۹۹۱۰۰۴۱۴ هانیه حاتمی

تمرین سری ۹ علم شبکه

سوال ۱ فصل 8 (کتاب باراباسی آلبرت)

از فصل می‌دانیم که f_c برای شبکه‌های رندوم برابر است با (برای هم‌ریختگی تصادفی):

$$f_c = 1 - \frac{1}{\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} - 1}$$

حال از جدول 4-2 که در سوال بیان شده است برای هر پخش $\langle k \rangle$, $\langle k^2 \rangle$ را می‌نویسیم و f_c را محاسبه می‌کنیم

$$\langle k \rangle = \lambda^{-1} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad \langle k^2 \rangle = \lambda^{-2} \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$\Rightarrow$ Power law with exp cutoff (a

$$\Rightarrow \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{\lambda^{-2} \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}}{\lambda^{-1} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}} = \lambda^{-1} \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}$$

We know that $\Gamma(\theta) = (\theta - 1)!$

$$\Rightarrow \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \lambda^{-1} \frac{(3-\alpha-1)!}{(2-\alpha-1)!} = \lambda^{-1} \frac{(2-\alpha)!}{(1-\alpha)!} = \lambda^{-1} \frac{(2-\alpha)\cancel{(1-\alpha)!}}{\cancel{(1-\alpha)!}} = \lambda^{-1}(2-\alpha)$$

$$\Rightarrow f_c = 1 - \frac{1}{\frac{2-\alpha}{\lambda} - 1}$$

همان‌طور که انتظار داشتیم هرچه α یا cutoff نوع افزایش پیدا می‌کند $\Rightarrow$ f_c کاهش پیدا می‌کند، یعنی هرچه که استحکام شبکه در برابر هم‌ریختگی تصادفی کاهش پیدا می‌کند $\Rightarrow$ به کندن تعداد رأس کمتری برای هم ریختن شبکه نیاز داریم. اما همین‌طور طبق انتظارمان با افزایش λ ، f_c کاهش می‌یابد

با افزایش λ مقدار احتمال درجات بیشتر زودتر کاهش می‌یابد $\Rightarrow$ درجه رأس‌های بالا محو می‌شوند $\Rightarrow$ با کندن رئوس تصادفی شبکه زودتر از هم می‌پاشد.

$\Rightarrow$ استحکام شبکه کاهش می‌یابد.

b) lognormal:

$\langle k \rangle = e^{\frac{1}{2}(\mu+\sigma^2)}$ $\qquad$ $\langle k^2 \rangle = e^{2(\mu+\sigma^2)}$

$$\Rightarrow \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{e^{2(\mu+\sigma^2)}}{e^{\frac{1}{2}(\mu+\sigma^2)}} = e^{\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)} = e^4$$

$$\Rightarrow f_c = 1 - \frac{1}{e^4 - 1} = 1 - \frac{1}{54.598 - 1} = 1 - 0.01866 = 0.9813 \xrightarrow{\times 100} 98.13\,\%$$

<= استحکام شبکه وابستگی به میانگین و یا واریانس ندارد و همواره مقدار بالا است که همانطور که می‌بینیم شبکه از استحکام بالایی برخوردار است و باید حدوداً ٪98 رئوس را بکشیم تا شبکه تکه تکه شود.

c) Delta

is a normal with $\sigma^2 = 0$

$\Rightarrow \langle k \rangle = \mu$ و $\langle k^2 \rangle = \mu^2 + \sigma^2 = \mu^2$

$$\Rightarrow \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = \frac{\mu^2}{\mu} = \mu$$

$$\Rightarrow f_c = 1 - \frac{1}{\mu - 1}$$

همانطور که انتظار داریم هرچه μ افزایش یابد <= مقدار اتصالات رئوس افزایش می‌یابد <= با بودن تعداد کمی رئوس، شبکه تکه تکه نمی‌شود <=
می‌توان گفت با افزایش μ، استحکام شبکه افزایش می‌یابد.

8.1. Random Failure: Beyond Scale-Free Networks

Calculate the critical threshold f_c for networks with

(a) Power law with exponential cutoff.

(b) Lognormal distribution.

(c) Delta distribution (all nodes have the same degree).

Assume that the networks are uncorrelated and infinite. Refer to Table 4.2 for the functional form of the distribution and the corresponding first and second moments. Discuss the consequences of the obtained results for network robustness.

NAME	$p_x/p(x)$	$\langle x \rangle$	$\langle x^2 \rangle$
Poisson (discrete)	$e^{-\mu}\mu^x/x!$	μ	$\mu(1+\mu)$
Exponential (discrete)	$(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda x}$	$1/(e^{\lambda}-1)$	$(e^{\lambda}+1)/(e^{\lambda}-1)^2$
Exponential (continuous)	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$2/\lambda^2$
Power law (discrete)	$x^{-\alpha}/\zeta(\alpha)$	$\begin{cases}\zeta(\alpha-2)/\zeta(\alpha), & \text{if } \alpha>2\\ \infty, & \text{if } \alpha\le 1\end{cases}$	$\begin{cases}\zeta(\alpha-1)/\zeta(\alpha), & \text{if } \alpha>1\\ \infty, & \text{if } \alpha\le 2\end{cases}$
Power law (continuous)	$\alpha x^{-\alpha}$	$\begin{cases}\alpha/(\alpha-1), & \text{if } \alpha>2\\ \infty, & \text{if } \alpha\le 1\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha/(\alpha-2), & \text{if } \alpha>1\\ \infty, & \text{if } \alpha\le 2\end{cases}$
Power law with cutoff (continuous)	$\frac{\lambda^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-1}\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$	$\lambda^{-2}\frac{\Gamma(3-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$
Stretched exponential (continuous)	$\beta\lambda^{\beta}x^{\beta-1}e^{-(\lambda x)^{\beta}}$	$\lambda^{-1}\Gamma(1+\beta^{-1})$	$\lambda^{-2}\Gamma(1+2\beta^{-1})$
Log-normal (continuous)	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	$e^{\mu+\sigma^2/2}$	$e^{2(\mu+\sigma^2)}$
Normal (continuous)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	μ	$\mu^2+\sigma^2$