

可轉換公司債之評價

—六元樹分析法的應用

張大成* 薛兆雯**

一、前言

建立 Hull and White 股價六元樹模型,依其轉換條件、賣回條件、贖回條件、重設條件,求出可轉債價值

可轉換公司債 (Convertible Bond, CB) 為債券與股票選擇權的組合,因此在評價可轉債價值時,需依其轉換條件、賣回條件、贖回條件、重設條件四個限制式,考慮轉換成股票或不轉換股票保有債券時之現金流量,再以不同的風險加碼折現求出可轉換債券的價值。本文利用 Hull and White 利率模型建立股價六元樹型圖,再依據各個節點上的股價及可轉債的各項條款來計算各個節點上的現金流量,對應 Hull and White 利率模型各節點之利率折現,求出可轉債價值,並將結果與二項式樹狀模型 (Cox-Ross-Rubinstein) 之評價結果比較,討論此模型之適用性。

二、六元樹型圖之建立及理論依據

依據 Hull and White 利率模型建立股價六元樹模型,計算可轉債理論價格

本文評價可轉債價值時,是依據 Hull and White 利率模型建立股價六元樹型圖,六元樹建立步驟如下:

1、Hull and White 利率模型具有均數復歸的特性,利率模型如下式:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma_r dz$$

r : 利率, a : 均數復歸速度, σ_r : 利率標準差, dz : Wiener Process

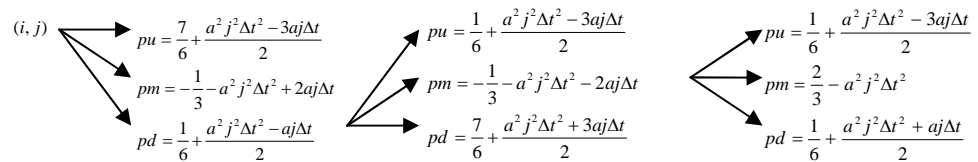
第一階段先假設 $\theta(t) = 0$, 服從隨機過程 $dr^* = -ardt + \sigma_r dz$, 此時的 r^* 起始值為 0, 建立一個初步的三元樹。由於 Hull and White 利率三元樹具有均數復歸的特性, 因此樹型圖不會無限制的上升或下降, 會有收斂現象, 根據 Hull and White 提出的上限公式 $jmax = \text{ceil}(0.184/(a * \Delta t))$, 可使利率均為正數, 此處 ceil 代表無條件進位後的整數, 又因為利率樹是對稱的, 所以下限為 $jmin = -jmax$; 經過這樣的設定後, 取 $\Delta r^* = \sigma \sqrt{3\Delta t}$, 計算出各節點上的 r^* , 再求算每個節點延伸到下一個節點的機率值, 計算時須注意的是, 為了使樹型圖不會無限制的上升或下降, 每一節點延伸到下一節點的路徑

* 作者任教於東吳大學國貿系。

** 作者為數位財經股份有限公司研究員。

有3種形式，當節點到達上限時，其路徑為圖1-1，當節點到達下限時，其路徑為圖1-2，而其他的節點路徑則為圖1-3，根據不同路徑代入不同公式計算機率值。

圖 1-1:三元樹上限路徑 圖 1-2:三元樹下限路徑 圖 1-3:三元樹路徑



第二階段以無套利的觀念求算出正確的利率樹，利用第一階段 r^* 樹型圖各節點利率計算每期零息債券折算至交易日之價格，同時配合零息債券殖利率曲線之利率計算，求出二者之差距 α ，依序求出每期的 α_i ，透過 $r(t) = r^*(t) + \alpha(t)$ ，便可求得正確之利率樹。

股價六元樹模型

2、建立股價六元樹模型

此模型將股價報酬和利率間的相關性反應在股價的隨機過程上。

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma_s \rho dz_r + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} dz_s$$

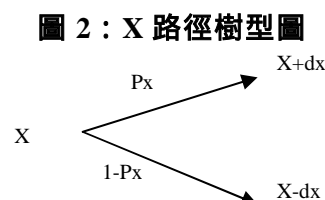
$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma_r dz_r$$

$$\text{其中， } dz_s dz_r = 0, \quad \rho \left(\frac{dS}{S}, dr \right) = \frac{(\sigma_s \rho dz_r + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} dz_s) \sigma_r dz_r}{\sigma_s \sigma_r} = \rho dt$$

計算時利用變數轉換的方法，令 $Y = \ln(S)$ ， $X = Y - \rho \frac{\sigma_s}{\sigma_r} r$

$$dX = \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) - \rho \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_r} \right) (\theta(t) - ar) \right) dt + \sigma_s \sqrt{1 - \rho^2} dz_s$$

如此， dX 的隨機過程中只有 dz_s 一個 Wiener process，接著就可依圖2展開X的樹型圖。



3、建立股價六元樹模型

此模型和一般樹型圖不同的特點為，因本身具有均數復歸的特性，所

每一時點的變動
會受當時利率的
影響,依序求出每
期向上變動及向
下變動的機率

以每一時點的變動會受當時利率的影響，必須依序求出每期向上變動及向下變動的機率 P_X ， $1-P_X$ ，公式如下：

$$P_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{\left[\left(r_t - \frac{1}{2} \sigma_s^2 \right) - (\theta(t) - at) \frac{\sigma_s}{\sigma_r} \rho \right] \Delta t}{2\Delta X}$$

$$\Delta X = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_s \sqrt{\Delta t}$$

$$\text{此處, } \theta(t) = a\alpha(t) + \frac{\alpha(t) - \alpha(t-1)}{\Delta t}$$

再從X的二元樹反推出股價：

$$S_{t+1} = \exp \left[X_{t+1} + \rho \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_r} \right) r_{t+1} \right] \quad (1)$$

由(1)式可看出， S_{t+1} 中包含 X_{t+1} 及 r_{t+1} ，以第一期為例， X_{t+1} 有X(1, 1)及X(1, 0)二種變化， r_{t+1} 有r(1, -1)，r(1, 0)，r(1, 1)三種變化，因此第一期有6個可能股價，以第二期為例， X_{t+1} 有X(2, 2)，X(2, 1)及X(2, 0)三種變化， r_{t+1} 有r(2, -2)，r(2, -1)，r(2, 0)，r(2, 1)及r(2, 2)五種變化，因此第二期有15個可能股價，以此類推，建立股價六元樹。

三、實證結果

1、資料來源

1. 可轉換公司債及轉換辦法公告(取自TEJ公司財報影像系統)
2. 台灣經濟新報CB發行條件資料庫
3. 台灣經濟新報的信用評等 (TCRI)
4. 股價資料取自台灣經濟新報股價報酬率
5. 利率資料取自路透社零息債券殖利率

2、現金流量分析

依據六元樹狀模型各節點之股價，從六元樹的最後一期倒推回交易日，衡量投資人應繼續持有可轉債或執行轉換權，每一時點的CB價值以 CB_t 表示，並將 CB_t 拆成持有可轉債之價值 B_t 以及將可轉債賣回或執行轉換權之價值 E_t ，考慮之限制條件說明如下：

(1)到期條件：

$$CB_t = \text{Max}(F, CV(t))$$

以華邦二及茂矽二
為例，計算可轉換
公司債理論價格

到期條件

說明： t 為到期日， F 為可轉債面額， $CV_t = m * S_t$ 為轉換價值，在六元樹的最後一期，投資人可要求發行公司以面額贖回可轉債或是將CB轉換成普通股股票。

(2)贖回條件(The Call Condition)

$$CB_t = \text{Max}(CP(t), CV(t)) \quad \text{if} \quad S_t \geq 1.5K, \quad t_{C1} < t < t_{C2}$$

贖回條件

其中： CP ：可轉債贖回價格(Call Price)

$t_{C1} < t < t_{C2}$ ：公司可以買回可轉債之特定期間

K ：轉換價格 (Conversion Price)

S_t ：發行公司普通股收盤價

說明：當公司股價高於可轉債公告之贖回價格(1.5K)時，公司有權以約定之贖回價格買回可轉債，因此當贖回條件成立時，投資人應決定要轉換或被贖回。

(3) 轉換條件(The Conversion Condition)

$$CB_t = CV_t = m * S_t \quad \text{if} \quad m * S_t > CB_t, \quad t_1 \leq t < t_2$$

轉換條件

m ：轉換比率 (Conversion Ratio)， S ：普通股的市場價格

t_1, t_2 ：可轉債公告之凍結期起迄點

說明：在非凍結期間，若可轉債價格低於轉換價值，持有人會將其轉換成股票賣掉，取得轉換價值，再買回原可轉債，進行套利。因此在無套利條件下，可轉債價格不應低於其轉換價值。

(4)賣回條件(The Put Condition)

$$CB_t = PP(t_p) \quad t = t_p$$

賣回條件

t_p ：可轉債契約約定的時點； PP ：CB賣回價格(Put Price)

說明：債券持有人在可轉債存續期間內若干特定的時點上(t_p)，可以某一特定的價格，賣回給發行公司，因此若可轉債價值低於賣回價格時，持有人會執行賣回權。就無套利條件而言，於可賣回的時點上，可轉債的價格應不低於其賣回價格(put price， PP)。

(5)重設條件(The Reset Condition)

重設條件

$$K_t = \begin{cases} \text{Max}(K_0 \times X\%, S_t \times Kadd) & \text{if } S_t \times Kadd < K_{t-1}, t_1 \leq t < t_2 \\ K_{t-1} & \text{if } S_t \times Kadd \geq K_{t-1} \end{cases}$$

K_t ： t 時點的換股價格， $X\%$ ：換股價格調整的下限， $Kadd$ ：轉換溢價

t_1, t_2 ：重設起迄點

說明：在重設期間內($t_1 \leq t < t_2$)，若股價乘以轉換溢價小於當

以六元樹計算華邦二以及茂矽二兩支可轉換公司債之價值

修正茂矽二評價過程

期換股價格，則下期可轉債的換股價格需向下調整為股價乘以轉換溢價之價格，但向下調整的幅度以不超過發行時轉換價的X%為限。

依照上述條件考慮可轉債價值 CB_t ，並將 E_t 及 B_t 分別以利率樹所對應節點之 r_t 以及考慮公司評等加碼的風險利率折算至前一期(公式(2))。

$$CB_{t-1} = E_t \times e^{-r_{t-1}\Delta t} + B_t \times e^{-(r_{t-1} + \text{spread})\Delta t} \quad (2)$$

其中，spread為信用價差，參考張大成、楊佳寧(2002)銀行放款暨債券殖利率曲線的估計—信用價差的衡量與應用一文。

3.結果數據

本文以六元樹計算華邦二以及茂矽二兩支可轉換公司債之價值，交易日自2000年1月自2002年3月，計算結果如表1、圖3、圖4。

表 1：華邦二及茂矽二可轉債市價及理論價

華邦二				茂矽二			
交易日	市價	六元樹	二元樹	交易日	市價	六元樹	二元樹
20010131	135.2	141.87	154.15	20010131	110.5	124.67	138.66
20010330	133	139.65	149.14	20010330	116.8	128.52	139.99
20010531	134.15	137.44	146.48	20010531	112	125.40	135.82
20010731	140	131.96	142.66	20010731	111.25	126.71	137.76
20010928	135.5	129.80	139.60	20010928	92.3	127.40	137.59
20011130	134.8	134.20	141.81	20011130	78	131.61	140.04
20020131	139.5	143.12	148.77	20020131	107.5	137.08	143.57
20020227	141	141.99	146.97	20020227	116.8	137.97	143.77
20020329	139.5	140.75	145.79	20020329	121.8	136.67	142.60

由圖3及圖4可看出，不論是華邦二或是茂矽二，六元樹計算之理論價格都較二元樹接近可轉債市價，因此六元樹相對來說是較為適合評價可轉債價格的模型。

但由圖4發現，茂矽二可轉債市價由於2001年10月傳發生財務危機，導致可轉債市價遽跌，其跌幅幾乎為股價的10倍。為了探究其原因及使模型可反應出真實狀況，本文用以下三個步驟修正評價過程：

1. 以Garch模型計算股價標準差

因股價具有群聚效果，以Garch(1, 1)模型計算較能反映出股價真正的變異，數據如表2(礙於篇幅限制，僅列單數月份資料以供參考)。

2. 由於2001年下半年利率頻降，其利率波動較前幾年更為劇烈，改以指數移動平均法計算，愈近期之資料權數愈大，以期更能反映近期之波動程度。修正後之利率波動如表2。

表 2：修正前後股價及利率標準差

交易日	股價標準差		利率標準差	
	Garch	SMA	EWMA	SMA
20010131	64.81%	60.10%	0.50%	1.80%
20010330	52.79%	59.23%	0.90%	2.72%
20010531	60.38%	58.84%	0.90%	4.72%
20010731	60.82%	59.93%	1.36%	7.11%
20010928	62.10%	59.50%	1.43%	8.69%
20011130	70.18%	60.20%	2.01%	11.53%
20020131	74.64%	67.02%	2.42%	10.47%
20020329	51.59%	66.95%	1.82%	9.44%

3. 茂矽二於2001年下半年發生財務危機，導致可轉債價格急速下跌，原本以TCRI信用評等的風險折現無法充分反映出此現象，故本文改採KMV違約風險衡量模式，計算茂矽公司信用風險加碼(Credit Spread)，以期涵蓋可轉債可能違約之風險。KMV數據如表3。

表 3：KMV 參數

交易日	資產價值	資產變異	違約機率	違約距離
20010131	98353352413	0.4629	0.0307	1.3007
20010227	95485361664	0.4277	0.0234	1.3798
20010330	105927303530	0.3916	0.0056	1.6353
20010430	96338801960	0.3579	0.0056	1.6893
20010531	80820935067	0.4001	0.0365	1.3215
20010629	80247791610	0.3688	0.0241	1.439
20010731	66893363561	0.3556	0.0609	1.2291
20010831	64776324284	0.2829	0.0287	1.4799
20010928	53859958676	0.2575	0.1684	0.838
20011031	50657961464	0.2456	0.2298	0.6769
20011130	58060592414	0.3221	0.1791	0.846
20011231	85434253242	0.4661	0.0717	1.1347
20020131	91009959318	0.4998	0.0732	1.116
20020227	90387116691	0.4966	0.0736	1.117
20020329	85263755472	0.3443	0.0063	1.7084

六元樹評價改以KMV估計之違約機率作為風險折現加碼，計算結果如圖5，可看出六元樹估計之茂矽二價格經修正後較能符合市場價格的走勢。

五、結論

本文建立的六元樹模型將股價與利率的相關性透過適當的轉換反應到股價及利率的隨機過程上，同時考慮股價及利率對可轉債價值的影響，結果顯示比單用股價一因子的二元樹模型估計更為準確，因為在實際狀況下，股價及利率顯然並非獨立，二者的變動會相互影響，先適度的建構出新的隨機過程，去除彼此的相關性之後，針對利率樹和股價樹建立個別樹型圖，最後再由樹型圖上的各節點還原成股價及利率。接著考慮轉換、賣回、贖回、重設等條件來評價可轉換公司債。在公司營運正常，股價無異常波動時，估計出之理論價值很接近可轉債市價，因此可用來作為可轉債訂價以及可轉債相關衍生商品研究的參考依據；但當公司營運出現負面消息，有可能導致可轉債價格急跌時，需調整信用風險衡量的方式，以涵蓋可轉債可能違約的情形，因此，關於信用風險的估計可留待做進一步的探討。

參考文獻：

1. Hull, J., and A. White, 1990a "Valuation Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference," Journal of Finance and Quantitative Analysis, May, pp.87-100
2. Hull, J., and A. White, 1990b "Pricing Interest-Rate Derivative Securities," The Review of Finance Studies, 3, pp.573-592
3. Hull, J., and A. White, 1994a "Numerical Procedure for Implementing term Structure Model I: Single-Factor Models," Journal of Derivatives, Vol.2, No.1, pp.7-16
4. 張大成、沈中華、曾恩琦，可轉換公司債之評價與最適轉換法則，Working Paper。
5. 張大成、楊佳寧（2002），銀行放款（Bank Loan）暨債券殖利率曲線的推估—信用價差（Credit Spread）的衡量及運用，貨幣觀測與信用評等2002年1月。
6. 張大成、楊佳寧（2002），考慮信用風險之可轉換公司債評價，貨幣觀測與信用評等2001年5月。
7. 陳國榮、葉仕國，1999，以Hull and White利率模型評價可轉換公司債，高科大，碩士論文。

圖 3：華邦二 2000 年 1 月至 2002 年 3 月可轉債價格

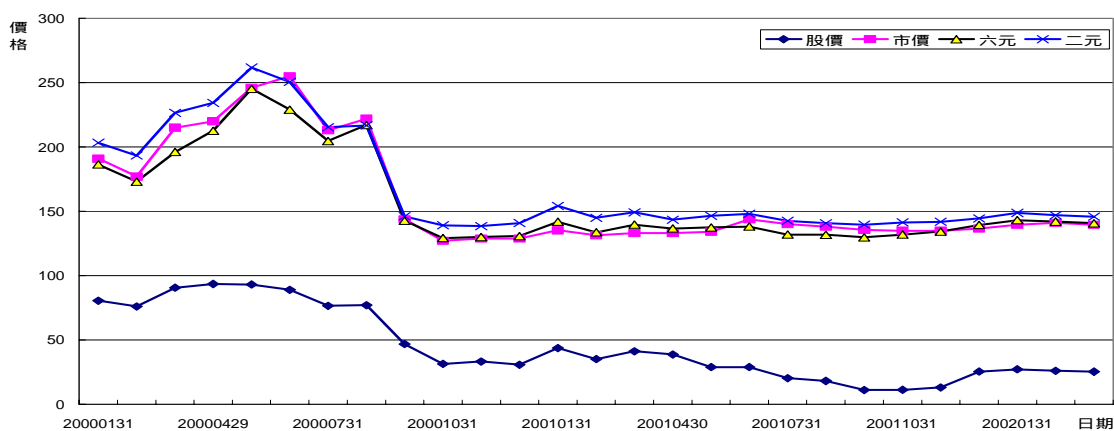


圖 4：茂矽二 2000 年 1 月至 2002 年 3 月可轉債價格

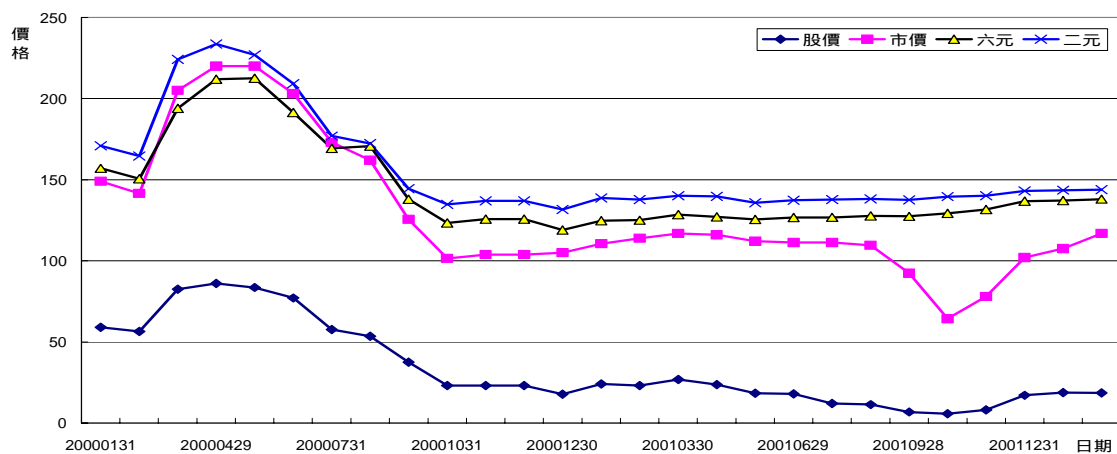


圖 5：調整後茂矽二可轉債價值

