時間序列分析
–總體經濟與財務金融之應用–

單根與隨機趨勢

陳旭昇

2013.12

定態與非定態自我迴歸模型

- 給定簡單的 AR(1) 模型

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim^{i.i.d.} (0, \sigma^2).$$

AR(1) 模型為定態的條件為 $|\beta_1| < 1$。

- 當 $|\beta_1| > 1$, AR(1) 模型會是一個爆炸的序列 (explosive series)。
- 當 $\beta_1 = 1$ 時, AR(1) 模型變成

$$y_t = \beta_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

此模型稱為帶有漂移項 (drift) 的隨機漫步模型 (random walk model), β_0 就是模型中的漂移項。

定態與非定態自我迴歸模型

- 如果不具漂移項,

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

就是一個簡單的隨機漫步模型。且

$$E_t(y_t) = y_{t-1},$$

亦即對於下一期最佳的預測值就是本期的值。

定態與非定態自我迴歸模型

假設起始點為 y_0, 透過反覆疊代,

- 不具漂移項:

$$y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1 + y_0,$$

- 具漂移項:

$$y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1 + y_0 + \beta_0 t.$$

定態與非定態自我迴歸模型

- 具漂移項的隨機漫步模型將有一個固定趨勢項: $\beta_0 t$, 若 β_0 大於為零, 則 y_t 將有一隨時間遞增的固定趨勢; 反之, 則為遞減趨勢。
- 如果隨機漫步模型具漂移項與固定趨勢, 則該隨機漫步模型將會有二次式的固定趨勢 (quadratic trend)。

非定態時間序列: 帶有趨勢之序列

- 所謂的趨勢 (trend) 係指時間序列資料持續而長期性的移動, 而時間序列資料則沿著它的趨勢上下波動。
- 在時間序列分析中, 有兩種可能的趨勢使時間序列為非定態: 固定趨勢 (deterministic trend) 與隨機趨勢 (stochastic trend)。

固定趨勢

- 給定

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

則

$$E(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t,$$

$$E(y_{t+s}) = \beta_0 + \beta_1 (t+s),$$

亦即 $E(y_t) \neq E(y_{t+s})$, y_t 非定態。這樣的時間序列稱為去除趨勢後定態 (trend stationary, TS), 簡稱 TS。

- 一般去除固定趨勢的方法為估計固定趨勢模型後, 得到殘差序列,

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 t$$

就是去除固定趨勢後的定態時間序列。

單根與隨機趨勢

所謂的隨機趨勢就是時間序列資料持續而長期性的**隨機**移動。以總體經濟學的解釋來看, 意指經濟體系中的外生衝擊 (exogenous shocks) 對於總體經濟變數的影響為恆久 (permanent)。**任意一次的隨機衝擊就會造成時間序列資料持續而長期性的改變。**

單根與隨機趨勢

給定 AR(p) 模型

$$\beta(L)y_t = \beta_0 + \varepsilon_t.$$

如果多項式方程式

$$\beta(z) = 1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \cdots - \beta_p z^p = 0$$

有一個根為 1, 則我們稱此 AR(p) 為一具有單根 (unit root) 的序列。

單根與隨機趨勢

- 如果時間序列 y_t 具有單根, 則 y_t 具有隨機趨勢 (stochastic trend)。一般來說, 單根與隨機趨勢被視作相同的概念。
- 單根的概念對於近代的總體經濟學的發展具有舉足輕重的影響。單根原本只是統計學上的性質, 然而, Nelson and Plosser (1982) 在 *Journal of Monetary Economics* 發表 "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series" 一文後, 改變了實證總體經濟學的方向。

單根與隨機趨勢

- 在過去, 人們對於第一章中的總體經濟時間序列均認定為具有固定趨勢, 因此, 一般的作法是以固定趨勢模型去除掉總體經濟時間序列的固定趨勢後, 序列就是定態, 可予以分析。
- 然而, Nelson and Plosser (1982) 發現, 大多數的總體經濟時間序列均具有隨機趨勢, 因此僅去除掉總體經濟時間序列的固定趨勢, 並未去除時間序列的隨機趨勢, 之後的分析就大有問題。

隨機趨勢造成的問題

隨機趨勢造成的問題有三:

1. 以自我迴歸模型估計隨機趨勢序列, 所得到的自我迴歸係數有小樣本向下偏誤 (small-sample downward bias)。
2. 以自我迴歸模型估計隨機趨勢序列, 所得到自我迴歸係數的 t-統計量 (t-statistic) 的極限分配不為標準常態。
3. 虛假迴歸 (spurious regression)。

小樣本向下偏誤

以 AR(1) 為例, 如果時間序列具有隨機趨勢, 亦即實際的資料生成過程 (data generating process) 為

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

然而我們不知道真正的資料生成過程, 卻以 AR(1) 模型估計之:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

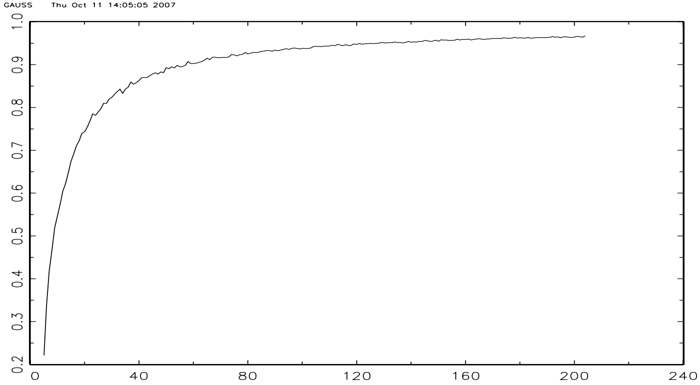
因此, 在真正的 $\beta_1 = 1$ 的情形下, 我們所估計的 $\hat{\beta}_1$ 將有向下偏誤:

$$\text{偏誤} = E(\hat{\beta}_1) - \beta_1 \approx \left(1 - \frac{5.3}{T}\right) - 1 = -\frac{5.3}{T},$$

隨著樣本越小, 偏誤越大。

小樣本向下偏誤

圖：$E(\hat{\beta}_1)$ 與樣本大小



t-統計量的極限分配不為標準常態

給定資料生成過程為

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

欲檢定虛無假設: $\beta_1 = B$, 其中 B 為真實的 β_1 之值。

- 若 $-1 < B < 1$, 亦即 y_t 為定態, 則 t-統計量的極限分配為標準常態,

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - B}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

t-統計量的極限分配不為標準常態

- 當 $B = 1$, 亦即 y_t 有隨機趨勢 (單根), 則t-統計量

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - B}{\sqrt{\widehat{Var(\hat{\beta}_1)}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{\sqrt{\widehat{Var(\hat{\beta}_1)}}}$$

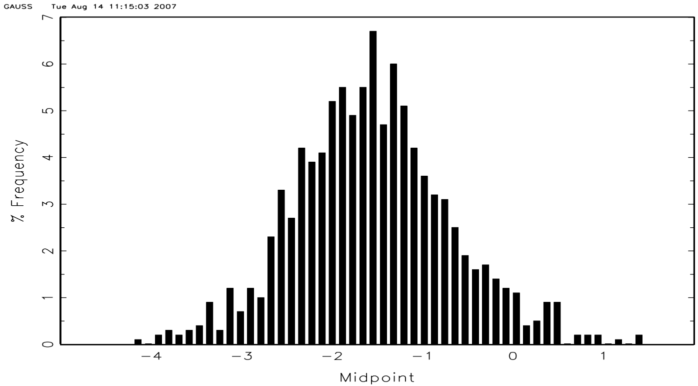
  的極限分配不為標準常態。

t-統計量的極限分配不為標準常態

- 以 $T = 1000$ (大樣本) 為例, 在 $\beta_1 = 1$ 的虛無假設下以電腦模擬上述 t-統計量, 所得的 t-統計量之抽樣分配, 該分配顯然不是標準常態分配 (別忘了標準常態分配的均數為零)。

t-統計量的極限分配不為標準常態

圖：模擬在虛無假設 $\beta_1 = 1$ 下 t-統計量之抽樣分配



虛假迴歸

- 虛假迴歸 (spurious regression) 是由 Granger and Newbold(1974) 所提出。
- 一般而言, 如果有兩個獨立且定態的時間序列 x_t 與 z_t, 由於獨立之性質, 則以下的迴歸分析

$$x_t = a_0 + a_1 z_t + u_t$$

應該會得到

1. a_1 的估計式不具統計上顯著,
2. (2) 判定係數 R^2 非常低。

虛假迴歸

- 如果 x_t 與 z_t 雖然獨立但卻都具隨機趨勢, 則他們發現, 在多次電腦模擬中, 在 5% 的顯著水準下, 可以拒絕 $a_1 = 0$ 的虛無假設的機會 (百分比) 竟高達 75%, 而 R^2 也異常地高。亦即, 兩個毫不相干的變數, 只因為具有隨機趨勢, 就會讓我們估計出一個不存在的相關性, 這就叫做虛假迴歸。

時間序列的單根檢定

- 既然時間序列存在單根會造成許多問題, 一如 Nelson and Plosser (1982) 所揭示, 如果我們忽略總體經濟變數具有單根之問題, 則過去實證總體經濟研究中所得到的統計推論都是錯的。
- 我們接下來的問題就是, 如何檢定單根的存在。一個最常使用的檢定稱為 Augmented Dickey-Fuller 檢定 (ADF test)。

時間序列的單根檢定

考慮一個 AR(k) 模型:

$$\varphi(L)y_t = \mu + \varepsilon_t, \tag{1}$$

$$\varepsilon_t \sim^{i.i.d.} (0, \sigma^2),$$

其中

$$\varphi(L) = 1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_k L^k. \tag{2}$$

時間序列的單根檢定

性質 (Dickey-Fuller 重新參數化)

令 $p = k - 1$, 我們可以透過計算得到

$$\varphi(L) = (1 - L) - \alpha_0 L - \alpha_1 (L - L^2) - \cdots - \alpha_p (L^p - L^{p+1}),$$

其中係數 α_i 符合

$$\alpha_0 = -1 + \sum_{j=1}^{k} \varphi_j,$$

$$\alpha_i = - \sum_{j=i+1}^{k} \varphi_j, \quad \text{for } \ i = 1, 2, \ldots, p$$

時間序列的單根檢定

性質 (Dickey-Fuller 重新參數化 (續))

因此, 根據第 (2) 式, 式 (1) 可改寫成:

$$\Delta y_t = \mu + \alpha_0 y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \alpha_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t. \tag{3}$$

第 (3) 式稱為第 (1) 式的 Dickey-Fuller 重新參數化。

時間序列的單根檢定

- 如果 $\varphi(z) = 0$ 有一個根落在單位圓之上, 亦即 $\varphi(1) = 0$, 則稱 y_t 具有單根。注意到

$$\varphi(1) = (1 - 1) - \alpha_0 - \alpha_1(1 - 1^2) - \cdots - \alpha_p(1^p - 1^{p+1}) = -\alpha_0,$$

- 檢定 y_t 是否具有單根, $H_0 : \varphi(1) = 0$, 就等同於檢定第 (3) 式中 $H_0 : \alpha_0 = 0$ 之假設。

時間序列的單根檢定

定義 (Augmented Dickey-Fuller 檢定)

- 若虛無假設為 y_t 具單根, 對立假設 y_t 為定態, 考慮以下迴歸式

$$\Delta y_t = \beta_0 + \delta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t,$$

並檢定 $H_0 : \delta = 0$ vs. $H_1 : \delta < 0$。

時間序列的單根檢定

定義 (Augmented Dickey-Fuller 檢定 (續))

- 若虛無假設為 y_t 具單根, 對立假設 y_t 為去除趨勢後定態。考慮以下迴歸式

$$\Delta y_t = \beta_0 + \alpha t + \delta y_{t-1} + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \gamma_p \Delta y_{t-p} + u_t,$$

並檢定 $H_0 : \delta = 0$ vs. $H_1 : \delta < 0$。其中, $\gamma_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + \gamma_p \Delta y_{t-p}$ 稱為 ADF 檢定的增廣項 (augmented part), 增廣項的最適落後期數 p 可利用 AIC 或是 BIC (SIC) 決定之。

時間序列的單根檢定

在 ADF 檢定中, 檢定 $H_0: \delta = 0$ 的 t 統計量又稱 ADF-t 統計量,

$$\text{ADF-}t = \frac{\hat{\delta}}{\sqrt{\widehat{Var(\hat{\delta})}}}.$$

在虛無假設下, ADF-t 統計量的實際抽樣分配不為 t 分配, 其極限分配也不是標準常態 $N(0,1)$, 而是一個非常態的特殊分配, 其臨界值如下表所示。

時間序列的單根檢定

表 : ADF-t 統計量的大樣本臨界值

ADF 迴歸模型	10%	5%	1%
只有截距項 (β_0)	-2.57	-2.86	-3.43
截距項 (β_0) 與固定趨勢 (t)	-3.12	-3.41	-3.96

因此, ADF-t 檢定是一個左尾檢定, ADF-t 統計量越小, 越能提供證據拒絕「具有單根」的虛無假設。

時間序列的單根檢定

如果移去 ADF 迴歸式中的所有增廣項,

$$\Delta y_t = \beta_0 + \alpha t + u_t,$$

這就是 Dickey and Fuller(1979) 原始的概念, 因此我們又將不具增廣項的 ADF 檢定稱做 Dickey-Fuller 檢定, 簡稱 DF 檢定。放進增廣項的目的在於控制殘差項 u_t 中可能的序列相關。

ADF 檢定的檢定力

- ADF 檢定雖然是最常用的單根檢定, 但是其檢定力在真正的 AR(1) 係數很接近 1 (但不等於 1) 時非常低。也就是說, ADF 檢定犯型 II 誤差的機率非常高 (實際上是定態時間序列, 卻無法拒絕具有單根的虛無檢定)。
- 假設真正的資料過程為定態的 AR(1) 模型:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim^{i.i.d.} N(0, \sigma^2),$$

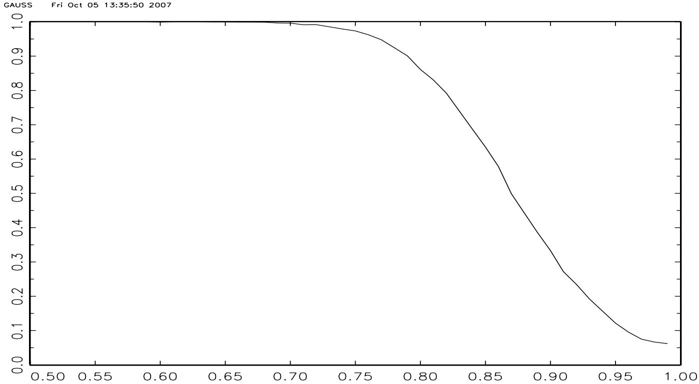
其中 $|\beta_1| < 1$。

ADF 檢定的檢定力

- 以電腦模擬 ADF 檢定在不同的對立假設下 (亦即不同的 $0.5 \leq \beta_1 \leq 1$) 的檢定力 (顯著水準為 5%), 當 $\beta_1 = 0.5$ 左右時, ADF 檢定的檢定力極高 (接近 1)。
- 隨著 β_1 變大, 檢定力亦隨之下降, 舉例來說, 當真正的 $\beta_1 = 0.93$ 左右, 檢定力只有 10%, 亦即 ADF 檢定犯型 II 誤差的機率高達 90%, 每 100 個定態 AR(1) 序列有 90 個會因無法拒絕單根而被誤判為 $I(1)$ 序列。

ADF 檢定的檢定力

圖 : ADF 檢定之檢定力 (橫軸為 AR(1) 係數 β_1, 縱軸為檢定力)



其他單根檢定法

表 : 其他單根檢定

檢定方法	提出人
PP 檢定	Phillips and Perron (1988)
KPSS 檢定	KPSS(1992)
DF-GLS 檢定	Elliott et al.(1996)
ERS 檢定	Elliott et al.(1996)
NP 檢定	Ng and Perron(2001)

其他單根檢定

- ADF 檢定中的增廣項是為了控制殘差項的序列相關。Phillips and Perron(1988) 則以無母數 (non-parametric) 之方法處理此問題, 稱之為 Phillips-Perron (PP) 檢定。然而, 根據類似的電腦模擬分析顯示, PP 檢定與 ADF 檢定一樣, 都有「低檢定力」之問題。

其他單根檢定

- 一般的單根檢定都是將「序列具有單根」放在虛無假設, 而對立假設則是「序列為定態」。而 KPSS 檢定正好相反, 其虛無假設是「序列為定態」。因此, 有些學者如 Cheung and Chinn (1996) 主張, 應該同時考慮將「序列具有單根」放在虛無假設與將「序列為定態」放在虛無假設的檢定, 以做為一種「確認分析」(confirmatory analysis)。唯有兩種不同檢定具有一致結果, 才能「確認」序列是否為單根之結論。

其他單根檢定

- Maddala and Kim (1998) 卻有不同之看法。他們認為給定 KPSS 檢定與 ADF/PP 檢定一樣, 檢定力也不高, 這種確認分析並沒有太大意義。他們援引文獻上的電腦模擬分析以支持此論點。簡單地說,「確認分析」猶如問道於兩個盲人 (There is no chance to get better since you are guided by TWO Blind MEN)。

其他單根檢定

- 除了「低檢定力」的問題之外, ADF/PP 等傳統檢定還存在著「高型 I 誤差的扭曲」(large size distortion)。Schwert(1989) 與 DeJong , Nankervis , Savin and Whiteman (1992) 均發現實際資料生成過程 (data generating process) 中的移動平均誤差 (moving-average component) 會導致傳統 ADF/PP 單根檢定之型 I 誤差的扭曲。

其他單根檢定

- Ng and Perron (2001) 除了修正傳統的單根檢定, 對於選取增廣項最適落後期數的資訊準則也有所修正, 稱之為修正 AIC (modified AIC, MAIC) 與 修正 SIC (modified SIC, MSIC) 等。

其他單根檢定

- DF-GLS, ERS, 以及 NP 檢定為最近提出來的一些新檢定, 意圖解決傳統 ADF/PP 單根檢定之問題。然而, 一如 Maddala and Kim (1998) 所指出, 大多數的新檢定或許彌補了 ADF/PP 檢定的原有缺點, 卻也存在若干新的缺失。目前為止似乎還沒有一個簡單好用且能夠解決所有問題的優質檢定。譬如說, 有的新檢定引進了一些不易決定的新參數, 有的檢定則有計算上的困難, 或是步驟太過繁複。此外, 這些新檢定的普遍性亦不足, 僅在某些特定的資料產生過程或是特定的模型設定下表現較好。

其他單根檢定法

- 即使各種新檢定並不能適用在每一個模型設定, 這些新檢定的表現都遠勝過傳統 ADF/PP 檢定。因此, Maddala and Kim (1998) 建議應該揚棄 ADF/PP 檢定 (it is time to completely discard the ADF/PP tests)。

如何處理時間序列的單根

- 一個具有單根的時間序列如

$$y_t = \beta_0 + y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim^{i.i.d.} N(0, \sigma^2).$$

取一階差分

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \beta_0 + \varepsilon_t$$

就變成一個定態的時間序列, 因此, 將具單根的數列取一階差分就能去除其隨機趨勢。

- 一般來說, 如果一個非定態的時間序列取一階差分後就變成定態的時間序列, 我們稱此時間序列為差分後定態 (difference stationary)

如何處理時間序列的單根

- 對於一階差分後定態的時間序列以 $y_t \sim \mathrm{I}(1)$ 表示之, 意指一階自積 (integrated of degree one), 亦即, 經過一階差分後為定態。
- 如果時間序列不具隨機趨勢, 本來就是一個定態序列, 以 $y_t \sim \mathrm{I}(0)$ 表示之。
- 如果時間序列經過 d 階差分後方為定態, 亦即 $\Delta^d y_t \sim \mathrm{I}(0)$, 則以 $y_t \sim I(d)$ 表示之。
- 由於在對 $I(1)$ 時間序列作統計分析時, 存在之前提過的三大問題, 一般的作法是: 一旦發現時間序列包含隨機趨勢, 就予以差分, 並以差分後之序列作統計分析。

去除趨勢後定態 VS. 差分後定態

去除趨勢後定態 (TS) 與差分後定態 (DS) 兩種序列具有完全不同的性質, 將該序列轉換為定態的方式亦不同。

- 如果我們將 TS 序列予以一階差分, 造成的問題是引進了一個不可逆的 MA, 舉例來說,

$$y_t = y_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

一階差分後,

$$\Delta y_t = a_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

變成一不可逆之 MA 序列, 使得 Δy_t 無法表示為 AR 模型。

去除趨勢後定態 VS. 差分後定態

- 反之, 如果我們將一個 DS 序列去除掉固定趨勢後, 未必能夠得到定態序列。舉例來說,

$$y_t = y_0 + a_0 t + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

減去 $(y_0 + a_0 t)$ 後,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t &= y_t - (y_0 + a_0 t) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{aligned}$$

為一非定態序列。

去除趨勢後定態 VS. 差分後定態

- 由於目前並不存在一個最具檢定力 (uniformly powerful) 的單根檢定, 即使我們無法拒絕序列具有單根, 並不代表序列一定有單根。
- 對於一個無法拒絕具有單根的序列, 雖不隱含該序列一定具有單根, 但是從另一個角度來說, I(1) 序列會是該序列的一個良好近似, 我們可以將該序列"視為"一個具隨機趨勢的序列。因此, 我們可以依照一般作法, 將該序列差分後再予分析。

Hodrick-Prescott 分解

- 給定序列 y_t 為非定態序列, 我們可以將其分解 (decompose) 成定態部分 (stationary component) 與非定態部分 (nonstationary component)。
- 舉例來說, 實質景氣循環 (real business cycle, RBC) 模型認為實質產出受到恆常性衝擊 (permanent shocks) 與暫時性衝擊 (temporary shocks) 的交互影響, 使得實質產出沿著一個隨機趨勢上下波動。因此, 將實質產出分解成定態部分與非定態部分以 RBC 的觀點來看, 就是分解成趨勢 (trend) 與波動 (cycle) 兩部分。

Hodrick-Prescott 分解

- 實質景氣循環文獻上最常用的分解方法稱為 Hodrick-Prescott 分解 (Hodrick-Prescott decomposition), 又稱 Hodrick-Prescott 濾器 (Hodrick-Prescott filter), 簡稱 HP 分解 (HP decomposition) 或是 HP 濾器 (HP filter)
- HP 分解的概念為, 在 y_t 中分解出一個恆常序列 (隨機趨勢) TR_t 以極小化 y_t 圍繞著 TR_t 的變異數:

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - TR_t)^2.$$

Hodrick-Prescott 分解

- 然而, 如果我們只有以上的目標函數, 則設定 $TR_t = y_t$ 就能達到極小值, 不但沒意義, 也使 TR_t 的波動過大。
- 因此, 我們的目標函數加入一個懲罰項, 亦即

$$
\begin{aligned}
TR_t^{HP} = \arg \min_{\{TR_t\}_{t=1}^{T}} & \sum_{t=1}^{T} (y_t - TR_t)^2 \\
& + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[(TR_{t+1} - TR_t) - (TR_t - TR_{t-1}) \right]^2 .
\end{aligned}
$$

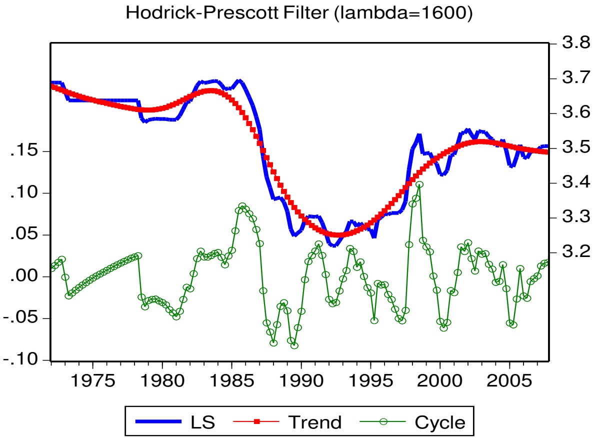
對於過度波動的 TR_t 予以懲罰。

Hodrick-Prescott 分解

- 參數 λ 控制了 TR_t 的平滑程度, λ 越大, TR_t 就越平滑。
- Hodrick and Prescott (1997) 建議設定 λ 為 100 (年資料), 1600 (季資料) 以及 14400 (月資料)。而 $CY_t^{HP} = y_t - TR_t^{HP}$ 就是 y_t 的波動部分。

Hodrick-Prescott 分解

圖 : Hodrick-Prescott 分解: 新台幣兌美元匯率



常用的追蹤資料單根檢定

- 已知單一序列的單根檢定有低檢定力的問題。既然不可能增加單一時間序列的樣本大小, 一種可能的解決方法就是使用追蹤資料。
- 舉例來說, 在檢定購買力平價說時, 特定國家貨幣對美元的實質匯率追朔到 Bretton Woods System 崩潰後的浮動匯率期間, 以月資料來說, 迄今最多只有 310 個樣本點 (1972:1–2007:10), 然而, 如果考慮七大工業國 (美國為基準), 則可以得到 $6 \times 310 = 1860$ 個樣本點。
- 文獻上最常用的追蹤資料單根檢定 (panel unit root tests) 為
  1. Levin,Lin and Chu(2002) test (LLC)
  2. Im,Pesaran and Shin(2003) test (IPS)

常用的追蹤資料單根檢定

考慮以下的追蹤資料 ADF 迴歸式

$$\Delta y_{it} = a_{i0} + \gamma_i y_{it-1} + a_{i2} t + \sum_{j=1}^{P_i} \beta_{ij} \Delta y_{it-j} + \varepsilon_{it}$$

其中 $i = 1, 2, \ldots n.$。LLC 檢定與 IPS 檢定有兩大的不同處。

1. LLC 檢定混合的是資料, 而 IPS 檢定混合的是檢定量。
2. 對立假設不同

常用的追蹤資料單根檢定

1. LLC 檢定

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \dots \gamma_n = \gamma = 0$$
$$H_1 : \gamma_1 = \gamma_2 = \dots \gamma_n = \gamma < 0$$

2. IPS 檢定

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \gamma = 0$$
$$H_1 : \text{至少有一個 } \gamma_i \text{ 不為零}$$

顯而易見地, LLC 檢定的對立假設要求所有的 γ_i 都相等, 限制較大, 而 IPS 檢定的對立假設限制較小。

IPS 追蹤資料單根檢定

在此只簡單介紹如何執行 IPS 檢定。

1. 對每一個 i, 估計 γ_i 且計算 ADF_t, 以 t_i 表示, 其中 $i = 1, 2, \ldots n$.
2. 將 ADF_t 統計量混合 (pool) 在一起

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$$

3. 建構 Z_{tbar} 統計量:

$$Z_{tbar} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{t} - E[\bar{t}])}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{t})}}$$

其中 $E[\bar{t}\,]$ 與 $\mathrm{Var}(\bar{t}\,)$ 之值可由 Im et al. (2003) 查得

IPS 追蹤資料單根檢定

4. Im et al. (2003) 證明

$$Z_{tbar} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

   且提供了小樣本檢定臨界值

5. 我們也可以利用蒙地卡羅模擬或是 Bootstrap 來自行計算臨界值 (參見第 14 章)

追蹤資料單根檢定之性質

1. IPS 檢定的對立假設為

$$H_1: \text{至少有一個 } \gamma_i \text{ 不為零}$$

然而, 我們無法得知道到底使那一個 γ_i 不為零。

2. 追蹤資料檢定的大樣本性質仍有待商榷。可能的漸近性質為
   (a) T 固定, $N \to \infty$
   (b) $T \to \infty$, N 固定
   (c) $T \to \infty, N \to \infty$ 而 $\frac{T}{N} \to c$

因此, 在不同的漸近假設下, 臨界值亦將有所不同。

追蹤資料單根檢定之性質

3. 常用的追蹤資料單根檢定 (LLC, Breitung, IPS, Fisher-ADF, Fisher-PP, Hadri) 都假設誤差項 $\{\varepsilon_{it}\}$ 無序列相關且無當期相關 (serially uncorrelated and contemporaneously uncorrelated), 亦即,

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = 0.$$

序列相關的問題可以用增廣項 (augmented part) 予以解決, 然而, 若 $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) \neq 0$, 則以上的 LLC, Breitung, IPS, Fisher-ADF, Fisher-PP 以及 Hadri 檢定可能會導致錯誤的統計推論。文獻上如 O'Connell (1998) 與 Pesaran (2006) 都曾指出, 如果追蹤資料單根檢定忽略了誤差項的當期相關, 則會產生極高的型 I 誤差機率 (substantial size distortions)。

追蹤資料單根檢定之性質

4. 對於 $E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) \neq 0$ 的問題, 目前文獻上的解決方法可以參考
   (a) Maddala and Wu (1999)
   (b) Pesaran (2006)