3.8 格林（Green）公式及其应用

告诉你：

二重积分与其区域边界上的曲线积分之间的联系

满足什么条件曲线积分与路径无关

怎样求出二元函数的原函数

3.8 格林（Green) 公式及其应用

3.8.1 格林公式

3.8.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

3.8.3 二元函数的全微分求积

3.8.1 格林公式

格林（Green.George）简介

磨坊工数学家

格林 （1793—1841）十八世纪英国数学家

8岁上学，9岁辍学。凭着对数学的爱好和惊人的毅力，在父亲的磨坊一边做工，一边自学. 40岁终于进入了剑桥大学，四年后获得学士学位.

格林短促的一生共发表了十篇论文，数量不多，却包含了影响19世纪数学物理发展的宝贵思想。

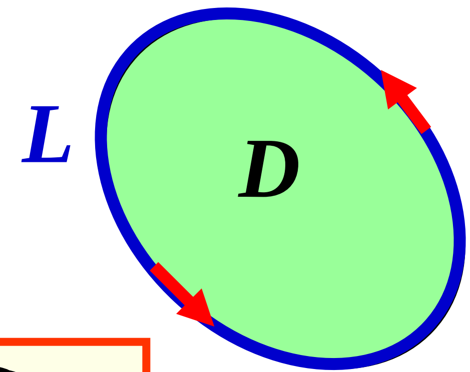
格林公式

二重积分与其区域边界上的曲线积分之间的联系

定理

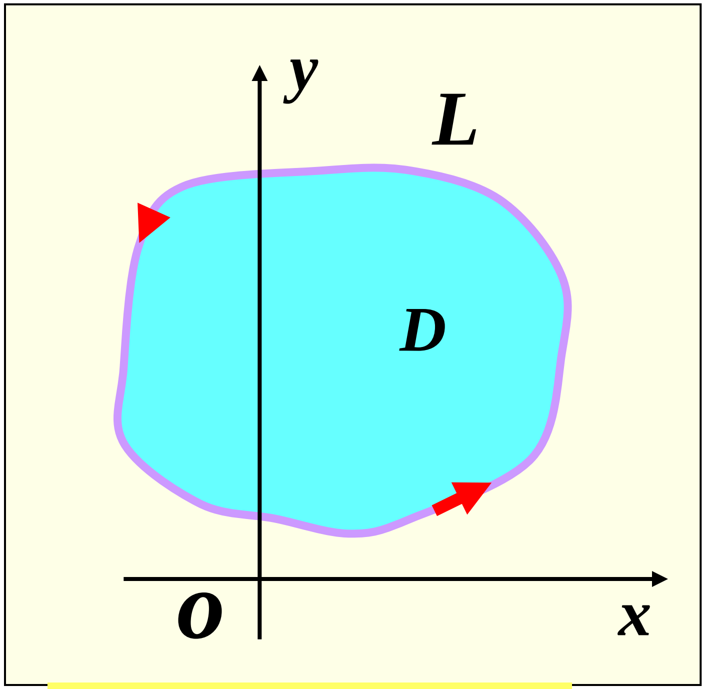
设有界闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

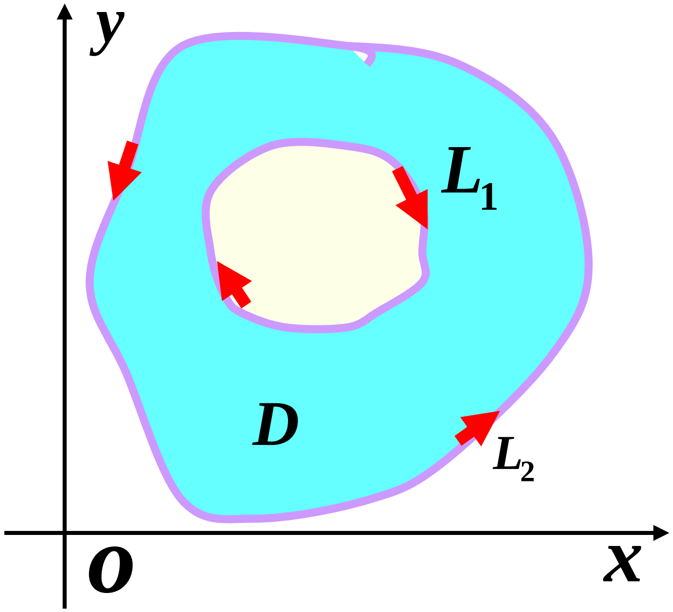


格林公式

其中L取正向. ?



L正向：逆时针



L由L_1与L_2组成

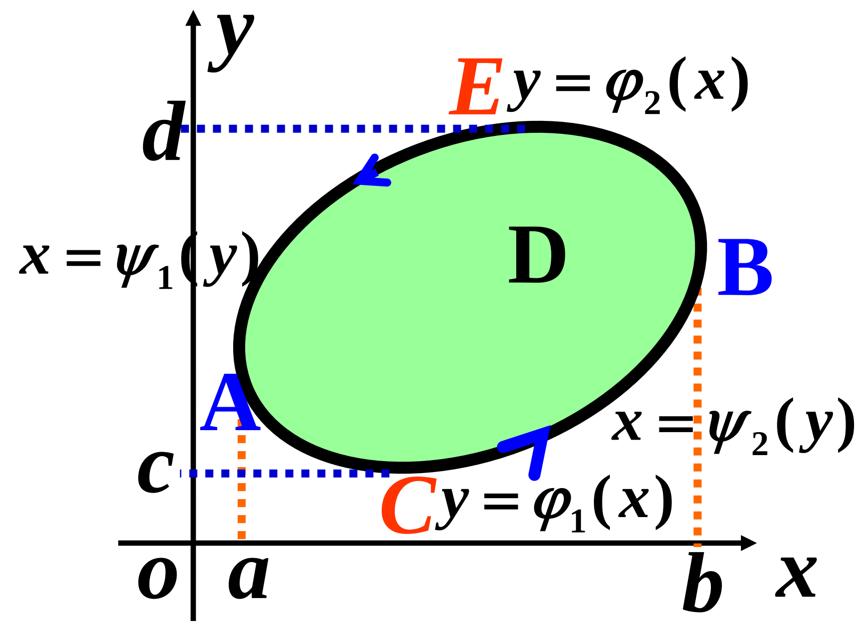
规定

边界曲线L的正向: 当观察者沿边界行走时, 区域D总在他的左边.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

证明: 仅证特殊情形,

一般情形见教科书



D既是X-型

又是Y-型的区域,

即既可以表示为

$$D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}$$

也可以表示为

$$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d\}$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx$$

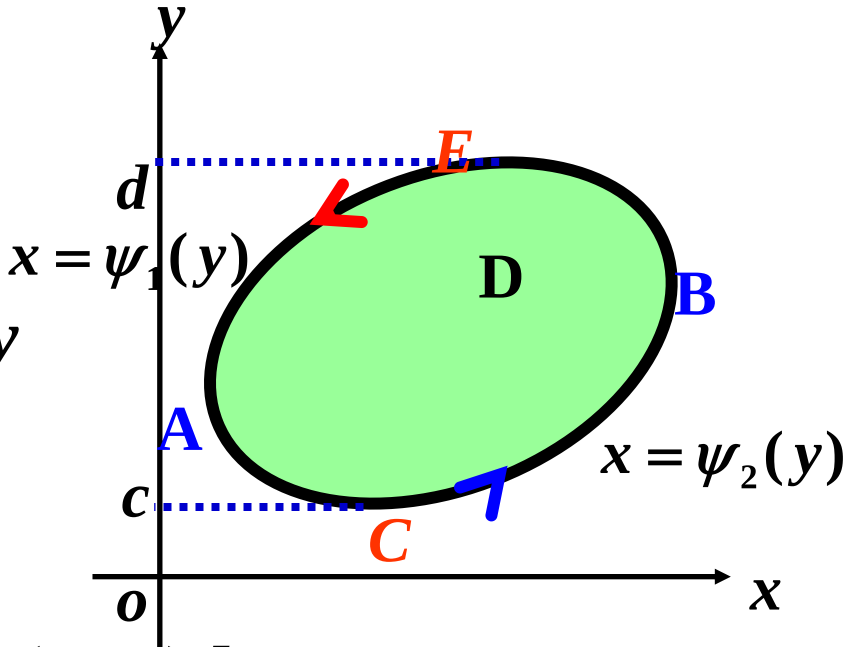
证 $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_L Q(x,y)dy$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y),y)dy$$

$$= \int_{CBE} Q(x,y)dy - \int_{CAE} Q(x,y)dy$$

$$= \int_{CBE} Q(x,y)dy + \int_{EAC} Q(x,y)dy$$

$$= \oint_L Q(x,y)dy$$



同理可证 $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \oint_L P(x,y)dx$

两式相加得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

注：
$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy}$$

1.若边界L是反方向，则

$$-\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

2.格林公式是牛顿—莱布尼兹公式的推广.

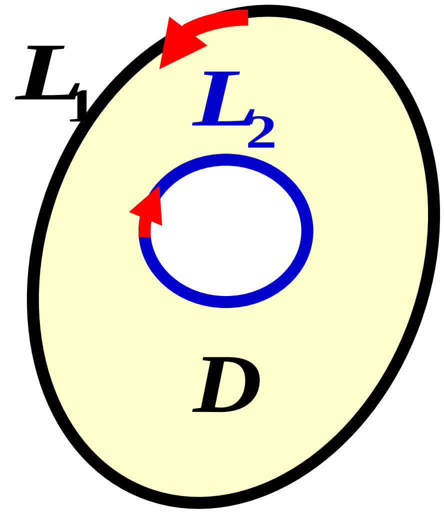
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

边界与内部

3.区域是复连通区域时，格林公式也成立，此时边界必须是区域的整个边界(正向).

$$\int_{L_1+L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$



由此，有

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy$$

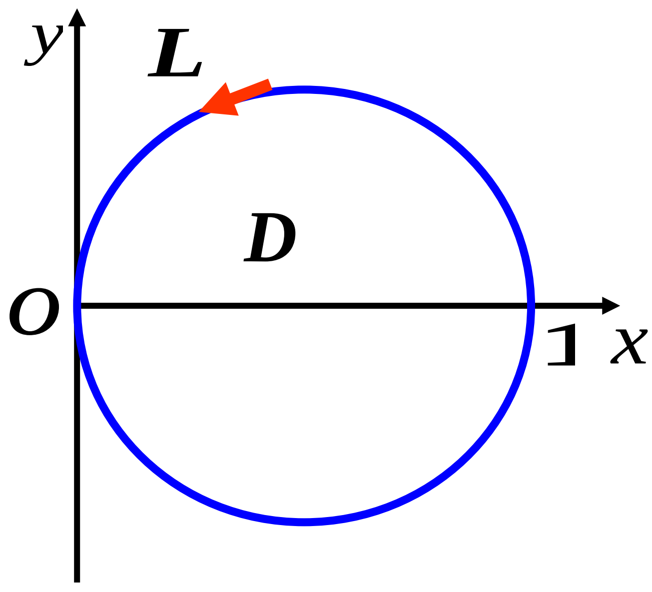
$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

例1 计算 $I=\int_L (e^x \sin y - x - y)dx + (e^x \cos y - 1)dy$

其中 (1) 圆周L: $x^2+y^2=x$ 的正向;

(2) L: $x^2+y^2=x(y\geq 0)$从$O(0,0)$到$A(1,0)$

的上半圆周.



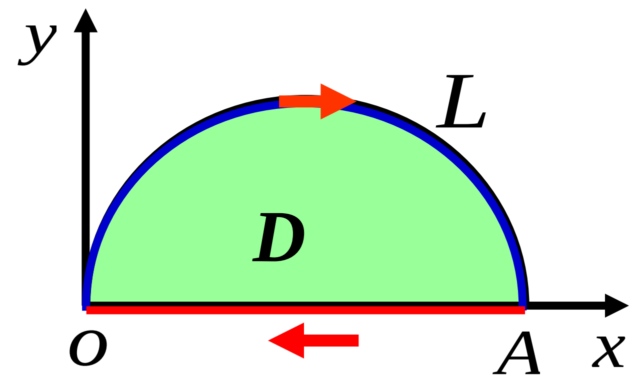
解 （1）化为定积分较繁，

由格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

$$\because \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-1,\ \therefore I=\iint_D dxdy=\frac{1}{4}\pi$$

(2) 由于L不是封闭曲线，故不能直接用格林公式，添加辅助线段



$\overline{AO}: y=0, (x: 1 \to 0)$

它与L所围区域为D，则

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1}$$

$$I = \oint_{L+\overline{AO}} (e^x \sin y - x - y)\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 1)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{\overline{AO}} (e^x \underbrace{\sin y}_{\boxed{=0}} - x - \underbrace{y}_{\boxed{=0}})\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - 1)\underbrace{\mathrm{d}y}_{\boxed{=0}}$$

$$= -\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_1^0 (-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$$

注:

求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算.

若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线,

使其成为封闭曲线，利用格林公式后，

再减去辅助线上的曲线积分.

例2 计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

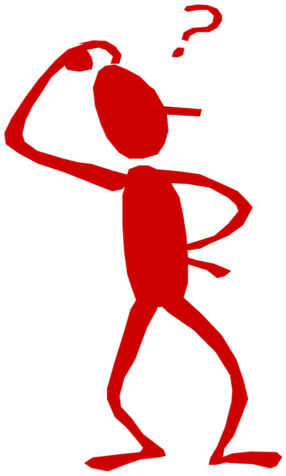
其中L为一条无重点,分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L的方向为逆时针方向.

解 记L所围成的闭区域为D, 令

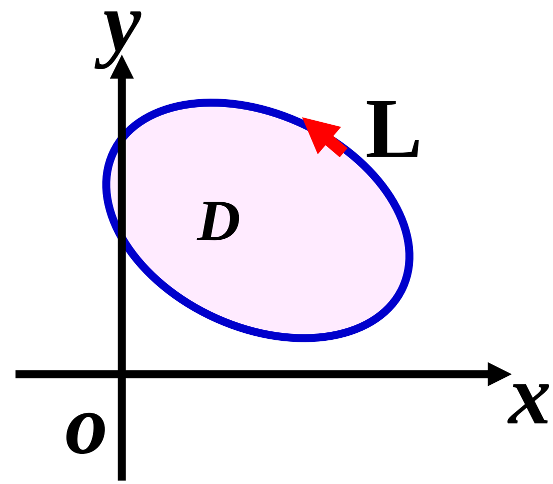
$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

则当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$



$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy}$$



(1) 当 $(0,0)\notin D$ 时，由格林公式

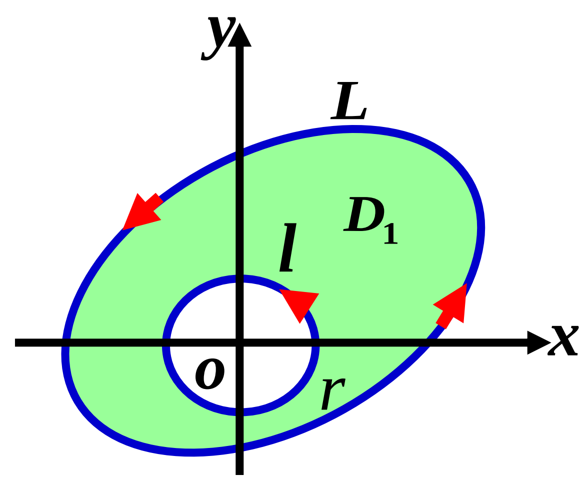
$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

(2) 当 $(0,0)\in D$ 时，不满足格林公式条件.

作位于D内圆周 $l: x^2+y^2=r^2$逆时针方向

记 D_1 由L和 l 所围成,

应用格林公式,得



$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L+(-l)} Pdx+Qdy$$

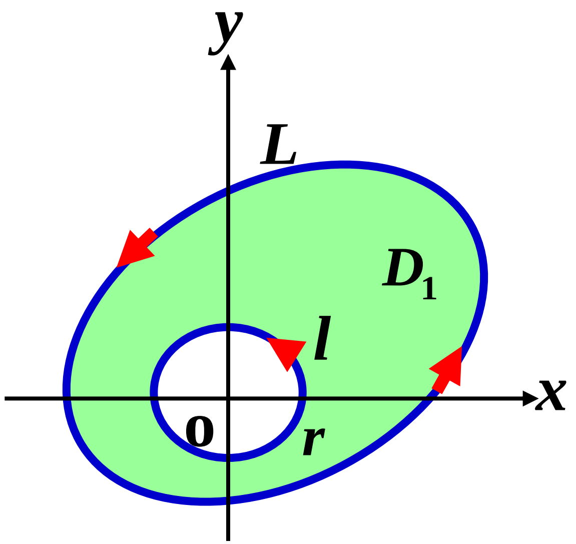
$$0=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L+(-l)}Pdx+Qdy=\int_L-\int_l Pdx+Qdy$$

即 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta$$

$=2\pi.$



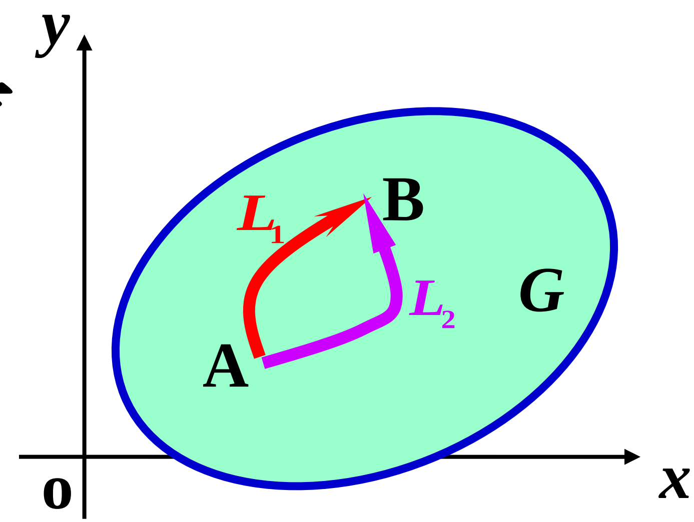
$(l: x^2+y^2=r^2$ 逆时针$)$

因此 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\begin{cases}0, & (0,0)\notin D\\ 2\pi, & (0,0)\in D\end{cases}.$

（做题时注意格林公式的条件）

3.8.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

如果在区域G内，$\forall L_1, L_2$，有



$$\int_{L_1} Pdx + Qdy \qquad \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

则称曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$

在G内**与路径无关**.

积分与路径无关时，曲线积分可记为

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_A^B Pdx + Qdy$$

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0$$

令$L_1 + (-L_2) = c$， 则 $\oint_c Pdx + Qdy = 0$

于是有下列等价条件

设函数$P(x,y),Q(x,y)$在G内连续,则下列两个命题等价:

(1) 曲线积分$\int_A^B P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

在G内与路径无关;

(2) 沿G内任意光滑的简单闭曲线c,

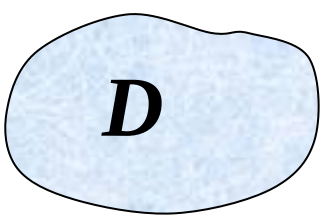
$$\oint_c Pdx+Qdy=0.$$

定理 设G是单连通域,函数 $P(x,y),Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数,则平面曲线积分

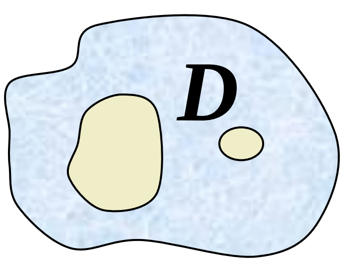
$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在G内与路径无关的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\in G.$$



单连通域

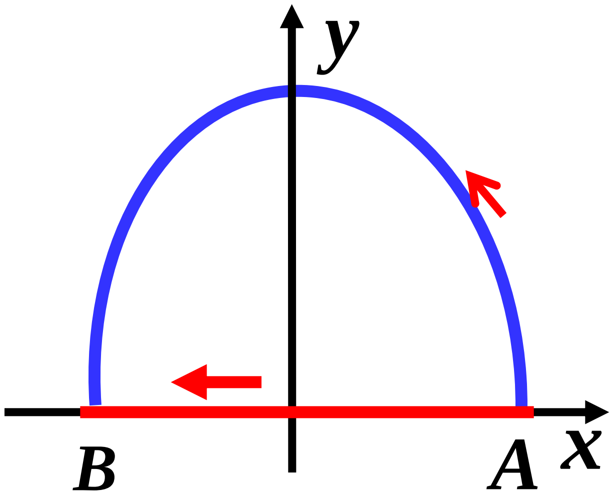


复连通域

例3 计算$\int_L (x^2+2xy)dx-(x^2-2y)dy$

其中 L: $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$从$A(1,0)$到$B(-1,0)$

的上半椭圆周.



解 $\because \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x=\dfrac{\partial P}{\partial x}$,

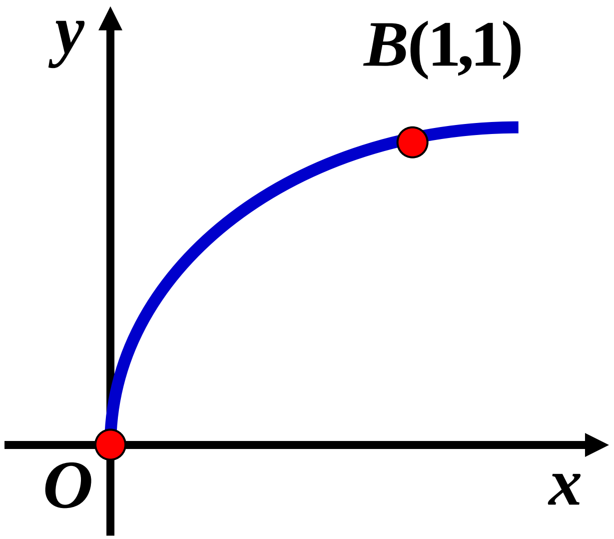
$\therefore$积分与路径无关.

另选一条路径: 直线AB: $\underline{y=0,}\ x:1\to -1$

原式$=\int_A^B (x^2+2xy)dx-(x^2-2y)dy$, $\boxed{2xy=0}$, $\boxed{dy=0}$

$$=\int_1^{-1} x^2dx=[\frac{1}{3}x^3]_1^{-1}=-\frac{2}{3}$$

例4 计算$\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$，其中$L$为由点$O(0,0)$到点$B(1,1)$的曲线弧$y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.



解 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$$

因 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故原积分与路径无关.

$$\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$$

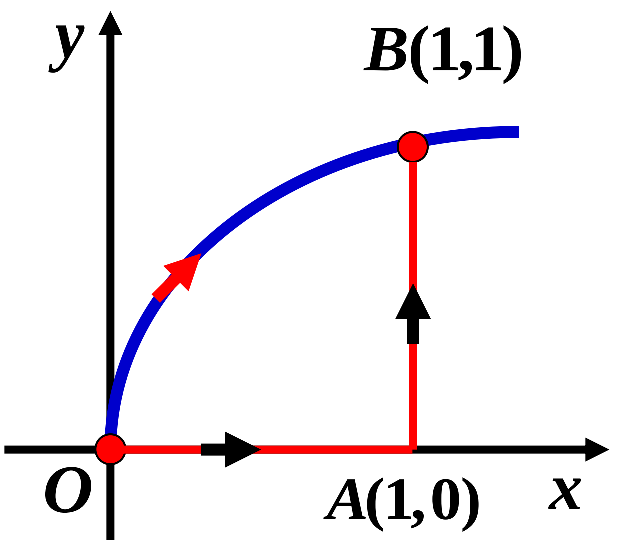
$$=\int_{O(0,0)}^{B(1,1)} (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$$

$$=\int_{O(0,0)}^{A(1,0)} (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)\underbrace{dy}_{\boxed{=0}}$$

$$+\int_{A(1,0)}^{B(1,1)} (x^2+2xy)\underbrace{dx}_{\boxed{=0}}+(x^2+y^4)dy$$

$$=\int_0^1 P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^1 Q(1,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy=\frac{23}{15}.$$



3.8.3 二元函数的全微分求积

一元函数有原函数概念:

若在 I 上 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$,

则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的原函数.

二元函数也有原函数概念:

若存在一个二元函数 $u(x,y)$,使

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

或 $$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y),$$

则称 $u(x,y)$ 是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 的一个原函数.

求所有原函数$u(x,y)+C$的问题称为二元函数的**全微分求积问题**.

$P(x,y)$、$Q(x,y)$需要满足什么条件，

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$才是某二元函数的全微分呢?

定理　设G是单连通域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在G内具有一阶连续偏导数, 则表达式

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

在G内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的**充要条件**是在G 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

且 $u(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

是 $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数,

其中 (x_0, y_0) 是G 内任一个定点.

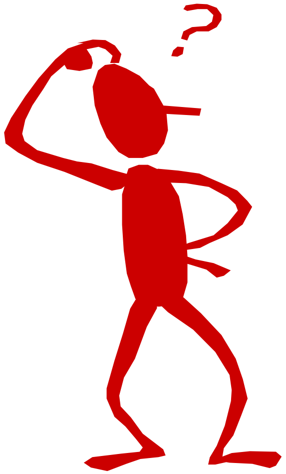
定理不但给出了$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$是某二元函数全微分的充要条件，

而且提供了求其原函数的一种方法.

例5 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分，并求出它的原函数.

证 设 $P = xy^2$, $Q = x^2y$,

则有 $$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



由定理可知,存在函数 $u(x, y)$ 使

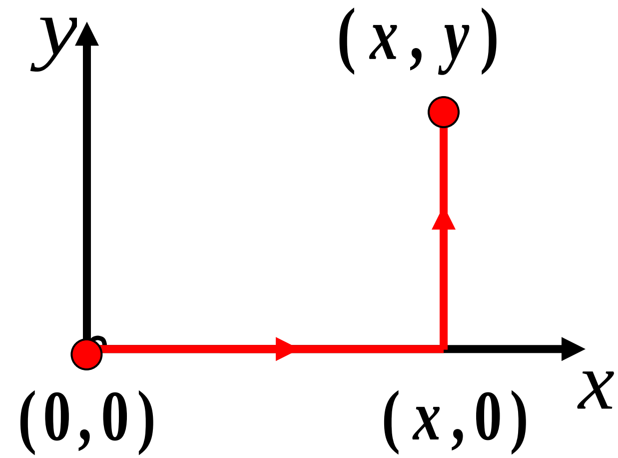
$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

由于积分与路劲无关，积分路径如图

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x x\cdot 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2$$



因此所求原函数为

$$\frac{1}{2}x^2y^2+C,(C\text{为任意常数})$$

另解：凑微分

$$du = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$du = xy(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$$

$$du = xy\,\mathrm{d}(xy)$$

$$du = \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y^2)$$

故所求原函数为 $\frac{1}{2}x^2y^2+C$,(C为任意常数)

类似于牛顿莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

设$F(x,y)$是$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$的一个原函数，

由于 $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

也是它的一个原函数，所以

$$\Phi(x,y) = F(x,y) + C\ (C\text{为任意常数})$$

因$\Phi(x_0,y_0) = 0$，故$C = -F(x_0,y_0)$

从而有 $\Phi(x,y) = F(x,y) - F(x_0,y_0)$

即 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = F(x,y) - F(x_0,y_0)$

$$= [F(x,y)]_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}$$

$$\boxed{\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = F(x,y) - F(x_0,y_0)}$$

有了这个公式，与路径无关的曲线积分的计算问题可以转化为求该曲线积分被积表达式的一个原函数的问题.

例 计算曲线积分$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$

$$\because\ xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}\,y = xy(y\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}\,y)$$

$$= xy\,\mathrm{d}(xy) = \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y^2)$$

$$\therefore\ I = [\frac{1}{2}x^2y^2]_{(0,0)}^{(1,2)} = 2$$