使用上の注意

2019 年 7 月 24 日

試験勉強を行うときは必ず次のステップで行う事。
守らない場合は内容の習得・試験の結果は保証できません。

1. 講義をしっかり聞き、解らない事は質問する

2. 山本を信じて講義ノートかテキストを読み、
   内容や記号などを把握する

3. 講義中に扱った問題を自力で解いてみる

4. 自分を信じて過去問に取り組み、
   １．２．３．の結果を確認する

絶対にやってはいけないのは１．２．３．を省いて最初から４．を行う事です。それは「ルールが分からない複雑なチェスのようなもの」をやるのに似ています。何回もやれば出来るようになるってもんじゃないです。それよりもまずルールブックを確認しましょう。

数学 II A 後期末試験

2024 年度/後期末:ME/IE/CA
制限時間:80 分
出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ を奇関数、$g(x)$ を偶関数とする時、$h(x) = \dfrac{f(x) - x^3}{5 + g(x)}$ の偶奇性を理由とともに述べよ。

(2) $t = 1 - \sqrt{x}$ と置換する事により、下記の積分の値を求めよ。ただし、「被積分関数の全て」を変数 t で書き直すことに注意せよ。

$$\int_0^1 (\, 1 - \sqrt{x}\,)^{2024}\, \mathrm{d}x$$

(3) $a \neq 0$ となる定数 a、及び自然数 n に対して、I_n を以下のように定める。

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\, \mathrm{d}x$$

この時、$n \geq 1$ に対して以下の漸化式が成立することを示せ。

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1}$$

<u>ヒント①</u>: 定積分ではなく、不定積分である。

<u>ヒント②</u>: $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$ や $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + A}\, \mathrm{d}x$ と同じ計算の仕方である

$[5 + 7 + 8 = 20]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) 実数の定数 a に対して、$\displaystyle\int_a^{a+4} (-2x + 3)\, \mathrm{d}x$ を定積分の定義に従って求めよ。

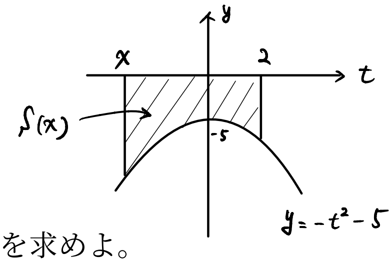
ただし必要ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_1^2 5^x\, \mathrm{d}x$ を定積分の定義に従って求めよ。ただし必要ならば、下記を用いてよい。

(a) $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a \cdot \dfrac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$

(b) $\dfrac{5^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \log 5, \qquad \dfrac{h}{5^h - 1} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{1}{\log 5}$

$[10 + 5 = 15]$ 点



$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) 右図におけるt軸より下側にある斜線部の面積を $S(x)$ とおく時、この $S(x)$ を定積分の記号を用いてかけ。また、その導関数 $S'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = \displaystyle\int_{\log \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}^{\cos^3(2x)} e^{t^3}\,\mathrm{d}t$ の導関数を求めよ。

[10 + 10 = 20] 点

$\boxed{4}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)\cdot e^{-4x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int (x^2-1)\cdot e^{-x^3+3x+1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \log\left(\sqrt{2}x-3\right)\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\,\mathrm{d}x$ (計算結果のみを書くのではなく、求める事。)

[4 * 5 = 20] 点

$\boxed{5}$ 以下の計算をせよ。ただし (3) において、a は正の定数である。

(1) $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{22}{3}\pi}^{8\pi} \sqrt{1-\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^a \left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^5 \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}-6e^{3x}+25}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int x^3\cdot\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$

[5 * 4 + 3 + 2 = 25] 点

2024 年度 数学 IIA 後期末試験–解答用紙 1– ME/IE/CA 2 年 0 番 氏名 磯野まぐろ

1

(1) $h(-x) = \dfrac{f(-x) - (-x)^3}{5 + g(-x)}$ ← $f(x)$:奇, $g(x)$:偶

$= \dfrac{-f(x) + x^3}{5 + g(x)} = -h(x)$

故に $h(x)$ は奇関数である //

(2) $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^{2024} dx$ ← $t = 1-\sqrt{x}$ とおく

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

$= \int_1^0 t^{2024} \boxed{\frac{dx}{dt}} dt$ ← $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

$= \int_1^0 t^{2024} \cdot \boxed{(-2\sqrt{x})} dt$ ← $\sqrt{x} = 1-t$, $\boxed{\frac{dx}{dt}} = -2\sqrt{x}$

$= 2\int_0^1 t^{2024} \cdot (1-t) dt$

$= 2\left\{\int_0^1 t^{2024} dt - \int_0^1 t^{2025} dt\right\}$

$= 2\left(\frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right)$

$= \frac{2}{2025 \cdot 2026} = \frac{1}{2025 \cdot 1013}$ //

(3) $I_n = \int (x)' \cdot (x^2+a^2)^{-n} dx$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \cdot \underbrace{\{(x^2+a^2)^{-n}\}'}_{-n\cdot(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2x} dx$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot \int \frac{(x^2+a^2) - a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot \left\{\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx\right\}$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot (I_n - a^2 \cdot I_{n+1})$

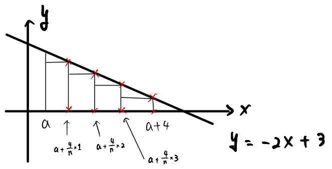
$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2n \cdot a^2 \cdot I_{n+1}$ //

2

$\int_a^{a+4} (-2x+3) dx = [-x^2+3x]_a^{a+4} = -(a^2+8a+16) + 3a + 12 + a^2 - 3a = -8a-4$

(1) $y = -2x+3$ は連続であるから $a \le x \le a+4$ を n 等分して、代表点、を右端にとると

全体幅: $a+4-a = 4$ ↙n等分
1つ分の幅: $\frac{4}{n}$



$S_\Delta = \left\{-2\cdot\left(a + \frac{4}{n}\cdot 1\right) + 3\right\} \cdot \frac{4}{n} + \left\{-2\cdot\left(a + \frac{4}{n}\cdot 2\right) + 3\right\} \cdot \frac{4}{n} + \cdots + \left\{-2\cdot\left(a + \frac{4}{n}\cdot n\right) + 3\right\} \cdot \frac{4}{n}$

$= \sum_{k=1}^n \left\{-2\cdot\left(a + \frac{4}{n}\cdot k\right) + 3\right\} \cdot \frac{4}{n}$

$= \frac{4}{n} \cdot \left\{-\frac{8}{n} \sum_{k=1}^n k + (-2a+3) \sum_{k=1}^n 1\right\}$

$= \frac{4}{n} \cdot \left\{-\frac{8}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + (-2a+3) \cdot n\right\}$

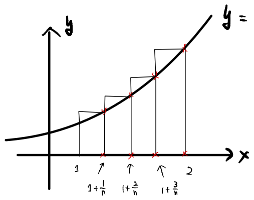
$= -16 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 4 \cdot (-2a+3)$

$\xrightarrow{n \to +\infty} -16 - 8a + 12 = -8a - 4$

故に $\int_a^{a+4} (-2x+3) dx = -8a-4$ //

$y = 5^x \Leftrightarrow \log y = x \log 5$ より $\frac{1}{y} y' = \log 5 \Leftrightarrow y' = 5^x \log 5$ より $\int_1^2 5^x dx = \frac{1}{\log 5} [5^x]_1^2 = \frac{25-5}{\log 5} = \frac{20}{\log 5}$

(2) (1) と同様に $1 \le x \le 2$ を n 等分して考えると



全体の幅: $2-1=1$ ↙n等分
1つ分: $\frac{1}{n}$

$S_\Delta = 5^{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} + 5^{1+\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + 5^{1+\frac{n}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

$= \sum_{k=1}^n \underbrace{5^{1+\frac{k}{n}}}_{5\times 5^{\frac{k}{n}}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{5}{n} \cdot \sum_{k=1}^n 5^{\frac{k}{n}} = \frac{5}{n} \cdot \sum_{k=1}^n 5^{\frac{1}{n}} \cdot \left(5^{\frac{1}{n}}\right)^{k-1}$

$= \frac{5}{n} \cdot \frac{5^{\frac{1}{n}} \cdot \left\{1 - \left(5^{\frac{1}{n}}\right)^n\right\}}{1 - 5^{\frac{1}{n}}} = \frac{5}{n} \cdot \frac{5^{\frac{1}{n}} \cdot 4}{5^{\frac{1}{n}} - 1}$

$= 20 \cdot 5^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{5^{\frac{1}{n}} - 1} = 20 \cdot 5^h \cdot \frac{h}{5^h - 1}$ ($h = \frac{1}{n}$ とおく)

$\xrightarrow[(n \to +\infty)]{h \to 0} \frac{20}{\log 5}$

故に $\int_1^2 5^x dx = \frac{20}{\log 5}$ //

3

(1) $S(x) = -\int_x^2 (-t^2-5) dt$

$= \int_x^2 (t^2+5) dt$

また、$S'(x) = \left\{-\int_2^x (t^2+5) dt\right\}'$

$= -(x^2+5)$ //

(2) $f(x) = \int_{\log\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}^{0} e^{t^3} dt + \int_0^{\cos^3(2x)} e^{t^3} dt$

$= -\int_0^{-\frac{1}{2}\cdot\log(x^2+1)} e^{t^3} dt + \int_0^{\{\cos(2x)\}^3} e^{t^3} dt$ より

$\left(\int_{定数}^{g(x)} f(t) dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = -e^{-\frac{1}{8}\{\log(x^2+1)\}^3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right) + e^{\cos^9(2x)} \cdot 3 \cdot \cos^2(2x) \cdot (-2\sin 2x)$

$= e^{-\frac{1}{8}\{\log(x^2+1)\}^3} \cdot \frac{x}{x^2+1} - 6 \cdot e^{\cos^9(2x)} \cos^2(2x) \cdot \sin(2x)$ //

2024 年度 数学 IIA 後期末試験–解答用紙 2–

4

(1) (与式) $= \int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)\cdot\left(\frac{-1}{4}e^{-4x}\right)' dx$

$= -\frac{1}{4}\left[(3x-2)e^{-4x}\right]_0^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{2}{3}} 3\cdot e^{-4x}\,dx$

$= -\frac{1}{4}(0+2) - \frac{3}{16}\left[e^{-4x}\right]_0^{\frac{2}{3}}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\left(e^{-\frac{8}{3}} - 1\right)$　$\frac{3}{16}-\frac{8}{16}$

$= \frac{-1}{16}\left(3e^{-\frac{8}{3}}+5\right)$ //

(2) (与式) $= \frac{-1}{3}\int -3(x^2-1)\cdot e^{-x^3+3x+1}dx$　$-3x^2+3 = -3(x^2-1)$

$= -\frac{1}{3}e^{-x^3+3x+1} + C$ //

(3) $-x^2+2x+3$

$= -(x^2-2x)+3 = -(x-1)^2+4$ より

(与式) $= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}dx$　# $t=x-1$ と置換しても良い

$= \left[\sin^{-1}\frac{x-1}{2}\right]_1^2$

$= \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0$　$\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{6}$ //

(4) (与式) $= \frac{1}{\sqrt{2}}\int(\sqrt{2}x-3)'\cdot\log(\sqrt{2}x-3)dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-3)\cdot\log(\sqrt{2}x-3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}x-3)}{\sqrt{2}x-3}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-3)\cdot\log(\sqrt{2}x-3) - x + C$ //

$t=\sqrt{2}x-3$ とおいて $\int\log t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int(t)'\log t\,dt$ としても良い

(5) $\int\sqrt{x^2+5}\,dx = \int(x)'\cdot(x^2+5)^{\frac{1}{2}}dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+5} - \int x\cdot\underbrace{\left\{(x^2+5)^{\frac{1}{2}}\right\}'}_{\frac{1}{2}\cdot(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+5} - \int\frac{(x^2+5)-5}{\sqrt{x^2+5}}dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+5} - \int\sqrt{x^2+5}\,dx + 5\cdot\int\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}dx}_{\log|x+\sqrt{x^2+5}|}$

よって

$\int\sqrt{x^2+5}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+5} + 5\cdot\log|x+\sqrt{x^2+5}|\right) + C$ //

5

$x+1=t$ とおいて $\int_1^e\frac{\log t}{t^3}dt = \int_1^e t^{-3}\log t\,dt$ としても良い

(1) (与式) $= \int_0^{e-1}(x+1)^{-3}\cdot\log(x+1)dx$

$= \int_0^{e-1}\left\{\frac{-1}{2}(x+1)^{-2}\right\}'\cdot\log(x+1)dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\right]_0^{e-1} + \frac{1}{2}\int_0^{e-1}(x+1)^{-3}dx$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\left[(x+1)^{-2}\right]_0^{e-1}$

$= \frac{-1}{2e^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^2}-1\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$ //

(2) $1-\cos\frac{x}{2} = 1-\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{4}\right)$

$= \underbrace{1-\cos^2\frac{x}{4}}_{\sin^2\frac{x}{4}} + \sin^2\frac{x}{4} = 2\cdot\sin^2\frac{x}{4}$ より

(与式) $= \int_{\frac{22}{3}\pi}^{8\pi}\sqrt{2\cdot\sin^2\frac{x}{4}}\,dx = \sqrt{2}\int_{\frac{22}{3}\pi}^{8\pi}\left|\sin\frac{x}{4}\right|dx$

$\frac{22}{3}\pi\leq x\leq 8\pi$　$\frac{11}{6}\pi\leq\frac{x}{4}\leq 2\pi$

$= -\sqrt{2}\int_{\frac{22}{3}\pi}^{8\pi}\sin\frac{x}{4}\,dx$

$= +4\cdot\sqrt{2}\cdot\left[\cos\frac{x}{4}\right]_{\frac{22}{3}\pi}^{8\pi} = 4\sqrt{2}\cdot\left(\cos2\pi - \cos\frac{11}{6}\pi\right)$

$= 4\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ //

$-\sqrt{2}\cdot\int_{\frac{22}{3}\pi}^{8\pi}\sin\frac{x}{4}dt$　$t=\frac{x}{4}$ とおく

$= -\sqrt{2}\cdot\int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi}\sin t\cdot 4\,dt$ としても良い

(3) $x=a\cdot\sin\theta$ とおくと $a^2-x^2 = a^2\cdot(1-\sin^2\theta) = a^2\cdot\cos^2\theta$ より

(与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{(a\cdot\cos\theta)^2}\right)^5\boxed{\frac{dx}{d\theta}}d\theta$

x	$0\to a$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}|a\cdot\cos\theta|^5\cdot\boxed{a\cdot\cos\theta}\,d\theta$　$\boxed{\frac{dx}{d\theta}} = a\cdot\cos\theta$

$= a^6\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta$

$= a^6\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{32}\pi a^6$ //

(4) (与式) $= \int\frac{e^{3x}}{(e^{3x})^2-6e^{3x}+25}dx$

$= \frac{1}{3}\int\frac{3\cdot e^{3x}}{(e^{3x}-3)^2+4^2}dx$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\tan^{-1}\frac{e^{3x}-3}{4} + C$ //

別解

(与式)　$t=e^{3x}$ とおく

$= \int\frac{e^{3x}}{t^2-6t+25}\cdot\boxed{\frac{dx}{dt}}dt$　$\frac{dt}{dx} = 3e^{3x}$　$\boxed{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{3\cdot e^{3x}}$

$= \int\frac{\cancel{e^{3x}}}{t^2-6t+25}\cdot\boxed{\frac{1}{3\cdot\cancel{e^{3x}}}}dt$

$= \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{(t-3)^2+4^2}dt$

$= \frac{1}{3\cdot4}\cdot\tan^{-1}\frac{t-3}{4} + C$

$= \frac{1}{12}\cdot\tan^{-1}\frac{e^{3x}-3}{4} + C$ //

(5) (与式) $= \int x^2\cdot x\cdot\sin(x^2)\,dx$

$= \int x^2\cdot\left\{\frac{-1}{2}\cdot\cos(x^2)\right\}'dx$

$= -\frac{x^2}{2}\cdot\cos(x^2) + \frac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot\cos(x^2)\,dx$

$= -\frac{x^2}{2}\cdot\cos(x^2) + \frac{1}{2}\cdot\sin(x^2) + C$ //

(6)

(与式)　$\theta = x-\frac{\pi}{4}$ とおく

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}{\cos\theta}\cdot\boxed{\frac{dx}{d\theta}}d\theta$

x	$0\to\frac{\pi}{2}$
θ	$-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$

$\boxed{\frac{dx}{d\theta}} = 1$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\theta}d\theta$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1\right)d\theta$　奇　偶

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ //

1	2	3	4	5	計
/20	/15	/20	/20	/25	/100

数学ⅡA 後期末試験

2023 年度/後期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ を偶関数、$g(x)$ を奇関数とする時、$h(x) = f(x) \cdot g(x)$ の偶奇性を理由とともに述べよ。

(2) α, β を実数の定数とする時、以下が成立することを証明せよ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha) \cdot (x-\beta)^{2023} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2024 \cdot 2025} (\alpha - \beta)^{2025}$$

ヒント①: 部分積分で $(x-\alpha)$ を消すのが最も簡単である

ヒント②: $x - \alpha = x - \beta + (\beta - \alpha)$ としたり、置換積分でも証明できる

(3) 左辺で $x = a + b - t$ と置換することによって以下を示せ。ただし a, b は実数の定数である。

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x) \, \mathrm{d}x$$

また、これを用いると下記が成立する事に注意して $K = \dfrac{\pi^2}{4}$ となる事を示せ。(三角関数は初めに簡単にした方が良い。その後に線形性を用いれば 1 次方程式が出来る。)

$$K = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \cdot \sin(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} \, \mathrm{d}x$$

$[5 + 10 + 5 = 20]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $c \geq 0$ となる定数 c に対して、$\displaystyle\int_2^{2+c} (3x-1) \, \mathrm{d}x$ を定積分の定義に従って求めよ。

ただし必要ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x$ を定積分の定義に従って求めよ。ただし必要ならば、下記を用いてよい。

$$(a)\ \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta = \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \cdot \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$(b)\ \frac{\sin\theta}{\theta} \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$$

$[10 * 2 = 20]$ 点

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数 (微分) を求めよ。

(1) $f(x) = \displaystyle\int_x^0 \sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t$

(2) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\log\sqrt{\frac{3x+2}{(2x^2+1)^3}}} \left(2\sqrt{t}+1\right)^3 \,\mathrm{d}t$

[$10+10=20$] 点

$\boxed{4}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)\cdot e^{5x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-5)^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^3}{x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

[$4*5=20$] 点

$\boxed{5}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \log(3x-1)\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int x\cdot\log(x+1)\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^3 \mathrm{d}x \qquad (a>0)$

(5) $\displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{1+\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

[$5+5+5+3+2=20$] 点

2023 年度 数学 IIA 後期末試験–解答用紙 1– ME/IE/CA 2 年 ___番 氏名________________

1

(1) $h(-x) = f(-x)\cdot g(-x)$

$f(-x) = f(x)$

$g(-x) = -g(x)$

$= f(x)\cdot\{-g(x)\}$

$= -f(x)\cdot g(x)$

$= -h(x)$ より $h(x)$ は奇関数 //

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\cdot(x-\beta)^{2023}\,dx$

$\displaystyle = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\cdot\left\{\frac{1}{2024}\cdot(x-\beta)^{2024}\right\}'\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2024}\cdot\Big[(x-\alpha)\cdot(x-\beta)^{2024}\Big]_\alpha^\beta - \frac{1}{2024}\cdot\int_\alpha^\beta (x-\beta)^{2024}\,dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2024}\cdot\frac{1}{2025}\Big[(x-\beta)^{2025}\Big]_\alpha^\beta = \frac{(\alpha-\beta)^{2025}}{2024\cdot 2025}$ //

$0-(\alpha-\beta)^{2025}$

(3)

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$x = a+b-t$ とおく

x	$a \to b$
t	$b \to a$

$\displaystyle = \int_b^a f(a+b-t)\boxed{\frac{dx}{dt}}\,dt$

$\dfrac{dx}{dt} = -1$

$\displaystyle = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$

$\displaystyle = \int_a^b f(a+b-t)\,dt$

$\displaystyle = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ /

また,

$\displaystyle K = \int_0^\pi \frac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ $x = \pi+0-t$ とおく

$\displaystyle = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\cdot\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx$

$\sin(\pi-x) = \sin\pi\cdot\cos x - \cos\pi\cdot\sin x$
$= \sin x$

$\cos(\pi-x) = \cos\pi\cdot\cos x + \sin\pi\cdot\sin x$
$= -\cos x$

$\displaystyle = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

$\displaystyle = -\pi\cdot\int_0^\pi \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - \underbrace{\int_0^\pi \frac{x\cdot\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx}_{K}$

$= -\pi\cdot\Big[\tan^{-1}(\cos x)\Big]_0^\pi - K$

$= -\pi\cdot\{\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}1\} - K$

$= -\pi\left\{-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right\} - K$ より $2K = \dfrac{\pi^2}{2}$

$\iff K = \dfrac{\pi^2}{4}$ //

(2) 別解

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)\cdot(x-\beta)^{2023}\,dx$

$\displaystyle = \int_\alpha^\beta (x-\beta+\beta-\alpha)\cdot(x-\beta)^{2023}\,dx$

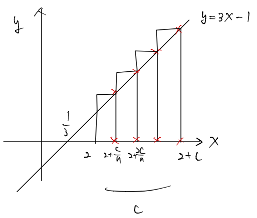
$\displaystyle = \int_\alpha^\beta \{(x-\beta)^{2024} + (\beta-\alpha)\cdot(x-\beta)^{2023}\}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2025}\Big[(x-\beta)^{2025}\Big]_\alpha^\beta + \frac{\beta-\alpha}{2024}\cdot\Big[(x-\beta)^{2024}\Big]_\alpha^\beta$ $\qquad \dfrac{-2024+2025}{2025\cdot 2024} = \dfrac{1}{2025\cdot 2024}$

$\displaystyle = \frac{-(\alpha-\beta)^{2025}}{2025} + \frac{\beta-\alpha}{2024}\{-(\alpha-\beta)^{2024}\} = (\alpha-\beta)^{2025}\left\{\frac{-1}{2025}+\frac{1}{2024}\right\} = \frac{(\alpha-\beta)^{2025}}{2024\cdot 2025}$ //

2

(1) $y = 3x-1$ は連続であるから, $2 \le x \le 2+C$ を n 等分して代表点を左端に取ると



$S_\Delta = \left\{3\left(2+1\cdot\frac{C}{n}\right)-1\right\}\times\frac{C}{n} + \left\{3\cdot\left(2+2\cdot\frac{C}{n}\right)-1\right\}\times\frac{C}{n}$

$+\cdots+\left\{3\cdot\left(2+n\cdot\frac{C}{n}\right)-1\right\}\times\frac{C}{n}$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^n \left\{3\cdot\left(2+k\cdot\frac{C}{n}\right)-1\right\}\times\frac{C}{n} = \sum_{k=1}^n \left(5+\frac{3C}{n}\cdot k\right)\times\frac{C}{n}$

線型 $\displaystyle\sum_k (3f(k)+2g(k)) = 3\sum_k f(k) + 2\sum_k g(k)$

$\displaystyle = \frac{C}{n}\cdot\left(5\sum_{k=1}^n 1 + \frac{3C}{n}\sum_{k=1}^n k\right)$

$\displaystyle = \frac{C}{n}\cdot\left\{5\cdot n + \frac{3C}{n}\cdot\frac{1}{2}n\cdot(n+1)\right\}$

$\displaystyle = C\cdot\left(5+\frac{3C}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

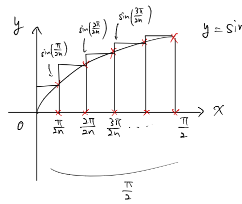
よって $\displaystyle\int_2^{2+C}(3x-1)\,dx$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty} S_\Delta = C\cdot\left(5+\frac{3}{2}C\cdot\frac{1}{1}\right)$

$= \dfrac{3}{2}C^2 + 5C$ //

(2) (1) と同様に $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ を n 等分し,

代表点を右端に取ると



$\displaystyle S_\Delta = \sin\left(\frac{1\cdot\pi}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n} + \sin\left(\frac{2\cdot\pi}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n} + \cdots + \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n}$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2n}\right)\times\frac{\pi}{2n}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1}^n \sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2n}\right)$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n+1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$

よって $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty} S_\Delta$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{\pi}{4n}}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n+1}{n}\right)$

1 $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right)$

$= 2\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{4}$

$= 2\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= 1$ //

3

(1) $\displaystyle f(x) = -\int_0^x \sin(t^2+1)\,dt$ より

$\displaystyle f'(x) = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sin(t^2+1)\,dt\right)$

$= -\sin(x^2+1)$ //

微積分学の基本定理

$\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_{定数}^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

(2) $\displaystyle g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{3}}^{\log\sqrt{\frac{3x+2}{(2x^2+1)^3}}} (2\sqrt{t}+1)^3\,dt\right)$

合成

$\displaystyle = \left(2\cdot\sqrt{\log\sqrt{\frac{3x+2}{(2x^2+1)^3}}}+1\right)^3\cdot\left\{\log\sqrt{\frac{3x+2}{(2x^2+1)^3}}\right\}'$

$\dfrac{1}{2}\{\log(3x+2) - 3\cdot\log(2x^2+1)\}$

$\displaystyle = \left(2\cdot\sqrt{\log\sqrt{\frac{3x+2}{(2x^2+1)^3}}}+1\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{3x+2} - 3\cdot\frac{4x}{2x^2+1}\right)$ //

2023 年度 数学 IIA 後期末試験–解答用紙 2–

4

(1) $(与式) = \int_1^2 (x-1)\cdot\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)' dx$

$= \frac{1}{5}\left[(x-1)\cdot e^{5x}\right]_1^2 - \frac{1}{5}\int_1^2 e^{5x}\,dx$

$= \frac{1}{5}e^{10} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\underbrace{\left[e^{5x}\right]_1^2}_{e^{10}-e^5}$

$= \frac{1}{25}\left(4e^{10} + e^5\right)$

$= \frac{e^5}{25}\left(4e^5 + 1\right)$ //

(2) $(与式) = \int \frac{(x-5)+5}{(x-5)^2}\,dx$

$= \int\left\{\frac{1}{x-5} + 5\cdot(x-5)^{-2}\right\}dx$

$= \log|x-5| - 5\cdot(x-5)^{-1} + C$

$= \log|x-5| - \frac{5}{x-5} + C$ //

(3) $(与式) = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot(\log x)^3\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[(\log x)^4\right]_1^e$

$= \frac{1}{4}\left\{\underbrace{(\log e)^4}_{1^4} - \underbrace{(\log 1)^4}_{0^4}\right\}$

$= \frac{1}{4}$ //

(4) $\int_0^\pi e^x\cdot\cos x\,dx$

$= \int_0^\pi (e^x)'\cdot\cos x\,dx$

$= \left[e^x\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x\cdot\sin x\,dx$

$= -e^\pi - e^0 + \int_0^\pi (e^x)'\cdot\sin x\,dx$

$= -e^\pi - 1 + \cancel{\left[e^x\sin x\right]_0^\pi} - \int_0^\pi e^x\cos x\,dx$

よって $\int_0^\pi e^x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot(e^\pi + 1)$ //

(5) (与式)

$= 2\cdot\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ 　$x = 2\cdot\sin\theta$ とおく

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

$= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4\cdot\cos^2\theta}\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$ 　$\frac{dx}{d\theta} = 2\cdot\cos\theta$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} |2\cdot\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$= 8\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \overset{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$

$= 4\cdot\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= 4\cdot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\cdot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ //

5

(1) $(与式) = 2\cdot\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot\sin\sqrt{x+1}\,dx$

$= -2\cdot\left[\cos\sqrt{x+1}\right]_0^1 = -2\cdot\left(\cos\sqrt{2} - \cos 1\right)$ //

(2) $(与式) = \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-1)'\cdot\log(3x-1)\,dx$

$= \frac{1}{3}\cdot\left[(3x-1)\cdot\log(3x-1)\right]_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 \cancel{(3x-1)}\cdot\frac{3}{\cancel{3x-1}}\,dx$

$= \frac{1}{3}\cdot(5\cdot\log 5 - 2\cdot\log 2) - [x]_1^2$

$= \frac{1}{3}\cdot(5\cdot\log 5 - 2\cdot\log 2) - 1$ //

(3) $(与式) = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log(x+1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\log(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,dx$ 　2次 / 1次

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+1\,\overline{)\,x^2\quad} \\ x^2+x \\ \hline -x \\ -x-1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$= \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\log(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\log(x+1) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|\right) + C$ //

(4) 与式において $x = a\cdot\sin\theta$ とおくと

x	$0 \to \frac{a}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

かつ

$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cdot\cos^2\theta}}$

$= \frac{1}{|a\cdot\cos\theta|} = \frac{1}{a\cdot\cos\theta}$ より

$(与式) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{a\cdot\cos\theta}\right)^3\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\cdot\cos\theta}{a^3\cdot\cos^3\theta}\,d\theta$ 　$\frac{dx}{d\theta} = a\cdot\cos\theta$

$= \frac{1}{a^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \frac{1}{a^2}\cdot\left[\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{a^2}\cdot(1 - 0)$

$= \frac{1}{a^2}$ //

(5) $1 + \cos\frac{x}{2} = 1 + \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{4}\right)$

$= 1 + \cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} = 2\cdot\cos^2\frac{x}{4}$ より

$(与式) = \int_{2\pi}^{4\pi}\sqrt{2\cdot\cos^2\frac{x}{4}}\,dx$

$= \int_{2\pi}^{4\pi}\left|\sqrt{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\right|dx$ 　$2\pi \le x \le 4\pi$, $\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{4} \le \pi$

$= -\sqrt{2}\cdot\int_{2\pi}^{4\pi}\cos\frac{x}{4}\,dx$

$= -\sqrt{2}\cdot 4\cdot\left[\sin\frac{x}{4}\right]_{2\pi}^{4\pi}$

$= -4\sqrt{2}\cdot\left(\cancel{\sin\pi} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= 4\cdot\sqrt{2}$ //

1	2	3	4	5	計
/20	/20	/20	/20	/20	/100

数学ⅡA 後期末試験

2022 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ に対して、以下が成立することを証明せよ。
ただし a は実数の定数である。

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x) + f(a-x)\}\,\mathrm{d}x$$

ヒント①: 左辺の積分を $[0, \frac{a}{2}]$ と $[\frac{a}{2}, a]$ の区間の 2 つに分割せよ

ヒント②: 積分区間が $[\frac{a}{2}, a]$ となる方の積分において、$t = a - x$ と置換せよ

ヒント③: 使う文字のアルファベットを変更しても、定積分の値は同じである

(2) $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^3-1)^n\,\mathrm{d}x$ を考えるとき、$n \geq 1$ で以下の漸化式が成立することを示せ。

$$I_n = \frac{-3n}{3n+1} I_{n-1}$$

ヒント①: $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ や $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + A}\,\mathrm{d}x$ と同じ計算の仕方である

ヒント②: $x^3 = (x^3 - 1) + 1$

$[10 + 10 = 20]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_0^1 (e^x + 5)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば、下記を用いてよい。

(a) $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a \cdot \dfrac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$

(b) $\dfrac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1, \quad \dfrac{h}{e^h - 1} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

$[10 + 10 = 20]$ 点

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数 (微分) を求めよ。

(1) $f(x) = \int_0^x (5t-1)\,\mathrm{d}t$ (2) $g(x) = \int_{-x^2+1}^{2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

(3) $h(x) = \int_1^x (t-x)\cdot r'(t)\,\mathrm{d}t$

(ヒント：$r(t)$ は「形がわからない関数」. 微分されてるのでまずは〇〇積分.)

$[10+5+5=20]$ 点

$\boxed{4}$ 以下の計算をせよ

(1) $\int \sin^4 5x \cdot \cos 5x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-4}^{4} \left(x^3 \cdot \log\left(x^2+4\right) - \frac{7x}{\sqrt{x^4+1}} \right) \mathrm{d}x$

(3) $\int_2^{2+\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_1^2 \log\left(5x-4\right)\mathrm{d}x$

(5) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$

$[4*5=20]$ 点

$\boxed{5}$ 以下の計算をせよ

(1) $\int_0^1 (3x-1)\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x \qquad (A \neq 0)$

(5) $\int \frac{ax+b}{x^2+2px+q}\,\mathrm{d}x \qquad (a \neq 0,\ q-p^2>0)$

$[5+5+5+3+2=20]$ 点

2022 年度 数学 IIA 後期末試験–解答用紙 1– ME/IE/CA 2 年 ___番 氏名___

1

(1) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$

ここで $\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$ ↓ $t=a-x$ とおく

$= \int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)\frac{dx}{dt}dt$ ↓ $x=a-t$ より $\frac{dx}{dt}=-1$

$= -\int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t)dt$

$= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)dt$

$= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$ より

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$

$= \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}dx$ //

(2) $I_n = \int_0^1 (x)'\cdot(x^3-1)^n dx$

$= \cancel{[x\cdot(x^3-1)^n]_0^1} - \int_0^1 x\cdot n\cdot(x^3-1)^{n-1}\cdot 3x^2 dx$

$= -3\cdot n\cdot\int_0^1 \underbrace{x^3}_{(x^3-1)+1}\cdot(x^3-1)^{n-1}dx$

$= -3\cdot n\cdot\int_0^1 \{(x^3-1)^n + (x^3-1)^{n-1}\}dx$

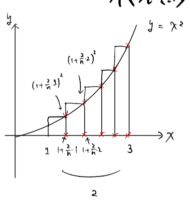
$= -3\cdot n\cdot(I_n + I_{n-1})$

つまり $I_n = -3\cdot n\cdot I_n - 3n\cdot I_{n-1}$ より

$I_n = \frac{-3n}{3n+1}\cdot I_{n-1}$ //

2

(1) $y=x^2$ は連続より $1\le x\le 3$ をn等分して代表点を右端に取ると、



$\int_1^3 x^2dx = \frac13[x^3]_1^3 = \frac13(27-1) = \frac{26}{3}$

$S_\Delta = (1+\frac{2}{n}\cdot 1)^2\times\frac{2}{n} + (1+\frac{2}{n}\cdot 2)^2\times\frac{2}{n}+\cdots+(1+\frac{2}{n}\cdot n)^2\times\frac{2}{n}$

x^2 高 ×横

$= \sum_{k=1}^n (1+\frac{2}{n}\cdot k)^2\times\frac{2}{n}$

$= \frac{2}{n}\cdot\sum_{k=1}^n (1+\frac{4}{n}k+\frac{4}{n^2}k^2)$

線型 $\sum_k (3f(k)+2g(k)) = 3\sum_k f(k) + 2\sum_k g(k)$

$= \frac{2}{n}\cdot\left(\sum_{k=1}^n 1 + \frac{4}{n}\cdot\sum_{k=1}^n k + \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^n k^2\right)$

$= \frac{2}{n}\cdot\left\{n + \frac{4}{n}\cdot\frac12 n(n+1) + \frac{4}{n^2}\cdot\frac16 n(n+1)(2n+1)\right\}$

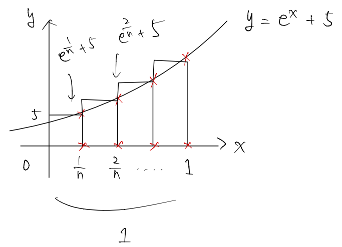
$= 2 + 4\cdot\frac{n+1}{n} + \frac43\cdot\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{n^2}$

よって

$\int_1^3 x^2dx = \lim_{n\to+\infty} S_\Delta = 2 + 4\cdot\frac11 + \frac43\cdot\frac21$

$= 2+4+\frac83 = \frac{6+12+8}{3} = \frac{26}{3}$ //

(2) (1)と同様に $0\le x\le 1$ をn等分して、代表点を右端に取ると、



$S_\Delta = (e^{\frac1n}+5)\cdot\frac1n + (e^{\frac2n}+5)\cdot\frac1n + \cdots + (e^{\frac nn}+5)\cdot\frac1n$

$= \sum_{k=1}^n (e^{\frac kn}+5)\cdot\frac1n$

$= \frac1n\cdot\left(\sum_{k=1}^n e^{\frac kn} + 5\cdot\sum_{k=1}^n 1\right)$

$= \frac1n\cdot\left(\underbrace{\sum_{k=1}^n (e^{\frac1n})^k}_{e^{\frac1n}\cdot(e^{\frac1n})^{k-1}} + 5\cdot n\right)$

a r

$= \frac1n\cdot\left\{e^{\frac1n}\cdot\frac{1-(e^{\frac1n})^n}{1-e^{\frac1n}} + 5\cdot n\right\}$ よって

$e^0=1$ -1 $\frac{1}{\frac1n}$ $e^{\frac1n}-1$

$\int_0^1 (e^x+5)dx = \lim_{n\to+\infty} S_\Delta = \lim_{n\to+\infty}\left\{e^{\frac1n}\cdot(1-e)\cdot\frac{\frac1n}{1-e^{\frac1n}} + 5\right\}$

$= -(1-e)+5 = e+4$ //

3

(1) $f'(x)$ $\left(=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (5t-1)dt\right)\right)$

$= 5x-1$ //

(2) $g(x) = -\int_2^{-x^2-1} e^{-t^2}dt$ より

$g'(x)$ $\left(=-\frac{d}{dx}\left(\int_2^{-x^2-1} e^{-t^2}dt\right)\right)$ 合成

$= -e^{-(-x^2-1)^2}\cdot(-x^2-1)'$

$= 2x\cdot e^{-(x^2+1)^2}$ //

(3) $h(x) = \int_1^x (t-x)\cdot r'(t)dt$

$\frac{d}{dt}$ tで微分

$= [(t-x)\cdot r(t)]_1^x - \int_1^x \underbrace{(t-x)'}_{1}\cdot r(t)dt$

$= 0 - (0-x)\cdot r(1) - \int_1^x r(t)dt$

$= \underbrace{x\cdot \overbrace{r(1)}^{定数}}_{xの1次式} - \int_1^x r(t)dt$ より

$h'(x) = 1\cdot r(1) - r(x)$

$= r(1) - r(x)$ //

4

(1) $(与式) = \frac{1}{5}\int 5\cdot\cos 5x\cdot(\sin 5x)^4\,dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot(\sin 5x)^5 + C = \frac{1}{25}\cdot\sin^5 5x + C$ //

(2) $\int_{-4}^{4}\Big(\underbrace{x^3\cdot\log(x^2+4)}_{奇関数} - \underbrace{\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}}_{奇関数}\Big)\,dx = 0$ //

(3) $5+4x-x^2 = -(x^2-4x)+5 = -(x-2)^2+4+5$ より

$(与式) = \int_2^{2+\frac{3\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{3^2-(x-2)^2}}\,dx$

$= \Big[\sin^{-1}\frac{x-2}{3}\Big]_2^{2+\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}0$

$= \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$ //

θ

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $(与式) = \frac{1}{5}\int_1^2 (5x-4)'\cdot\log(5x-4)\,dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\big[(5x-4)\cdot\log(5x-4)\big]_1^2 - \cancel{\frac{1}{5}}\cdot\int_1^2 \cancel{(5x-4)}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{5x-4}}\,dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\big(6\cdot\log 6 - 1\cdot\cancel{\log 1}\big) - [x]_1^2$

$= \frac{6}{5}\cdot\log 6 - 1$ //

(5) $D = 1+24 = 5^2 > 0$

$(与式) = \int_0^1\frac{1}{(x-3)\cdot(x+2)}\,dx$

$= \frac{1}{5}\int_0^1\Big(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\Big)\,dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\big[\log|x-3| - \log|x+2|\big]_0^1$

$= \frac{1}{5}\cdot\big(\log 2 - \log 3 - \log 3 + \log 2\big)$

$= \frac{2}{5}\cdot\big(\log 2 - \log 3\big)$ //

5

(1) $(与式) = \int_0^1 (3x-1)\cdot\Big(\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big)'\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\big[(3x-1)\cdot e^{2x}\big]_0^1 - \frac{3}{2}\cdot\int_0^1 e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot(2e^2+1) - \frac{3}{4}\cdot\big[e^{2x}\big]_0^1$

$= e^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{4}$ //

(2) $(与式) = 2\cdot\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{25-x^2}\,dx$

$x = 5\cdot\sin\theta$ とおく

x	$0 \to \frac{5}{2}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{6}$

$\frac{5}{2} = 5\sin\theta$ ⇔ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{25\cos^2\theta}\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = 5\cos\theta$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}|5\cdot\cos\theta|\cdot 5\cdot\cos\theta\,d\theta$

$= 2\cdot 5^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

⇔ $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= 5^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$= 5^2\cdot\Big[\theta + \frac{1}{2}\cdot\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= 5^2\cdot\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\Big)$

$= 25\cdot\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Big)$ //

(3) $(与式) = \int_3^4\frac{(x-2)+2}{\sqrt{x-2}}\,dx$

$= \int_3^4\Big\{(x-2)^{\frac{1}{2}} + 2\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}}\Big\}\,dx$

$= \Big[\frac{2}{3}\cdot(x-2)^{\frac{3}{2}} + 2\cdot 2\,(x-2)^{\frac{1}{2}}\Big]_3^4$

$= \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \Big(\frac{2}{3} + 4\Big)$

$= \frac{16}{3}\cdot\sqrt{2} - \frac{14}{3}$ //

(4) $\int\sqrt{x^2+A}\,dx$

$= \int (x)'\cdot(x^2+A)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(x^2+A)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x\,dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\sqrt{x^2+A}\,dx + A\cdot\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\sqrt{x^2+A}\,dx + A\cdot\log|x+\sqrt{x^2+A}|$

より

$\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\Big(x\cdot\sqrt{x^2+A} + A\cdot\log|x+\sqrt{x^2+A}|\Big) + C$ //

(5) $D = 4p^2 - 4q = 4(p^2-q) < 0$

$(与式) = \int\frac{a\cdot(x+p-p)+b}{x^2+2px+q}\,dx$

$= \int\frac{a\cdot(x+p) - a\cdot p + b}{x^2+2p\cdot x+q}\,dx$

$= \frac{a}{2}\cdot\int\frac{2\cdot(x+p)}{x^2+2p\cdot x+q}\,dx$

$+ (b - a\cdot p)\cdot\int\frac{1}{(x+p)^2+q-p^2}\,dx$

$= \frac{a}{2}\cdot\log|x^2+2p\cdot x+q|$

$+ \frac{b-a\cdot p}{\sqrt{q-p^2}}\cdot\tan^{-1}\Big(\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}\Big)$

$+ C$ //

1	2	3	4	5	計
/20	/20	/20	/20	/20	/100

数学ⅡA 後期期末試験

2021 年度/後期期末:ME/IE/CA
制限時間:80 分
出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(1) 実数 a, b 及び、微分可能な関数 $h(x)$ に対して $\displaystyle\int_a^b h'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\,h(x)\,\right]_a^b$ が成立することに注意して、定積分の部分積分の公式を証明せよ

(2) $\displaystyle I = \int e^x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x, \quad J = \int e^x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$ に対して、以下を示せ。
またこれを用いて I, J を求めよ。

$$\begin{cases} I = e^x \cdot \sin x - J \\ J = e^x \cdot \cos x + I \end{cases}$$

$[10 + 10 = 20]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \ \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば、下記を用いてよい。

(a) $\displaystyle a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

(b) $\displaystyle\frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1, \quad \frac{h}{e^h - 1} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

$[10 + 10 = 20]$ 点

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ。

(1) $\displaystyle f(x) = \int_0^{2x+1} \sin t^2\,\mathrm{d}t$ とする時、その導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle g(x) = \int_{x+\sqrt{x^2+1}}^{\sin^2 5x} t^2 \cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ とする時、その導関数 $g'(x)$ を求めよ。

$[10 + 10 = 20]$ 点

$\boxed{4}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int \sin 5x \cdot \sin 6x \,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(xe^{-x^2} - \sqrt{7}\sin x + \frac{4x^3}{x^2+3^2} - x^4 \right) \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \log(5x+1)\,\mathrm{d}x$

[5 * 4 = 20] 点

$\boxed{5}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt{x+9}\,\mathrm{d}x$ (n 乗は計算せずそのままでも良い.)

(2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-4x+7}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x$ $(A \neq 0)$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

[4 * 5 = 20] 点

2021 年度 数学 IIA 後期試験–解答用紙 1– ME/IE/CA 2 年 ___番 氏名________

1

(1) 積の微分公式

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

の両辺を a から b まで積分すると

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))'\,dx = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow\ [f(x)\cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

よって $\displaystyle\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$ //

(2) $I = \displaystyle\int (e^x)'\cdot \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$

よって $I = e^x \sin x - J$

また, $J = \displaystyle\int (e^x)'\cdot \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$

よって $J = e^x \cos x + I$

故に $\begin{cases} I + J = e^x \sin x \\ I - J = -e^x \cos x \end{cases}$ (I, J に関する連立方程式)

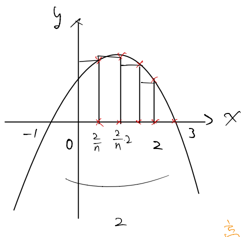
よって $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$ 上下に足す

$J = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$ // 上下に引く

2

$-(x^2-2x-3) = -(x-3)(x+1)$

(1) $y = -x^2+2x+3$ は連続であるから $0 \le x \le 2$ を n 等分して, 代表点を右端に取ると



高　底

$$S_\Delta = \left\{-\left(\tfrac{2}{n}\cdot 1\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{n}\cdot 1\right) + 3\right\}\cdot\frac{2}{n}$$

$-x^2 + 2 \times x + 3$

$$+ \left\{-\left(\tfrac{2}{n}\cdot 2\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{n}\cdot 2\right) + 3\right\}\cdot\frac{2}{n} + \cdots + \left\{-\left(\tfrac{2}{n}\cdot n\right)^2 + 2\left(\tfrac{2}{n}\cdot n\right) + 3\right\}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\tfrac{2}{n}\cdot k\right)^2 + 2\cdot\left(\tfrac{2}{n}\cdot k\right) + 3\right\}\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{4}{n^2}\cdot k^2 + \frac{4}{n}\cdot k + 3\right\}$$

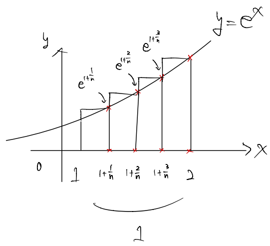
$$= \frac{2}{n}\cdot\left\{-\frac{4}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) + \frac{4}{n}\cdot\frac{1}{2}n\cdot(n+1) + 3n\right\}$$

よって $\displaystyle\int_0^2 (-x^2+2x+3)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_\Delta$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left\{-\frac{4}{3}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + 4\cdot\frac{n+1}{n} + 6\right\} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1} + 4\cdot\frac{1}{1} + 6$$

$$= \frac{22}{3}$$ //

(2) (1)と同様に $1 \le x \le 2$ を n 等分して, 代表点を右端に取ると,



高　底

$$S_\Delta = e^{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + e^{1+\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + e^{1+\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot e\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

$$= \frac{e}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\underbrace{e^{\frac{1}{n}}}_{a}\cdot\Big(\underbrace{e^{\frac{1}{n}}}_{r}\Big)^{k-1}$$

$$= \frac{e}{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= e\cdot(1-e)\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$ より

$e^0 = 1$　$\dfrac{t}{e^t-1} \to 1$

$$\int_1^2 e^x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_\Delta = \lim_{n\to+\infty} e\cdot(e-1)\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

$$= e\cdot(e-1)\cdot 1\cdot 1 = e\cdot(e-1)$$ //

3

(1) $f'(x)\ \left(= \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^{2x+1} \sin(t^2)\,dt\right)\right)$ 合成

$$= \sin\{(2x+1)^2\}\cdot(2x+1)'$$

$$= 2\cdot\sin\{(2x+1)^2\}$$ //

(2) $g(x) = -\displaystyle\int_0^{x+\sqrt{x^2+1}} t^2 e^{t^2}\,dt + \int_0^{(\sin 5x)^2} t^2 e^{t^2}\,dt$ より

$$g'(x) = -(x+\sqrt{x^2+1})^2 e^{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\left\{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\} + \sin^4 5x\, e^{\sin^4 5x}\cdot 2\sin 5x\cdot 5\cos 5x$$ //

$$(x+\sqrt{x^2+1})' = \left\{x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' = 1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\{(\sin 5x)^2\}' = 2\cdot(\sin 5x)^1\cdot(\sin 5x)' = 2\cdot\sin 5x\cdot 5\cos 5x$$

2021 年度 数学 IIA 後期末試験–解答用紙 2–

4

(1)

$\cos(5x-6x) = \cos 5x\cdot\cos 6x + \sin 5x\cdot\sin 6x$

$-)\ \cos(5x+6x) = \cos 5x\cdot\cos 6x - \sin 5x\cdot\sin 6x$

$\cos(-x) - \cos 11x = 2\cdot\sin 5x\cdot\sin 6x$

$$(与式) = \frac{1}{2}\int(\cos x - \cos 11x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{11}\sin 11x\right) + C$$

(2)

$$(与式) = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left[(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(10^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(10\sqrt{10} - 27\right)$$

(3)

$$(与式) = 2\int_0^{\sqrt{3}}(-x^4)\,dx$$

$$= -2\cdot\frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot 9\sqrt{3} = -\frac{18}{5}\sqrt{3}$$

(4)

$$(与式) = \frac{1}{5}\int_0^1 (5x+1)'\log(5x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[(5x+1)\cdot\log(5x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{\cancel{5}}\int_0^1 (5x+1)\cdot\frac{\cancel{5}}{5x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(6\cdot\log 6 - 1\cdot\cancel{\log 1}\right) - [x]_0^1$$

$$= \frac{6}{5}\log 6 - 1$$

5

(1)

$$(与式) = \int_{-1}^0 (x+9-9)\cdot(x+9)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_{-1}^0\left\{(x+9)^{\frac{3}{2}} - 9\cdot(x+9)^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}\cdot(x+9)^{\frac{5}{2}} - \overset{3}{\cancel{9}}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\cdot(x+9)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^0$$

$$= \frac{2}{5}\cdot 3^5 - 6\cdot 3^3 - \left(\frac{2}{5}\cdot 8^{\frac{5}{2}} - 6\cdot 8^{\frac{3}{2}}\right)$$

(2) $D = 16 - 28 < 0$

$$(与式) = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2+(\sqrt{3})^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}0\right)$$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Updownarrow$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$$

(3)

$$(与式) = 2\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$x = 2\cdot\sin\theta$ とおく

x	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cdot\cos\theta$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4\cdot\cos^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

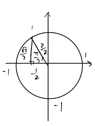
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}|2\cdot\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2^3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$
$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$
$\Updownarrow$
$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$



$$= 4\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

(4)

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx$$

$$= \int (x)'\cdot(x^2+A)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(x^2+A)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x\,dx$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\frac{(x^2+A) - A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\sqrt{x^2+A}\,dx + A\cdot\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$$

$$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\sqrt{x^2+A}\,dx + A\cdot\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|$$

より

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+A} + A\cdot\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right) + C$$

(5)

$$(与式) = \int\frac{\sin 2x}{\sin^2 2x}\,dx$$

$$= \int\frac{\sin 2x}{1-\cos^2 2x}\,dx$$

$$= \int\frac{\sin 2x}{(1-\cos 2x)\cdot(1+\cos 2x)}\,dx$$

$$= \int\frac{\sin 2x}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin 2x}{1-\cos 2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\log|1-\cos 2x| - \log|1+\cos 2x|\right) + C$$

1	2	3	4	5	計
/20	/20	/20	/20	/20	/100

数学 II A 後期期末試験

2020 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(1) 微分可能な関数 $h(x)$ に対して $\displaystyle\int h'(x)\,\mathrm{d}x = h(x)$ が成立することに注意して、不定積分の部分積分の公式を証明せよ

(2) $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$ を考えるとき、以下の漸化式が成立することを示せ。

$$I_n = \frac{-2n}{2n+1} I_{n-1}$$

<u>ヒント①</u>: $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ や $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x$ と同じ計算の仕方である

<u>ヒント②</u>: $x^2 = (x^2-1)+1$

$[8+7=15]$ 点

$\boxed{2}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int_0^1 (5x+2)e^{3x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}^{\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi} \sin^{10}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}x\right)\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{e^{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \log(x+10)\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \sin 5x\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$

$[6*7=42]$ 点

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ。

(1) 偶関数や奇関数とは限らない関数 $f(x)$ に対して、以下が成立することを証明せよ。ただし a は実数の定数である。

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x$$

<u>ヒント①</u>: 左辺の積分を $[-a,0]$ と $[0,a]$ の区間の 2 つに分割せよ
<u>ヒント②</u>: 積分区間が $[-a,0]$ となる方の積分において、$t=-x$ と置換せよ
<u>ヒント③</u>: 使う文字のアルファベットを変更しても、定積分の値は同じである

(2) $a \geq 0,\ b \geq 0$ となる実数 a,b に対して、関数

$$B(a,b) = \int_{0}^{1} x^{a} \cdot (1-x)^{b}\,\mathrm{d}x$$

を考える。 このとき $B(a,b)=B(b,a)$ が成立することを証明せよ。

<u>ヒント①</u>: $B(a,b)$ の定義の式において、$t=1-x$ と置換する (全てをtで書くこと)
<u>ヒント②</u>: もちろん, $B(b,a) = \displaystyle\int_{0}^{1} x^{b} \cdot (1-x)^{a}\,\mathrm{d}x$ である

$[5+5=10]$ 点

$\boxed{4}$ 以下の計算をせよ

(1) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{(x^2+16)^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos 4x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^5+x^3+2x)e^{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

(5) 実数 $0<a<\frac{\pi}{2}$ に対して $\displaystyle\int_{0}^{a} \log|1+\tan a \cdot \tan x|\,\mathrm{d}x$

ヒント: $\tan a, \tan x$ の定義 $\to$ 通分 $\to$ $\cos$ の加法定理
$\to$ $\log$ の性質で分解 $\to$ $a-x$ がある項だけ $t=a-x$ と置換

$[7+7+8+8+3=33]$ 点

$\boxed{1}$

(1) 積の微分 $\{f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

を両辺積分すると $\underbrace{\int \{f(x)\cdot g(x)\}' dx}_{f(x)\cdot g(x)} = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$

より

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx_{/\!/}$$

(2) $I_n = \int_0^1 (x)'\cdot(x^2-1)^n dx$

$= \cancel{\left[x\cdot(x^2-1)^n\right]_0^1} - \int x\cdot n\cdot(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x\,dx$

$= -2n\cdot\int \underbrace{x^2}_{(x^2-1)+1}\cdot(x^2-1)^{n-1}dx$

$= -2n\left\{\int (x^2-1)^n dx + \int (x^2-1)^{n-1}dx\right\}$

よって $I_n = -2n\cdot I_n - 2n\cdot I_{n-1}$ より

$(1+2n)\cdot I_n = -2n\cdot I_{n-1}$

$\Downarrow$

$$I_n = \frac{-2n}{2n+1} I_{n-1} \ /\!/$$

$\boxed{2}$

(1) (与式) $= \int_0^1 (5x+2)\cdot\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' dx$

$= \frac{1}{3}\left[(5x+2)\cdot e^{3x}\right]_0^1 - \frac{5}{3}\int_0^1 e^{3x}dx$

$= \frac{1}{3}(7e^3-2) - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_0^1$

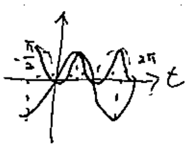
$= \frac{1}{3}(7e^3-2) - \frac{5}{9}(e^3-1)_{/\!/}$

(2) $t = \frac{3}{2\sqrt{2}}x$ とおいて、

x	$-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi \to \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$
t	$-\frac{\pi}{2} \to 2\pi$

$\frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ より

(与式) $= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin^{10} t\,dt$



$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10}t\,dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 5\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}_{/\!/}$

(3) $\int_0^2 x\cdot e^{-x^2-3}dx = \frac{-1}{2}\int_0^2 -2x\,e^{-x^2-3}dx$

$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2-3}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\left(e^{-7}-e^{-3}\right)_{/\!/}$

(4) (与式) $= \int (x+10)'\cdot\log(x+10)\,dx$

$= (x+10)\cdot\log(x+10) - \int \frac{x+10}{x+10}dy$

$= (x+10)\cdot\log(x+10) - x + C_{/\!/}$

(5) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$-)\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$

(与式) $= \frac{1}{2}\cdot\int\{\cos(+2x) - \cos 8x\}dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 8x\right\} + C_{/\!/}$

(6) (与式) $= \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot 2(x^2+4)^{\frac{1}{2}} + C_{/\!/}$

$\boxed{3}$

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

ここで $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-1)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$

$t=-x$

$\begin{array}{c|c} x & -a \to 0 \\ \hline t & a \to 0 \end{array}$, $\frac{dx}{dt} = -1$

故に $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ //

(2) $B(a,b) = \int_0^1 x^a (1-x)^b\,dx$ $\Downarrow$ $t = 1-x$ $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 1 \to 0 \end{array}$ $\left(\frac{dx}{dt} = -1\right.$

$= \int_1^0 (1-t)^a \cdot t^b \cdot (-1)\,dt$

$= \int_0^1 t^b \cdot (1-t)^a\,dt = B(b,a)$ //

$\boxed{4}$

(1) $x = 4\tan\theta$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 4 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$, $\frac{dx}{d\theta} = \frac{4}{\cos^2\theta}$ より

(与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(16\tan^2\theta + 16)^2} \cdot \frac{4}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \frac{4}{16^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \frac{1}{4\cdot 16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$= \frac{1}{4\cdot 16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$\Big(\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$= \frac{1}{8\cdot 16} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{8\cdot 16} \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8\cdot 16}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$ //

(2) $1 + \cos \overset{2x+2x}{4x} = 1 + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2\cos^2 2x$ より

(与式) $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x|\,dx$ $\Big(\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2} \Downarrow \frac{2}{3}\pi \le 2x \le \pi$

$= -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{6}}{4}$ //

(3) (与式) $= \int (x)' \cdot (9-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\,dx$

$= x\sqrt{9-x^2} - \int \frac{9-x^2-9}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = x\sqrt{9-x^2} - \int\sqrt{9-x^2}\,dx + 9\underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx}_{\sin^{-1}\frac{x}{3}}$

故に $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{9-x^2} + 9\sin^{-1}\frac{x}{3}\right) + C$ //

(4) 0 (奇関数)

(5) (与式) $= \int_0^a \log\left|1 + \frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right| dx$

$= \int_0^a \log\left|\frac{\overbrace{\cos a \cdot \cos x + \sin a \cdot \sin x}^{\cos(a-x)}}{\cos a \cdot \cos x}\right| dx$

$= \int_0^a \left\{\log|\cos(a-x)| - \log|\cos a| - \log|\cos x|\right\} dx$

$= \underbrace{\int_0^a \log|\cos(a-x)|\,dx}_{} - a\cdot\log|\cos a| - \int_0^a \log|\cos x|\,dx$

$t = a-x$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to a \\ \hline t & a \to 0 \end{array}$

$\int_a^0 \log|\cos t|\,(-1)\,dt = \int_0^a \log|\cos t|\,dt$

$= \cancel{\int_0^a \log|\cos x|\,dx} - a\cdot\log|\cos a| - \cancel{\int_0^a \log|\cos x|\,dx}$

$= -a\cdot\log|\cos a|$ //

\# $t = x-a$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to a \\ \hline t & -a \to 0 \end{array}$ で

1項目が $\int_{-a}^{0} \log|\cos(-t)|\,dt$

$= \int_{-a}^{0} \log|\cos t|\,dt = \int_0^a \log|\cos x|\,dx$

偶関数だから

1	2	3	4	計
/15	/42	/10	/33	/100

数学 II A 後期期末試験

2019 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

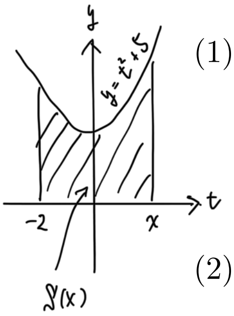
$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int (3x-2)e^{2x}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_0^{\frac{15}{4}\pi} \sin^5\left(\frac{2}{5}x\right)\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x^3\cdot\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

$[5*6=30]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。



(1) 左図における斜線部の面積を $S(x)$ とおく時、この $S(x)$ を定積分の記号を用いてかけ。また、どのような方法でも良いのでその微分 $S'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)=\displaystyle\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} t\cdot e^{t^4}\,\mathrm{d}t$ とする時、$f'(x)$ を求めよ。

ただし必要ならば、任意の c に対して下記の変形ができることを用いて良い。

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} t\cdot e^{t^4}\,\mathrm{d}t=\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{c} t\cdot e^{t^4}\,\mathrm{d}t+\int_{c}^{\sqrt{a^2-x^2}} t\cdot e^{t^4}\,\mathrm{d}t$$

$[10+10=20]$ 点

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_0^3 e^x\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば、下記を用いてよい。

(a) $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=a\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r}$

(b) $\dfrac{e^h-1}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}1,\quad \dfrac{h}{e^h-1}\xrightarrow[h\to 0]{}1$

$[10+10=20]$ 点

$\boxed{4}$ 以下の（1）〜 (4) の値を求めよ。また (5) の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int \log(2x-5)\,\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

(5) 2 以上の自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$ とおく時、I_n の漸化式を求めよ。

なお、求めた漸化式は解かなくてもよい。

$[5*5=25]$ 点

$\boxed{5}$

誤差関数 (error function) と呼ばれる関数;

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

は初等関数[*1]で表すことができない事が知られている[*2]. しかし数学ⅡＡの一年間の内容を集結させれば、その解析自体は可能である。ここでは以下の手順に従って erf(x) のグラフを書こう。

(1)　erf(x) が奇関数であることを示せ。(ヒント：$t=-u$ と置換せよ)

(2)　導関数および第 2 次導関数 $\mathrm{erf}'(x),\ \mathrm{erf}''(x)$ を求めよ。

(3)　凹凸まで含めた増減表を書くことによって、$y=\mathrm{erf}(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし必要なら $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{erf}(x) = 1$ を用いてよい。

$[1+2+2=5]$ 点

[*1] ベキ、三角、指数、対数関数及びその逆関数の四則演算と合成で書かれる関数。つまり諸君が知っている関数。

[*2] つまり不定積分 $\displaystyle\int e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ はどんなに頑張っても計算不可能である。

2019年度 数学IIA 後期期末試験–解答用紙1– ME/IE/CA 2年 ＿＿番 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$

(1) $\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cdot\cos(x^2)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\sin(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 0$ //

(2) (与式) $= \int (3x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$

$= \frac{1}{2}\cdot(3x-2)\cdot e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot(3x-2)\cdot e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C$ //

(3)

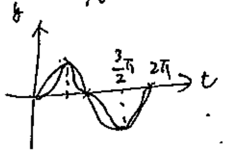
(与式) $= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^5 t \cdot \frac{dx}{dt}\,dt$

↪ $t = \frac{2}{5}x$ とおく
$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{15}{4}\pi \\ t & 0 \to \frac{3}{2}\pi \end{array}$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{15}{4}\pi$

$= \frac{5}{2}\cdot\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin^5 t\,dt$

$= \frac{5}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\,dt = \frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$ //



(4) (与式) $= \int \frac{1}{(x+3)(x-3)}\,dx$

$= -\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3}\right)dx$

$= -\frac{1}{6}\left(\log|x+3| - \log|x-3|\right) + C$ //

(5) 0 //

(6)

(与式) $= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

$= -\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$ //

$\boxed{2}$

(1) $f(x) = \int_{-2}^{x}(t^2+5)\,dt$ より

$f'(x) = x^2+5$ //

(2) $f(x) = 0$ より $f'(x) = 0$ //

$S_n = (1+\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{n} + (1+\frac{2}{n})^2\cdot\frac{1}{n} + \cdots (1+\frac{n}{n})^2\cdot\frac{1}{n}$

$\boxed{3}$

(1) $y=x^2$ はレンゾクであるから区間 $[1,2]$ を n 等分して
端点を右端にとれば,

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n^2}k^2 + \frac{2}{n}\cdot k\right)$

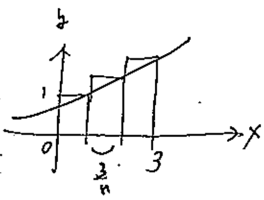
$\frac{1}{n}\cdot\left\{n + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(2n+1) + \frac{2}{n}\cdot\frac{n}{2}\cdot(n+1)\right\}$

$= 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} + \frac{n+1}{n}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 1 + \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 + 1 = \frac{7}{3}$ //

$\left(\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}\right)$

(2) (1)と同様にして,



$S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{3}{n}k}\cdot\frac{3}{n}$

$= \frac{3}{n}\left(e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{3}{n}\cdot 2} + \cdots + e^{\frac{3}{n}\cdot n}\right)$

$= \frac{3}{n}\cdot\left\{e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{3}{n}}\cdot e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{3}{n}}\cdot\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^2 + \cdots + e^{\frac{3}{n}}\cdot\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^{n-1}\right\}$

$= \frac{3}{n}\cdot\frac{e^{\frac{3}{n}}\cdot\left\{1-\left(e^{\frac{3}{n}}\right)^n\right\}}{1-e^{\frac{3}{n}}} = \frac{\frac{3}{n}}{1-e^{\frac{3}{n}}}\cdot e^{\frac{3}{n}}\cdot(1-e^3)$

$\xrightarrow{n\to\infty} -1\cdot e^0\cdot(1-e^3) = e^3-1$ //

$\left(\int_0^3 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^3 = e^3-1\right)$

$\boxed{4}$

(1) $(与式) = \frac{1}{2}\int (2x-5)' \cdot \log(2x-5)\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot(2x-5)\cdot\log(2x-5) - \frac{1}{2}\int (2x-5)\cdot\frac{2}{2x-5}\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot(2x-5)\cdot\log(2x-5) - x + C$ //

(2) $(与式) = 2\cdot\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{9-x^2}\,dx$ 　$x = 3\cdot\sin\theta$ とおく

x	$0 \to \frac{3}{2}$
θ	$0 \to \pi/6$

$= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9-9\cdot\sin^2\theta}\cdot 3\cdot\cos\theta\,d\theta$

$= 6\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9\cdot\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$ 　$\to |3\cdot\cos\theta|$

$= 3\cdot 6\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta\,d\theta$

$= \frac{3\cdot 6}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$= 9\cdot\left[\theta + \frac{1}{2}\cdot\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= 9\cdot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 9\cdot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ //

(3) $I = \int 1\cdot\sqrt{x^2+A}\,dx = \int (x)'\cdot(x^2+A)^{\frac{1}{2}}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+A}}$

$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+A} - \int\sqrt{x^2+A}\,dx + A\cdot\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}$

$= x\cdot\sqrt{x^2+A} - I + A\cdot\log|x+\sqrt{x^2+A}| + 2\cdot C$

故に $I = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+A} + A\cdot\log|x+\sqrt{x^2+A}|\right) + C$ //

(4) $(与式) = \int\frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\tan^{-1}\frac{x+1}{2} + C$ //

(5) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-1}\cdot\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n-1}\cdot(\sin x)'\,dx$

$= \left[(\cos x)^{n-1}\cdot\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot(n-1)\cdot(\cos x)^{n-2}\cdot(-\sin x)\,dx$

$= 0 + (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\cdot(\cos x)^{n-2}\,dx$

$= 0 + (n-1)\cdot\{I_{n-2} - I_n\}$

$I_n = (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)I_n$

$n\cdot I_n = (n-1)\cdot I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ //

$\boxed{5}$

(1) $\mathrm{erf}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2}\,dt$ 　$\downarrow t=-u$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-u^2}(-1)\,du$

t	$0 \to -x$
u	$0 \to x$

$= -\mathrm{erf}(x)$ //

(2) $\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-x^2}$

$\mathrm{erf}''(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}$ //

(3) (1)より $x \geq 0$ について考えると、

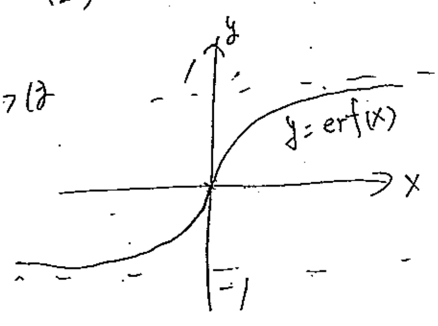
$\mathrm{erf}'(x) > 0$ であり、

$\mathrm{erf}''(x) = 0$ のとき $x = 0$.

故に増減表は

x	0	$\cdots$
y'	$+$	$+$
y''	0	$-$
y	0	↗ (1)

故にグラフは



//

1	2	3	4	5	計
/30	/20	/20	/25	/5	/100

数学ⅡA 後期期末試験

2018 年度/後期期末:ME/IE/CA
制限時間:80 分
出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int x\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^{21}-x\sin^2 x+6x^2)\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \cos 3x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$

$[5*6=30]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3(x^2-4x)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし必要ならば、下記を用いてよい。

$$(a)\ \ \sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$(b)\ \ \frac{\sin\theta}{\theta}\xrightarrow[\theta\to 0]{}1$$

$[10+10=20]$ 点

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}(-2t+5)\,\mathrm{d}t$ を実際に計算し、その後 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)=\displaystyle\int_{x+\sqrt{a^2-x^2}}^{2}e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ とする時、$g'(x)$ を求めよ。

$[10+10=20]$ 点

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x-2}} \,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_{-3\pi}^{3\pi} \sqrt{1-\cos\frac{x}{3}} \,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{\sqrt{2}}} \sqrt{25-x^2} \,\mathrm{d}x$

$[5 * 6 = 30]$ 点

2018 年度 数学 IIA 後期期末試験–解答用紙 1– ME/IE/CA ___年 ___番 氏名___

$\boxed{1}$

(1) (与式) $= \int x \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x}\right)' dx$

$= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$

$= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$ //

(2) (与式) $= \int \frac{e^x}{\sqrt{(e^x)^2 + 4}} dx$

$= \log \left| e^x + \sqrt{e^{2x} + 4} \right| + C$ //

(3) (与式) $= 2 \cdot 6 \cdot \int_0^2 x^2 dx$

$= 4 \left[x^3 \right]_0^2 = 32$ //

(4) (与式) $= \frac{-1}{2} \int_0^x -2t \cdot e^{-t^2} dt$

$= -\frac{1}{2} \left[e^{-t^2} \right]_0^x$

$= -\frac{1}{2} \left(e^{-x^2} - 1 \right)$ //

(5) (与式) $= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$ //

(6)

(与式) $= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \cdot \sin 5x + \sin x \right) + C$ //

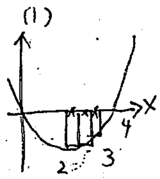
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$+ \; \cos(\alpha-\beta) = \;〃\; + \;〃$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$

$\boxed{2}$

(1)



$y = x^2 - 4x$ は連続より

① $[2, 3]$ を n 等分して

② 代表点を右端にとると

$S_\Delta = \left\{ \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \frac{1}{n} + \left\{ \left(2 + \frac{2}{n}\right)^2 - 4\left(2 + \frac{2}{n}\right) \right\} \frac{1}{n}$

$+ \left\{ \left(2 + \frac{n}{n}\right)^2 - 4\left(2 + \frac{n}{n}\right) \right\} \cdot \frac{1}{n}$

$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left\{ \left(2 + \frac{k}{n}\right)^2 - 4\left(2 + \frac{k}{n}\right) \right\}}_{4 + \cancel{\frac{4k}{n}} + \frac{k^2}{n^2} - 8 - \cancel{\frac{4k}{n}}} \cdot \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{n^2} \cdot k^2 - 4 \right\}$

$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) - 4n \right\}$

$= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 4$

$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{3} - 4 = \frac{-11}{3}$ //

(2) (1)と同様にすると

$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{n}$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{n}$

$= \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

$= \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \cdot 1 \cdot \sin\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$\xrightarrow{n \to \infty} 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ //

2018 年度 数学 IIA 後期期末試験–解答用紙 2–

3

1) $f(x) = \left[-t^2+5t\right]_{-2}^{x}$

$= -x^2+5\cdot x+4+10$

$= -x^2+5\cdot x+14$

$f'(x) = -2x+5$ //

2) $g(x) = -\int_2^{x+\sqrt{a^2-x^2}} e^{t^2}\,dt$ より

$g'(x) = -e^{(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}\cdot\left\{1+\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right\}$

$= -e^{\bigcirc^2}\cdot\left\{1-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right\}$ //

4

1) $I = \int \underbrace{e^x}_{(e^x)'}\cdot\sin x\,dx$ とおくと

$= e^x\cdot\sin x - \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$= e^x\cdot\sin x - e^x\cdot\cos x - \underbrace{\int e^x\sin x\,dx}_{I}$

よって $I = \frac{1}{2}e^x\cdot(\sin x-\cos x)+C$ //

2) (与式) $= \int \underbrace{x^{-2}}_{(-x^{-1})'}\cdot\log x\,dx$

$= -\frac{\log x}{x} + \int\frac{1}{x^2}\,dx$

$= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C$ //

3) (与式) $= \frac{1}{2}\int(-2\cdot x)\cdot(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\,2\cdot(9-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$

$= \sqrt{9-x^2} + C$ //

(与式) $= \int_3^4 \frac{(x-2)+2}{\sqrt{x-2}}\,dx$

$= \int_3^4 (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int_3^4 (x-2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{3}\left[(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_3^4 + 2\cdot2\left[\sqrt{x-2}\right]_3^4$

$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) + 4(\sqrt{2}-1)$ //

(5) $\cos\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{6}\right) = \cos^2\frac{x}{6} - \sin^2\frac{x}{6}$

より $1-\cos\frac{x}{3} = 2\cdot\sin^2\frac{x}{6}$. よって

(与式) $= 2\cdot\int_0^{3\pi}\sqrt{1-\cos\frac{x}{3}}\,dx = 2\cdot\sqrt{2}\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^2\frac{x}{6}}\,dx$

$= 2\sqrt{2}\int_0^{3\pi}\left|\sin\frac{x}{6}\right|dx$

x	$0 \to 3\pi$
$\frac{x}{6}$	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot6\cdot\int_0^{3\pi}\frac{1}{6}\sin\frac{x}{6}\,dx$

$= -2\cdot6\cdot\sqrt{2}\left[\cos\frac{x}{6}\right]_0^{3\pi} = -2\cdot6\sqrt{2}(0-1) = 12\sqrt{2}$ //

(6)

(与式) $= \int_0^{\pi/4}\sqrt{25-25\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$　　$x = 5\cdot\sin\theta$ とおく

x	$0 \to 5/\sqrt{2}$
θ	$0 \to \pi/4$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{25\cdot\cos^2\theta}\cdot5\cdot\cos\theta\,d\theta$

$= 25\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\cos\theta|\cdot\cos\theta\,d\theta$

$= 25\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$

$\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cdot\cos^2\theta - 1$
より
$\cos^2\theta = \frac{1+\cos2\theta}{2}$

$= \frac{25}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\cdot\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{25}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$ //

1	2	3	4	計
/30	/20	/20	/30	/100

数学ⅡA 後期期末試験

2017 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_{-\frac{11\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{3}} x^3\sin^2 x\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_{-\frac{11\pi}{6}}^{\frac{33\pi}{6}} \sin^7\left(\frac{3}{11}x\right)\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_1^3 \log(2x-1)\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

[$5*5=25$] 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x^2+1)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^n k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ を計算することによって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k}$ を求めよ。

[$10+10=20$] 点

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle f(x)=\int_0^x (2t+1)\,\mathrm{d}t$ を実際に計算し、その後 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle g(x)=\int_{\log\sqrt[3]{x^2+1}}^4 \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ とする時、$g'(x)$ を求めよ。

(3) ある関数 $r(t)$ に対して、$\displaystyle h(x)=\int_1^x (x-t^2)\cdot r''(t)\,\mathrm{d}t$ とする時、$h'(x)$ を求めよ。

[$10+10+5=25$] 点

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 x(x-2)^5\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{5-x^2}\,\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sqrt{1-\cos 3x}\,\mathrm{d}x$

[$5*6=30$] 点

公式集

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

2017年度 数学IIA 後期期末試験–解答用紙1– ME/IE/CA ___ 年 ___ 番 氏名 ______________

$\boxed{1}$

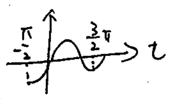
(1) $(与式) = \frac{1}{2}\int_0^1 2\cdot x\cdot e^{x^2}dx$

$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$ //

(2) $x^3\cdot\sin^2 x$ は奇関数より 0

(3) $t = \frac{3}{11}x$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & -\frac{11}{6}\pi \to \frac{33}{6}\pi \\ \hline t & -\frac{\pi}{2} \to \frac{3}{2}\pi \end{array}$ より

$(与式) = \frac{11}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^7 t\, dt$



$= 0$ //

(4) $(与式) = \frac{1}{2}\int_1^3 (2x-1)'\cdot\log(2x-1)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[(2x-1)\cdot\log(2x-1)\right]_1^3 - \frac{2}{2}\int_1^3 \frac{2x-1}{2x-1}dx$

$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\log 5 - 2$ //

(5) $(与式) = \frac{-1}{2}\cdot\int_0^3 -2x\cdot(9-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$

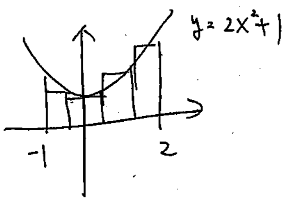
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\left(0 - 9^{\frac{3}{2}}\right)$

$= 9$ //

(4点)

$\boxed{2}$

(1)



$y = 2x^2+1$ はレンゾク ⇒ n等分して端点を右端にとると

$S_n = \frac{3}{n}\cdot\left\{2\cdot\left(-1+\frac{3}{n}\right)^2+1\right\} + \frac{3}{n}\left\{2\cdot\left(-1+\frac{2\cdot 3}{n}\right)^2+1\right\}$

$+ \cdots + \frac{3}{n}\left\{2\cdot\left(-1+\frac{n\cdot 3}{n}\right)^2+1\right\}$

$= \frac{3}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left\{2\cdot\left(-1+\frac{3}{n}k\right)^2+1\right\}$

$= \frac{3}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{18}{n^2}k^2 - \frac{12}{n}k + 3\right\}$

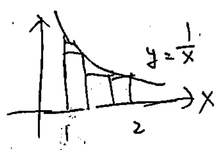
$= \frac{3}{n}\cdot\left\{\frac{18}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) - \frac{12}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) + 3\cdot n\right\}$

$= 3\left\{3\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) - 6\left(1+\frac{1}{n}\right) + 3\right\}$

$\xrightarrow{n\to\infty} 3\{6 - 6 + 3\} = 9$ //

(5点)

(2) (1)と同様にすると



$S_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

であり、

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \left[\log|x|\right]_1^2 = \log 2$ より

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \log 2$ //

(2点)

$\boxed{3}$

(1) $f(x) = \left[t^2 + t \right]_0^x = x^2 + x$ より

$f'(x) = 2x + 1$ //

(2) $g(x) = -\int_4^{\frac{1}{3}\log(x^2+1)} \cos(t^2)\, dt$ より

$g'(x) = -\cos\left\{ \left(\log \sqrt[3]{x^2+1} \right)^2 \right\} \cdot \dfrac{2x}{3(x^2+1)}$ //

(3) $h(x) = \left[(x - t^2)\, r'(t) \right]_1^x - \int_1^x -2t \cdot r'(t)\, dt$

$= (x - x^2)\, r'(x) - (x-1) \cdot r'(1) + 2\int_1^x t \cdot r'(t)\, dt$ より

$h'(x) = (1 - 2x) \cdot r'(x) + (x - x^2) \cdot r''(x) - r'(1) + 2x \cdot r'(x)$

$= r'(x) + (x - x^2) \cdot r''(x) - r'(1)$ //

3分

$\boxed{4}$

(1) (与式) $= \int_0^2 (x - 2 + 2) \cdot (x-2)^5\, dx$

$= \int_0^2 \left\{ (x-2)^6 + 2 \cdot (x-2)^5 \right\} dx$

$= \frac{1}{7} \left[(x-2)^7 \right]_0^2 + \frac{2}{6} \cdot \left[(x-2)^6 \right]_0^2$

$= -\frac{1}{7} (-2)^7 - \frac{1}{3} (-2)^6$

$= \frac{2^7}{7} - \frac{2^6}{3}$ //

(2) (与式) $= 2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{(x+3)(x-3)}\, dx = \frac{-2}{6} \int_0^2 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3} \right) dx$

$= -\frac{1}{3} \left[\log|x+3| - \log|x-3| \right]_0^2 = -\frac{1}{3} \cdot \log 5$ //

(3) $x = 3 \cdot \tan\theta$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to 3 \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$ より

(与式) $= 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(9\tan^2\theta + 9)^2} \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$= 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left\{ \frac{9}{\cos^2\theta} \right\}^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$= \frac{3}{9^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= 2 \cdot \cos^2\theta - 1$ より

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$= \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{54} \left[\theta + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{54} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$ //

(4) 与式を I とおくと

$I = \int (x)' (5 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx = x \cdot \sqrt{5 - x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{-2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}\, dx$

$= x \cdot \sqrt{5 - x^2} - \int \frac{(5 - x^2) - 5}{\sqrt{5 - x^2}}\, dx$

$= x \cdot \sqrt{5 - x^2} - \int \sqrt{5 - x^2}\, dx + 5 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{5 - x^2}}\, dx$

$= x \cdot \sqrt{5 - x^2} - I + 5 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) + C$ より

$I = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{5 - x^2} + 5 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) \right) + \frac{C}{2}$ //

(5) (与式) $= -2 \cdot \int_0^1 (x-1)^2 \cdot \left(\cos\frac{x}{2} \right)' dx = -2 \cdot \left\{ \left[(x-1)^2 \cdot \cos\frac{x}{2} \right]_0^1 - 2\int_0^1 (x-1) \cdot \cos\frac{x}{2} \right.$

$= 2 + 4 \cdot 2 \cdot \int_0^1 (x-1) \cdot \left(\sin\frac{x}{2} \right)' dx = 2 + 8 \cdot \left\{ \left[(x-1) \cdot \sin\frac{x}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \sin\frac{x}{2}\, dx \right\}$

$= 2 + 8 \cdot \left(2 \cdot \left[\cos\frac{x}{2} \right]_0^1 \right) = 2 + 16 \cdot \left(\cos\frac{1}{2} - 1 \right)$ //

(6) $1 - \cos 3x = 1 - \cos^2\frac{3}{2}x + \sin^2\frac{3}{2}x = 2 \cdot \sin^2\frac{3}{2}x$ より

$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$

$\to -\frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{2}x \leq 0$

(与式) $= \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sqrt{2 \cdot \sin^2\frac{3}{2}x}\, dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \left| \sin\frac{3}{2}x \right| dx$

$= -\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \sin\frac{3}{2}x\, dx = +\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \left[\cos\frac{3}{2}x \right]_{-\frac{\pi}{6}}^0$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{3}\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ //

1	2	3	4	計
/25	/20	/25	/30	/100

数学ⅡA後期期末試験

2016年度/後期期末:ME/IE/CA
制限時間:80分
出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

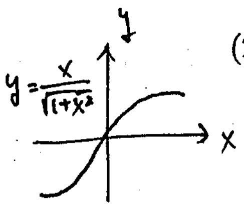
(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x\,\mathrm{d}x$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{9\pi}{14}}^{\frac{9\pi}{14}}\sin^8\left(\frac{7}{3}x\right)\mathrm{d}x$　(3) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \log\frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x$　(5) $\displaystyle\int_{-7}^{7} x\sin^8\left(x^3\right)\mathrm{d}x$

$[5*5=25]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x^2+3)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。
ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。



(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ を計算することによって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$ を求めよ。

$[10+10=20]$ 点

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=\displaystyle\int_2^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

(2) $g(x)=\displaystyle\int_{\log\sqrt{x^2+1}}^{1}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$

(3) ある関数 $r(t)$ に対して、$h(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\cdot r'(t)\,\mathrm{d}t$

$[10+10+5=25]$ 点

(ヒント⇒ 微分がついてる時は？)

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \sin x \, \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^7 \mathrm{d}x$ ($a>0$) aはconst.

(3) $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \, \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2 e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 9} \, \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_{3\pi}^{\frac{9}{2}\pi} \sqrt{1 - \cos \frac{2}{3}x} \, \mathrm{d}x$

[5 ∗ 6 = 30] 点

公式集

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (\text{n が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (\text{n が奇数のとき}) \end{cases}$$

1

(1) (与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-x+\frac{\pi}{4})\cdot(\frac{1}{2}\sin 2x)' dx$

$= \frac{1}{2}\left[(-x+\frac{\pi}{4})\cdot \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$

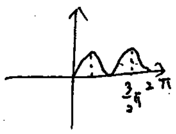
$= -\frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}(0-1) = \frac{1}{4}$ //

(2) $t = \frac{7}{3}x$ とおくと

x	$-\frac{9\pi}{14} \to \frac{9\pi}{14}$
t	$-\frac{3}{2}\pi \to \frac{3}{2}\pi$

より

(与式) $= \frac{3}{7}\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^8 t\, dt$



$= \frac{3}{7}\cdot 3\times 2\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ //

(3) (与式) $= \int_1^2 (x-1+1)\cdot\sqrt{x-1}\, dx$

$= \int_1^2 \left\{(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\right\} dx$

$= \left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{5}+\frac{2}{3} = \frac{16}{15}$ //

(4) (与式) $= \int_0^1 (\log 2 - \log(1+x))\, dx = \log 2 - \int_0^1 (1+x)'\log(1+$

$= \log 2 - \left\{\left[(1+x)\cdot\log(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 1\, dx\right\}$

$= \log 2 - (2\cdot\log 2 - 1) = -\log 2 + 1$ //

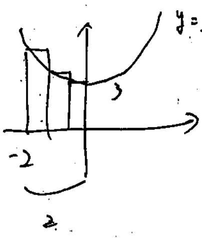
(5) $f(x) = x\cdot\sin^8(x^3)$ とおくと $f(-x) = -x\cdot\sin^8(-x)$

$= -f(x)$ より奇関数

なので 0 //

2

(1)



$[-2,0]$ をn等分して右端を代表点にとると

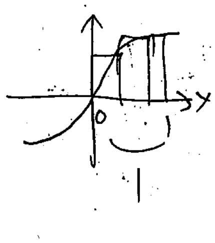
$S_\Delta = \frac{2}{n}\cdot\left\{2(-2+\frac{2}{n})^2+3\right\} + \frac{2}{n}\left\{2(-2+\frac{2}{n}\times 2)^2+3\right\} + \cdots + \frac{2}{n}\left\{2\cdot(-2+\frac{2}{n}\times n)^2+3\right\}$

$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\underbrace{(-2+\frac{2k}{n})^2}_{4+\frac{4k^2}{n^2}-\frac{8}{n}}+3\right\} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{8+\frac{8}{n^2}k^2-\frac{16}{n}k+3\right\} = \frac{2}{n}\left\{8n+\frac{8}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{16}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 3n\right\}$

$= 16 + \frac{8}{3}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) - 16(1+\frac{1}{n}) + 6 \xrightarrow{n\to\infty} 16+\frac{16}{3}-16+6 = \frac{34}{3}$ //

(2) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

一方 (1)と同様にして



$S_\Delta = \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}\times 2}{\sqrt{1+(\frac{1}{n}\times 2)^2}} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}\times n}{\sqrt{1+(\frac{1}{n}\times n)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}$

$= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{2}-1$ より $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n\cdot\sqrt{n^2+k^2}} = \sqrt{2}-1$ //

平成 28 年度 数 IIA 後期中間試験–解答用紙 2–

$\boxed{3}$

(1) $f'(x) = e^{x^2}$ //

(2) $g(x) = -\int_{1}^{\frac{1}{2}\log(x^2+1)} \sin t^2\, dt$ より

$g'(x) = -\sin\left(\log\sqrt{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{x}{x^2+1}$ //

(3) $h(x) = \int_0^x (x-t)\cdot r'(t)\, dt$

$= \left[(x-t)\cdot r(t)\right]_0^x + \int_0^x r(t)\,dt$

$= -x\cdot r(0) + \int_0^x r(t)\,dt$ より

$h'(x) = -r(0) + r(x)$ //

$\boxed{4}$

(1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$-)\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$ より

(与式) $= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 4x - \cos 2x)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ //

(2) $x = a\cdot\sin\theta$ とおくと, $\begin{array}{c|c} x & 0 \to a \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{2} \end{array}$ より

(与式) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{a^2\cos^2\theta}\right)^7 a\cdot\cos\theta\, d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a\cdot\cos\theta|^7\, a\cdot\cos\theta\, d\theta$

$= a^8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8\theta\, d\theta = a^8\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ //

(3) (与式) $= \int_3^4 \frac{1}{(x-5)(x-2)}\,dx = \frac{1}{3}\int_3^4\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2}\right)dx$

$= \frac{1}{3}\left[\log|x-5| - \log|x-2|\right]_3^4$

$= \frac{1}{3}\left(-\log 2 - \log|-2|\right)$

$= \frac{-2}{3}\cdot\log 2$ //

(4) (与式) $= \int_0^1 (x-1)^2\cdot\left(2\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)' dx = 2\left[(x-1)^2 e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - 4\int_0^1 (x-1)\cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$= -2 - 8\cdot\int_0^1 (x-1)\cdot\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' dx = -2 - 8\left\{\left[(x-1)\cdot e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{\frac{x}{2}}\,dx\right\}$

$= -2 - 8\left(+1 - 2\left[e^{\frac{x}{2}}\right]_0^1\right) = -2 - 8\left(1 - 2\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right)$

$= -2 - 8 + 16(\sqrt{e} - 1) = -26 + 16\cdot\sqrt{e}$ //

(5) $I = \int (x)'\cdot(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2+9} - \int\frac{x^2+9-9}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2+9} - \underbrace{\int\sqrt{x^2+9}\,dx}_{I} + 9\underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx}_{\log|x+\sqrt{x^2+9}|}$ より

$I = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{x^2+9} + 9\cdot\log|x+\sqrt{x^2+9}|\right) + C$ //

(6) $\cos\frac{2}{3}x = \cos^2\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}$ より $1 - \cos\frac{2}{3}x = 2\sin^2\frac{x}{3}$

よって (与式) $= \int_{3\pi}^{\frac{9}{2}\pi}\sqrt{2\cdot\sin^2\frac{x}{3}}\,dx = \sqrt{2}\int_{3\pi}^{\frac{9}{2}\pi}\left|\sin\frac{x}{3}\right|dx$

$= -\sqrt{2}\int_{3\pi}^{\frac{9}{2}\pi}\sin\frac{x}{3}\,dx$ $\qquad \begin{array}{c|c} x & 3\pi \to \frac{9}{2}\pi \\ \hline \frac{x}{3} & \pi \to \frac{3}{2}\pi \end{array}$

$= +\sqrt{2}\cdot 3\left[\cos\frac{x}{3}\right]_{3\pi}^{\frac{9}{2}\pi}$

$= 3\cdot\sqrt{2}\left(\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{0} - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\right) = 3\cdot\sqrt{2}$ //

1	2	3	4	計
/25	/20	/25	/30	/100

数学ⅡA 後期期末試験

2015 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (-x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \sin 2x \cdot \sin 3x\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} (x-2x^3)^5\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^8\left(\frac{5}{2}x\right)\mathrm{d}x$

[5 * 5 = 25] 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (3x^2-2)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ を計算することによって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ を求めよ。

[10 + 10 = 20] 点

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\displaystyle f(x) = \int_{-\pi}^{x} (t^2-3t-\pi)^2\,\mathrm{d}t$ (2) $\displaystyle g(x) = \int_{-3x}^{\log\sqrt{2x-1}} \sin t^2\,\mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} (\sqrt{x}-t)\tan(t-\sqrt{x})\,\mathrm{d}t$

[10 + 10 + 5 = 25] 点

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{e^2} x^{\frac{3}{2}}\log x\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{-3e^x+5}\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_{\frac{9}{2}\pi}^{6\pi} \sqrt{1+\cos\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x$

[5 * 4 = 20] 点

$\boxed{5}$ 以下では位置エネルギー $U(x)$ と力学的エネルギー E について考える。[*1]一般に「位置 x にある物体」に「力 $F(x)$ が作用している」時、その位置エネルギーを

$$U(x) = -\int_a^x F(s)\,\mathrm{d}s \qquad \ldots(A)$$

で <u>定義</u> する。ここで a は基準点の座標と呼ばれ、どんな値に取っても良いが、$U(x)$ ができるだけ簡単になるように決めるのが慣例である。例えばバネ定数 k のバネに繋がれた物体の場合、フックの法則より $F(x) = -kx$ であるから

$$U(x) = -\int_a^x -ks\,\mathrm{d}s = k\int_a^x s\,\mathrm{d}s = \frac{k}{2}\left[s^2\right]_a^x = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ka^2$$

となるが、<u>第 2 項目が 0 になれば $U(x)$ が最も簡単に書ける</u> ため、$a = 0$ を基準点に取り、$U(x) = \dfrac{1}{2}kx^2$ とする。また、速度 v と加速度 α をそれぞれ

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

で定義するとき、以下の問いに答えよ。

(1) 地表付近における重力 $F(x) = -mg$ と万有引力 $F(x) = -G\dfrac{mM}{x^2}$ に対して、それぞれ位置エネルギーを <u>求めよ</u>。また a はどのように取るべきか答えよ。もちろん m, M, G, g は全て定数である。

(2) 定義 (A) より $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$ を求めよ。

(3) (2) の解答と運動方程式；

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x)$$

が常に成立していることを用いて、力学的エネルギー；

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

が時間に依存しない定数であることを示せ。($\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ を示せばよい。)

$[5+3+2=10]$ 点

公式集

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (\text{n が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (\text{n が奇数のとき}) \end{cases}$$

[*1] ここでは式の見やすさのため単位を省略する。SI 単位系ならば [m],[kg],[s],[N] 等を考えればよいが、この問題ではあまり気にしなくともよい。

平成 27 年度 数 II 後期期末試験–解答用紙 1– ME/IE/CA ___ 年 ___ 番 氏名 ___________

$\boxed{1}$

(1) $(与式) = \int_0^1 (-x+3)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$

$= \frac{1}{2}\left[(-x+3)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}(2e^2-3) + \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(2e^2-3) + \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{5}{4}e^2 - \frac{7}{4}$ //

(2) $\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ -)\ \cos(\alpha-\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta \end{cases}$

$(与式) = -\frac{1}{2}\int(\cos 5x - \cos x)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x - \sin x\right) + C$ //

(3) $(-x-2(-x)^3)^5 = (-1)^5(x-2x^3)^5$ より

奇関数であるから 0 //

(4) $(与式) = \frac{-1}{2}\int_0^2 -2x\,(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$

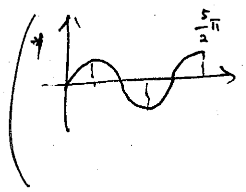
$= -\frac{1}{2}\cdot 2\left[\sqrt{9-x^2}\right]_0^2$

$= -(\sqrt{5}-3)$ //

(5) $\frac{5}{2}x = t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}$ かつ $\begin{array}{c|c} x & -\pi \to \pi \\ \hline t & -\frac{5}{2}\pi \to \frac{5}{2}\pi \end{array}$ より

$(与式) = \frac{2}{5}\int_{-\frac{5}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \sin^8 t\,dt = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{5}{2}\pi}\sin^8 t\,dt$

偶関数

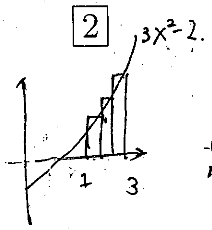


$\frac{5}{2}\pi = 2\pi +$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t\,dt$

$= 4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ //

$\boxed{2}$



$[1, 3]$ を n 等分して右端を代表点にとると

$S_\Delta = \left\{3\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 - 2\right\}\frac{2}{n} + \left\{3\left(1+\frac{2}{n}2\right)^2 - 2\right\}\frac{2}{n}$

$+ \cdots \left\{3\left(1+\frac{2}{n}\cdot n\right)^2 - 2\right\}\frac{2}{n}$

$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left\{3\left(1+\frac{2}{n}k\right)^2 - 2\right\}}_{3+\frac{12}{n}k+\frac{12}{n^2}k^2-2}$

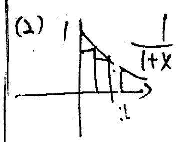
$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{12}{n}k+\frac{12}{n^2}k^2\right)$

$= \frac{2}{n}\left(n + \frac{6}{n}n\cdot(n+1) + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right)$

$\xrightarrow{n\to\infty} 2\left(1 + 6 + \frac{12\cdot 2}{6}\right) = 2(7+4)$

$= 22$ //

(2)



(1) と同様にして.

$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

よって

$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \left[\log|1+x|\right]_0^1 = \log 2$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ //

$\boxed{3}$

(1) $f'(x) = (x^2-3x-\pi)^2$ //

(2) $g(x) = \int_0^{\frac{1}{2}\log(2x-1)}\sin t^2\,dt - \int_0^{-3x}\sin t^2\,dt$

$g'(x) = \frac{1}{2x-1}\sin\left(\log\sqrt{2x-1}\right)^2 + 3\sin 9x^2$ //

(3) $t - \sqrt{x} = u$ とおくと $\frac{dt}{du} = 1$ かつ

$\begin{array}{c|c} t & 1 \to \sqrt{x} \\ \hline u & 1-\sqrt{x} \to 0 \end{array}$ より

$(与式) = -\int_{1-\sqrt{x}}^{0} u\cdot\tan u\,du = \int_0^{1-\sqrt{x}} u\cdot\tan u\,du$

よって $h(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})\cdot\tan(1-\sqrt{x})$ //

平成 27 年度 数 IIA 後期期末試験–解答用紙 2– ME/IE/CA ___ 年 ___ 番 氏名 ______________

$\boxed{4}$

(1) (与式) $= \int_1^{e^2} \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)' \cdot \log x \, dx$

$= \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}} \cdot \log x\right]_1^{e^2} - \frac{2}{5}\int_1^{e^2} x^{\frac{3}{2}} dx$

$= \frac{2}{5} \cdot 2e^5 - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_1^{e^2}$

$= \frac{4}{5}e^5 - \frac{4}{25}(e^5 - 1) = \frac{16}{25}e^5 + \frac{4}{25}$ //

(2) $-3e^x + 5 = t$ とおくと $-3e^x = \frac{dt}{dx}$ より

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-5}$. よって

(与式) $= \int \frac{1}{t \cdot (t-5)} dt = \frac{-1}{5}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-5}\right) dt$

$= \frac{-1}{5}\left(\log|t| - \log|t-5|\right) + C$

$= \frac{-1}{5}\left(\log|-3e^x+5| - \log|-3e^x|\right) + C$

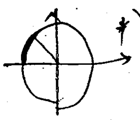
$= \frac{-1}{5}\left(\log|-3e^x+5| - \log 3 - x\right) + C$ //

(3) $1 + \cos\frac{x}{3} = 1 + \cos^2\frac{x}{6} - \sin^2\frac{x}{6}$

$= 2\cos^2\frac{x}{6}$ より

(与式) $= \sqrt{2}\int_{\frac{9}{2}\pi}^{6\pi} \left|\cos\frac{x}{6}\right| dx$

x	$\frac{9}{2}\pi \to 6\pi$
$\frac{x}{6}$	$\frac{3}{4}\pi \to \pi$



$= -\sqrt{2}\int_{\frac{9}{2}\pi}^{6\pi} \cos\frac{x}{6} \, dx$

$= -\sqrt{2} \cdot 6 \left[\sin\frac{x}{6}\right]_{\frac{9}{2}\pi}^{6\pi}$

$= -6\sqrt{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$= 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6$ //

(4) $\underbrace{(\text{与式})}_{I\text{とおく}} = \int (x)' \cdot (3 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$

$= x \cdot \sqrt{3-x^2} - \int \frac{3 - x^2 - 3}{\sqrt{3-x^2}} dx$

$= x\sqrt{3-x^2} - I + 3 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

よって

$I = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{3-x^2} + 3 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$ //

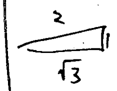
(5)

(与式) $= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 2x} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2 2x} dx + \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \cdot (\sin 2x)^{-2} dx$

$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{\tan 2x}\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sin 2x}\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$ //



$\boxed{5}$

(1) $U(x) = -\int_a^x -mg \, ds = mg[s]_a^x$

$= mgx - mga$ より $a = 0$ として

$U(x) = mgx$.

$U(x) = -\int_a^x -G\frac{mM}{s^2} ds = GmM\left[\frac{-1}{s}\right]_a^x$

$= -\frac{GmM}{x} + \frac{GmM}{a}$ より $a = \infty$ として

$U(x) = -\frac{GmM}{x}$ //

(2) $\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\int_a^x F(x) dx\right) = -F(x)$

微分積分学の基本定理

(3) (2)より $m\frac{dv}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx}$ よって

$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt} + \frac{dU(x)}{dt}$

$= \frac{1}{2}m\frac{dv}{dt}\underbrace{\frac{dv^2}{dv}}_{2v} + \frac{dx}{dt}\frac{dU(x)}{dx}$

$= mv\frac{dv}{dt} + v\frac{dU(x)}{dx}$

$= v\left(m\frac{dv}{dt} + \frac{dU(x)}{dx}\right) = 0$

運動方程式 //

1	2	3	4	5	計
/25	/20	/25	/20	/10	/100

数学 II A 後期期末試験

2014 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間:80 分

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{9}{14}\pi}^{\frac{9}{14}\pi} \sin^9\left(\frac{7x}{3}\right)\mathrm{d}x$　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{9}{14}\pi}^{\frac{9}{14}\pi} \cos^9\left(\frac{7x}{3}\right)\mathrm{d}x$　(3) $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)e^{3x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$　(5) $\displaystyle\int_1^2 \log\left(1+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x$

$[4*5=20]$ 点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (5x^2+1)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_1^2 3e^x\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。

ただし $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を用いてよい。(ヒント： $3e^{1+a} = 3e\cdot e^a$)

$[15+10=25]$ 点

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\displaystyle f(x) = \int_0^x t^2 e^t\,\mathrm{d}t$　(2) $\displaystyle g(x) = \int_{2x}^{\tan x} t^3 e^{t^2}\,\mathrm{d}t$

(3) $\displaystyle h(x) = \int_{\cos x + 1}^{3} (\cos x - t)^8 \log|-t+\cos x|\,\mathrm{d}t$

$[15+10+5=30]$ 点

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$　(2) $\displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{1+\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$　(3) $\displaystyle\int_{\frac{7}{18}\pi}^{\frac{8}{18}\pi} \frac{1}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{(1+\log x^3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$　(5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

$[4*5=20]$ 点

$\boxed{5}$ 以下では、任意の 4 つの実数 (a_1, a_2, a_3, a_4) に対して

$$f(x) = \sum_{n=1}^{4} a_n \cos nx = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x$$

と書ける関数の全体を考える。例えば、

例 1：$2\cos x - 5\cos 2x + \cos 3x + \dfrac{1}{3}\cos 4x$

例 2：$\cos 3x$

の形の関数はそれぞれ (a_1, a_2, a_3, a_4) として $(2, -5, 1, \frac{1}{3})$, $(0, 0, 1, 0)$ ととったものである。そこでこのような関数の「集まりの全体」を $\mathcal{F}_4$ と書くことにする。

次に、$\mathcal{F}_4$ に所属する任意の 2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対して、「内積 $< f(x), g(x) >$」を

$$< f(x), g(x) >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

で定義する。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $< \cos nx, \cos mx >= \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$ を示せ。(ただし n, m は $1, 2, 3, 4$)

(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n \cos nx$, $g(x) = \displaystyle\sum_{m=1}^{4} b_{\cancel{n}\,m} \cos mx$ に対して $< f(x), g(x) >$ を計算せよ。((1) を用いて積分を実行せよ)

(3) $\mathcal{F}_4$ に所属する関数 $f(x)$ に対して、「$f(x)$ の大きさ $||f||$ 」を

$$||f|| = \sqrt{< f(x), f(x) >}$$

で定義し、$||f|| < \dfrac{1}{10}$ となるとき「$f(x)$ は小さい」と言う事にする。

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{4} a_n \cos nx$ に対して $a_n = \frac{1}{3\sqrt{15}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ と取る時、$f(x)$ は小さいと言えるか。理由とともに答えよ。

$[2 + 2 + 1 = 5]$ 点

公式集

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (\text{n が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} & (\text{n が奇数のとき}) \end{cases}$$

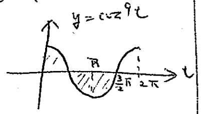
平成 26 年度 数 IIA 後期期末試験–解答用紙 1– ME/IE/CA 2 年 ___ 番 氏名 ___

$\boxed{1}$

(1) $\sin^9\left(\frac{7}{3}(-x)\right) = (-1)^9\sin^9\left(\frac{7}{3}x\right)$ より奇関数であるから (与式) $= 0$

(2) $\cos^9\left(\frac{7}{3}(-x)\right) = \cos^9\left(\frac{7}{3}x\right)$ より偶関数より (与式) $= 2\int_0^{\frac{9}{14}\pi}\cos^9\left(\frac{7}{3}x\right)dx$

ここで $\frac{7}{3}x = t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{7}$ かつ $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{9}{14}\pi \\ \hline t & 0 \to \frac{3}{2}\pi \end{array}$ より



(与式) $= 2\cdot\frac{3}{7}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^9 t\,dt = -2\,\frac{3}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 t\,dt$

$= -2\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$

(3) (与式) $= \int_0^1(2x-1)\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'dx = \frac{1}{3}\left[(2x-1)e^{3x}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^{3x}dx$

$= \frac{1}{3}(e^3+1) - \frac{2}{9}\left[e^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e^3+1) - \frac{2}{9}(e^3-1)$

$= \frac{1}{9}e^3 + \frac{5}{9}$

(4) (与式) $= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{5}}2x\cdot(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}(-2)\cdot\left[(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\sqrt{5}}$

$= -\left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(5) (与式) $= \int_1^2(x)'\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)dx = \left[x\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}\cdot\frac{-1}{2x^2}$

$= 2\log\frac{5}{4} - \log\frac{3}{2} + \int_1^2\frac{1}{2x+1}dx$

$= 2\log 5 - \log 3 - 3\log 2 + \frac{1}{2}\left[\log|2x+1|\right]_1^2$

$= 2\log 5 - \log 3 - 3\log 2 + \frac{1}{2}(\log 5 - \log 3)$

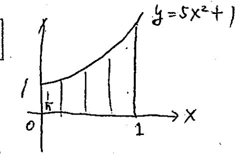
$= \frac{5}{2}\log 5 - \frac{3}{2}\log 3 - 3\log 2$

$\int_1^2\{\log(2x+1) - \log 2x\}dx = \frac{1}{2}\int_1^2(2x+1)'\log(2x+1)\,dx - \frac{1}{2}\int_1^2(2x)'\log 2x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[(2x+1)\log(2x+1) - (2x)\log(2x)\right]_1^2$ でもいい

$\boxed{2}$

(1)



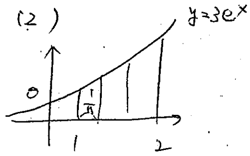
$y = 5x^2+1$ は連続であるから $[0,1]$ を n等分して代表点を各小区間の右端にとると

$\int_0^1(5x^2+1)dx = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{5\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}\cdot\frac{1}{n}}_{S_n\text{ とおく}}$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n^2}k^2+1\right) = \frac{5}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)+1$

$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{5}{6}\cdot 2+1 = \frac{8}{3}$

(2)



(1)と同様にして

$\int_1^2 3e^x dx = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}3e^{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}}_{S_n\text{ とおく}}$

$S_n = \frac{3}{n}e\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}} = \frac{3}{n}e\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{k-1}$

$= \frac{3}{n}e\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

よって $h = \frac{1}{n}$ とおくと

$\int_1^2 3e^x dx = \lim_{h\to 0}3eh\cdot\frac{e^h(e-1)}{e^h-1} = 3e(e-1)$

$\boxed{3}$

(1) $f'(x) = x^2 e^x$

(2) $g(x) = \int_0^{\tan x}t^3 e^{t^2}dt - \int_0^{2x}t^3 e^{t^2}dt$

$g'(x) = \tan^3 x\cdot e^{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - (2x)^3 e^{(2x)^2}\cdot 2$

(3) $u = -t+\cos x$ とおくと $1 = -\frac{dt}{du}$ かつ $\begin{array}{c|c} t & \cos x \to 3 \\ \hline u & 0 \to \cos x - 3 \end{array}$ より

$h(x) = -\int_0^{\cos x-3}u^8\log|u|\,du$ であるから

$h'(x) = -(\cos x-3)^8\log|\cos x-3|\cdot(-\sin x)$

$= \sin x\cdot(\cos x-3)^8\log|\cos x-3|$

$u = -t+\cos x$ とおくと $1 = -\frac{dt}{du}$

かつ $\begin{array}{c|c} t & 1+\cos x \to 3 \\ \hline u & -1 \to -3+\cos x \end{array}$ より

$h(x) = -\int_{-1}^{-3+\cos x}u^8\log|u|\,du$ であるから

$h'(x) = -(-3+\cos x)^8\cdot\log|-3+\cos x|\cdot(-\sin x)$

$= \sin x\cdot(\cos x-3)^8\cdot\log|-3+\cos x|$

平成 26 年度 数 IIA 後期期末試験–解答用紙 2– ME/IE/CA ___ 年 ___ 番 氏名 ______________

$\boxed{4}$

(1) (与式) $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\cdot \sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \underbrace{e^{2x}}_{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'} \cdot \cos x \, dx$

Iとおく.

$= \frac{1}{2}(-e^{3\pi} - e^{\pi}) - \frac{1}{4}\left\{ \cancel{\left[e^{2x}\cdot\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{2x}\cdot \sin x \, dx \right\}$

$= -\frac{1}{2}(e^{3\pi} + e^{\pi}) - \frac{1}{4} I \quad \therefore I = -\frac{2}{5}e^{\pi}(e^{2\pi}+1)$ //

(2) $1 + \cos\frac{x}{2} = 1 + \cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} = 2\cdot\cos^2\frac{x}{4}$ より

(与式) $= \sqrt{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \left|\cos\frac{x}{4}\right| dx \qquad \left(\begin{array}{c|c} x & 2\pi \to 4\pi \\ \hline \frac{x}{4} & \frac{\pi}{2} \to \pi \end{array} \quad \cos\frac{x}{4} \le 0 \right)$

$= -\sqrt{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \cos\frac{x}{4} \, dx = -\sqrt{2}\cdot 4\left[\sin\frac{x}{4}\right]_{2\pi}^{4\pi} = -4\sqrt{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)$

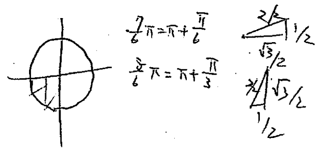
$= 4\sqrt{2}$ //

(3) $3x = t$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ かつ $\begin{array}{c|c} x & \frac{7}{18}\pi \to \frac{8}{18}\pi \\ \hline t & \frac{7}{6}\pi \to \frac{8}{6}\pi \end{array}$ より.

(与式) $= \frac{1}{3}\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{8}{6}\pi} \frac{1}{\cos t} dt = \frac{1}{3}\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{8}{6}\pi} \frac{\cos t}{(1-\sin t)(1+\sin t)} dt$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{8}{6}\pi} \left(\frac{\cos t}{1-\sin t} + \frac{\cos t}{1+\sin t} \right) dt$

$= \frac{1}{6}\left[-\log|1-\sin t| + \log|1+\sin t|\right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{8}{6}\pi} = \frac{1}{6}\left[\log\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{8}{6}\pi}$



$\frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6}$

$\frac{8}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\left(\because \sin\frac{8}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2} \right)$

$= \frac{1}{6}\left(\log\left|\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| - \log\left|\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right| \right)$

$= \frac{1}{6}\left(\log\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \log 3 \right)$ //

(4) (与式) $= \frac{1}{3}\int_{1}^{\sqrt[3]{e}} \frac{3}{x}\cdot(1+3\cdot\log x)^2 dx$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left[(1+3\cdot\log x)^3\right]_{1}^{\sqrt[3]{e}} = \frac{1}{9}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{9}$ //

(5) $I = \int\sqrt{x^2-1}\,dx$ とおくと

$I = \int(x)'\sqrt{x^2-1}\,dx = x\cdot\sqrt{x^2-1} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2-1} - \int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\cdot\sqrt{x^2-1} - \int\sqrt{x^2-1} - \int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$= x\cdot\sqrt{x^2-1} - I - \log|x+\sqrt{x^2-1}|$ より

$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log|x+\sqrt{x^2-1}|\right) + C$ //

$\boxed{5}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

(1) $\langle \cos nx, \cos mx \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot\cos mx \, dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right) dx$

$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \ne m) \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2nx + 1)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2n}\sin 2nx + x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & (n = m) \end{cases}$ //

(2)

$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{4} a_n\cos nx\right)\left(\sum_{k=1}^{4} b_k\cdot\cos kx\right) dx$

$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} a_n b_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx \, dx = \sum_{n=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} a_n b_k \langle\cos nx, \cos kx\rangle$

(1)より

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$ //

(3) (2)より

$\|f\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + (a_4)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{9\cdot 15} + \frac{1}{9\cdot 15}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9\cdot 15}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{9\cdot 15}\left(\frac{1}{2}\right)^3}$ 等比

$= \sqrt{\frac{1}{9\cdot 15}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{1}{9\cdot \cancel{15}}\cdot \cancel{2}\cdot\frac{\cancel{15}}{\cancel{16}\,8}} = \frac{1}{\sqrt{9\cdot 8}} > \frac{1}{10}$

より「小さい」とは言えない //

1	2	3	4	5	計
/20	/20	/30	/20	/5	/100

25

数学 II A 後期期末小テスト

2014 年度/後期期末:ME/IE/CA

制限時間なし

出題：山本 拓生

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{31}{2}\pi}^{\frac{31}{2}\pi} \sin^7\left(-\frac{44x}{5}\right) \mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_1^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1+\log x}{x} \mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_e^{e^3} \sqrt{x}\log x \,\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} 7x(3x-1)^9 \,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 (1+x^2)\,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。
ただし $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いてよい。

(2) $\displaystyle\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$ を定義に従って求めよ。ただし $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ を用いてよい。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ を計算することによって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\displaystyle f(x) = \int_0^x (t^2-2t+3)^3 \,\mathrm{d}t$

(2) $\displaystyle g(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t \qquad (x>0)$

(3) $\displaystyle h(x) = \int_0^{x^2} (x^2-t)^3 e^{t-x^2} \,\mathrm{d}t$

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \sin^8\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+3x+2} \mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin 2x} \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \log(\sqrt{x}+1) \mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int x\tan^{-1} x \,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int_2^{7/2} \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} \mathrm{d}x$ (9) $\displaystyle\int \frac{1}{2e^x+3} \mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ (11) $\displaystyle\int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ (ただし a は正の定数)

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t^2-1)e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ は、積分結果を初等関数[*1]で表すことができない事が知られている。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が奇関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の導関数を求めよ。

(3) 増減表を書くことによって $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし $-2 \leq x \leq 2$ とし、$f(2)>0$ となることを用いてよい。

公式集

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (\text{n が偶数のとき}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (\text{n が奇数のとき}) \end{cases}$$

[*1] ベキ、三角、指数、対数関数及びその逆関数の四則演算と合成で書かれる関数。つまり諸君が知っている関数。

小テスト解答

$\boxed{1}$ (1) $\sin^7\left(-\frac{44}{5}(-x)\right) = \underbrace{(-1)^7}_{-1}\cdot\sin\left(-\frac{44}{5}x\right)$ より奇関数なので (与式) $= 0$ //

(2) (与式) $= \int_2^3 \frac{(x-1+1)^2}{\sqrt{x-1}}dx = \int_2^3 \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_2^3 \left\{(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx$

$= \left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-1\right)+\frac{4}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)+2\left(\sqrt{2}-1\right)$ //

(3) (与式) $= \int_1^2 (x+1)'\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \left[(x+1)\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 (x+1)\cdot\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+1/x}dx$

$= 3\cdot\log\frac{3}{2} - 2\cdot\log 2 + \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x}dx}_{[\log|x|]_1^2} = 3\cdot\log 3 - 4\cdot\log 2$ //

(4) (与式) $= \frac{1}{2}\int_2^3 2x\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left[(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]_2^3 = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ //

(5) (与式) $= \int_1^{e^2}\frac{1}{x}\cdot(1+\log x)^1 dx = \frac{1}{2}\left[(1+\log x)^2\right]_1^{e^2} = \frac{1}{2}\{9-1\} = 4$ //

(6) (与式) $= \frac{2}{3}\int_e^{e^3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\cdot\log x\,dx = \frac{2}{3}\left\{\left[x^{\frac{3}{2}}\cdot\log x\right]_e^{e^3} - \int_e^{e^3} x^{\frac{1}{2}}dx\right\}$

$= \frac{2}{3}\left\{3\cdot e^{\frac{9}{2}} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_e^{e^3}\right\} = \frac{2}{3}\cdot\left\{\frac{7}{3}\cdot e^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}\right\}$ //

(7) $3x-1=t$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 1/3 \to 2/3 \\ \hline t & 0 \to 1 \end{array}$ かつ $3\frac{dx}{dt}=1$ より $\left(x=\frac{t+1}{3}\right)$

(与式) $= \frac{1}{3}\int_0^1 (t+1)\cdot t^9\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{9}\int_0^1 (t^{10}+t^9)dt = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{11}t^{11}+\frac{1}{10}t^{10}\right]_0^1$

$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{10}\right)$ //

(8)

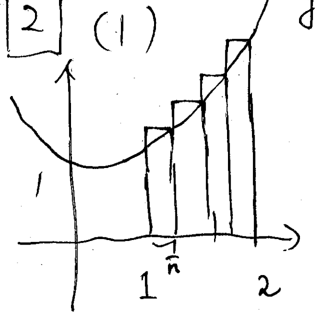
$$(\text{与式}) = \int_0^{\pi} (e^x)' \cdot \sin x \, dx = \cancel{\left[e^x \cdot \sin x\right]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} e^x \cdot \cos x \, dx.$$

Iとおく.

$$= -\int_0^{\pi} (e^x)' \cdot \cos x \, dx = -\left\{ \underbrace{\left[e^x \cdot \cos x\right]_0^{\pi}}_{-e^{\pi}-1} + \int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx \right\} \text{ より}$$

$$I = e^{\pi} + 1 - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1) \,/\!/$$

$\boxed{2}$ (1) $y = 1+x^2$



$[1,2]$ をn等分して, 各区間の右端に代表点をとると,

長方形の面積の和 S_n は

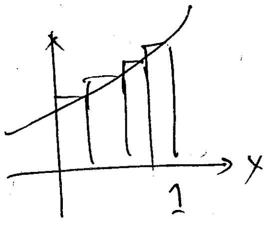
$$\left\{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n} + \left\{1+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \left\{1+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{1+\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{1+1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{2n + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\right\}$$

$$= 2 + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \,/\!/$$

(2) (1)と同様にすると



$$S_n = e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} + e^{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}\left\{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\right\}}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}} \underset{n=\frac{1}{h}\text{とおくと}}{=} \frac{h\cdot e^h\cdot(1-e)}{1-e^h} \xrightarrow[(n\to\infty)]{h\to 0} e-1 \,/\!/$$

(3) (1)と同様に、

$$S_6 = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n} + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n} + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right). \quad \left(\xrightarrow[\text{で}]{n\to\infty} \int_0^{\pi}\sin x\,dx\right)$$

故に $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{-1}{\pi}\left[\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi}(-1-1)$

$$= \frac{2}{\pi} \,/\!/$$

$\boxed{3}$

(1) $f'(x) = (x^2-2x+3)^3$

(2) $\displaystyle g(x) = \int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,dt - \int_1^{2x}\frac{\sin t}{t}\,dt$ より (1じゃなくてもよい)

$$\Rightarrow g'(x) = 2x\cdot\frac{\sin x^2}{x^2} - 2\cdot\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2\cdot\sin x^2}{x} - \frac{\sin 2x}{x}$$

(3) $x^2 - t = u$ とおくと.

t	$0 \to x^2$
u	$x^2 \to 0$

かつ. $-\dfrac{dt}{du} = 1$ より.

$$h(x) = \int_{x^2}^{0} -u^3\cdot e^{-u}\,du = \int_0^{x^2} u^3\cdot e^{-u}\,du$$

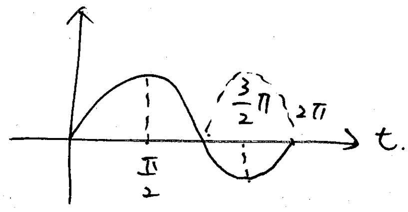
$$h'(x) = 2x\cdot(x^2)^3\cdot e^{-x^2} = 2x^7\cdot e^{-x^2} \,/\!/$$

$\boxed{4}$

(1) $\frac{x}{2} = t$ とおくと.

x	$\pi \to 3\pi$
t	$\frac{\pi}{2} \to \frac{3}{2}\pi$

かつ. $\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = 1$ より



$$(与式) = 2\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^8 t\, dt = 2\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t\, dt$$

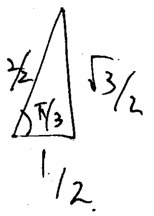
$$= \cancel{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35\,\cancel{7}}{64}\pi$$

(2) $$(与式) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{3}{2}x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{7}}\tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{16}{7}}\left(x+\frac{3}{4}\right)^{\cancel{2}}\right\} + C$$

(3) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 2x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(1-\cos 2x)\cdot(1+\cos 2x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\log|1-\cos 2x| - \log|1+\cos 2x|\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{-1}{4}\left\{\log\left|1-\frac{1}{2}\right| - \log\left|1+\frac{1}{2}\right|\right\}$$



$$= \frac{1}{4}\log 3$$

(4) $\sqrt{x}+1 = t$ とおくと $\overset{\frac{d}{dx}}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{dt}{dx} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = 2(t-1)$ より.

$$(与式) = \int \log t\,\frac{dx}{dt}\,dt = 2\cdot\int(t-1)\cdot\log t = \int\{(t-1)^2\}'\cdot\log t\,dt$$

$$= (t-1)^2\cdot\log t - \int\frac{t^2-2t+1}{t}\,dt = (t-1)^2\cdot\log t - \left(\frac{1}{2}t^2-2t+\log|t|\right)+C$$

$$= x\cdot\log(\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2}(\sqrt{x}+1)^2 + 2(\sqrt{x}+1)\cancel{+}\log(\sqrt{x}+1) + C$$

(5)

$$(\text{与式}) = \frac{1}{2}\int (x^2)' \cdot \tan^{-1}x \, dx = \frac{1}{2}\left\{ x^2 \tan^{-1}x - \int \frac{x^2}{x^2+1}dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ x^2 \tan^{-1}x - x + \int \frac{1}{x^2+1}dx \right\} = \frac{1}{2}\left\{ x^2 \tan^{-1}x - x + \tan^{-1}x \right\} + C \quad //$$

(6) $x = a\cdot\tan\theta$ とおくと、 $\begin{array}{c|c} x & 0 \to a \\ \hline \theta & 0 \to \pi/4 \end{array}$ から $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{a}{\cos^2\theta}$

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(a^2+a^2\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \quad //$$

(7) $1+\cos x = 1 + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2}$ より

$$(\text{与式}) = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos\frac{x}{2}\right| dx = \sqrt{2}\cdot 2\left[\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cancel{\frac{4}{\sqrt{2}}}\ 2 \quad //$$

(8) $-x^2+4x+5 = -(x^2-4x)+5 = -(x-2)^2+9$ より

$$(\text{与式}) = \int_2^{\frac{7}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}}dx = \left[\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{3}\right)\right]_2^{\frac{7}{2}} = \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}0 = \frac{\pi}{6} \quad //$$

(9) $2e^x+3 = t$ とおくと、 $2e^x = \dfrac{dt}{dx}$ より $(2e^x = t-3)$

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2e^x}dt = \int \frac{1}{t\cdot(t-3)}dt = \frac{-1}{3}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-3}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\log|t| - \log|t-3|\right) + C = -\frac{1}{3}\left\{\log(2e^x+3) - \underbrace{\log(2e^x)}_{\log 2 + \cancel{x}}\right\} + C \quad //$$

(10)
(与式) $= \int (x)'\sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - \int x\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$
I とおく

$= x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$

$= x\cdot\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\cdot\log|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C$

よって $I = \frac{1}{2}\left(x\cdot\sqrt{a^2+x^2} + a^2\cdot\log|x+\sqrt{a^2+x^2}|\right) + C' \quad (C' = C/2)$

(11) $x = a\cdot\sin\theta$ とおくと $\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{a}{2} \\ \theta & 0 \to \frac{\pi}{6} \end{array}$ かつ $\frac{dx}{d\theta} = a\cdot\cos\theta$ より

(与式) $= 2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2a\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cdot\cos\theta\,d\theta$

$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}|\cos\theta|\cdot\cos\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos2\theta)\,d\theta$

$= a^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = a^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

5

(1) $f(-x) = \int_0^{-x}(t^2-1)e^{t^2}\,dt \overset{t=-u \text{ とおく}}{=} -\int_0^{x}(u^2-1)\cdot e^{u^2}\,du = -f(x)$

(2) $f'(x) = (x^2-1)\cdot e^{x^2}$

(3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm1$, $f''(x) = 2x\cdot e^{x^2} + 2x(x^2-1)e^{x^2} = 2x^3\cdot e^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

よって

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$	−	−	0	+	+
$f''(x)$	0	+	+	+	+
$f(x)$	0	↘	$f(1)$	↗	$f(2)$