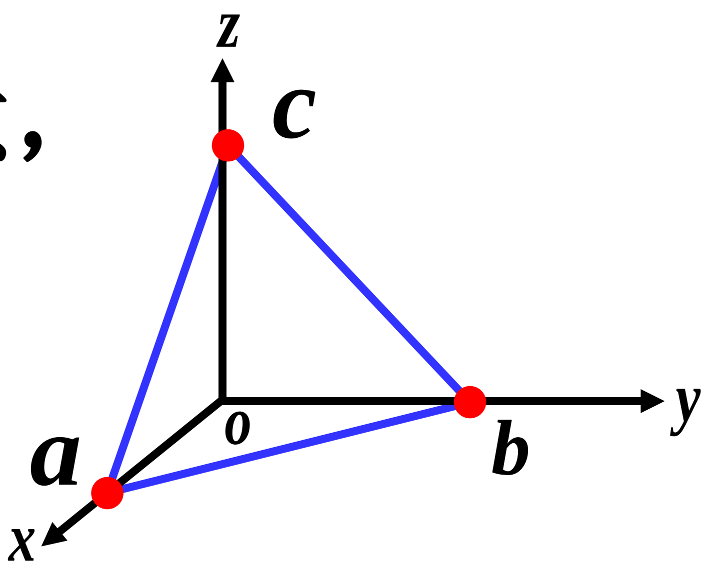
3. 平面的截距式方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

作图方法：

先在坐标轴上标出截距点，

再用直线连接.



平面的方程有三种形式

点法式方程.

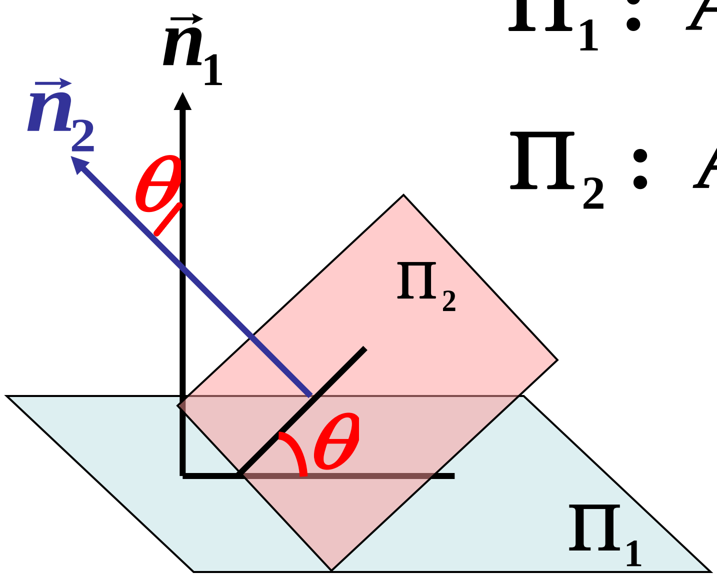
一般方程.

截距式方程.

可以根据不同的需要有所选择

1.3.2 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为**两平面的夹角**. （通常取锐角）



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

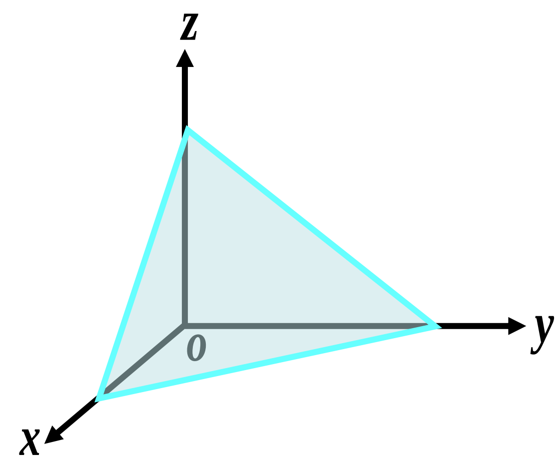
两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

例4 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.



解 设平面为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,$

$$\because V = 1, \quad \therefore \ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |a||b||c| = 1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6} = \frac{1/b}{1} = \frac{1/c}{6}, \qquad \text{（向量平行的充要条件）}$$

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$, 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow |a|=\frac{1}{6|t|},\ |b|=\frac{1}{|t|},\ |c|=\frac{1}{6|t|},$$

代入体积式

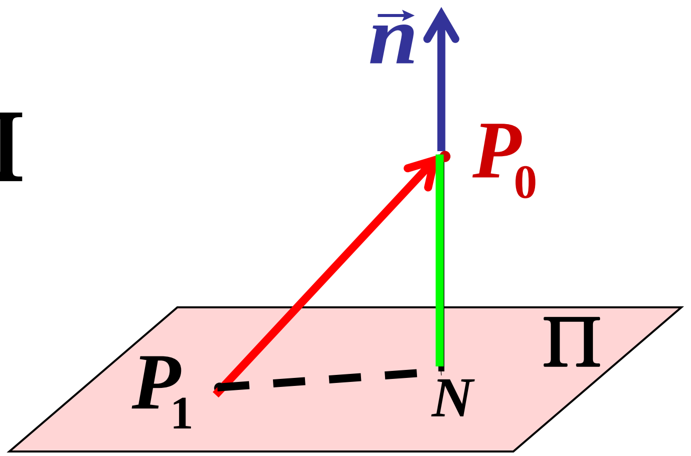
$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6|t|}\cdot\frac{1}{|t|}\cdot\frac{1}{6|t|} \Rightarrow t=\frac{1}{6}, t=-\frac{1}{6}$$

$$\therefore a=\pm 1,\quad b=\pm 6,\quad c=\pm 1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6.$

例5 设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = |\mathrm{Pr\,j}_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$\mathrm{Pr\,j}_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \mathrm{Pr\,j}_{\vec{b}} \vec{a}}$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1), \quad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$\overrightarrow{n^0} = \left\{ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right\}$$

$$\therefore \operatorname{Pr} j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{n^0}$$

$$= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\boxed{= D}$$

$$\therefore \mathrm{Pr}\,j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - \underline{(Ax_1 + By_1 + Cz_1)}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore \mathrm{Pr}\,j_n \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

点到平面距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

记住它