

## 1.2 向量的乘法

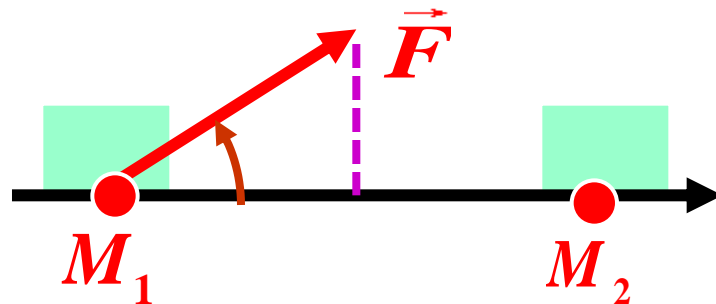
告诉你：  
向量的内积、外积还有混合积

## 1.2.1 两向量的数量积

**实例** 一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下沿直线从点 $M_1$ 移动到点 $M_2$ , 以 $\vec{s}$ 表示位移, 则力 $\vec{F}$ 所作的功为

$$W = \underbrace{|\vec{F}|}_{\text{力}} \underbrace{|\vec{s}| \cos \theta}_{\text{位移在力方向上的投影}}$$

其中 $\theta$ 为 $\vec{F}$ 与 $\vec{s}$ 的夹角.



**启示**

两个向量做这样的运算, 结果是一个数量.

**定义** 向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的**数量积**为一个数:

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (\text{其中} \theta \text{为} \vec{a} \text{与} \vec{b} \text{的夹角})$$

记为  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

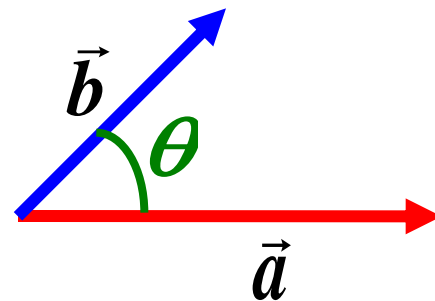
$$\text{即 } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

数量积也称为“**点乘**”或“**内积**”.

在力  $\vec{F}$  下位移  $\vec{s}$  所做的功为

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$



由数量积的定义可推出：

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

$$(3) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{Pr} j_a \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{Pr} j_b \vec{a}$$

$$\therefore |\vec{b}| \cos \theta = \operatorname{Pr} j_a \vec{b},$$

$$|\vec{a}| \cos \theta = \operatorname{Pr} j_b \vec{a}.$$

两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积。

## 数量积符合下列运算规律：

(1) 交换律：  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

(2) 分配律：  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$

(3) 结合律  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}),$   
 $(\lambda \vec{a}) \cdot (\mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \cdot \vec{b}).$

其中 $\lambda, \mu$ 为常数.

## 数量积的坐标表达式

$$\text{设 } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\because \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}, \quad \therefore \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0,$$

$$\because |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,$$

$$\therefore \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

## 两向量夹角余弦的坐标表示式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|},$$

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

由此可知两向量垂直的充要条件为

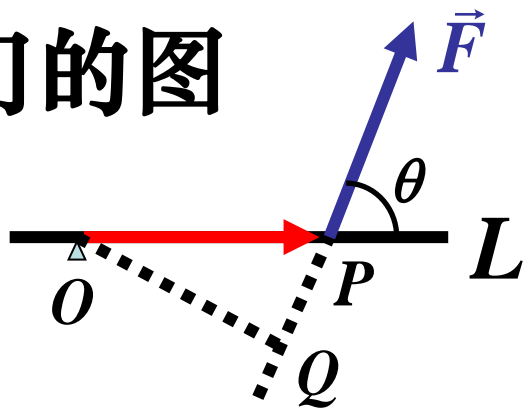
$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

## 1.2.2 两向量的向量积

### 实例 开门所产生的力矩

设 $O$ 为一根杠杆 $L$ (门)的支点, 有一力 $\vec{F}$ 作用于这杠杆上 $P$ 点处, 力 $\vec{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 $\theta$ , 力 $\vec{F}$ 对支点 $O$ (铰链)的力矩是一向量 $\vec{M}$ ,

门的图



**模:**  $|\vec{M}| = |\overrightarrow{OQ}| |\vec{F}|$   
 $= |\overrightarrow{OP}| |\vec{F}| \sin \theta$

**方向:** 垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\vec{F}$ 所决定的平面, 指向符合右手系.

两个向量做这样的运算, 结果是另一个向量.



**定义** 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**为一个新向量  
记为  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

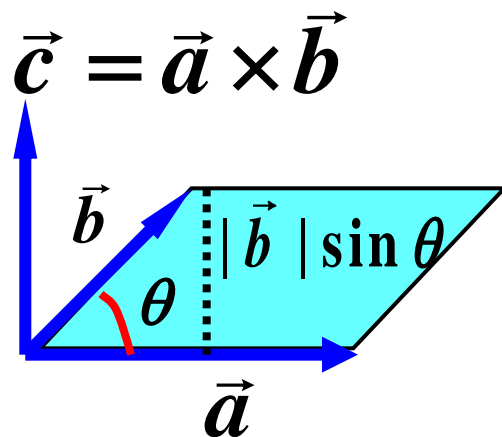
模： $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$  (其中 $\theta$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角)

方向： $\vec{c}$ 的方向既垂直于 $\vec{a}$ ，又垂直于 $\vec{b}$ ，  
指向符合右手系。

向量积也称为“**叉乘**”或“**外积**”。

**几何意义：**

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ 表示以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为邻边的  
平行四边形的面积。



由向量积的定义可推出：

$$(1) \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}.$$

$$(2) \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}. (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$$

## 向量积符合下列运算规律：

(1)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ . 不符合交换律

(2) 分配律：

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

(3) 结合律

若 $\lambda$ 为数,  $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ .

## 向量积的坐标表达式

$$\text{设 } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \left\{ \begin{array}{l} \because \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \\ \because \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{array} \right. \end{array}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

## 向量积还可利用三阶行列式表示

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}\end{aligned}$$

由上式可推出  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

**例2** 求与 $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

都垂直的单位向量.

**解**

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 10\vec{j} + 5\vec{k},\end{aligned}$$

$$\because |\vec{c}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}_c = \pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \pm \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{k} \right).$$

**例3** 设刚体以角速度 $\vec{\omega}$ 绕一定轴 $l$ 旋转，  
计算刚体上一点 $M$ 的线速度。

**解** 设点 $M$ 到旋转轴 $l$ 的距离为 $a$ ，  
再在 $l$ 轴上任取一点作向量 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ，  
并以 $\theta$ 表示 $\vec{\omega}$ 与 $\vec{r}$ 的夹角，则

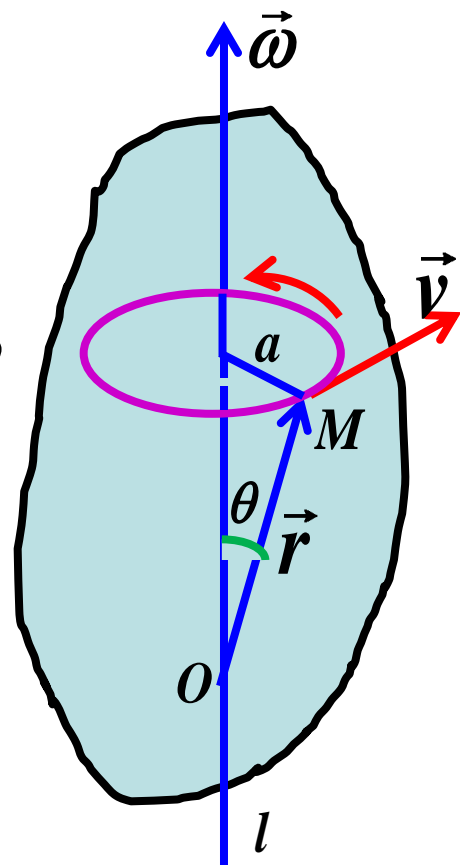
$$a = |\vec{r}| \sin \theta,$$

由物理学知识,点 $M$ 的线速度 $\vec{v}$ 的大小:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| a = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin \theta;$$

$\vec{v}$ 的方向:  $\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}$ 符合右手规则.

因此有  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$



## \*向量的混合积

**例** 设向量 $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ 两两垂直, 符合右手规则, 且 $|\vec{m}|=4, |\vec{n}|=2, |\vec{p}|=3$ , 计算 $(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p}$ .

**解**  $|\vec{m} \times \vec{n}| = |\vec{m}| |\vec{n}| \sin(\vec{m}, \vec{n})$

$$= 4 \times 2 \times 1 = 8,$$

依题意知 $\vec{m} \times \vec{n}$ 与 $\vec{p}$ 同向,

$$\text{故 } \theta = (\vec{m} \times \vec{n}, \vec{p}) = 0$$

$$\begin{aligned} (\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p} &= |\vec{m} \times \vec{n}| \cdot |\vec{p}| \cos \theta \\ &= 8 \cdot 3 = 24. \end{aligned}$$



## \*向量的混合积

设已知三个向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 数量  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

称为这三个向量的混合积, 记为  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ .

设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c} = (c_x, c_y, c_z),$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

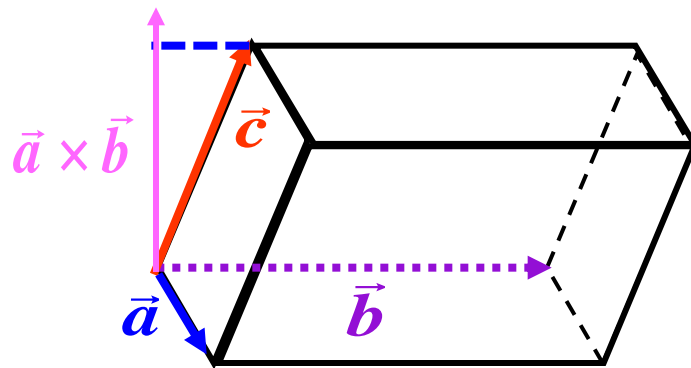
$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (\text{混合积的坐标表达式})$$

## 关于混合积的说明：

(1) 向量混合积的几何意义：

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  是这样的一个数，

它的绝对值表示以向量  
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  为棱的平行六面体的  
体积.



$$(2) [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

$$(3) \text{三向量 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0.$$