Name: Matouš Dzivjak
Date: 7.12.2018

Quadric

1 Zadání

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b33opt/cviceni/domaci_ulohy/quadric/start

2 Řešení

2.1 Pokus č. 1

Úlohu budeme řešit jako minimalizační úlohu vzdálenosti bodu x od bodu a za podmínky $x^TQx = 1$. Tedy využijeme Lagrangeových multiplikátorů. Napadnout nás mohlo například i lineární programování, ale omezující podmínka je ve tvaru rovnice nikoliv nerovnice.

Podmínku $x^TQx = 1$ můžeme přepsat jako $x^TQx - 1 = 0$. Dostáváme tedy dvě rovnice:

$$\|x - a\| = 0$$
$$x^TQx - 1 = 0$$

Vytvoříme Lagrangeovu funkci:

$$\mathcal{L}(x, a, \lambda) = \|x - a\| + \lambda(x^TQx - 1)$$

To jsem udělal v matlabu. Nejdříve připravil matici symbolických proměnných x a symbolickou proměnnou λ. Pak jsem rovnici $\mathcal{L}$ zderivoval podle všech těchto proměnných $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ a položil všechny tyto rovnice rovny 0. Pak jsem použil matlabovskou funkci *solve* pro proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$ tedy prvky matice x a...

...nedostalo se mi žádného řešení. Vydal jsem se špatným směrem. Řešení tedy bude nejspíše spočívat v některé z numerických metod.

2.2 Pokus č. 2

Vyžijeme symetričnosti matice. Vememe její spektrální rozklad:

$$Q = V\Lambda V^T$$

Kde V je ortogonální matice s vlastními vektory ve sloupcích. A Λ je diagonální matice vlastních čísel. Poté dostáváme:

$$x^TQx = x^TV\Lambda V^Tx$$

Můžeme tedy zadefinovat matici změny báze a udělat bijekci:

$$y = V^Tx \iff Vy = x$$

Úlohu následně vyřešíme pro y a najdeme jednoznačně x tímto inverzním zobrazením. Tím se nám úloha mění na:

$$\min_{\forall y \in \mathbb{R}^n} \|a - y\|^2 \text{ za p. } y^T\Lambda y = \textstyle\sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i^2) = 1$$

Řešení lze nalézt pomocí Lagrangeových multiplikátorů:

$$\mathcal{L}(y, \gamma) = \|a - y\|^2 + \gamma(\textstyle\sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i^2) - 1)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(y,\gamma)}{\partial y_i} = -2(a_i - y_i + \gamma\lambda_i y_i)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(y,\gamma)}{\partial \gamma} = \textstyle\sum_{i=1}^n (\lambda_i y_i^2) - 1$$

Kde λ jsou diagonální prvky matice Λ a a_i jsou prvky vektoru a, tedy bodu, ke kterému hledáme nejbližší bod na kvadrice.

Jak již jsme si ověřili v přechozím pokusu Laplacian nejde minimalizovat analyticky, budeme ho tedy minimalizovat numericky - Newtonovo metodou.