Drzewa czerwono-czarne

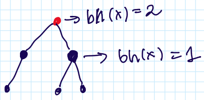
piątek, 7 czerwca 2024 16:01

Warunki:

1) Każdy wierzchołek jest czerwony albo czarny
2). liście czarne
3) jeśli wierzchołek czerwony ⇒ obaj synowie czarni
4) tyle samo czarnych na każdej ścieżce wychodzącej z korzenia

*) wierzchołki zewnętrzne są czarne

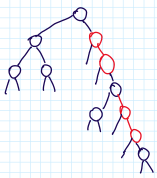
CZARNA WYSOKOŚĆ – $bh(x)$ – liczba czarnych wierzchołków z wierzchołka x (ale bez niego) do liście



Fakt 1: Wysokość drzewa cz-cz dla n wierzchołków jest nie większa niż $2\log(n+1)$

Indukcja po h – wysokości wierzchołka

- $\forall v$ liczba wierzchołków wewn pod v jest najmniej $2^{bh(v)}-1$



Lemat 14.1.
Drzewo czerwono-czarne o n węzłach wewnętrznych ma wysokość co najwyżej $2\lg(n+1)$.

Dowód
Wykażemy najpierw, że każde poddrzewo o korzeniu w dowolnym węźle x ma co najmniej $2^{bh(x)}-1$ węzłów wewnętrznych. Dowodzimy tego faktu przez indukcję względem wysokości węzła x. Jeśli x ma wysokość 0, to x musi być liściem (NIL), a poddrzewo o korzeniu w x zawiera w istocie co najmniej

306

14.1. WŁASNOŚCI DRZEW CZERWONO-CZARNYCH

$2^{bh(x)}-1=2^0-1=0$ węzłów wewnętrznych. Krok indukcyjny wygląda następująco: niech x będzie węzłem wewnętrznym o dodatniej wysokości i dwóch synach. Każdy z synów ma czarną wysokość równą albo $bh(x)$, albo $bh(x)-1$, w zależności od tego, czy jest odpowiednio czerwony czy czarny. Wysokość syna węzła x jest mniejsza niż wysokość x, z założenia indukcyjnego wynika więc, że każde z poddrzew o korzeniach w synach x ma co najmniej $2^{bh(x)-1}-1$ węzłów wewnętrznych. Stąd już wynika, że poddrzewo o korzeniu w x zawiera co najmniej $(2^{bh(x)-1}-1)+(2^{bh(x)-1}-1)+1=2^{bh(x)}-1$ węzłów wewnętrznych, co należało wykazać.
Niech h będzie wysokością drzewa. Z własności (3) wynika, że co najmniej połowa węzłów na każdej prostej ścieżce od korzenia do liścia (nie wliczając korzenia) jest czarna. Stąd wynika, że czarna wysokość drzewa wynosi co najmniej h/2, czyli

$$n \geqslant 2^{h/2}-1$$

Przenosząc 1 na lewą stronę i logarytmując obie strony, otrzymujemy $\lg(n+1)\geqslant h/2$, czyli $h\leqslant 2\lg(n+1)$. ♦

korzeń

Cormen

$bh(x)$

$bh(x)-1$

- FIND ⇒ $O(\log n)$ jak w BST nic nie zmienia
- INSERT(v) – jak w BST i malujemy go po wstawieniu na czerwono

wtedy może być problem z własnością trzecią.

usuwanie

- liść – bez problemu jak w BST
- jeden syn – podwieszamy go w miejsce ojca
- dwóch synów – podwieszamy albo następnik prawy wierzchołek z lewego poddrzewa albo skrajnie prawy z lewego

Dowód KLO

Indukcja po h – wysokości wierzchołka

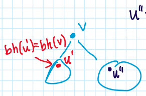
$\forall v$ liczba wierzchołków wewn pod v jest conajmniej $2^{bh(v)}-1$

$h=0$

$bh(v)=0$

$h=1$

u'' - czarny u' - czerwony



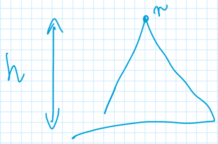
$bh(u'')=bh(v)-1$

bo u'' nie liczymy do swojej czarnej wysokości, a do wysokości v już tak

Niech n liczba wierzchołków wewnętrznych w poddrzewie o korzeniu w v

$$n = 1 + 2\cdot(2^{bh(v)-1}-1) = 2^{bh(v)}-1 \geqslant 2^{\frac{h}{2}}-1$$

root, 2 poddrzewa, 2·1



$h \leq 2\,bh(r)$

$\frac{h}{2} \leq bh(r)$

$n+1 \geqslant 2^{\frac{h}{2}}$

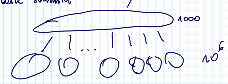
$\frac{h}{2} \leq \log(n+1)$

$h \leq 2\log(n+1)$

B-drzewa - struktura, która w każdym wierzchołku może mieć k wartości i k+1 dzieci

piątek, 7 czerwca 2024 18:36

Motywacja - duże słowniki

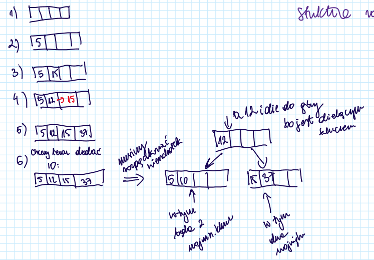


Niech $t = 2$

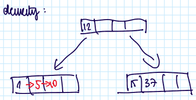
liczba kluczy w każdym węźle jest między $t \leq \quad \leq 2t$

B-drzewa pączkują korzeniami

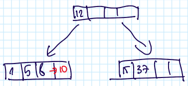
struktura rośnie "do góry"



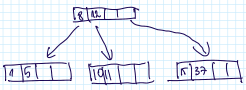
7) teraz jak chcemy dodać 1, to idziemy do lewego poddrzewa 12 i przesuwamy elementy:



8) 8:



9) 11: znowu rozpączkowanie



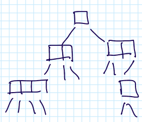
czyli możemy zauważyć, że to drzewo narasta nam się od dołu do góry

Wszystkie liście są na jednym poziomie

ZWIĄZEK MIĘDZY DRZEWAMI CZ-CZ A B-DRZEWAMI

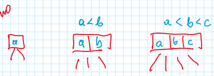
Patrzymy na B-drzewa → liście są na jednakowym poziomie!

$t = 1$ liczba kluczy: 1, 2, 3



wszystkie liście na tym samym poziomie

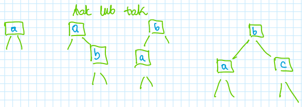
chcemy zbinaryzować b-drzewo



dopuszczamy tylko takie wierzchołki

Chcemy aby z każdego wierzchołka wychodziły 2 wskaźniki

tak lub tak

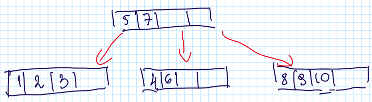


Dzięki temu zamienimy B-drzewo na drzewo binarne

teraz liście mogą być jedynie na różnym poziomie; pomalujemy krawędzie na czarno

czerwone wierzchołki nie będą sąsiadowały przy sobie - dlaczego? bo czarne wierzchołki to tak naprawdę liście, zatem będą wskazywały na inne krawędzie - które pomalowaliśmy na czarno

2017



1, 3, 8, 10 5

5

1, 3, 4 6, 7, 8, 10 9

5, 8

1 3 4 6, 7 8, 10

5, 8

1 2 3 4 6, 7 8, 10