数学ⅡB 後期期末試験 (1/2枚目 60点 (各5点))
2025/2/7 9:00-10:20 担当 米田郁生
ME2, IE2, 番号　氏名 模範解答

$\boxed{1}$ $A=(2,3,1), B=(-1,2,1), C=(4,2,3)$ とする.

(1) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示せよ.

$= \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(-1,2,1)-(2,3,1)=(-3,-1,0)$

(2) $\overrightarrow{AC}$ を成分表示せよ

$=(4,2,3)-(2,3,1)=(2,-1,2)$

(3) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ.

$=(-3,-1,0)\cdot(2,-1,2)$

$=(-3)\cdot 2+(-1)(-1)+0\cdot 2=-6+1=-5$

(4) 長さ $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ.

$=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{10}$

(5) 長さ $|\overrightarrow{AC}|$ を求めよ.

$=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{4+1+4}=3$

(6) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-5}{3\sqrt{10}}=\frac{-5\sqrt{10}}{3\cdot 10}$$

$$=\frac{-\sqrt{10}}{6}$$

(7) $\overrightarrow{AB}$ を $1:1$ に内分する点 P の座標を求めよ.

$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{2}\{(2,3,1)+(-1,2,1)\}=\frac{1}{2}(1,5,2)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$

(8) $\overrightarrow{AC}$ を $3:4$ に内分する点 Q の座標を求めよ.

$\vec{q}=\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{3+4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{3+4}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{4}{7}(2,3,1)+\frac{3}{7}(4,2,3)$

$=\frac{1}{7}\{(8,12,4)+(12,6,9)\}$

$=\frac{1}{7}(20,18,13)=\left(\frac{20}{7},\frac{18}{7},\frac{13}{7}\right)$

$\boxed{2}$ $A=(2,1,3), B=(3,-1,2)$ とする.

(1) A と B を通る直線 l_1 の媒介変数を用いない方程式を求めよ.

$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(3,-1,2)-(2,1,3)=(1,-2,-1)$

$\therefore \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$

(2) (1) の直線 l_1 と直線 $l_2: \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{k}=\frac{z-3}{-2}$ が直交する k の値を求めよ.

l_1 の方向ベクトル $\vec{v_1}=(1,-2,-1)$

l_2 の方向ベクトル $\vec{v_2}=(3,k,-2)$

$\therefore 0=\vec{v_2}\cdot\vec{v_1}=(1,-2,-1)\cdot(3,k,-2)$

$=3-2k+2$ $\therefore k=\frac{5}{2}$

$\boxed{3}$ (1) 直線 $l: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}$ と垂直で, 点 $(1,1,-1)$ を含む平面方程式を $ax+by+cz+d=0$ の形で求めよ.

平面の法線ベクトル $\vec{n}=(2,4,-1)$

$\therefore (x-1,y-1,z-(-1))\cdot(2,4,-1)=0$ 内積

$2(x-1)+4(y-1)-(z+1)=0$

$\therefore 2x+4y-z\underbrace{-2-4-1}_{\text{"}-7\text{"}}=0$

(2) 平面 $2x-3y+z+4=0$ に平行で点 $(1,2,-1)$ を通る平面方程式を $ax+by+cz+d=0$ の形で求めよ.

求める平面の法線ベクトル $\vec{n}=(2,-3,1)$

$\therefore (x-1,y-2,z-(-1))\cdot(2,-3,1)=0$

$\therefore 2(x-1)-3(y-2)+(z+1)=0$

$2x-3y+z\underbrace{-2+6+1}_{=5}=0$

数学ⅡB 後期期末試験 (2/2枚目 40点)
2025/2/7 9:00-10:20 担当 米田郁生
ME2,IE2, 番号 氏名

4 各5点 (1) $l_1 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ と $l_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{k}$ が平行になるような k の値を求めよ.

l_1 の法線ベクトル $\vec{n_1} = (-1, 3, 4)$
l_2 の法線ベクトル $\vec{n_2} = (2, -6, k)$

$m(-1,3,4) = (2,-6,k)$ より $m = -2$.

$\therefore k = -8$

(2) 平面 $x + 3y + 2z + 5 = 0$ と点 $(1, -1, 2)$ の距離を求めよ.

$$\frac{|1\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{|1 - 3 + 4 + 5|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{2}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{2}$$

5 各10点 (1) 2点 $(4,3,-1), (2,1,3)$ を直径とする球の方程式を $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cy + d = 0$ の形で求めよ.

中心 $= \left(\frac{4+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (3, 2, 1)$

直径 $= \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2 + (3-(-1))^2}$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\therefore$ 半径 $= \sqrt{6}$

$\therefore (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + \underbrace{9+4+1}_{14}$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 8 = 0$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z - 2 = 0$ の球の中心と半径を求めよ.

$(x^2 - 2x) + (y^2 - 6y) + (z^2 - 4z) - 2 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + (z-2)^2 - 4 - 2$

$\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 16 = 4^2$

中心 $(1, 3, 2)$, 半径 4.

<裏です>

6 10点 四面体 $OABC$ において $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とし, $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{4}$ となる点 P について線分 CP の延長と三角形 OAB の交点 Q の位置ベクトル $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ の線形結合で表わせ.

$\overrightarrow{CQ} \parallel \overrightarrow{CP}$ より $\overrightarrow{CQ} = t\overrightarrow{CP}$ $(t \in \mathbb{R})$ とかける

$\vec{q} \overset{/\!/}{=} l\vec{a} + m\vec{a}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} = \vec{c} + t\overrightarrow{CP}$

$= \vec{c} + t(\vec{p} - \vec{c})$

$= \vec{c} + t\left(\frac{\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{4} - \vec{c}\right)$

$= \frac{t}{4}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + \left(1 - \frac{3}{4}t\right)\vec{c}$

$\therefore \left(1 - \frac{3}{4}t\right) = 0$ より $t = \frac{4}{3}$

$\therefore \vec{q} = \frac{t}{4}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$