1) $T(n) = 8\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \qquad T(1) = 1$

$a = 8,\ b = 2,\ f(n) = n^3$

MT #2:

Jestliže $\underset{a,b\in N}{f(n)} \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
pro $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná $f(n)$.

$n^3 \in \Theta(n^{\log_2 8 = 3})$ a tedy $T(n) \in \Theta(n^3 \lg n)$

2) $T(n) = 6\,T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 \lg n$

$a = 6,\ b = 3,\ f(n) = n^2 \lg n$

MT #3:

jestliže $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$ a jestli $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ pro konstantu $c < 1$ pro všechny n dostatečně velká, pak $T(n) \in \Theta\, f(n)$.
pro $a, b \in N$; $a \geq 1$, $b > 1$ a nezáporná $f(n)$.

A) $n^2 \lg n \in \Omega(n^{\log_3 6 + \varepsilon})$ pro $\varepsilon = 0{,}3$.
jelikož $2 > \log_3 6 > 1$, protože $\log_3 9 = 2$ a $\log_3 3 = 1$

B) $a \cdot f\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot f(n)$ pro $c < 1$

$6 \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^2 \lg\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot n^2 \lg(n)$

$\frac{6}{9} n^2 \lg n - \lg 3 \leq c \cdot n^2 \lg(n)$

$\frac{2}{3} n^2 \lg n - \lg 3 \leq c \cdot n^2 \lg(n)$ a $\lg 3 > 0$.
tedy pro $c = \frac{2}{3}$ toto platí.
proto $T(n) \in \Theta(n^2 \lg n)$

3) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + (\lg n)^2$

$a = 3, b = 4, f(n) = (\lg n)^2$

MT #1:

jestli $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak
$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ pro $a, b \in \mathbb{N}$; $a \geq 1$, $b > 1$ a $f(n)$ nezáporné.

$(\lg n)^2 \in O(n^{\log_4 3 - \varepsilon})$ pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$
jelikož $\frac{1}{2} < \log_4 3 < 1$, protože $\log_4 4 = 1$ a $\log_4 2 = \frac{1}{2}$
a proto $T(n) \in \Theta(n^{\log_4 3})$

(2) ~~pozitivní~~
Jsou dány pozitivní fce $f(n), g(n), h(n)$.
Jestliže $f(n) \in O(g(n))$ a $g(n) \in o(h(n))$, pak nutně
$f(n) \in o(h(n))$.

a) ~~jestli~~ $f(n) \in O(g(n))$, jestliže:
$\exists c > 0$ a $\exists n_A \in \mathbb{N}$, že $f(n) \leq c \cdot g(n)$ pro $\forall n \geq n_A$.

b) $g(n) \in o(h(n))$, jestliže:
$\forall d > 0\ \exists n_B \in \mathbb{N}$: $0 \leq g(n) < d \cdot h(n)$ pro $\forall n \geq n_B$.

c) $f(n) \in o(h(n))$, jestliže:
$\forall k > 0\ \exists n_C \in \mathbb{N}$: $0 \leq f(n) < k \cdot h(n)$

z a) máme $f(n) \leq c \cdot g(n)$ a b) $0 \leq g(n) < d \cdot h(n)$
tedy:
$f(n) \leq c \cdot g(n) < c \cdot d \cdot h(n)$ pro $c, d > 0$.
(existuje $\underline{c}$ a $\underline{d}$ je libovolné)

$k = c \cdot d$, pak
$f(n) \leq k \cdot h(n)$

(3) Z kódu odhadneme $\sum_{i=1}^{N} \sqrt{i}$.
Použijeme větu:

a) Máme $f(n)$ nezáporné, neklesající.

jestliže platí $f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$, pak:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \in \Theta(n \cdot f(n)),$$

na $\sum_{i=1}^{N} \sqrt{i}$.

$f(\frac{n}{2}) \in \Theta(f(n))$ znamená, že:

$\exists c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : c_1 f(n) \le f(\frac{n}{2}) \le c_2 f(n)$ pro $\forall n \ge n_0$.

tedy $c_1 \cdot n^{\frac{1}{2}} \le (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}} \le c_2 \cdot n^{\frac{1}{2}}$.

Protože

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}, \text{ pak}$$

$$c_1 \cdot n^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \le c_2 \cdot n^{\frac{1}{2}}$$

pro $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $c_2 = 1$.

Proto platí, že $\sum_{i=1}^{N} \sqrt{i} \in \Theta(n \cdot \sqrt{n}) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$.

b) Z kódu odhadneme $\sum_{k=1}^{N} N \cdot \frac{1}{3^k}$.

Zde nelze použít větu ze shora, protože

$\exists c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : c_1 \cdot \frac{1}{3^n} \le \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} \le c_2 \cdot \frac{1}{3^n}$ pro $\forall n \ge n_0$ neplatí.
(neexistuje c_1, c_2).

$\sum_{k=1}^{N} N \cdot \frac{1}{3^k} = N \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^k}$ a to je geometrická posloupnost $\Rightarrow$ lze použít její součet.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \dots =$$

$$= \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$ (omezení shora) konstantou.