# 高数学习

韩海舰

March 23, 2020

高等数学上（mooc 课程学习笔记，深圳大学）

## 1 第一章 函数, 极限, 连续性

### 1.1 第一周练习

1. 已知 f(x+1) 的定义域为 [0,a](a>0), 则 f(x) 的定义域为（）。

1. $[1, a+1]$
2. $[-1, a+1]$
3. $[a, a+1]$
4. $[a-1, a]$

正确答案：A 你错选为 B
2.

若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$(a 为常数），则下列说法不正确的是。

1. 数列 $\{x_n\}$ 有界。
2. $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$
3. 若 $x_n > 0$(n=1,2...n), 则 a>0
4. 常数 a 唯一。

正确答案：C 你没选择任何选项
极限的性质包括：唯一性，有界性，保号性。其中保号性是指如果极限 >0, 则 $x_n$>0。

## 1.2 第二周练习

1. 已知函数

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2 sin\frac{1}{x}, & x<0 \\ \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & x>0 \end{array}\right.$$

则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=(?)$

结果为 0
2.

若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则（）

1. 仅当 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$时，才有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$成立。
2. 当$g(x)$为任意函数时，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$成立
3. 仅当$g(x)$为常数时，才能使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$成立
4. 当$g(x)$有界时，能使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$成立

答案是 4.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

是无穷小，无穷小与有界函数之积是无穷小。
3.

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{sinx}}=(?)$$

1. 1
2. e
3. $e^{-1}$
4. $e^{-2}$

正确答案：C 你错选为 B

### 1.3 第三周练习

等价无穷小:

$$\boxed{\begin{array}{ll} sin(x) \sim x, & tan(x) \sim x \\ arcsin(x) \sim x & \\ e^x - 1 \sim x, & a^x - 1 \sim x \ln a \\ \ln(x+1) \sim x, & 1 - cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2 \\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x & \end{array}} \tag{1}$$

有用极限:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \tag{2}$$

无穷小的关系:

$\alpha = limf(x) = 0, \beta = \lim g(x) = 0,$ 均是无穷小

| | | |
|---|---|---|
| 高阶无穷小: | $\frac{\alpha}{\beta} = 0$ | $\alpha$是$\beta$的高阶无穷小 |
| 等价无穷小: | $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ | $\alpha$是$\beta$的等阶无穷小 |
| 同价无穷小: | $\frac{\alpha}{\beta} = c \quad (c \neq 0)$ | $\alpha$是$\beta$的同阶无穷小 |
| k 价无穷小: | $\frac{\alpha}{\beta^k} = c \quad (c \neq 0)$ | $\alpha$是$\beta$的 k 阶无穷小 |

## 2 导数与微分

### 2.1 第四周练习

1. 设函数 f(u) 可导，且 $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 x=1 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时，相应的函数增量 $\Delta y$ 的线性主部为 0.1，则 $f^{'}(1) = ()$.

1. 0.1
2. 1
3. -0.5
4. -1

正确答案：C 你错选为 D
2. 函数 y=f(x) 在 $x_0$ 处连续、可导、可微的关系中不正确的是:

1. 可导是可微的充分必要条件
2. 可微是连续的充分条件
3. 连续是可导的充分必要条件
4. 连续式可微的必要条件

正确答案：C 你错选为 A
连续:

1. f(x) 在 $x_0$ 处有定义
2. f(x) 在 $x_0$ 处有极限
3. $\lim_{x \to x0} f(x) = f(x0)$

可导：

1. f(x) 在 $x_0$ 的邻域内有定义
2. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
   存在
3. $f_+^{'}(x_0) = f_-^{'}(x_0)$

可导 $\Longrightarrow$ 连续，但连续未必可导。可导 $\Longleftrightarrow$ 可微
二阶导数：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$$

# 3 第三章微分中值定理与导数应用

## 3.1 第六周练习

1. 求 $\lim_{x \to 0} \left\{ \frac{sinx}{x} \right\}^{\frac{1}{1-cosx}} = ()$

1. 1
2. $e^{-\frac{1}{3}}$
3. $e^{\frac{1}{6}}$
4. $e^2$

正确答案：B 你错选为 A

**2** . 求 $lim_{x \to 1} \left\{ \frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right\} = ()$

1. -1
2. 0
3. $\infty$
4. 1

正确答案：D 你错选为 C
通分

**3** . 函数 $y = x^2 + 4x - 5$ 在区间 [-6,6] 上

1. 先单调减少再单调增加
2. 先单调增加再单调减少
3. 单调增加
4. 单调减少

正确答案：A 你错选为 C
注意 x 的区间，判断 y' 的符号

## 3.2 第七周练习

**1** . 函数 $y = \frac{lnx}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内，

1. 无极值
2. 最大值为 $\frac{1}{e}$
3. 最小值为 $\frac{1}{e}$
4. 无最大值

正确答案：B 你错选为 A
求导，x=e，

**2** . 曲线 $y = e^{-(x-1)^2}$ 的渐近线是

1. x=1 为铅直渐近线，y=1 是水平渐近线
2. x=1 为铅直渐近线，y=0 是水平渐近线
3. y=0 是水平渐近线
4. x=0 为铅直渐近线，y=0 是水平渐近线

正确答案：C 你错选为 A
$lim_x \to \infty f(x) =?$ 判断水平渐近线，$lim_x \to x0 f(x) =?$ 判断铅直渐近线。
拐点：凹凸转折点。
拐点的充分必要条件：f(x) 在 (a,b) 内二阶可导，$f^{''}(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$，而且 $f^{''}(x_0)$ 处两边符号不相等

曲　率：反应曲线的弯曲程度。直线的曲率为 0，圆的曲率为 1/R. 圆的半径越大，则曲率越小，否则曲率越大。

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\alpha}{\Delta S}$$

$\alpha$ 是弧的转角。曲率的计算公式：

$$\boxed{\frac{|y^{''}|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{3}$$

# 4 第四章一元函数积分学

## 4.1 第九周练习

1.f(x) 在 [a,b] 上连续是 $\int_a^b f(x)dx$ 的（）

1. 充分必要条件
2. 必要非充分条件
3. 既非充分也非必要条件
4. 充分而非必要条件

正确答案：D 你错选为 C

若 f(x) 在 [a,b] 连续，则其上界函数 $\int_a^x f(t)dt$ 必然是其原函数，即函数连续必有原函数。

**2** . 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$
正确答案：$ln|x+\sqrt{x^2-9}|-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-9}+C$

**3** . 求 $\int_a^b f(mx+n)dx =$
正确答案：$\frac{1}{m}\int_{ma+n}^{mb+n} f(x)ds$

**4** 求 $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$
正确答案：$\pi/12-\sqrt{3}/8$

**5** 求 $\int_{-2}^{2}(e^{x^2}sinx^3-\sqrt{4-x^2})dx$
正确答案：$-2\pi$

## 4.2 第十一周练习

**1** . 求 $\int(x^2+1)e^{2x}dx$
正确答案：$\frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

**2** . 已知 f(x) 的原函数是 $tan^2x$, 则 $\int_0^1 xf^{'}(x)dx =?$
答案是：$2tan1sec^21+tan^21$

**3** . 求 $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xarcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$
答案是：$1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

**4** . 求 $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2}dx$
答案是发散。由于积分区间中存在瑕点。

# 5 第五章积分应用

## 5.1 第十二周练习

**1** . 计算心形 $\rho = 1 + cos\theta$ 和圆 $\rho = 3cos\theta$ 所围公共部分面积。
正确答案：$5\pi/4$

**2** . 已知一弹簧原长 1 米，把它压缩 1 厘米所用的力为 0.05 牛顿，把弹簧从 80 厘米压缩到 60 厘米所做的功（）
正确答案：0.3（N.m）

| |
|---|
| 计算曲线面积 |
| 直角坐标：$ds = y * dx$ |
| 极坐标：$ds = \frac{\rho^2 d\theta}{2}$ |
| 计算曲线长度: |
| 直角坐标：$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ |
| 参数方程：$ds = \sqrt{dx^2(t) + dy^2(t)}$ |
| 极坐标：$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\theta$ |

常用积分公式

$$\boxed{\begin{array}{l} \int lnxdx = xlnx - x + C \\ \int sin^2xdx = \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C \\ \int cos^2xdx = \frac{x}{2} + \frac{sin2x}{4} + C \\ \int cos^mxsin^nxdx = \frac{1}{m+n}cos^{m-1}xsin^{n+1}x + \frac{m-1}{m+n}\int cos^{m-2}xsin^nx + C \end{array}} \tag{4}$$

# 6 第六章 微分方程

## 6.1 第十三周练习

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的一条积分曲线与直线 $y = 2x + 3$ 相切，则切点为:
正确答案：(1,5)
直线斜率为 2，积分曲线切线斜率为 y'=2x,$2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow y = 5$

**2** . 微分方程 $xy' + y = y(lnx + lny)$ 的通解为:
正确答案：$y = \frac{1}{x}e^{Cx}$
用换元法，u=xy

**3** . 设 y(x) 满足微分方程 $xy' + y - y^2lnx = 0, y(1) = 1$, 则，y(e)=?
正确答案：1/2
用换元法，u=1/y, 将方程转换成 u，x 的非齐次线性方程，然后用公式，最后代回。

## 6.2 第十四周练习

**1** .$y^{''} = e^{x}$ 的通解为：
正确答案：$e^{-x} + C_1x + C_2$

**2** . 微分方程 $xy^{''} + xy^{'2} - y' = 0$ 的通解
正确答案：$y = ln(x^2 + 2C_1) + C_2$
化简后方程变为：$y^{''} + y^{'2} - y^{'}/x = 0$ 。符合 $y^{''} = f(x, y^{'})$ 格式，所以用 $p = y^{'}$ 替换，替换后变成伯努立方程，两边同除 $p^2$, 然后用公式。

## 6.3 第十五周练习

1. 微分方程 $y'' + y = x + sinx$ 的特解是：y= ()

1. $Ax + B + Ccosx + Dsinx$
2. $Ax + B + Cxsinx$
3. $Ax + B + x(Ccosx + Dsinx)$
4. $Ax + x(Ccosx + Dsinx)$

正确答案 C，错答为 B

**2** . 微分方程 $y'' + 3y' + 2y = x^2e^{-2x}$ 的特解是：y= ()

1. $y = ax^2e^{-2x}$
2. $y = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
3. $y = x(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$
4. $y = x^2(ax^2 + bx + c)e^{-2x}$

正确答案 C，错答为 D
$\lambda = -2, m = 2, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, k = 1$

**3** . 微分方程 $y'' - y' = e^x + 1$ 的通解是：y= ()

1. $y = C_1 + C_2e^x$
2. $y = axe^x + b$
3. $y = C_1 + C_2e^x + xe^x - x$
4. $y = C_1 + C_2e^x - x$

正确答案 C，错答为 D
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。齐次方程的通解为 $y = C_1 + C_2e^x$, 特解为 $xe^x - x$

**3** . 微分方程 $y'' + 4y = 1/2cos2x$ 的通解是：y= （）

1. $y = x(ACos2x + Bsin2x)$
2. $y = Acos2x + Bsin2x + 1/8xsin2x$
3. $y = Acos2x + Bsin2x$
4. $y = A + Be^{-4x} + 1/8xcos2x$

正确答案 B，错答为 C
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。特征根 $0 \pm 2i$, 齐次方程的通解为 $y = C_1cos2x + C_2sin2x$, 特解只能选 B。

**4** . 微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 9$ 的通解是：y= （）

1. $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$
2. $y = e^x(C_1cos3x + C_2sin3x) - 3$
3. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 3$
4. $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 3x^2$

正确答案 C，错答为 A
通解为齐次方程的通解 + 非齐次方程的特解。特征根为 1，3，齐次方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$, 将待选的特解带入方程只有选 C。

微分方程定义: 含有未知函数和未知函数导数的方程称为微分方程。
注意不是所有含有未知函数导数的方程都是微分方程，比如 u'v+uv'=(uv)' 就是一个恒等式，它不是微分方程。

微分方程的分类: 导数的最高阶数称为微分方程的阶。
含有一个未知变量的函数，称为常微分方程;
含有 2 个以上未知变量的函数，称为偏微分方程。

微分方程的解:
微分方程的解是函数。将该函数带入原方程使得原方程恒成立，将此函数称为微分方程的解
含有微分方程阶数的个数个独立常数的解称为微分方程的通解。
不含常数的解称为微分方程的特解。
含有初始条件的微分方程称为初始问题。

一阶常微分方程:

| 方程名称 | 方程格式 | 方程解 |
|---|---|---|
| 可分离变量方程 | $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)(g(y)\neq 0)$<br>或 $f(x)dx=g(y)dy$ | |
| 齐次方程 | $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ | |
| 齐次线性方程 | $\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$<br>或 $y'+p(x)y=0$ | $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ |
| 非齐次线性方程 | $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$<br>或 $y'+p(x)y=q(x)$ | $y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)$<br>或常数变量法 |
| 伯努力方程 | $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n, n\neq 0,1$ | 两边除以 $y^n$, 转换成非齐次线性方程，然后用公式法或常数变量法求解。 |

二阶微分方程
可降阶的微分方程：$y^{''}=f(x,y,y^{'})$，思路是将二阶降为一阶

| 方程形式 | 降阶方法 |
|---|---|
| $y^{''}=f(x)$ | 逐级不定积分 |
| $y^{''}=f(x,y^{'})$ | 令 $y^{'}=p(x)$ |
| $y^{''}=f(y,y^{'})$ | 令 $y^{'}=p(y)$,$y^{''}=dp/dy*p$ |

二阶线性常微分方程:

| 方程名 | 方程格式 | 解格式 |
|---|---|---|
| 二阶齐次线性常微分方程 | $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=0$ | $y=C_1y1+C_2y2$<br>y1，y2 是线性无关的解 |
| 二阶非齐次线性常微分方程 | $y^{''}+p(x)y^{'}+q(x)y=f(x)$ | $y=y+Y$<br>Y 是对应齐次方程的通解，y 是方程特解。 |

二阶常系数线性常微分方程:

<table>
<tr><td>方程名</td><td>方程格式</td><td>解格式</td></tr>
<tr><td>二阶常系数齐次线性常微分方程</td><td>$y^{''}+py^{'}+qy=0$</td><td>根据 $r^2+pr+q=0$ 特征方程结果
<table>
<tr><td>$p^2-4q$ 的结果</td><td>根</td><td>通解</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q>0$</td><td>$\lambda_1,\lambda_2$, 单根</td><td>$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q=0$</td><td>$\lambda$, 重根</td><td>$(C_1+x)e^{\lambda}x$</td></tr>
<tr><td>$p^2-4q<0$</td><td>$\alpha\pm i\beta$, 共轭根</td><td>$e^{\alpha x}[C_1cos(\beta x)+C_2sin(\beta x)]$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>二阶常系数非齐次线性常微分方程</td><td>$y^{''}+py^{'}+qy=f(x)$</td><td>通解：$y=y+Y$<br>Y 是对应齐次方程的通解，y 是方程特解<br>自由项情况 1：$f(x)=e^{\lambda x}Q_m(x)$ $Q_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式<br>根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 根的结果和 $2\lambda+p$ 的情况<br>特解：$y=x^ke^{\lambda x}P_m(x)$,$P_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式
<table>
<tr><td>特征方程结果</td><td>k</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$</td><td>k=0</td><td>$\lambda$ 不是特征方程的根</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p\neq 0$</td><td>k=1</td><td>$\lambda$ 是单根</td></tr>
<tr><td>$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 和 $2\lambda+p=0$</td><td>k=2</td><td>$\lambda$ 是重根</td></tr>
</table>
自由项情况 2：$f(x)=e^{\lambda x}(P_l(x)cos\omega x+P_n(x)sin\omega x)$<br>$P_l(x),P_n(x)$ 是 x 的 l,n 次多项式<br>根据特征方程 $r^2+pr+q=0$ 根的结果<br>特解：$y=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)cos(\omega x)+R_m^{(2)}(x)sin(\omega x)]$<br>m=max(l,n),$R_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式
<table>
<tr><td>特征方程结果</td><td>k</td></tr>
<tr><td>$\lambda+i\omega$ 不是特征方程的根</td><td>k=0</td></tr>
<tr><td>$\lambda+i\omega$ 是特征方程的根</td><td>k=1</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

# 7 期末考试

**1** . 当 $x\to 0$ 时，下列哪一个无穷小时对于 x 的三阶无穷小（）

1. $x^3+0.0001x^2$
2. $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\quad(a>0)$
3. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$
4. $\sqrt[3]{tanx}$

正确答案 B，错选 A
高阶无穷小的概念是 $lim\frac{\alpha}{\beta^k}=C,C\neq 0$, 只有
$lim\frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^3}=C$, 所以选 B。

**2** .$\int xf''(x)dx=()$

1. $xf(x)-\int f(x)dx$
2. $xf''(x)-xf'(x)-f(x)+C$

3. $xf'(x)+f(x)+C$

4. $xf'(x)-f(x)+C$

正确答案 D，错选 C

**3** . 当 $x \to 0$ 时，与 $sin2x+5x^2$ 等价无穷小的量时 ()

1. $5x^2$

2. $x$

3. $x^2$

4. $2x$

正确答案 D，错选 A

**4** .$\int_{-1}^{1} \frac{2+x^3 sin^2 x}{\sqrt{4-x^2}} dx =()$

1. $\pi/2$

2. $2/3\pi$

3. $\pi$

4. $2\pi$

正确答案 B

**5** . 设 $f(x)=\int_{2x}^{1} \frac{sint}{t} dt$, 则 $f'(x)=()$

1. $-\frac{sin2x}{2x}$

2. $\frac{sin2x}{2x}$

3. $\frac{sin2x}{x}$

4. $-\frac{sin2x}{2x}$

正确答案 D

**6** .$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =()$

1. $-1$

2. $2$

3. $1$

4. $0$

正确答案 C, 错选为 A

**7** $.\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx =()$

1. 0
2. $\frac{1}{3}\pi$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{2}$

正确答案为 A

**8** . 微分方程 $y'' + 2y' + y = x$ 的通解是 ()

1. $y = x + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$
2. $y = x - 2 + C_1 x e^{-x} + C_2 e^{x}$
3. $y = x - 2 + C_1 x e^{-x} + C_2 e^{-x}$
4. $y = x - 2 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

正确答案为 C, 错选为 A。
首先确定齐次方程的根为-1，所以齐次方程通解为 $(C_1 + C_2 x)e^{-x}$,
其次，确定非齐次方程右边为 $e^{\lambda x} P_m(x)$ 格式，$\lambda = 0, m = 1$, 而 $\lambda = 0$ 不是特征方程的根
所以非齐次方程的特解中 k=0，特解为 $y = ax + b$, 带入方程得到 $a = 1, b = -2$

高等数学下（mooc 课程学习笔记，深圳大学）

# 8 向量代数与空间解析几何

## 8.1 第一周

**1** . 已知向量 $\overrightarrow{p}$ 与 z 轴垂直，且 $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{p}=9, \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p}=-4$, 其中 $\overrightarrow{\alpha}=(3,-1,5), \overrightarrow{b}=(1,2,-3)$, 则 $\overrightarrow{p}$=().

1. (2,0,-3)
2. (2,3,0)
3. (0,-3,0)
4. (2,-3,0)

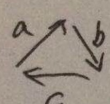
正确答案 D，错选 B

2. 已知 $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ 都是单位向量，且 $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=0$, 则 $\overrightarrow{\alpha}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\overrightarrow{\alpha}$=()

1. (-1/2)
2. (1/2)
3. (-3/2)
4. (3/2)

正确答案 C，错选 D

解：由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，可知




即 $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=120^\circ$，$\angle\widehat{\vec{b}\vec{c}}=120^\circ$，$\angle\widehat{\vec{c}\vec{a}}=120^\circ$

$\therefore\ \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=1\cdot\cos120^\circ+1\cdot\cos120^\circ+1\cdot\cos120^\circ$

$=3\cos120^\circ=-\frac{3}{2}$

故选C.

## 8.2 第二周

1. 设点 (1,2,3),(-1,0,-6) 是某直线上的点，则直线的对称式方程为 ()

1. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+6}{9}$
2. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$
3. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-9}{9}$
4. $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+6}{3}$

正确答案 A，错选 C
解：方向向量 $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,-9)$, 取 B 点，则点向式方程为 A

2. 设直线的一般式方程为 $\left\{\begin{array}{l} x-y+2z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{array}\right.$ ，则直线的对称式方程为 ()

1. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{-3}$
2. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{3}$
3. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z}{3}$
4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-3}$

正确答案 A，错选 D
解：方向向量为 $\overrightarrow{s}=\overrightarrow{n1}\times\overrightarrow{n2}$, 再取点 (1,0,0)，得点向式方程 A。

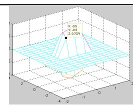
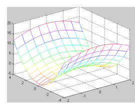
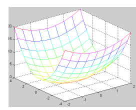
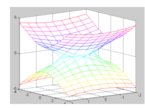
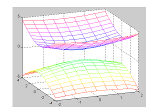
3. 平面 $\alpha$ 分两点 A（1,2,3) 和 B（2,-1,4）间的线段，并垂直。求平面方程为 ()

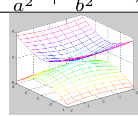
1. $2x-6y+2z-7=0$
2. $x-3y+z+2=0$
3. $2x-6y+2z+7=0$
4. $x-3y+z-12=0$

正确答案 A，未有任何选项
解：设平面与线段 AB 的交点为 p(x,y,z), 根据题意 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{Ap}//\overrightarrow{pB}, |\overrightarrow{Ap}|=|\overrightarrow{pB}|$, 平面的法线是 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,1)$, 关键是求得 p 点。根据以上判断可得直线的参数方程 $\left\{\begin{array}{l} x=t+1 \\ y=-3t+2 \\ z=t+3 \end{array}\right.$ ，再根据 $|\overrightarrow{Ap}|=|\overrightarrow{pB}|$, 可得 t=1/2, 则可求得 $\left\{\begin{array}{l} x=3/2 \\ y=1/2 \\ z=7/2 \end{array}\right.$ ，根据点法式方程 $A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-z0)=0$ 得到方程为 A。

## 8.3 第三周

曲面方程:
旋转曲面方程：xoy 面 $f(x,y)$ 曲线，绕 x 轴的曲面方程：$f(x,\sqrt[2]{y^2+z^2})$
柱面方程：xoy 面,$C: f(x,y)=0$ 称为准线，平行于 z 轴的直线 l 称为母线，由 C 和 l 构成的曲面为柱面，方程为 $f(x,y)=0$
三元二次方程构成的曲面：

| 曲面名称 | 椭球面 | 抛物面<br>双曲抛物面<br>(马鞍面) | 椭球面 | 双曲面<br>单叶 | 双叶 |
|---|---|---|---|---|---|
| 方程 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$<br>(a,b,c>0) | $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$<br>p,q 异号 | $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$<br>p,q 同号 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$<br>2 个二次项为正 | $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$<br>2 个二次项为负 |
| 曲面图形 |  |  |  |  |  |

| 曲面名称 | 椭圆锥面 |
|---|---|
| 方程 | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ |
| 曲面图形 |  |

投影方程:
1) 消去 z 变量
2)z=0

1. 双曲抛物面（马鞍面）$x^2-y^2=2z$ 与 xoy 平面的交线是（）。

1. 相交于原点的两条直线.
2. 双曲线
3. 抛物线
4. 椭圆

正确答案 A，错选 B
解:xoy 面的方程为 z=0，与马鞍面方程联立得到 $x=\pm y$, 所以答案为 A

2. 方程 $\begin{cases} x^2-4y^2+z^2=25 \\ x=-3 \end{cases}$ 表示（）

1. x=-3 平面上的抛物线
2. 双曲柱面
3. 单叶双曲面

4. x=-3 平面上的双曲线

正确答案 D，错选为 A
解：将 x=-3 带入方程得到的是一个平行于 zoy 面的平面上的双曲线。如果没有 x=-3 的条件是双曲柱面，但是这里有 x=-3 的条件所以只能是一个曲线。

# 9 多元函数微分

## 9.1 第四周

**1** .$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在点 $p(x_0, y_0)$ 是连续的，是函数 f(x,y) 在点 (x0,y0) 可微的（）

1. 必要条件
2. 无关条件
3. 充分条件
4. 充分必要条件

正确答案 C，错选为 A

**2** . 设 $z = arctan\frac{x+y}{x-y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$=()

1. $\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}$
2. $-\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}$
3. $\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}$
4. $-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}$

正确答案为 D，错选为 B。

## 9.2 第五周

例 1： 设函数 $f(x, y, z) = xy^2z^3$, 若 $y = y(z, x)$ 为方程
$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ 确定的隐函数，则 $f_x(1, 1, 1)$ =?

解：由 $f(x,y,z) = xy^2z^3$ 得

$f_x = z^3y^2 + x\cdot 2y\cdot \frac{\partial y}{\partial x}\cdot z^3$ 1)

由于 $y = y(z,x)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$ 所确定的隐函数.

令 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz=0$

$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}$

$F_x = 2x-3yz$，$F_y = 2y-3xz$

$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x-3yz}{3xz-2y}$.

将结果代入 1)式 且 $x=y=z=1$

得 $f_x\big|_{1,1,1} = 1^3\times 1^2 + 1\times 2\times \frac{2\times 1-3\times 1\times 1}{3\times 1\times 1-2\times 1}\cdot 1^3$

$= 1-2 = -1$

解:

## 9.3 第六周

1. 下列向量中，与曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

在点 (1,1,-2) 处的切向量平行的是（）

1. (2,-3,1)
2. (2,-3,-1)
3. (2,3,1)
4. (-2,-3,1)

正确答案为 A，未有任何选项。

解：要求切向量即求 $y', z'$  $x'=1$

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ① 式

两边求导得

$$\begin{cases} 2x+2yy'+2zz'-2=0 \\ 1+y'+z'=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} y' = \dfrac{z-x}{y-z-1} \\ z' = -1-y' \end{cases}$  将 $(x,y,z)=(1,1,-2)$ 代入得 $\begin{cases} y' = -\dfrac{3}{2} \\ z' = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

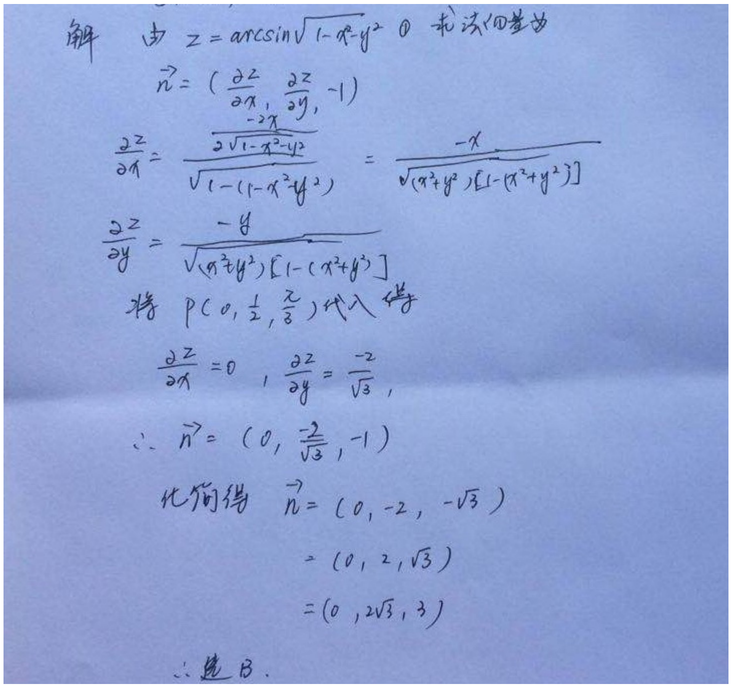
∴ 在P处的切向量为

$(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 由此可看出 应选A.

2. 曲面 $z = arcsin\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0, 1/2, \pi/3)$ 处的切平面的法向量是（）

1. $(2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3, 1)$
2. $(0, , 2\sqrt{3}, 3)$
3. $(0, 2\sqrt{3}/3, -1)$
4. $(2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3, -1)$

正确答案为 B，错选为 C



解 由 $z=\arcsin\sqrt{1-x^2-y^2}$ ① 求法向量为

$\vec{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2-y^2)}}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)[1-(x^2+y^2)]}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2)[1-(x^2+y^2)]}}$$

将 $P(0,\frac{1}{2},\frac{\pi}{3})$ 代入得

$\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2}{\sqrt{3}}$,

$\therefore\ \vec{n}=(0,\frac{-2}{\sqrt{3}},-1)$

化简得 $\vec{n}=(0,-2,-\sqrt{3})$

$=(0,2,\sqrt{3})$

$=(0,2\sqrt{3},3)$

∴选B.

3. 曲面 $z=2x^2+y^2$, 该曲面与平面 $x+y+z=0$ 平行的切平面方程为（）

1. $(x+y+z+3/8=0)$
2. $(x+y+z+1/8=0)$
3. $(x+y+z-5/8=0)$
4. $(x+y+z-9/8=0)$

正确答案为 A，错选为 D

解 由于切面方程与平面 $x+y+z=0$ 平行
∴其法向量应平行 平面 $x+y+z=0$ 的 法向量 $\vec{n}=(1,1,1)$
曲面 $z=2x^2+y^2$ 的法向量为
$\vec{m}=(4x,2y,-1)$
由于 $\vec{n}\parallel\vec{m}$
∴ $\frac{4x}{1}=\frac{2y}{1}=\frac{-1}{1}$
∴ $y=-\frac{1}{2}$ $x=-\frac{1}{4}$
将其代入曲面方程 得 $z=\frac{3}{8}$，即切点为 $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{3}{8})$
∴切平面方程为 $(x+\frac{1}{4})+(y+\frac{1}{2})+(z-\frac{3}{8})=0$
化简得 $x+y+z+\frac{3}{8}=0$
故选A.

4. 平面 $x+y-z+a=0$ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 的切平面，则 a 为 ()

1. 2
2. 1/2
3. 1
4. 0

正确答案为 B，错选为 D

解 曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为
$\vec{n}=(2x,2y,-1)$，平面 $x+y-z+a=0$ 的法向量 $\vec{m}=(1,1,-1)$
由于 $\vec{n}\parallel\vec{m}$
∴ $\frac{2x}{1}=\frac{2y}{1}=\frac{-1}{-1}$
即 $x=y=\frac{1}{2}$
代入曲面方程得 $z=\frac{1}{2}$
代入切平面方程
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+a=0$ ∴ $a=\frac{1}{2}$
故选B

5. 函数 $f(x,y)=xy$ 在点 $(0,0)$ 处函数值增加最快的方向是（）

1. (1,1)
2. (1,-1),(-1,1)
3. (1,1),(-1,-1)
4. (-1,-1)

正确答案为 C，错选为 A

解？

$\frac{\partial f}{\partial x}=y, \frac{\partial f}{\partial y}=x$ f 增量在 x 轴的投影 =y，f 增量再 y 轴的投影 =x，所以梯度的方向向量为 45 度。

6. 曲线

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$$

在点 M 处的切线平行于 x+2y+z=4, 则点 M 的坐标为（）

解：切线 // 平面 $x+2y+z=4$. 平面的法向量 $\vec{n}=(1,2,1)$

由于切线 $l$ // 平面 ∴ 切线 $l$ 与 $\vec{n}$ 垂直.

切线 $l$ 的方向向量为 $(1, 2t, 3t^2)$

$\vec{l}\cdot\vec{n}=0$ 即 $1+4t+3t^2=0$

解得 $t=-\frac{1}{3}$ 或 $t=-1$

代入得 M 坐标为 $(-1, 1, -1)$

或 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$

7. 函数 $u=x^2+3xy-y^2$ 在点（1,1）处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,-5)$ 的方向导数为（）
方向导数为一个数 $=\frac{\partial f}{\partial x}cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}cos\beta$, 是梯度在直线 l 上的投影。

解： 梯度向量 $=(F_x, F_y)$

$F_x=2x+3y$ 在(1,1)处 $\begin{cases} F_x=5 \\ F_y=1 \end{cases}$

$F_y=3x-2y$

直线 $l$ 的方向向量.

$\left(\frac{1}{\sqrt{1+5^2}}, \frac{-5}{\sqrt{1+5^2}}\right)$ 方向导数 $=5\cdot\frac{1}{\sqrt{1+5^2}}+\left(\frac{-5}{\sqrt{1+5^2}}\right)=0$

# 10　多元函数积分

## 10.1　第八周

1. 由 $xy=a^2, xy=2a^2, y=x(x>0,y>0)$ 所围成的平面区域面积为（）

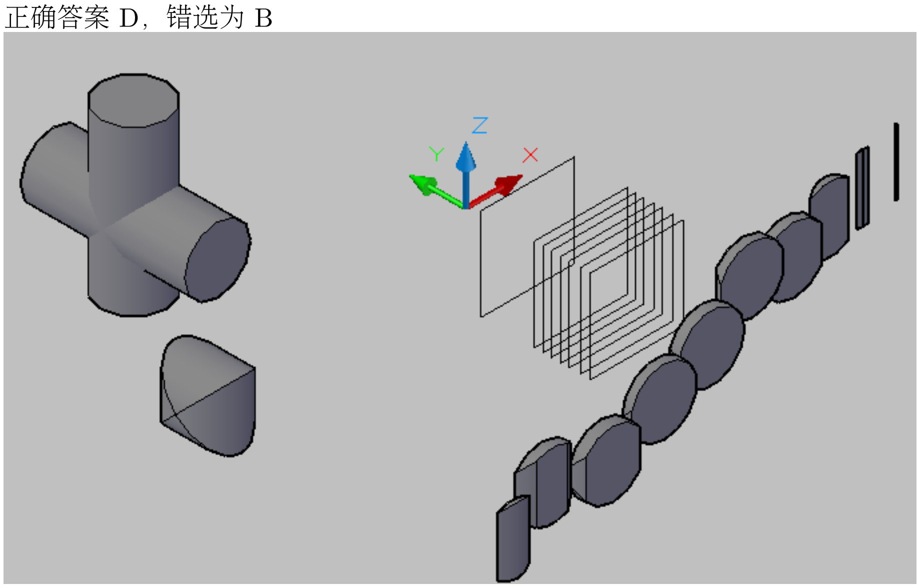
   1. $a^2ln2$
   2. $\frac{1}{8}a^2ln2$
   3. $\frac{1}{2}a^2ln2$
   4. $\frac{1}{4}a^2ln2$

正确答案 C，没有任何选项

**2**　. 两个圆柱体 $x^2+y^2<=R^2, x^2+z^2<=R^2(R>0)$ 公共部分体积为（）

   1. $\int_{-R}^{R}dx\int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy$
   2. $4\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy$
   3. $2\int_{0}^{R}dx\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy$
   4. $8\int_{0}^{R}dx\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}dy$

正确答案 D，错选为 B



解：由 $z^2+x^2=R^2$ 得 $z=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

由 $x^2+y^2=R^2$ 得 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

$x\in[-R,R]$

再由 $V=\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,dy$.

二重计算计算的是体积、

$z=f(x,y)=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

$y_1(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$，$y_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

$x_1=-R$，$x_2=R$.

$$\therefore V=\int_{-R}^{R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\pm\sqrt{R^2-x^2}\,dy.$$

$\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

$$=8\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy.$$

## 10.2 第九周

1. 二重积分 $\iint xyd\sigma=()$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=2y$, 直线 $y=x$, 以及直线 $x=0$ 所围成的区域。

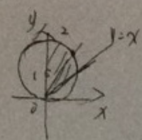
1. $\frac{7}{12}$
2. $\frac{3}{4}$

3. $\frac{1}{3}$

4. $\frac{3}{2}$

正确答案 A，错选为 C

解：由D可知积分区域如图：




采用极坐标形式

$$\begin{cases} \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ \rho = 2\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\,d\sigma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho\cos\theta \cdot \rho\sin\theta\,\rho\,d\rho$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^3 \cos\theta\sin\theta\,d\rho$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \underset{\cos\theta\sin\theta}{\wedge} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\,d\sin\theta$$

$$= 4\,\frac{\sin^6\theta}{6}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\,\frac{1-\frac{1}{8}}{6} = \frac{7}{12}$$

**2** . 二重积分 $\iint_D arctan\frac{y}{x}d\sigma()$, 其中 D 是由 $\{(x,y)|1 <= x^2+y^2 <= 4, x >= 0, y >= 0\}$ 所围成的区域。

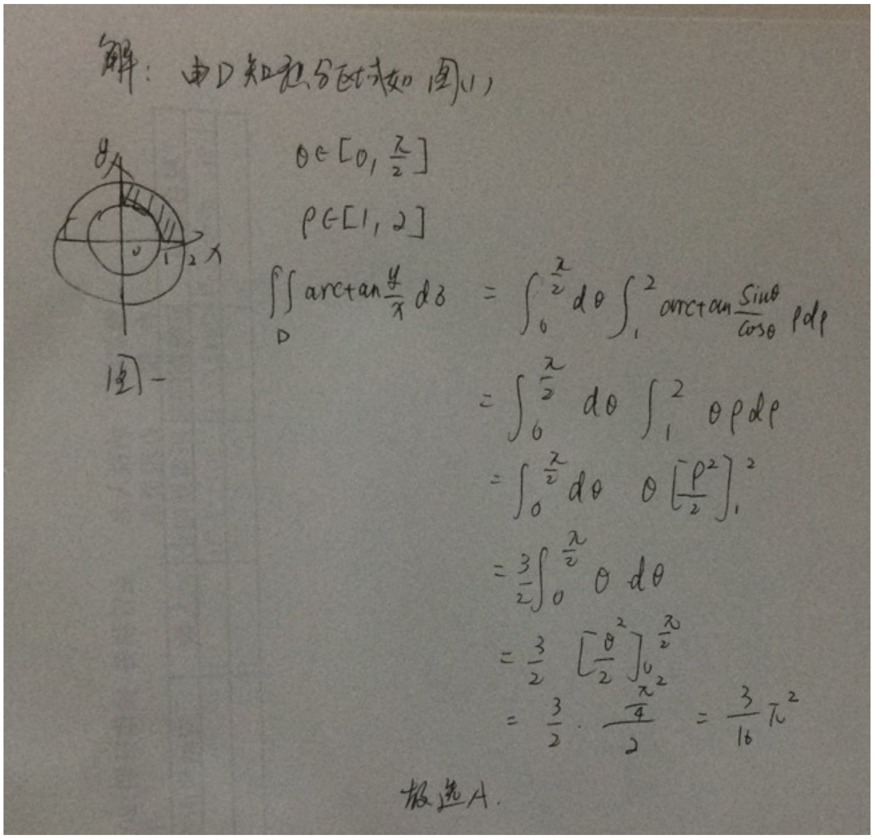
1. $\frac{3\pi^2}{16}$

2. $\frac{3\pi^2}{2}$

3. $\frac{3\pi^2}{4}$

4. $\frac{3\pi^2}{32}$

正确答案 A，错选为 C



解：由D知积分区域如图(1)

图一

$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\rho\in[1,2]$

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\arctan\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\rho\,d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\theta\rho\,d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\quad\theta\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}=\frac{3}{16}\pi^2$$

故选A.

**3** ．二重积分 $\iint_D 2x-x^2-y^2 d\sigma()$, 其中 D 是由 $\{(x,y)|(x-1)^2+y^2<=1\}$ 所围成的区域。

1. $\frac{\pi}{3}$
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{\pi}{1}$
4. $\frac{2\pi}{3}$

正确答案 B

解 由 $(x-1)^2+y^2\le 1$

积分区域如图1

用极坐标系 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $\rho=2\cos\theta$

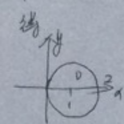


图1

则 $\iint_D(2x-x^2-y^2)d\sigma=\iint_D(2\rho\cos\theta-\rho^2)d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(2\rho\cos\theta-\rho^2)\rho d\rho$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}2\rho^2\cos\theta-\rho^3d\rho$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}\rho^3\cos\theta-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}8\cos^4\theta-\frac{16\cos^4\theta}{4}\right]d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\cos^4\theta d\theta$

$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2\theta]^2d\theta$

$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos2\theta-1}{2}\right]^2d\theta$

$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2\theta+1-2\cos2\theta}{4}d\theta$

$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos4\theta+1}{2}+1-2\cos2\theta\right)d\theta$

$=\frac{1}{3}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos4\theta}{2}d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos2\theta d\theta\right]$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{\sin4\theta}{8}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{2}\cdot\pi-\sin2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$

$=\frac{1}{3}\left[0+\frac{3}{2}\pi-0\right]$

$=\frac{\pi}{2}$

## 10.3 第十周

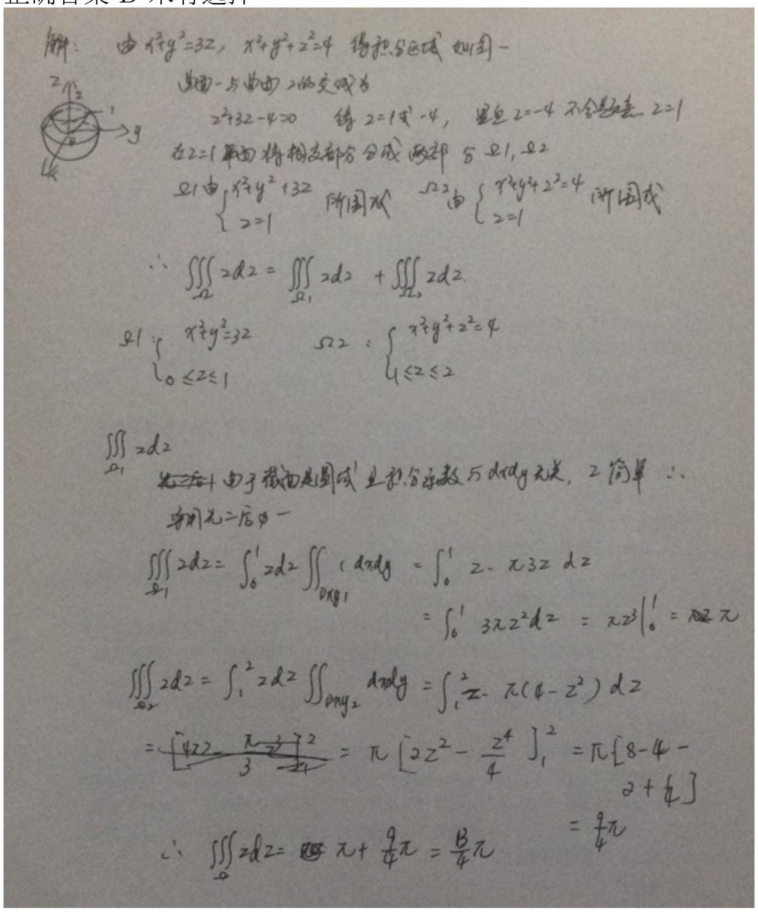
**1** . 计算三重积分 $\iiint_\Omega zdV=()$, 其中 $\Omega$ 是由 $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=3z$ 所围成的区域。

1. $\frac{\pi}{2}$
2. $\frac{3\pi}{4}$

3. $\frac{\pi}{4}$

4. $\frac{13\pi}{4}$

正确答案 D 未有选择



解：由 $x^2+y^2=3z$，$x^2+y^2+z^2=4$ 得积分区域如图一

曲面一与曲面二的交线为

$z^2+3z-4=0$ 得 $z=1$ 或 $-4$，显然 $z=-4$ 不合题意 $z=1$

在 $z=1$ 平面将相交部分分成两部分 $\Omega_1,\Omega_2$

$\Omega_1$ 由 $\begin{cases} x^2+y^2=3z \\ z=1 \end{cases}$ 所围成　$\Omega_2$ 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$ 所围成

$\therefore \iiint_{\Omega} z\,dz = \iiint_{\Omega_1} z\,dz + \iiint_{\Omega_2} z\,dz$

$\Omega_1: \begin{cases} x^2+y^2=3z \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$　$\Omega_2: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ 1\le z\le 2 \end{cases}$

$\iiint_{\Omega_1} z\,dz$

~~先二后一~~ 由于截面是圆域且积分函数与 dxdy 无关，z 简单 ∴ 采用先二后一

$\iiint_{\Omega_1} z\,dz = \int_0^1 z\,dz \iint_{D_{xy1}} dxdy = \int_0^1 z\cdot\pi 3z\,dz$

$= \int_0^1 3\pi z^2\,dz = \pi z^3\Big|_0^1 = \pi$

$\iiint_{\Omega_2} z\,dz = \int_1^2 z\,dz \iint_{D_{xy2}} dxdy = \int_1^2 z\cdot\pi(4-z^2)\,dz$

$= \pi\left[2z^2-\frac{z^4}{4}\right]_1^2 = \pi\left[8-4-2+\frac{1}{4}\right] = \frac{9}{4}\pi$

$\therefore \iiint_{\Omega} z\,dz = \pi+\frac{9}{4}\pi = \frac{13}{4}\pi$

**2** . 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} f(ax+by+cz)dxdydz =()$, 其中 $\Omega = (x,y,z)|x^2+y^2 <= 1$ 所围成的区域,$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,f(x) 在区间 $[-h,h]$ 上连续。

1. $\int_{1}^{1}(1+t^2)f(ht)dt$

2. $\int_{1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$

3. $\pi\int_{1}^{1}(1-t^2)f(ht)dt$

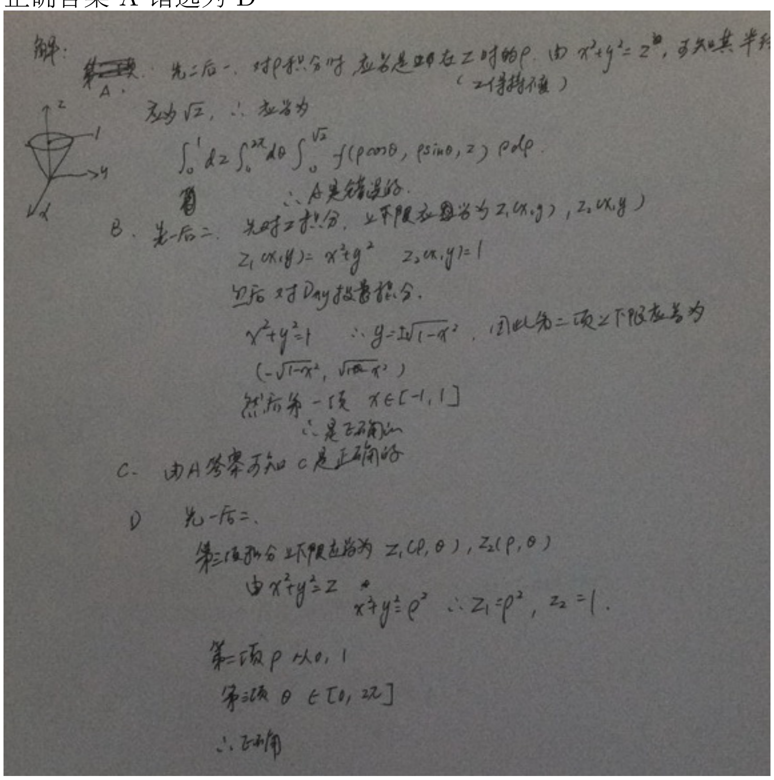
4. $\pi\int_{1}^{1}(1+t^2)f(ht)dt$

正确答案 C 错选为 A

**3** ．下列累次积分中不表示三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV =$ 的是 (), 其中 $\Omega = x^2+y^2 <= z, 0 <= z <= 1$ 所围成的区域。

1. $\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(\rho cos(\theta), \rho sin(\theta), z)\rho d\rho$
2. $\int_{-1}^1 dz \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 f(x,y,z)dz$
3. $\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} f(\rho cos(\theta), \rho sin(\theta), z)\rho d\rho$
4. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 f(\rho cos(\theta), \rho sin(\theta), z)dz$

正确答案 A 错选为 D




## 10.4 第十一周

**1** ．已知 L 为以 O(0,0),A(1,0),B(0,1) 为顶点的三角形的边界，则曲线 $\int_L (x+y)ds =$()。

1. $\frac{\sqrt{2}+1}{1}$
2. $\frac{\sqrt{2}-1}{1}$
3. $\frac{1}{1}$

4. $\frac{\sqrt{2}}{1}$

正确答案 A 错选为 D

**2** . 已知曲线 L 为 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0), x+y+z=0$，则曲线 $\int_L(x^2)ds=()$。

1. $\frac{4}{3}\pi R^3$
2. $\frac{1}{3}\pi R^3$
3. $\frac{1}{1}\pi R^3$
4. $\frac{2}{3}\pi R^3$

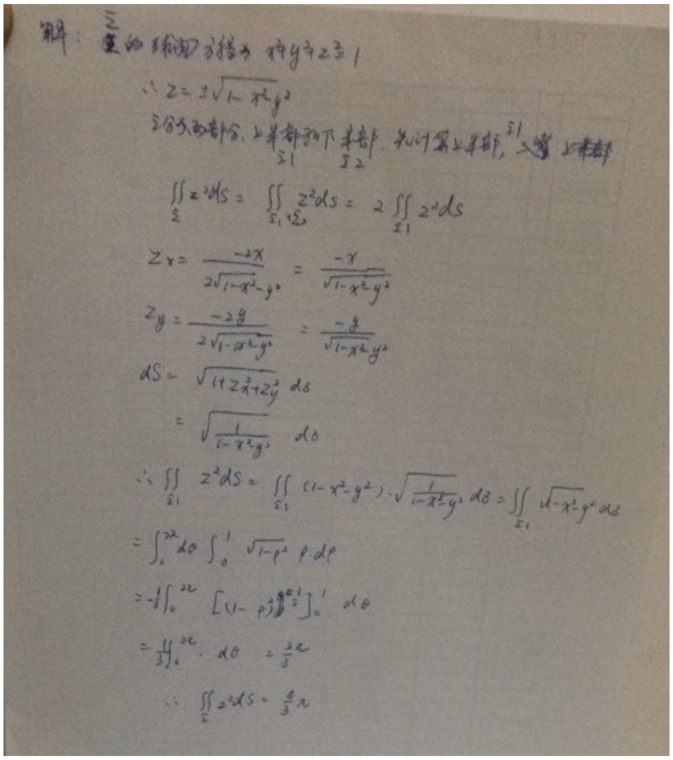
正确答案 D 没有选项
使用 mathmatics 计算的结果是

```
Solve[{x^2 + y^2 + z^2 == R^2, x + y + z == 0}, {y, z}]
{{y -> 1/2 (-x - Sqrt[2 R^2 - 3 x^2]),
  z -> 1/2 (-x + Sqrt[2 R^2 - 3 x^2])},
 {y -> 1/2 (-x + Sqrt[2 R^2 - 3 x^2]),
  z -> 1/2 (-x - Sqrt[2 R^2 - 3 x^2])}}
dyx = D[y, x];
dzx = D[z, x];
ds = x^2*Sqrt[1 + dyx^2 + dzx^2];
Integrate[ds, {x, -R, R}]
(2 R^3)/3
```

**3** . 已知曲面 Σ 是单位球面，则 $\iint_\Sigma(z^2)dS=()$。

1. $\frac{-4}{3}\pi$
2. $\frac{4}{3}\pi$
3. $\frac{1}{1}\pi$
4. $\frac{4}{1}\pi$

正确答案 B 错选为 C



解：$\Sigma$ 的球面方程为 $x^2+y^2+z^2=1$

$\therefore z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

$\Sigma$ 分为两部分，上半部 $\Sigma_1$ 和下半部 $\Sigma_2$，先计算上半部，$\Sigma_1$ 为上半部

$$\iint_{\Sigma} z^2 dS=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} z^2 dS=2\iint_{\Sigma_1} z^2 dS$$

$$z_x=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$z_y=\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma=\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\,d\sigma$$

$$\therefore \iint_{\Sigma_1} z^2 dS=\iint_{\Sigma_1}(1-x^2-y^2)\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}\,d\sigma=\iint_{\Sigma_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} z^2 dS=\frac{4}{3}\pi$$

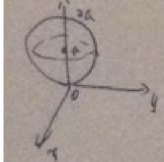
## 10.5 第十二周

**1** . 球体 $x^2+y^2+z^2<=2az(a>0)$ 的任意一点的密度在数量上等于此点到坐标原点的距离的平方，则此球体的重心坐标是（）。

1. $(0,0,3/4a)$
2. $(0,0,5/4a)$
3. $(0,0,7/4a)$
4. $(0,0,4/3a)$

正确答案 B 错选为 D
解答与答案不一样

解：由 $x^2+y^2+z^2\le 2az$ 可得积分区域如图！




根据物理知识，$G=mg$.

重心坐标，$\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}G_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i}$ $\bar{z}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}G_i\cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i}$

$\bar{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}G_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i}$

由于所示积分区域关于x轴，y轴对称 $\therefore \bar{x}=\bar{y}=0$

只须计算 $\bar{z}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}G_i z_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i}$ 又由于 $G=mg$ $\therefore \bar{z}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}m_i g_i\cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i g_i}$

由于在极小范围内 $g_i$ 可视为不变 ∴ 可以将 $g_i$ 约去 $\approx \dfrac{\sum_{i=1}^{n}m_i z_i}{m_i}$

即 $\bar{z}=\dfrac{M_z}{M}$ $M_z$ 是z轴静矩 M是总质量

$M=\iiint_\Omega dm$ $M_z=\iiint_\Omega z\cdot dm$.

$dm=\rho\cdot dv$

根据题意 $\rho=x^2+y^2+z^2$

由题 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}+a$，$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ $z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=a\sqrt{\dfrac{1}{a^2-x^2-y^2}}$ $x^2+y^2=2az-z^2=R^2$ （R是在z处的圆半径）

$$M=\iiint_\Omega \rho\, dV=\int_0^{2a}dz\iint_{D_{xy}}\left[x^2+y^2+(\sqrt{a^2-x^2-y^2}+a)^2\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma_{xy}\right.$$

$$=\int_0^{2a}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}-1\right)\rho\, d\rho$$

$$=a^2\int_0^{2a}dz\int_0^{2\pi}z^2\,d\theta=a^2\int_0^{2a}\frac{z^2}{\cancel{0}}\cdot 2\pi\, dz=\frac{2}{\cancel{0}}\pi a^2\int_0^{2a}z^2\,dz$$

$$=\frac{2}{\cancel{4}}\pi a^2\left[\frac{z^3}{\cancel{9}3}\right]_0^{2a}=\frac{16}{3}\pi a^5$$

$$M_z=\iiint_\Omega z\rho\, dV=a^2\int_0^{2a}dz\int_0^{2\pi}z^3\,d\theta=a^2\int_0^{2a}z^3\cdot 2\pi\, dz=2\pi a^2\int_0^{2a}z^3\,dz$$

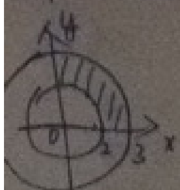
$$=2\pi a^2\cdot\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^{2a}=8\pi a^6\quad\therefore \bar{z}=\frac{M_z}{M}=\cancel{\frac{16\pi a^5}{3}}\ \frac{8\pi a^6}{\frac{16}{3}\pi a^5}=\frac{3}{2}a$$

**3** . 设 D=$\{(x,y)|4 <= x^2+y^2 <= 9\}$ 是一个平面圆环，每点的面密度是 $\mu(x,y)=1+x^2+y^2$, 则 D 在第一象限的重心为 ()。

1. $(5824/(1125\pi), 5824/(1125\pi))$
2. $(16/(3\pi), 16/(3\pi))$
3. $(8/(3\pi), 8/(3\pi))$
4. $(4/(3\pi), 4/(3\pi))$

正确答案 A , 选对了

解：由所积分区域如图1所示.




由 $D_\theta$: $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\rho\in[2,3]$

$M=\iint_{D_{xy}} \mu\, dS \qquad M_x=\iint_{D_{xy}} \mu\cdot x\, dS.$

$\mu=1+x^2+y^2=1+\rho^2 \qquad x=\rho\cdot\cos\theta.$

$\therefore M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^3(1+\rho^2)\rho\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{75}{4}\, d\theta = \frac{75}{8}\pi$

$M_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^3(1+\rho^2)\rho\cdot\rho\cos\theta\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\frac{728}{15}\, d\theta$

$= \frac{728}{15}$

$M_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^3(1+\rho^2)\rho\cdot\rho\sin\theta\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, \frac{728}{15}\, d\theta$

$= \frac{728}{15}$

$\therefore \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{728}{15}}{\frac{75}{8}\pi} = \frac{5824}{1125\pi}$

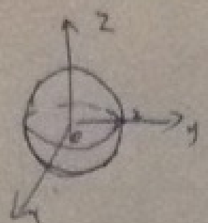
$\bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{728}{15}}{\frac{75}{8}\pi} = \frac{5824}{1125\pi}.$

**4** . 半径为 2 的球体，其密度与点到球心的距离成正比，已知球面上个点的密度为 2，则球体的质量为 ()。

1. $24\pi$
2. $8\pi$
3. $32\pi$
4. $16\pi$

正确答案 D , 错选为 C

4、解：由题意知积分区域如图一




球面方程为 $x^2+y^2+z^2=4$

密度 $\rho=k\cdot r$.　　r为圆心到球面任一点距离，

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

由于 $2=k\cdot 2$　　$\therefore k=1$

即 $\rho=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}\qquad z_x=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$z_y=\frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$M=\iiint_{\Omega}\rho\, dv=\int_{-a}^{a}dz\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,d\sigma_{xy}$$

$$=\int_{-a}^{a}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}2\cdot\frac{a}{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\, d\rho$$

$$=4a\int_{-a}^{a}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\,d\rho$$

$$=4a\int_{-a}^{a}dz\int_0^{2\pi}(2-z)\,d\theta$$

$$=4a\int_{-a}^{a}2\pi(2-z)\,dz$$

$$=2\pi a\left[2z-\frac{z^2}{2}\right]_{-a}^{a}$$

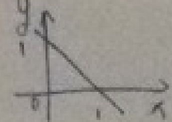
$$=2\pi a\cdot 4a=8\pi a^2=32\pi$$

**5** . 设平面薄片 D 有直线 x+y=1 与两坐标轴所围成的闭区域，其密度函数为 $\mu(x,y)=xy$, 则该平面薄片的质量为 （）。

1. 1/8
2. 1/12
3. 1/24
4. 1/4

正确答案 C

5 解 积分区域为图一所示




$$M=\iint_{D_{xy}} \mu(x,y)\,d\sigma$$

$$=\iint_{D_{xy}} xy\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy\,dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1+x^2-2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (x+x^3-2x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{6+3-8}{12}=\frac{1}{24}$$

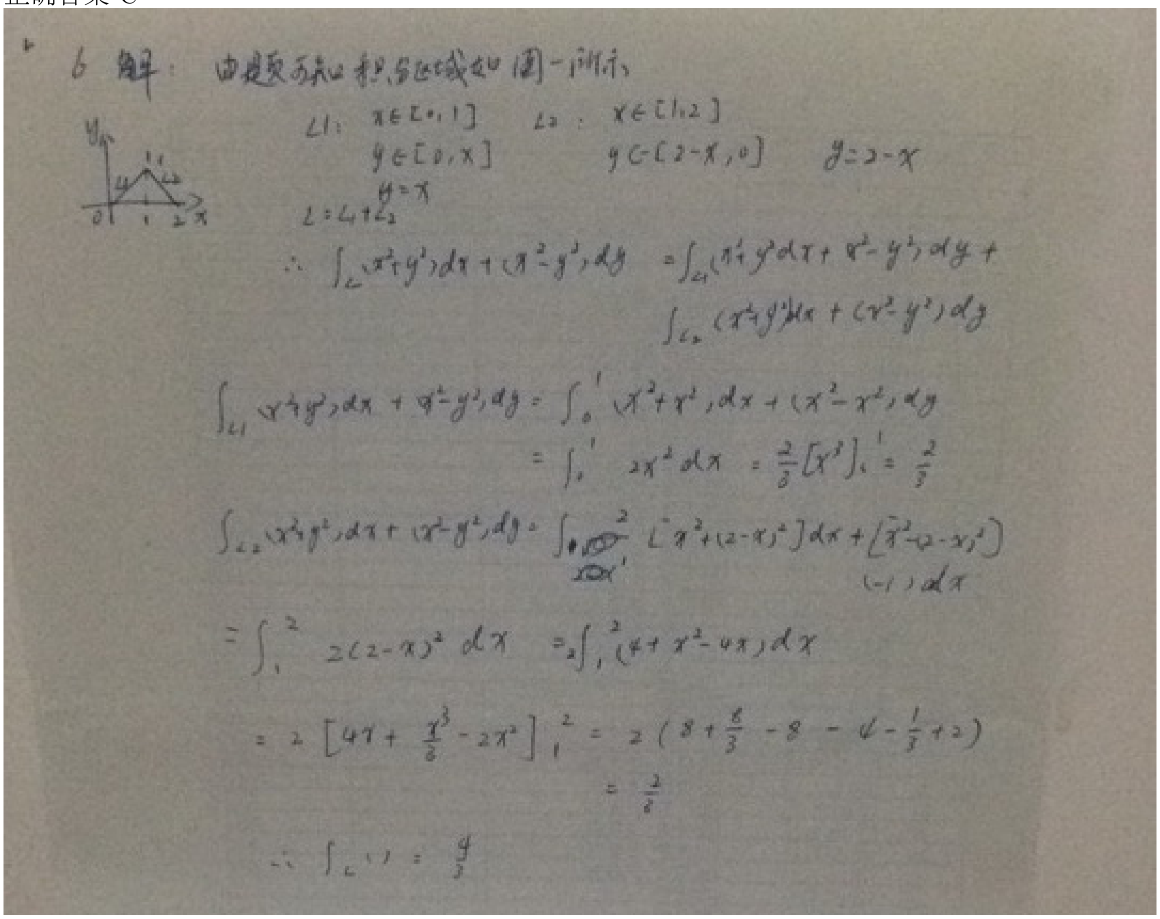
**6** . 已知 L 为由 $y=1-|1-x|, x\in[0,2]$（曲线正向为 x 增长的方向），则 $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=()$.

1. 2
2. 2/3

3. 4/3

4. 8/3

正确答案 C



6 解：由题可知积分区域如图一所示

$L_1$: $x\in[0,1]$, $y\in[0,x]$, $y=x$　　$L_2$: $x\in[1,2]$, $y\in[2-x,0]$, $y=2-x$

$L=L_1+L_2$

$\therefore \int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \int_{L_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy + \int_{L_2}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$

$\int_{L_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \int_0^1 (x^2+x^2)dx+(x^2-x^2)dy = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}[x^3]_0^1 = \frac{2}{3}$

$\int_{L_2}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy = \int_1^2 [x^2+(2-x)^2]dx+[x^2-(2-x)^2](-1)dx$

$= \int_1^2 2(2-x)^2dx = 2\int_1^2(4+x^2-4x)dx$

$= 2\left[4x+\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_1^2 = 2(8+\frac{8}{3}-8-4-\frac{1}{3}+2) = \frac{2}{3}$

$\therefore \int_L (\ ) = \frac{4}{3}$

9. 已知 L 为由 $x^2+y^2+z^2=1, z=y$（由 z 轴正向看去为逆时针方向），则 $\oint_L (xyz)dz=()$.

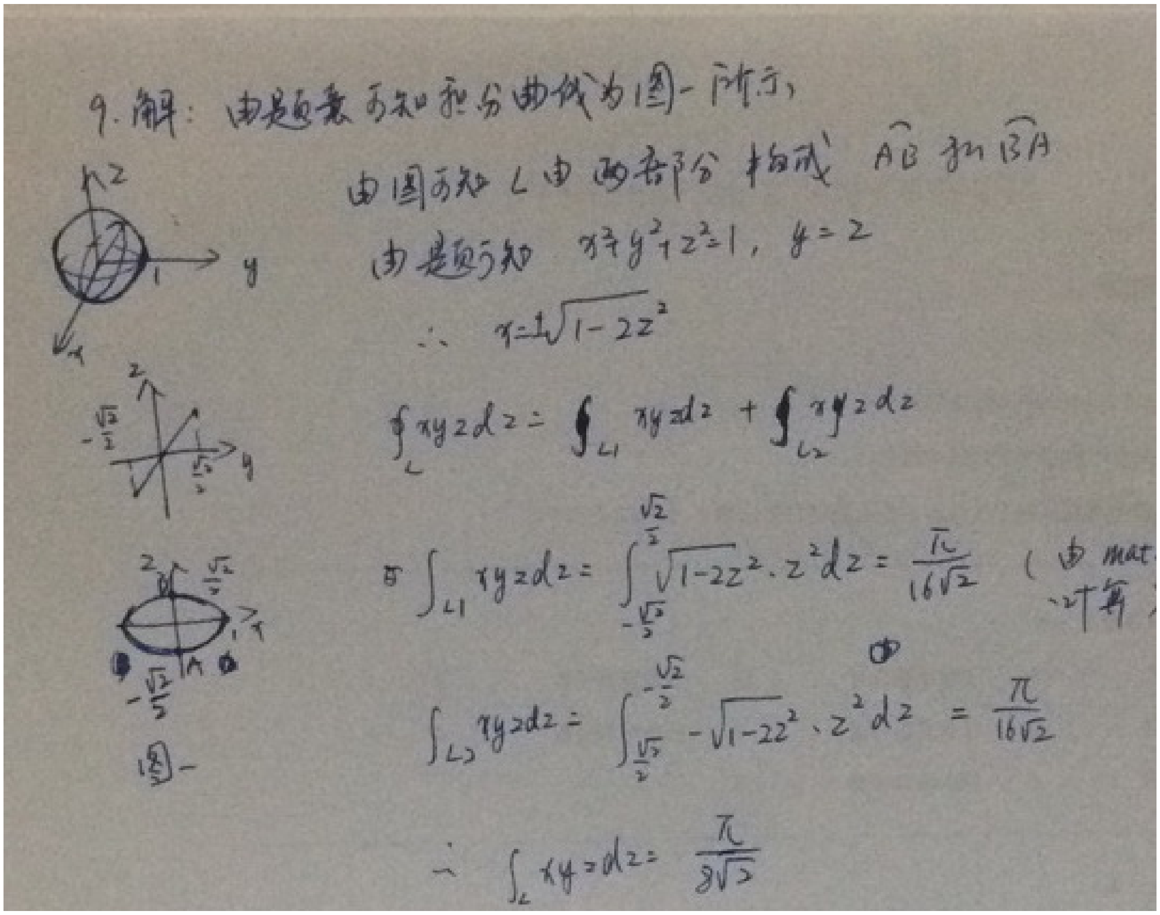
1. $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

2. $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}$

3. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

4. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

正确答案 A ,




## 10.6 第十三周

**1** . 设 L 是原点 O 沿抛物线 $y=x^2$ 到 A（1,1），再由 A 点沿直线 y=x，到原点的封闭曲线，则 $\oint arctan\frac{y}{x}dy - dx =()$.

1. $\frac{\pi}{4}+1$
2. $\frac{\pi}{4}-1$
3. $\frac{\pi}{2}+1$
4. $\frac{\pi}{2}-1$

用格林公式反而复杂，直接用曲线积分，分成两段。
$\oint arctan\frac{y}{x}dy - dx = \oint_L arctan\frac{y}{x}dy - \oint_L dx$, 后者积分为 0. 前者分成两段积分。
正确答案 B ,

**4** ．对于格林公式 $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$, 下列说法正确的是（）。

1. L 取顺时针方向，函数 P，Q 在闭区域上存在一阶连续偏导数。
2. L 取 D 正向边界，函数 P，Q 在闭区域上存在一阶连续偏导数。
3. L 取逆时针方向，函数 P，Q 在闭区域上存在一阶偏导数。
4. L 取逆时针方向，函数 P，Q 在闭区域上存在一阶连续偏导数。

正确答案 B，错选为 C

## 10.7 第十四周

**1** ．设有曲面 $\Sigma : x + y + z = 1 (x >= 0, y >= 0, z >= 0)$, 其法向量与 z 轴正向成钝角，则曲面积分 $\iint_\Sigma (x+2)dydz + ydzdx + dxdy$=()

1. $\frac{-11}{6}$
2. $\frac{11}{6}$
3. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
4. $\frac{-4\sqrt{3}}{3}$

正确答案 A

**2** ．曲面 $\Sigma : x + y + z = 1$ 为下侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma zdxdy$=()

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{-1}{6}$
3. $\frac{1}{6}$
4. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

正确答案 B

**3** ．曲面 $\Sigma : \begin{cases} y = \sqrt{1+x^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad (1 <= z <= 2)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面，法向量与 z 轴正向夹角成锐角，则 $\iint_\Sigma sinxdxdy + xz^2dydz$=()

1. $\frac{128\pi}{15}$
2. $\frac{-128\pi}{45}$
3. $\frac{-128\pi}{15}$
4. $\frac{128\pi}{45}$

正确答案 C 未有任何选项

**4** . 设有曲面 $\Sigma : x^2 + y^2 = R^2$, 在 y>=0,z>=0 两卦限内被平面 z=0 和 z=h 所截下的部分外侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma yzdxy + xyydydz + xzdzdx$=()

1. $\frac{2hR^2}{3}$
2. $\frac{2hR^3}{3}$
3. $\frac{3hR^2}{4}$
4. $\frac{3hR^3}{4}$

正确答案 B

**5** . 设有曲面 $\Sigma : x^2 + y^2 = 9$, 的外侧，曲面积分 $\iint_\Sigma zdxy$=()

1. $\frac{48\pi}{1}$
2. $\frac{36\pi}{1}$
3. $\frac{12\pi}{1}$
4. $\frac{24\pi}{1}$

正确答案 B

**6** . 设有曲面 $\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}(0 <= z <= 1)$, 的上侧，曲面积分 $\iint_\Sigma xzdydz + yzdzdx = z^2dxdy$=()

1. $\frac{-\pi}{1}$
2. $\frac{\pi}{1}$
3. 0
4. $\frac{\pi}{2}$

正确答案 A 错选为 D

**7** . 设曲面 $\Sigma : z = x^2 + y^2(0 <= z <= a^2)$, 的下侧，曲面积分 $\iint_\Sigma (z - y^2 + x^2)dxdy + (y - x^2 + z^2)dydz + (x - z^2 + y^2)dzdx$=()

1. $\pi a^4$
2. $\frac{1}{2}\pi a^4$
3. $\frac{-3}{2}\pi a^4$
4. $-\pi a^4$

正确答案 D 错选为 B

**8** . 设曲面 $\Sigma : x^2 + y^2 = 1$, 的外侧，曲面积分 $\oiint_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$=()

1. $\frac{6}{5}\pi$
2. $\frac{-6}{5}\pi$
3. $\frac{-12}{5}\pi$
4. $\frac{12}{5}\pi$

正确答案 D

**9** . 设曲面 $\Sigma : x^2 + y^2 = 1$, 与 z=1，z=3 所围成的空间闭区域的外侧，曲面积分 $\iint_\Sigma (x-y)dxdy + x(y-z)dydz$=()

1. $4\pi$
2. $-4\pi$
3. $\pi$
4. $-\pi$

正确答案 B 没有任何选项

**1** 0. 设曲面 $\Sigma : x^2 + y^2 = 1$, 与 z=0，z=3 所围成的空间闭区域的外侧，曲面积分 $\iint_\Sigma (x-y)dxdy + x(y-z)dydz$=()

1. $3\pi$
2. $\frac{-9}{2}\pi$
3. $\frac{9}{2}\pi$
4. 0

正确答案 D 错选为 B

# 11 级数

## 11.1 第十五周

1. 利用级数收敛性定义验证级数

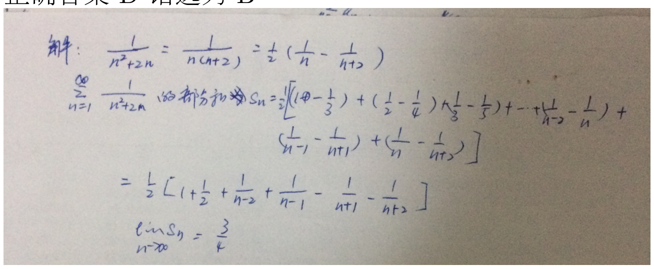
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

的敛散性得其和为（）

1. 1

2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{3}{4}$

正确答案 D 错选为 B


解: $\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$ 的部分和 $S_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$

$=\frac{1}{2}[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}]$

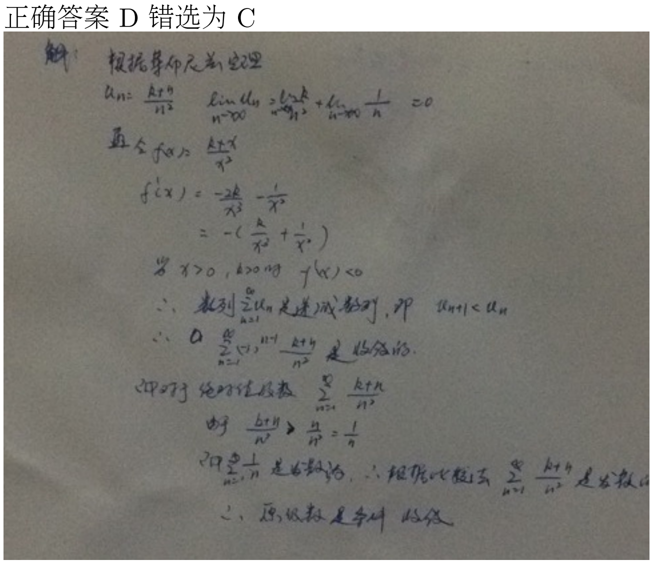
$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$

2. 常数 k>0, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$$

1. 发散
2. 绝对收敛
3. 收敛或发散与 k 值有关
4. 条件收敛

正确答案 D 错选为 C


解: 根据莱布尼茨定理

$u_n=\frac{k+n}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

再令 $f(x)=\frac{k+x}{x^2}$

$f'(x)=-\frac{2k}{x^3}-\frac{1}{x^2}$

$=-(\frac{k}{x^3}+\frac{1}{x^2})$

当 $x>0$, $k>0$ 时 $f'(x)<0$

∴ 数列 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是递减数列, 即 $u_{n+1}<u_n$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{k+n}{n^2}$ 是收敛的.

而对于绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}$

由于 $\frac{k+n}{n^2}>\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的, ∴ 根据比较法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}$ 是发散的

∴ 原级数是条件收敛

3. 下列级数是条件收敛的是

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n+1}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

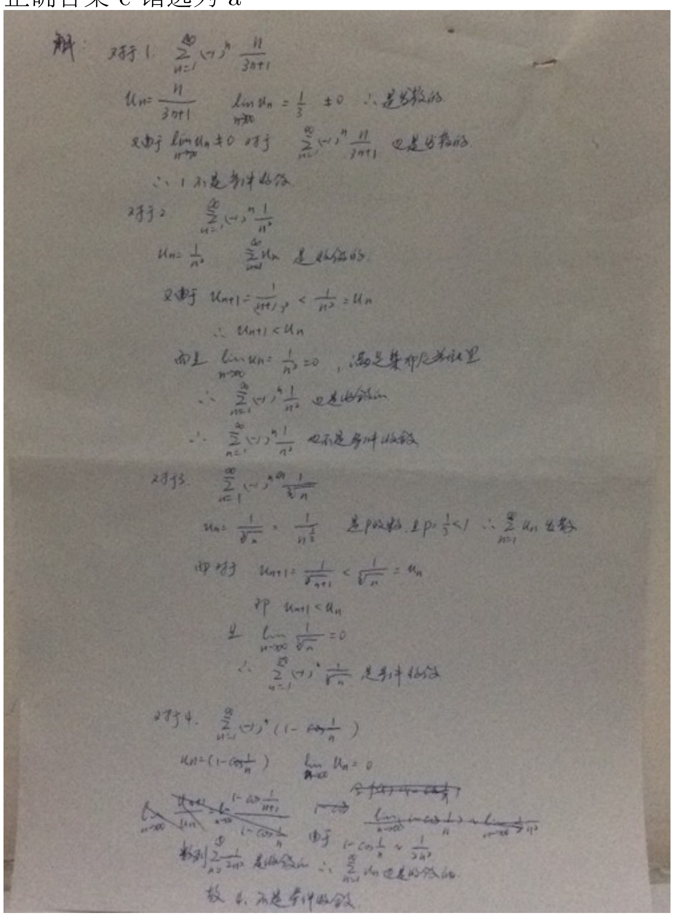
3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-cos\frac{1}{n})$$

正确答案 c 错选为 a



解：对于1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n+1}$

$u_n=\frac{n}{3n+1}$ $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{3}\neq 0$ ∴是发散的

又由于 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n+1}$ 也是发散的

∴ 1 不是条件收敛

对于2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$

$u_n=\frac{1}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛的

又由于 $u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2}=u_n$

∴ $u_{n+1}<u_n$

而且 $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{n^2}=0$，满足莱布尼兹定理

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 也是收敛的

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 也不是条件收敛

对于3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

$u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ 是p级数，且 $p=\frac{1}{3}<1$ ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

而对于 $u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=u_n$

即 $u_{n+1}<u_n$

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 是条件收敛

对于4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{1}{n})$

$u_n=(1-\cos\frac{1}{n})$ $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

由于 $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$

根据 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 是收敛的 ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也是收敛的

故 4. 不是条件收敛

3. 若级数

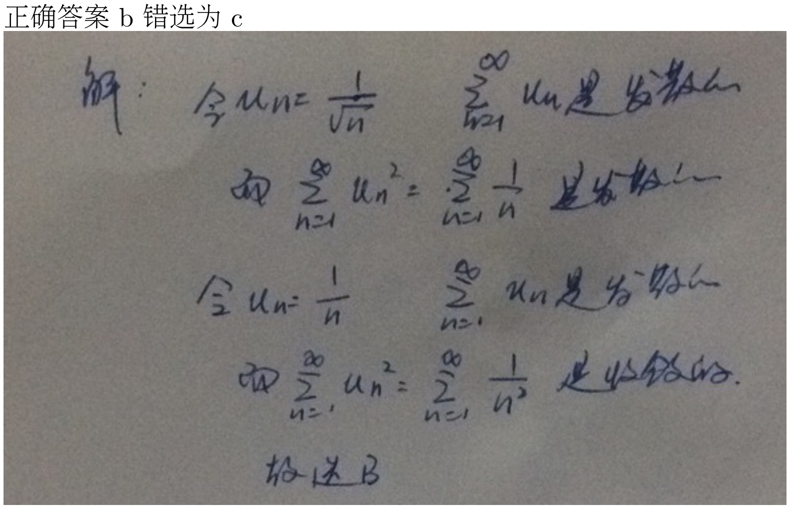
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1. 发散
2. 可能收敛可能发散
3. 绝对收敛
4. 条件收敛

正确答案 b 错选为 c



解：令 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的

而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的

令 $u_n=\frac{1}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的

而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

故选B

eeeend

# 12 附录 1 常用公式

## 12.1 多项式

## 12.2 三角函数

双曲函数

| | | |
|---|---|---|
| $sh(x)=\frac{e^(x)-e^{-(x)}}{2}$ | $ch(x)=\frac{e^2+e^{-x}}{2}$ | $th(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ |
| $sh'(x)=ch(x)$ | $ch'(x)=sh(x)$ | $th'(x)=\frac{1}{ch^2(x)}$ |
| $arcsh(x)=ln(x+\sqrt{x^2+1})$ | $arcch(x)=ln(x+\sqrt{x^2-1})$ | $arcth(x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$<br>$x\in(-1,1)$ |
| $arcsh'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ | $arcch'(x)=\frac{1}{x^2-1}$ | $arcth'(x)=\frac{1}{1-x^2}$ |

$ch^2(x)-sh^2(x)=1$
$ch^2(x)+sh^2(x)=ch(2x)$

| | |
|---|---|
| 欧拉公式 | $e^{j\theta}=cos\theta+jsin\theta$ |
| 万能公式 | $tan\alpha=\frac{2tan(\frac{\alpha}{2})}{1-tan(\frac{\alpha}{2})^2}$<br>$sin\alpha=\frac{2tan(\frac{\alpha}{2})}{1+tan(\frac{\alpha}{2})^2}$<br>$cos\alpha=\frac{1-tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1+tan(\frac{\alpha}{2})^2}$ |

## 12.3 数列

- 等比数列:$1+aq+aq^2+...=\sum_{n=1}^{+\infty}aq^(n-1)=\frac{a}{1-q}$，当 |q|<1 时收敛，当 |q|>=1 时发散
- p 级数：$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...=\sum_{n=1}^{+\infty}$，当 p>1 时收敛，当 p<=1 时发散
- 调和级数：$1+1/2+1/3+...$,p=1 时的 p 级数，发散
- 等差数列：$1+2+3+...n=n(n+1)/2$
- 等差数列：$1+3+5...(2*n-1)=n^2$
- 等差数列：$2+4+6...(2*n)=n*(n+1)$

## 12.4 几何方程

## 12.5 导数

## 12.6 常用等价无穷小

- $sinx->x$
- $tanx->x$
- $e^x-1->x$
- $ln(1+x)->x$

- $arcsinx->x$
- $1-cosx->\frac{1}{2}x^2$
- $\sqrt[n]{1+x}->\frac{1}{n}x$

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

# 13 附录 2 不定积分的常用方法

## 13.1 基本初等函数积分公式

### 13.1.1 幂函数

$$\int x^{\mu}dx = \begin{cases} \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C & \mu \neq -1 \\ ln|x| + C & \mu = -1 \end{cases}$$

### 13.1.2 指数函数

$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$

### 13.1.3 对数函数

$\int lnxdx = x * lnx - x + C$
$\int log_a xdx = x * log_a x - xlog_a e + C$

### 13.1.4 三角函数

| | |
|---|---|
| $\int sinxdx = cosx + C$ | $\int cosxdx = -sinx + C$ |
| $\int tanxdx = -ln\|cosx\| + C$ | $\int cotxdx = ln\|sinx\| + C$ |
| $\int secxdx = ln\|secx + tanx\| + C$ | $\int cscxdx = ln\|cscx - cotx\| + C$ |

### 13.1.5 反三角函数

| | |
|---|---|
| $\int arcsinx = x * arcsinxdx + \sqrt{1-x^2} + C$ | $\int arccosxdx = x * arccosx - \sqrt{1-x^2} + C$ |
| $\int arctanxdx = x * arctanx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$ | $\int arccotxdx = x * arccotx + \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$ |
| $\int arcsecxdx = x * arcsecx - ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ | $\int arccscxdx = x * arccscx + ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ |

## 13.2 常用积分公式

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\|\frac{x-a}{x+a}\| + C$ | $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctan\frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + C$ | $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = arccos(x) + C$ |
| $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + C$ | $\int \frac{-dx}{1+x^2} = arccot(x) + C$ |

## 13.3 常用方法

1. 凑微分
$\int f(\varphi(x))\varphi^{'}(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$
将 $\varphi^{'}(x)dx$ 凑到 $d(\varphi(x))$ 中。
2. 换元法
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi^{'}(t)dt$
用 $x = \varphi(t)$ 进行替换变量，进行积分
常用换元：

| 型式 | 换元 |
|---|---|
| $\sqrt{a^2+x^2}$ | $x=a*tan(\alpha), x=a*sh(\alpha),$ |
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x=a*sin(\alpha), x=a*cos(\alpha),$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x=a*sec(\alpha), x=a*csc(\alpha),$ |

3. 分部积分
$\int udv = uv - \int vdu$
换一种形式积分

## 13.4 常用形式

### 13.4.1 含 $ax+b$

1) 采用凑微分方法, 将 $ax+b$ 凑到微分中。
2) 因式分解

### 13.4.2 含 $\sqrt{ax+b}$

1) 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。
2) 利用已经获得的结果，分部积分。
参考例子:
$\int \sqrt{ax+b}dx$, 凑微分。
$\int x\sqrt{ax+b}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或分部积分。
$\int x^2\sqrt{ax+b}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或分部积分。
$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或先求出 $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$, 再分部积分。
$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号。或先求出 $\int x/\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$, 再分部积分。
$\int \frac{dx}{x*\sqrt{ax+b}}$, 利用 $t=\sqrt{ax+b}$ 来去除根号, 然后利用
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$ 来积分，。需要根据 b>0,b<0 选择积分型式。
$\int \frac{dx}{x^2*\sqrt{ax+b}}$, 需要先分解因式，然后利用 $\int \frac{dx}{x*\sqrt{ax+b}}$ 结果。

### 13.4.3 含 $a^2 \pm x^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C \\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C\end{array}}$$

### 13.4.4 含 $ax^2+b$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{ax^2+b}$, 利用 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$
- $\int \frac{xdx}{ax^2+b}$, 凑微分
- $\int \frac{x^2dx}{ax^2+b}$，分解

- $\int \frac{dx}{x*(ax^2+b)}$，分解
- $\int \frac{dx}{x^2*(ax^2+b)}$，分解
- $\int \frac{dx}{x^3*(ax^2+b)}$，利用上一个分解的结果分解

### 13.4.5 含 $ax^2+bx+c,(a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$,
方法 1：考虑将 $ax^2+bx+c$ 分解成 $(Ax+B)^2+C^2$ 形式，然后利用 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{|a|}arctan(\frac{x}{|a|})+C$ 和 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln(|\frac{x-a}{x+a}|)+C$。因为 $\sqrt{b^2-4ac}$ 结果不定，所以有两个结果
方法 2：由于 $\frac{1}{x-r1} * \frac{1}{x-r2} = \frac{1}{r1-r2}(\frac{1}{x-r1} - \frac{1}{x-r2})$, 将 $ax^2+bx+c$ 分解成:$\frac{1}{a}\frac{1}{r1-r2}(\frac{1}{x-r1} - \frac{1}{x-r2})$ 形式，r1，r2 是该方程的根。然后凑微分即可积分。

- $\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c}$,
凑微分，将 x 凑到 dx 中。$\frac{x}{ax^2+bx+c} = \frac{ax+b-b}{ax^2+bx+c}$

### 13.4.6 含 $\sqrt{x^2+a^2},(a>0)$

1) 用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = arcsh\frac{x}{a}+C = ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$
用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
利用 $\int secx = ln|secx+tanx|+C$ 公式。注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$.
用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$.
用 $x=a*tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha}=sec\alpha$ 换元来脱根号
注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.
  方法 1：用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号，注意用此方法需要计算 $\int sec^3\alpha d\alpha$, 在计算的时候会循环，从而求得。
  方法 2：将分子拆解成 $x^2+a^2-a^2$, 然后利用现成公式。需要计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$。注意用此方法需要计算 $\int sec^3\alpha d\alpha$, 在计算的时候会循环，从而求得。

- $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}^3}$.
  方法 1：用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号

- $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$.
  用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

- $\int \sqrt{x^2+a^2}^3dx$
  用 $x = a * sh\alpha$ 利用 $1+sh^2\alpha = ch^2\alpha$ 换元来脱根号, 得到 $\int a^4ch^4\alpha d\alpha$, 然后积分

- $\int x\sqrt{x^2+a^2}^3dx$
  凑微分

- $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}^3dx$
  分部积分?
  x 在分母

- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}$
  用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号

- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$
  用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号, 化简得到 $\int cot\alpha * csc\alpha d\alpha = csc\alpha$ 积分形式

- $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx$
  用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号, 化简后，分解得到 $a\int(\frac{sin\alpha}{1-sin^2\alpha} + \frac{1}{sin\alpha})d\alpha$ 积分形式

- $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx$
  用 $x = a * tan\alpha$ 利用 $\sqrt{1+tan^2\alpha} = sec\alpha$ 换元来脱根号, 化简后，分解得到 $\int(\frac{1}{cos\alpha} + \frac{cos\alpha}{1-cos^2\alpha})d\alpha$ 积分形式

### 13.4.7 含 $\sqrt{x^2-a^2}, (a>0)$

1) 用 $x = a * sec\alpha$ 利用 $\sqrt{1+sec^2\alpha} = tan\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$
  用 $x = a*sec\alpha$ 利用 $\sqrt{1+sec^2\alpha} = tan\alpha$ 换元来脱根号
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

#### 13.4.8 含 $\sqrt{a^2-x^2}, (a>0)$

1) 用 $x = a*sin\alpha$ 利用 $\sqrt{1-sin^2\alpha} = cos\alpha$ 换元来脱根号
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin(x/a)+C$
  直接套用公式，凑微分；或者令 $x = asin\alpha$ 来脱根号。
  注意回带的时候，利用作图来求三角函数值比较方便。

#### 13.4.9 含 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}, (a>0)$

1) 凑微分
2) 分解
参考例子:

- $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} ln|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|+C, a>0$
  将 $ax^2+bx+c$ 分解成
  $\frac{1}{4a}[(2ax+b)^2+4ac-b^2] = \frac{1}{4a}[(2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2]$, 然后利用
  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 公式积分。

- $\int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} arcsin(\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}})+C, a>0$
  将 $-ax^2+bx+c$ 分解成
  $\frac{1}{4a}[-(2ax+b)^2+4ac+b^2] = \frac{1}{4a}[-(2ax+b)^2+(\sqrt{b^2+4ac})^2]$, 然后利用
  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 公式积分。

#### 13.4.10 含 $\sqrt{\pm\frac{x-a}{x+a}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(x-b)}$

1)$t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, 变量代换去根号
参考例子:

- $\int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} dx$
  两次代换，第一次 $t = \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, 第二次 $t = seck$

#### 13.4.11 含三角函数

# 14 附录 3 matlab 在高数中应用

定义符号：syms x
pretty(fx) 人性化显示公式

## 14.1 极限

limit(f,x,a)
f是表达式，可以直接用'xxx',也可用syms来定义。
x表示自变量，a表示趋向。
例如：limit('(exp(x)+exp(-x))/sin(x)',x,0) or

```
syms x y;
y=(exp(x)+exp(-x))/sin(x);
limit(y,x,0)
```

结果为2

## 14.2 求导

求导：diff(f)
例如：f=sin(x);diff(f);

## 14.3 积分

符号积分：int

int(fun,x)计算不定积分
int(fun,x,a,b):计算定积分

例如：

```
syms f x
f=sinx;int(f)
int(f,-pi,pi);
```

利用int可以计算重积分。

```
int(int(fun,x,a,b),y,c,d)
```

数值积分：

梯形积分：trapz(x,y)
例如：

```
x=-1:0.01:1
y=tan(x);
trapz(x,y);
```

辛普森积分：quad(fun,x,a,b)
fun可以是匿名函数@(x)，或内联函数inline()
比如y=cosx,可以表示成：y=@(x)cos(x),y=inline('cos(x)')
例如：

```
y=@(x)tan(x)
quad(y,-1,1)
```

## 14.4 幂函数方程

解幂函数方程：solve

```
solve('eq')
solve('eq',var)
solve('eq1','eq2',...)
solve('eq1','eq2'...'eqn','var1','var2'...'varn')
```

### 14.5 微分方程

解符号微分方程：`dsolve`

```
dsolve('eq1,eq2..','con1,con2','v')
  eq1,eq2..微分方程,
  con1, con2..初始条件,
  v 变量
  Dy 表示导数y'
```

例子：求y'+3xy=4x的通解

```
syms y x;
dsolve('Dy+3*x*y=4*x','x')
ezplot(y);
ans =
4/3+exp(-3/2*x^2)*C1
>> pretty(ans)
            2
   4/3 + exp(- 3/2 x ) C1
```

## 15 附录 4 mathematics 在高数中的应用

点击 mathematics 学习

### 15.1 通用

内置函数首字母大写，以区分用户定义函数。比如 Integrate。
变量用 [] 括起，比如 Sqrt[x]
定义函数时，变量名用 _. 比如 $fun[x\_, y\_]$

### 15.2 积分

$\int_a^b f(x)dx$

```
Integrate[f(x),{x,a,b}]
```

$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$

```
Integrate[f(x,y),{x,a,b},{y,y_1(x),y_2(x)]
```