第二章　　导数与微分

一、基本要求

1. 理解导数的概念,明确导数就是函数的变化率.理解导数的几何意义,会求平面曲线的切线方程和法线方程.了解函数的可导与连续性的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式,会求分段函数的导数.

3. 了解高阶导数的概念,掌握初等函数的一阶、二阶导数的求法，会求简单函数的n阶导数.

4. 理解微分的概念,了解微分形式不变性,会求微分.

5. 会求隐函数和由参数方程所确定函数的一阶、二阶导数.

二、要点提示

1. 关于导数的几点说明

（1）导数定义的几种形式

若$f(x)$在x_0处函数增量与自变量增量之比(当自变量增量趋于零时)的极限存在，则$f(x)$在x_0可导. 于是$f'(x_0)$可表达成多种形式：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\text{，其中 }\Delta x=x-x_0\text{；}\qquad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{；}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{；}\qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

（2）左、右导数

若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，就称为$f(x)$在$x_0$处的左导数，记为$f'_-(x_0)$，类似地，右导数为$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

函数$f(x)$在点x_0处可导的充分必要条件是在点x_0处左、右导数都存在并且相等.

左、右导数的概念常用在讨论分段函数在分段点处的可导性和函数在闭区间端点的可导性上.

（3）当$y=f(x)$在区间I的每一个点x都可导，称函数在区间I上可导.

$\forall x\in I$时，若$f(x)$在I上可导，则必有一导数与其对应，因而在I上确定了一个新的

函数，称为 $f(x)$ 的导函数.

2. 复合函数的求导法则

应用复合函数法则求导时，应首先分析所给复合函数的复合结构，认清它是由哪些简单函数复合而成，可从外向里一层一层地求导.例如函数 $y=f\{g[\varphi(x)]\}$ 的导数是

$$
\begin{aligned}
y' &= f'\{g[\varphi(x)]\}\cdot\{g[\varphi(x)]\}' \\
&= f'\{g[\varphi(x)]\}\cdot g'[\varphi(x)]\cdot[\varphi(x)]' \\
&= f'\{g[\varphi(x)]\}\cdot g'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)
\end{aligned}
$$

3. 初等函数的导数

从函数的最后一道运算（四则或复合）开始求导，如果遇到四则运算就用四则运算法则，遇到复合函数就用复合函数的求导法则，一步一步求到对自变量的导数为止.例如，$y=\sqrt{\dfrac{e^x-\sin 2x}{x\arctan x}}$，应依次先对根号、商求导，再对出现的复合函数求导.

4. 分段函数的导数

在对分段函数求导时，注意分段点处要用导数的定义或者左、右导数来确定该点的导数是否存在或求导.