Exercise 1

a) $p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + p(x_1, y_3)$

$= 0.01 + 0.05 + 0.1 = 0.16$

$p(x_2) = 0.17 \qquad p(x_3) = 0.11 \qquad p(x_4) = 0.22$

$p(x_5) = 0.34$

b) $p(y_1) = p(y_1, x_1) + p(y_1, x_2) + p(y_1, x_3) + p(y_1, x_4) + p(y_1, x_5)$

$= 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.1 + 0.1 = 0.26$

$p(y_2) = 0.47 \qquad p(y_3) = 0.27$

b) $p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.01}{0.26} = 0.385$

$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.02}{0.26} = \frac{1}{13}$

$p(x_3 \mid y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.03}{0.26} = \frac{3}{26}$

$p(x_4 \mid y_1) = \frac{p(x_4, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.1}{0.26} = \frac{10}{26}$

$p(x_5 \mid y_1) = \frac{p(x_5, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.1}{0.26} = \frac{10}{26}$

→ $P(x \mid Y = y_3)$

$p(x_1 \mid y_3) = \frac{p(x_1, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0.1}{0.27} = \frac{10}{27}$

$p(x_2 \mid y_3) = \frac{0.05}{0.27} = \frac{5}{27}$

$$p(x_3 | y_3) = \frac{0.03}{0.27} = \frac{1}{9}$$

$$p(x_4 | y_3) = \frac{0.05}{0.27} = \frac{5}{27}$$

$$p(x_5 | y_3) = \frac{0.04}{0.27} = \frac{4}{27}$$

Exercise 3 Let:

X: người sử dụng sản phẩm X

Y: người sử dụng sản phẩm Y

+) We have:

$P(X) = 0.207$

$P(Y) = 0.5$

$P(X|Y) = 0.365$

a, $P(X,Y) = P(X|Y) \cdot P(Y) = 0.365 \times 0.5 = 0.1825$

b, $P(Y|\bar{X}) = \frac{P(\bar{X}|Y) \cdot P(Y)}{P(\bar{X})} = \frac{(1-0.365) \times 0.5}{1-0.207} = 0.4004$

Exercise 4

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$
$$= E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2]$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X^2)^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

Exercise 5

+) Gọi:

A: Ô tô ở cửa số 1

C: Ô tô ở cửa số 3

B: Monty mở cửa số 2

+) Ta có: $P(A) = P(C) = \frac{1}{3}$ do lúc này Monty chưa mở ô cửa gợi ý.

Để lựa chọn được giữa việc giữ nguyên ô cửa ban đầu (chọn ô số 1) hay đổi sang ô cửa còn lại ta cần biết được:

$\boxed{P(A|B) \text{ và } P(C|B)}$

+) Sau khi chọn ô số 1 thì xác suất Monty mở ô số 2:

$P(B) = \frac{1}{2}$

+) Nếu ô tô nằm ở ô số 1, $P(B|A) = \frac{1}{2}$

Nếu ô tô nằm ở ô số 3, $P(B|C) = 1$

↳ (do là Monty chỉ có thể chọn ô kp có xe ô tô nên ở thể chọn ô số 3 được)

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(C|B) = \frac{P(B|C).P(C)}{P(B)} = \frac{1:\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(C|B) > P(A|B)$$

→ Xác suất ô tô ở cửa số 3 cao hơn ô số 1 (ô chọn ban đầu) khi Monty mở cửa số 2 → Ko nên giữ nguyên lựa chọn ban đầu

~~$E_y[E_x[x|y]]$~~

$= E_y[$

→ From : $E_x(X) = \sum_X p(x).x \quad , E_y(Y) = \sum_Y P(Y).Y$

we have:

$$E_y(E_x(X|Y)) = E_y\left(\sum_X P(X|Y).X\right)$$

$$= \sum_Y \sum_X P(X|Y).X.P(Y) \qquad (1)$$

Since $P(X,Y) = P(Y,X)$

$\Rightarrow P(X|Y).P(Y) = P(Y|X).P(X)$

(1) $\Rightarrow \sum_X .X \sum_Y P(Y|X).P(X)$

$\Rightarrow \sum_X X.P(X)$

$\Rightarrow E_x(X)$

Hence, $E_y(E_x(X|Y)) = E_x(X)$