第三章　多元函数积分学及其应用

3.1 多元函数积分的概念与性质

你要理解函数积分的实质

针对不同的积分区域有不同的积分名称:

重积分　曲线积分　曲面积分

3.1.1 多元函数积分的概念

在一元函数积分学中, 我们知道定积分是某种确定形式和的极限. 这种和的极限概念推广到定义在区域、曲线及曲面上多元函数的情形，便得到重积分、曲线积分及曲面积分的概念.

将函数在这些区域、曲线及曲面上的积分统称为**函数在几何形体上的积分**.

实例　非均匀分布的物体质量的计算

设细直棒AB的线密度为 $\mu = f(P)$,

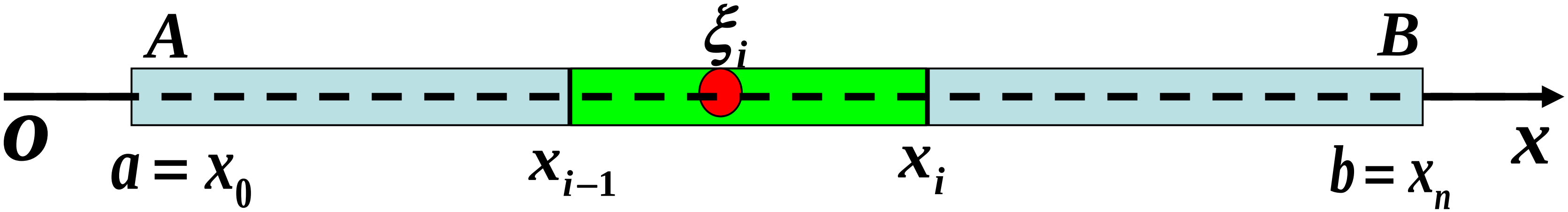
求细直棒的质量.

如果平板是均匀的，则可以用密度乘以面积，非均匀？

可通过**分割**、**近似**、**求和**及**取极限**

四个步骤化为定积分

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underline{f(\xi_i)\Delta x_i} = \int_a^b f(x)dx$$

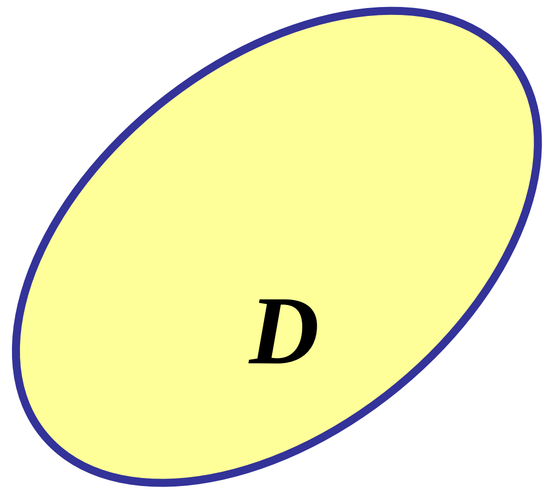


平面薄板的质量

设它所占的平面区域为D，其密度为

$\mu = f(P) = f(x,y)$ 在D上连续.

如果平板是均匀的，
则可以用密度乘以面积，
非均匀?

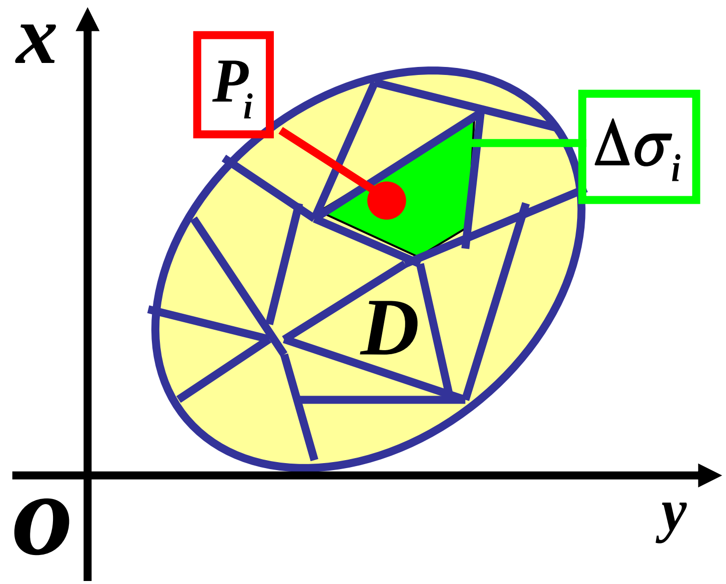


参照处理直棒质量的方法

按如下步骤计算它的质量.

【分割】把D任意划分为n个子域$\Delta\sigma_i, i=1,2,\cdots n,$

（也表示面积）



【近似】 $\forall P_i \in \Delta\sigma_i,$

$$\Delta m_i \approx f(P_i)\Delta\sigma_i$$

【求和】

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$$

【取极限】 $$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$$

$$\lambda=\max\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$$

细棒的质量 $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$

薄板的质量 $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i, \quad P_i(\xi_i,\eta_i)$

均可由相同形式的和式极限来确定.

一般地，设有一质量非均匀分布 $(\mu = f(P))$ 在某一几何形体G上的物体 （G 可以是直线段、平面或空间区域、一段曲线或一片曲面），其质量可以按照以上四个步骤来计算:

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta g_i, \quad \lambda = \max\{\Delta g_i\text{的直径}\}$$

一般地把该极限称为函数在几何形体上的积分.

定义 设G表示一个有界的可度量几何形体，

函数 $f(P)$在G上有界.

经过分割、近似、求和以及取极限四个步骤，

若不论G怎样划分,点P_i在Δg_i中怎样选取，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta g_i \quad \lambda = \max\{\Delta g_i\text{的直径}\}$$

则称为**函数 $f(P)$在几何形体G上的积分**.

也称函数$f(P)$在G上可积. 记作

$$\boxed{\int_G f(P)\,dg = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta g_i}$$

函数$f(P)$在几何形体G上的积分

$$\int_G f(P)\,dg = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta g_i$$

积分号

被积函数

$$\int_G f(P)\,dg$$

元素

积分域

被积式

或微元

$$\boxed{\int_G f(P)dg = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta g_i}$$

当G为不同的几何形体时，对应的积分有不同的名称和表达式：

（1）当G是 x 轴上的闭区间$[a,b]$,

$f(P) = f(x), x \in [a,b]$，称为**定积分**

$$\int_G f(P)\,dg = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(2）当G为平面有界闭区域(常记为D)时，

$f(P)=f(x,y),(x,y)\in D$，称为二重积分

$$\int_G f(P)\,\mathrm{d}g=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

D就是积分域，$\mathrm{d}\sigma$称为面积元素.

(3）当G为空间有界闭区域(常记为Ω)时，

$f(P)=f(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega$，称为三重积分

$$\int_G f(P)\,\mathrm{d}g=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

Ω就是积分域，$\mathrm{d}v$称为体积元素.

（4）当G为平面有限曲线段（常记为L）或空间有限曲线段（常记为 Γ）时，

$$f(P)=f(x,y),(x,y)\in L$$

或 $f(P)=f(x,y,z),(x,y,z)\in\Gamma$,

称为**对弧长的曲线积分**

$$\int_G f(P)\,\mathrm{d}g=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

L(或Γ)称为**积分路径**，ds称为**弧长元素**.

（5）当G为空间有限曲面片（常记为$\sum$）时，

$$f(P)=f(x,y,z),(x,y,z)\in\Sigma,$$

称为**对面积的曲面积分**.

$$\int_G f(p)\,\mathrm{d}g=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

Σ称为**积分曲面**，$\mathrm{d}S$称为**曲面面积元素**.

函数在几何形体上的积分 —定积分的推广

定积分 → 二重积分 → 三重积分 → 重积分

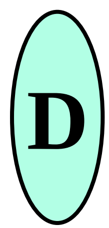
$$\int_a^b f(x)dx \qquad \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \qquad \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv$$

被积函数：

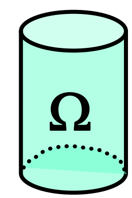
$y=f(x)$ → $z=f(x,y)$ → $u=f(x,y,z)$

积分区间：

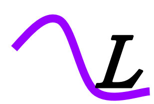
闭区间$[a,b]$ → 平面有界闭区域D



→ 空间有界闭区域 Ω

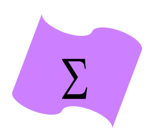


直线段 → 曲线段



曲线积分

→ 曲面片



曲面积分

→ 曲线曲面积分

3.1.2 多元函数积分的性质

多元积分的存在性与定积分类似：

若函数$f(P)$在有界闭集G上连续，则 $f(P)$在G上可积.

当函数$f(P), h(P)$可积时，多元函数积分有与定积分类似的性质.

➢**性质1 （线性性质）**

$$(1)\int_G kf(P)\,dg = k\int_G f(P)\,dg \qquad (k\text{为常数})$$

$$(2)\int_G [f(P) \pm h(P)]\,dg$$

$$= \int_G f(P)\,dg \pm \int_G h(P)\,dg$$

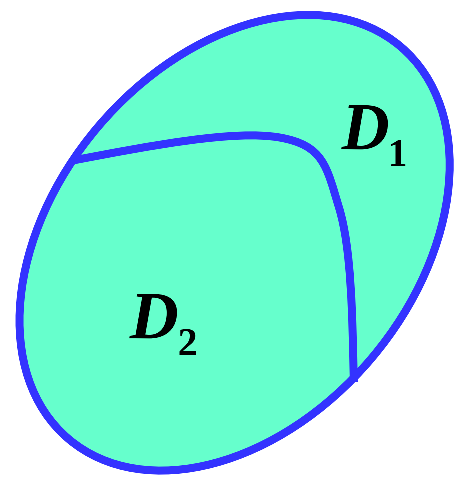
➢性质2（对积分域的可加性）

若G分为两部分$G = G_1 + G_2, G_1 \cap G_2 = \phi$,

则 $\int_G f(P)\,dg = \int_{G_1} f(P)\,dg + \int_{G_2} h(P)\,dg$

定积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



二重积分

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\,d\sigma$$

➢性质3

$$\int_G dg = G\text{ 的度量}$$（比如面积，体积，弧长等）

定积分 $\int_a^b dx = b - a$（积分区间的长度）

对于二重积分来说

若在D上$f(x, y) = 1$，则有

$$\iint_D d\sigma = D\text{的面积}$$

➢性质4（比较性）

如果在G上$f(P)\le h(P)$,则有

$$\int_G f(P)\,dg \le \int_G h(P)dg$$

特别地，由于$-|f(P)|\le f(P)\le |f(P)|$,

故有 $$\left|\int_G f(P)\right| dg \le \int_G |f(P)|dg$$

定积分 $$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$$

二重积分： $$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D h(x,y)d\sigma$$

➢性质5 (估值性)

若M,m分别是$f(P)$在G上的最大值和最小值，则

$$mG \le \int_G f(P)\,dg \le MG$$

定积分 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

二重积分： $m \cdot \sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M \cdot \sigma$

➢性质6（积分中值定理）

设$f(P)$在有界连通闭集G上连续，

则在G上至少存在一点M，满足等式

$$\int_G f(P)dg = f(M)G$$

定积分 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \xi \in [a,b]$

二重积分：$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma, (\xi,\eta) \in \sigma$

小 结

多元函数积分可看作定积分推广为多元函数在不同几何形体上的积分.

n重积分(多元函数在n维空间中的有界闭区域上的积分)

曲线积分(多元函数在有限曲线段上的积分)

曲面积分(多元函数在有限曲面片上的积分)