数ⅡA後期期末の話題

1. 積分は2種類有る

(1) 不定積分

関数

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

(2) 定積分

$[\ ]_a^b$ は線型

$$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left(1^4 - 0^4\right) = \frac{1}{4}$$

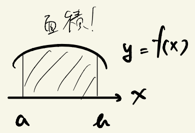
上端と下端を代入して引く

数字

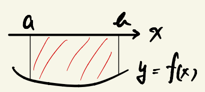
2. 定積分の意味

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

面積!



面積のマイナス!



3. 定積分の性質(公式)

普段の計算で良く使うモノ

(1) $\int_a^b \left(3\cdot x^4 + 5\cdot e^x\right) dx$ 線型!!

$$= 3\cdot\int_a^b x^4\,dx + 5\cdot\int_a^b e^x\,dx$$

(2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ($\vec{AA} = \vec{0}$ に似てる)

上端と下端が同じ → 計算しなくても0

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ ($\vec{AB} = -\vec{BA}$ に似てる)

数字をひっくり返すとマイナスが付く

(4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{あ} f(x)\,dx + \int_{あ}^b f(x)\,dx$ ($\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB}$ に似てる)

⟶ 積分範囲は自分の好きな所で分割できる

⟵ 上端と下端が同じ2つの積分の和+は1つにまとめられる

他のは証明で使いがち

($a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq g(x)$

⇓

$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ とか 平均値の定理とか…)

4. 微分積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{定数}^{x} f(t)\,dt\right) = f(x)$$

微分 定積分

→ 両方取れて上端の文字がtに入る

例

(1) $\frac{d}{dx}\left(\int_3^x t^4\,dt\right) = x^4$ //

(2) $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{\sqrt{5}} e^t\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_{\sqrt{5}}^x e^t\,dt\right) = -e^x$ //

(3) $\frac{d}{dx}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{x^2+1} e^{t^2}\,dt\right) = e^{(x^2+1)^2}\cdot\left(x^2+1\right)' = 2x\cdot e^{(x^2+1)^2}$ //

xじゃない

合成関数の微分

5. 定積分を「読む順番」

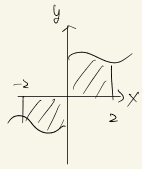
$$\int_a^b f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

⓪ 積分 ① 範囲 ② 被積分関数

例

(1) $\int_{-2}^{2} x^5\,dx = 0$ //

① ②奇関数



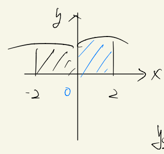
$f(-x) = -f(x)$

原点対称

(2) $\int_{-1}^{1} x^6\,dx = 2\cdot\int_0^1 x^6\,dx = \frac{2}{7}\cdot\left[x^7\right]_0^1 = \frac{2}{7}$ //

① ②偶関数

右半分の2倍



軸対称

$f(-x) = f(x)$

(3) $\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\cdot(8+1) = 3$ //

フリーにやる

6. 線型な記号

$\lim$, $(\ )'$, $\int dx$, $\int_a^b dx$, Σ, $[\ ]_a^b$

極限 微分 不定積分 定積分 シグマ(和算) カギカッコ

後期期末の積分計算は

$$\left(\begin{array}{c}\text{後期中間までの積分}\\ +\\ \text{置換積分}\\ +\\ \text{部分積分}\end{array}\right.$$

の3種類！（不定積分と定積分がまじる）

7. 置換積分（文字の取り換え）

(1) 公式(2) ver. で出来るやつ（本当は置換しない方が良い）

$$\int x\cdot e^{x^2}dx$$

↓ ① $t = x^2$ とおく（引数）
（狙った所だけtでおく）

$$= \int x\cdot e^{t}dx$$

↓ ② 置換積分の公式

$$= \int x\cdot e^{t}\boxed{\frac{dx}{dt}}dt$$

↓ ③ ($\frac{dx}{dt}$ を求める)
①の式 $t=x^2$ を「ムズイ方の式」の字で微分

$$\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2x}$$

$$= \int x\cdot e^{t}\cdot\boxed{\frac{1}{2x}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{t}dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{t}+C$$

↓ ④「不定積分」の時は文字を戻す。

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}+C \,/\!/$$

(2)「全てt」に書き換えるタイプ

$$\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 dx$$

↓ ① $t = 1-\sqrt{x}$ とおく

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 0$

②

$$= \int_1^0 t^4\cdot\boxed{\frac{dx}{dt}}dt$$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

↓ ③ $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}} = -2\cdot\sqrt{x}$$

← このまま代入しても x が残るので

$$= -2\cdot(1-t)$$

使う

$$= \int_1^0 t^4\cdot\{-2\cdot(1-t)\}dt$$

$$= -2\cdot\int_1^0 (t^4-t^5)dt$$

$$= 2\cdot\int_0^1 (t^4-t^5)dt$$

$$= 2\cdot\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{6}t^6\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{15}\,/\!/$$

(3) 置換の仕方を覚えとくやつ
（P108 例題4, P117 5. (1), (2), P118 2 (2)）

(1) $\int_?^? f(\sqrt{a^2-x^2})dx$, (2) $\int_?^? g\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$

$\sqrt{\ }$ の内部 ⇓ $x = a\cdot\sin\theta$ とおく

$\frac{1}{x^2+a^2}$ の内部 ⇓ $x = a\cdot\tan\theta$

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- 加法定理
- $\begin{cases}\sin(-\theta) = -\sin\theta\\ \cos(-\theta) = \cos\theta\end{cases}$

や $\sqrt{A^2} = |A|$

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0)\\ -A & (A < 0)\end{cases}$$

に注意!!

8. 部分積分

積の微分公式

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

を両辺 不定積分 or 定積分すると公式できる!

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[f(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

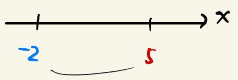
微分も積分も両辺取って ①　マイナス ②　微分を他方に付け直す ③

まとめは Share Point にあり!

9. 定積分の定義

事前に納得しておく事

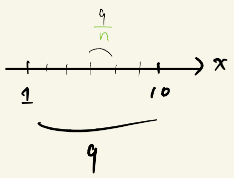
① 全体の幅



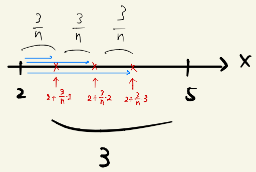
$5-(-2)=7$

大 − 小 で幅

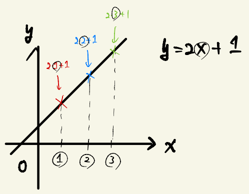
② n等分の幅



③ 座標



④ 関数のy座標



⑤ シグマの計算

(1) 線型 $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+2) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + 2\sum_{k=1}^{n}1$

迷ったら Σを( )'にしてみる! or $\int dk$　　同じ

$$(3k^2-3k+2)' = 3(k^2)' - 3(k)' + 2(1)'$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}1 = n$

$\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n個}$

例: $\int_1^5(-x+2)\,dx$ を定義に従って求める

⓪ 検算しておく

$$\int_1^5(-x+2)\,dx = \Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_1^5 = -\frac{25}{2}+10+\frac{1}{2}-2 = -4$$

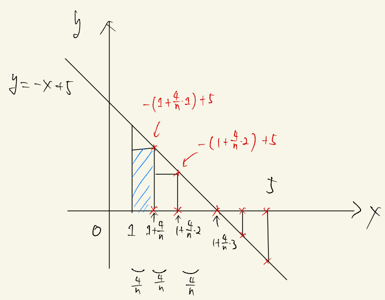
答えのハズ!

① $y=-x+2$ は $1\leq x\leq 5$ で連続であるから

$1\leq x\leq 5$ を「n等分」して「代表点 ×」を右端に取ると

$\left(\frac{5-1}{n}=\frac{4}{n}\right)$

② (図を書く)



③ (長方形の面積の和を書く)

$$S_n = \left\{-\left(1+\frac{4}{n}\cdot 1\right)+2\right\}\cdot\frac{4}{n} + \left\{-\left(1+\frac{4}{n}\cdot 2\right)+2\right\}\cdot\frac{4}{n} + \cdots + \left\{-\left(1+\frac{4}{n}\cdot n\right)+2\right\}\cdot\frac{4}{n}$$

↓④ Σで書く

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(1+\frac{4}{n}\cdot k\right)+2\right\}\cdot\frac{4}{n}$$

$$= \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{4}{n}\cdot k+1\right)$$

kの1次式

⑤ 線型性とかでマジで計算する

$$= \frac{4}{n}\left(-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\right) = \frac{4}{n}\left\{-\frac{4}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}$$

⑥ (n→+∞ の極限を取る)

$$\int_1^5(-x+2)\,dx = \lim_{n\to+\infty}4\left(-2\cdot\frac{n+1}{n}+1\right)$$

$$= 4\left(-2\cdot\frac{1}{1}+1\right) = -4$$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{多項式}{多項式}$ ↓ 最高次数だけ見る!