Name: Matouš Dzivjak
Date: 20.12.2018

# Lineární programování

## 1 Zadání

http://www.seas.ucla.edu/~vandenbe/ee236a/homework/problems.pdf#page=14&zoom=auto,-248,211

## 2 Řešení

### 2.1 Úkol a

*Definice úlohy LP, včetně přesné definice všech použitých proměnných (matic, vektorů). Pro zjednodušení zápisu uvažujte případ s N=2 stavy.*

Ze zadání máme stavy $x(t) \in \mathbb{R}^n, t = 0, ..., N$, a signály (akce) $u(t) \in \mathbb{R}, t = 0, ..., N-1$. Dynamický systém je pak definován jako:

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t), t = 0, ..., N-1 \tag{1}$$

Kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^n$ jsou dány. Počátečním stavem je stav $x(0) = 0$.

Optimalizační úlohou minimílní spotřeby paliva (*minimum fuel optimal control problem*) je zvolit signály $u(0), ..., u(N-1)$ tak, abychom minimalizovali spotřebované palivo. Což je dáno jako $F = \sum_{t=0}^{N-1} f(u(t))$ za podmínky $x(N) = x_{des}$. Kde funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je mapa využití paliva pro signál (akci), tedy funkce, která vrací množství spotřebovaného paliva v závislosti na velikosti signálu (akce). V této úloze je definována jako:

$$f(a) = \begin{cases} |a| & |a| \leq 1 \\ 2|a| - 1 & |a| > 1 \end{cases} \tag{2}$$

Definujeme úlohu lineárního programování (ze zadání pro $N = 2$, nicméně je mi pohodlnější to napsat obecně, a na $N = 2$ se můžeme omezit kdykoliv). Optimalizujeme úlohu:

$$\min \sum_{t=0}^{N-1} f(u(t)) \tag{3}$$

Ze zadání víme, že platí:

$$\begin{aligned}
&x(1) = Ax(0) + bu(0) = A0 + bu(0) = bu(0) \\
&x(2) = Ax(1) + bu(1) = Abu(0) + bu(1) \\
&x(3) = Ax(2) + bu(2) = A^2bu(0) + Abu(1) + bu(2) \\
&\vdots \\
&x(N) = A^{N-1}bu(0) + A^{N-2}bu(1) + \ldots + Abu(N-1) + bu(N) = x_{des}
\end{aligned} \tag{4}$$

Kde $x(t)$ jsou hodnoty stavu v čase $t$ a $u(t)$ je signál v čase $t$. Z toho vytvoříme matici tak, abychom mohli optimální řešení zapsat jako násobek této matice spolu s vektorem signálů v jednotlivých časech, tedy:

$$\begin{aligned}
C &= \begin{bmatrix} A^{N-1}b & A^{N-2}b & \ldots & Ab & b \end{bmatrix} \\
u &= \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \ldots & u(N-1) \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{5}$$

Dále musíme transformovat optimalizovanou funkci 2. To uděláme následovně. Přidáme novou proměnnou $d$ a podmínky:

$$\begin{aligned}
|a| &\leq d \\
2|a| - 1 &\leq d
\end{aligned} \tag{6}$$

To jsme mohli provést díky tomu, že na intervalu $[-1, 1]$ je větší $|a|$, zatím co na zbytku reálných čísel nabývá větší hodnoty $2|a| - 1$. Proměnná $d$ nám tedy vždy omezuje obě rovnosti, ale první "se omezí" funkce, která na daném intervalu odpovídá hodnotě předepsané funkcí $f$ a druhá bude nabývat hodnot nižší.

Nerovnosti 6 zbavíme absolutní hodnoty.

$$\begin{aligned} &-d \leq a \leq d \\ &-\frac{d+1}{2} \leq a \leq \frac{d+1}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

Tyto nerovnosti musí platit pro každé $u(i)$ ($u(i)$ se stává při řešení optimalizační úlohy argumentem funkce 2, tedy ho dosazujeme do těchto nerovností). Zavedeme tedy vektor $s$ (*spotřeba*) $= \left[s_0, \ldots, s_{N-1}\right]$, s jedním $s_i$ pro každý signál (akci) $u(i)$ a ten použijeme v nerovnostech. Nyní už můžeme definovat úlohu lineárního programování:

$$\mathcal{LP} = \begin{cases} \text{minimalizujeme} & 1^T s \\ \text{za podmínek} & -s \leq u \leq s \\ & -\frac{s+1}{2} \leq u \leq \frac{s+1}{2} \\ & Cu = x_{des} \end{cases} \tag{8}$$

Kde:

$$\begin{aligned} N \in \mathbb{N} &\ldots \text{časový horizont pro splnění úlohy} \\ s \in \mathbb{R}^{N-1} &\ldots \text{spotřeba} \\ u \in \mathbb{R}^{N-1} &\ldots \text{signály v jednotlivých časových krocích} \\ C \in \mathbb{R}^{(N-1)\times n} &\ldots \text{matice 5} \\ x_{des} \in \mathbb{R}^{n} &\ldots \text{cílový stav} \end{aligned} \tag{9}$$

Tedy přeloženo do slov: Minimalizujeme sumu spotřeby ($1^T s$), která nám omezuje signály (akce, které provádíme) v jednotlivých časových krocích (7) tak, abychom v čase $N$, tedy v zadaném časovém horizontu byly v cílovém stavu $x_{des}$.

## 2.2 Úkol b

*Graf obsahující závislost $u(t)$, $x_1(t)$ a $x_2(t)$ na $t$. Optimální hodnotu spotřeby $F$.*