MAT2410 (응용수학I)
과제 1-1

서강대학교 컴퓨터공학과 박수현 (20181634)

서강대학교 컴퓨터공학과

1 확률

1.1 사건

2. 다음 상황에 맞는 표본공간을 구하라.

(1) "1"의 눈이 나올 때까지 공정한 주사위를 반복하여 던진 횟수
(2) 영하 5도에서 영상 7.5도까지 24시간 동안 연속적으로 기록된 온도계의 눈금의 위치
(3) 형광등을 교체한 후로부터 형광등이 나갈 때까지 걸리는 시간

Solution.

(1) $S = \{x|x \geq 1\}$
(2) $S = \{x|-5 \leq x \leq 7.5\}$
(3) $S = \{x|x \geq 0\}$

5. 주머니 안에 빨간색과 파란색의 공깃돌이 두 개씩 들어 있는 주머니에서 공깃돌 두 개를 차례로 꺼낸다.

(1) 나올 수 있는 공깃돌의 색에 대한 표본공간을 구하라.
(2) 공깃돌 두 개가 서로 다른 사건을 구하라.
(3) 파란색이 많아야 한 개인 사건을 구하라.
(4) 첫 번째 공깃돌이 빨간색이고, 두 번째 공깃돌이 파란색인 사건을 구하라.

Solution. 빨간색 공깃돌이 나오는 사건을 R, 파란색 공깃돌이 나오는 사건을 B라 하자.

(1) $S = \{RR, RB, BR, BB\}$
(2) $S = \{RB, BR\}$
(3) $S = \{RR, RB, BR\}$
(4) $S = \{RB\}$

1.2 확률

6. 어느 모임의 구성원을 살펴보면 부자가 7%, 저명인사가 10% 그리고 부자이면서 저명인사가 3% 라고 한다. 이 모임에서 어느 한 사람을 임의로 선정하여 회장으로 추대하고자 한다.

(1) 부자가 아닌 사람이 회장으로 추대될 확률을 구하라.
(2) 부자는 아니지만 저명인사가 회장이 될 확률을 구하라.
(3) 부자 또는 저명인사가 회장이 될 확률을 구하라.

Solution. 부자가 회장이 되는 사건을 A, 저명인사가 회장이 되는 사건을 B라고 하자.

(1) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.07 = 0.93$
(2) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.10 - 0.03 = 0.07$
(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.07 + 0.10 - 0.03 = 0.14$

7. 앞면이 나올 가능성이 $\frac{2}{3}$인 찌그러진 동전을 두 번 반복하여 던진다.

(1) 앞면이 한 번도 나오지 않을 확률을 구하라.
(2) 앞면이 한 번 나올 확률을 구하라.
(3) 앞면이 두 번 나올 확률을 구하라.

Solution.

(1) $\binom{2}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$
(2) $\binom{2}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^1 = 2 \times \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
(3) $\binom{2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

10. 공정한 주사위를 독립적으로 반벅해서 던지는 실험에서 2 또는 3의 눈이 나오면 주사위 던지기를 멈춘다고 한다.

(1) 처음 던진 후에 멈출 확률을 구하라.
(2) 5번 던진 후에 멈출 확률을 구하라.
(3) n번 던진 후에 멈출 확률을 구하라.

Solution. 공정한 주사위에서 2 또는 3의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다.

(1) $\frac{1}{3}$

(2) 처음 4번은 2 또는 3의 눈이 나오지 않아야 하며, 마지막 한 번은 2 또는 3의 눈이 나와야 한다. 따라서 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3}$

(3) 처음 $n-1$번은 2 또는 3의 눈이 나오지 않아야 하며, 마지막 한 번은 2 또는 3의 눈이 나와야 한다. 따라서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$

13. 지난해에 어떤 단체의 스포츠 관람 습성에 대한 조사 결과, 그들 중에서 체조와 야구 그리고 축구를 관람한 사람은 각각 28%, 29%, 그리고 19%이었다. 한편 체조와 야구를 관람한 사람은 14%, 야구와 축구를 관람한 사람은 12% 그리고 체조와 축구를 관람한 사람은 10%이었으며, 세 개의 스포츠 모두를 관람한 사람은 8%이었다. 세 개의 스포츠 중 어느 것도 관람하지 않은 사람의 비율을 구하라.

Solution. 체조를 관람한 사람의 집합을 A, 야구를 관람한 사람의 집단을 B, 축구를 관람한 사람의 집단을 C라 하자. 단체의 전체 사람 수를 n이라고 할 때, $|A| = 0.28n$, $|B| = 0.29n$, $|C| = 0.19n$, $|A\cap B| = 0.14n$, $|B\cap C| = 0.12n$, $|C\cap A| = 0.10n$, $|A\cap B\cap C| = 0.08n$이므로 어느 것도 관람하지 않은 사람의 수는

$$\begin{aligned}
&|(A\cup B\cup C)^c| \\
=&n - |A\cup B\cup C| \\
=&n - (|A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|) \\
=&n - (0.28 + 0.29 + 0.19 - 0.14 - 0.12 - 0.10 + 0.08)\,n \\
=&0.52n
\end{aligned}$$

이다. 따라서 어느 것도 관람하지 않은 사람의 비율은 52%이다.

1.3 조건부 확률

6. 공정한 주사위를 5번 반복해서 던지는 게임을 한다.

(1) 5번 모두 짝수의 눈이 나올 확률을 구하라.
(2) 5번 모두 서로 다른 눈이 나올 확률을 구하라.

Solution.

(1) 공정한 주사위에서 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$이므로, 5번 모두 짝수의 눈이 나올 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$이다.
(2) 2번째 시행에서 1번째와 다른 눈이 나올 확률은 $\frac{5}{6}$, 3번째 시행에서 1–2번째와 다른 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}$, 4번째 시행에서 1–3번째와 다른 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}$, 5번째 시행에서 1–4번째와 다른 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{54}$이다.

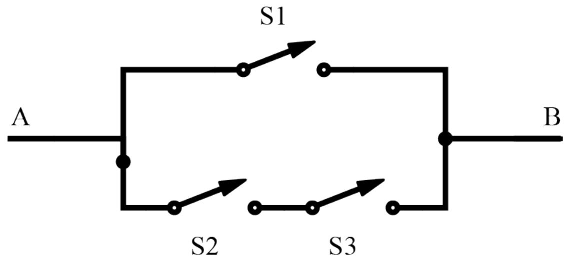
9. 주머니 안에 흰색 바둑돌이 4개, 검은색 바둑돌이 6개 들어있다. 꺼낸 바둑돌을 다시 주머니에 넣지 않는 방법으로 이 주머니에서 차례로 바둑돌 3개를 꺼낼 때, 다음을 구하라.

(1) 3개 모두 흰색일 확률
(2) 차례로 흰색, 검은색, 그리고 흰색일 확률

Solution.

(1) 1번째, 2번째, 3번째 시행에서 흰색 바둑돌을 고를 확률은 각각 $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{8}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$이다.
(2) 1번째, 2번째, 3번째 시행에서 차례로 흰색, 검은색, 그리고 흰색 바둑돌을 고를 확률은 각각 $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{3}{8}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$이다.

11. 다음 회로의 각 스위치는 독립적으로 작동하며 1번 스위치가 ON이 될 확률은 0.95, 2번 스위치와 3번 스위치가 ON이 될 확률은 각각 0.94, 0.86이라고 한다. 이 회로에 대하여 A와 B 두 지점에 전류가 흐를 확률을 구하여라.



Solution. 1번 스위치가 작동하거나, 2번과 3번 스위치가 동시에 작동하면 된다. 따라서 1번 스위치가 작동하는 사건을 S_1, 2번 스위치가 작동하는 사건을 S_2, 3번 스위치가 작동하는 사건을 S_3이라고 하면 구하고자 하는 확률은

$$\begin{aligned}
&P[S_1 \cup (S_2 \cap S_3)] \\
=&P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P[S_1 \cap (S_2 \cap S_3)] \\
=&0.95 + (0.94 \times 0.86) - (0.95 \times 0.94 \times 0.86) \\
=&0.99042
\end{aligned}$$

이다.

12. 위성 시스템은 두 개의 독립적인 백업용 컴퓨터(computer 2, computer 3)를 가진 컴퓨터(computer 1)에 의하여 조정된다. 정상적으로 computer 1은 시스템을 조정하지만 이 컴퓨터가 고장 나면 자동적으로 computer 2가 작동하고, computer 2가 고장 나면 computer 3이 작동한다. 그리고 세 컴퓨터가 모두 고장 나면 위성 시스템은 멈춘다고 한다. 그리고 각 컴퓨터들이 멈출 확률은 0.01이고, 이 컴퓨터들이 멈추는 것은 역시 독립적이다. 이 때 각 컴퓨터들이 작동할 확률을 구하라. 그리고 위성 시스템이 멈출 확률을 구하라.

Solution. 컴퓨터 1이 작동할 확률은 0.99이다.

컴퓨터 2가 작동할 확률은 컴퓨터 1이 작동하지 않으면서 컴퓨터 2가 정상적으로 작동할 확률이므로, $0.01 \times 0.99 = 0.0099$이다.

컴퓨터 3이 작동할 확률은 컴퓨터 1과 2가 작동하지 않으면서 컴퓨터 3이 정상적으로 작동할 확률이므로, $0.01 \times 0.01 \times 0.99 = 0.000099$이다.

위성 시스템이 멈출 확률은 컴퓨터가 모두 작동하지 않을 확률이므로, $0.01^3 = 0.000001$이다.

17. AIDS 검사로 널리 사용되는 방법으로 ELISA 검사가 있다. 이 방법에 의하여 100,000명이 검사를 받았으며, 검사 결과 다음 표를 얻었다고 한다. 검사를 받은 사람들 중에서 임의로 한 명을 선정하였을 때, 다음을 구하라.

	AIDS 균 보균자	AIDS 균 미보균자
양성반응	4,535	5,255
음성반응	125	90,085
계	4,660	95,340

(1) 선정한 사람이 미보균자일 때, 이 사람이 양성반응을 보일 확률
(2) 선정한 사람이 보균자일 때, 이 사람이 음성반응을 보일 확률

Solution.

(1) $\dfrac{5255}{95340} \approx 0.05511$
(2) $\dfrac{125}{4660} \approx 0.02682$

19. 의학 보고서에 따르면 전체 국민의 7.5%가 폐질환을 앓고 있으며, 그들 중 90%가 흡연가라고 한다. 그리고 폐질환을 갖지 않은 사람 중에 25%가 흡연가라 한다.

(1) 임의로 선정한 사람이 흡연가일 확률을 구하여라.
(2) 임의로 선정한 흡연가가 폐질환을 가질 확률을 구하여라.

Solution. 임의로 선정한 사람이 흡연가인 사건을 A, 폐질환을 앓고 있는 사건을 B라고 하자. 그러면 문제에서 $P(B) = 0.075$, $P(A|B) = 0.90$, $P(A|B^c) = 0.25$이다.

따라서 $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.90$이므로

$$P(A \cap B) = 0.90P(B) = 0.0675$$

이고, 또한 $P(A|B^c) = \dfrac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 0.25$이므로

$$P(A \cap B^c) = 0.25P(B^c) = 0.25(1 - 0.075) = 0.23125$$

임을 알 수 있다.

(1) 임의로 선정한 사람이 흡연가일 확률 $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = 0.0675 + 0.23125 = 0.29875$
(2) 임의로 선정한 흡연가가 폐질환을 가질 확률 $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.0675}{0.29875} \approx 0.22594$

20. 세 공장 A, B, 그리고 C에서 각각 40%, 30%, 30%의 비율로 제품을 생산한다. 그리고 이 세 공정 라인에서 불량품이 제조될 가능성은 각각 2%, 3%, 5%라 한다. 어떤 제품 하나를 임의로 선정했을 때, 다음을 구하라.

(1) 이 제품이 불량품일 확률
(2) 임의로 선정된 제품이 불량품이었을 때, 이 제품이 A에서 만들어졌을 확률과 B에서 만들어졌을 확률
(3) 임의로 선정된 제품이 불량품이었을 때, 이 제품이 A 또는 B에서 만들어졌을 확률

Solution. 임의로 선정한 제품이 불량품인 사건을 X라고 하자. 그리고 임의로 선정한 제품이 각각의 공장에서 만들어졌을 사건을 A, B, C라고 하자.

(1) $P(A)P(X|A)+P(B)P(X|B)+P(C)P(X|C) = 0.40\times 0.02+0.30\times 0.03+0.30\times 0.05 = 0.032$
(2) $P(A|X) = \dfrac{P(A\cap X)}{P(X)} = \dfrac{0.40\times 0.02}{0.032} = 0.25$, $P(B|X) = \dfrac{P(B\cap X)}{P(X)} = \dfrac{0.30\times 0.03}{0.032} = 0.28125$
(3) 사건 A와 B는 독립이므로, $P(A\cup B|X) = P(A|X)+P(B|X) = 0.53125$

23. 두 기계 A와 B에 의하여 컴퓨터 칩이 생산되며, 기계 A의 불량률은 0.08이고 기계 B의 불량률은 0.05라고 한다. 두 기계로부터 각각 하나의 컴퓨터 칩을 선정하였을 때, 다음을 구하여라.

(1) 두 개 모두 불량품일 확률
(2) 두 개 모두 양호품일 확률
(3) 정확히 하나만 불량품일 확률
(4) (3)의 경우에 대하여, 이 불량품이 기계 A에서 생산되었을 확률

Solution. A에서 불량품을 선택한 사건을 A, B에서 불량품을 선택한 사건을 B라고 하자. 이 때 $P(A) = 0.08$, $P(B) = 0.05$이다. 또한 A와 B는 독립사건이다.

(1) A와 B는 독립이므로, $P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0.004$
(2) $P(A^c\cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = 0.874$
(3) 정확히 하나만 불량품일 확률은 (1)의 사건과 (2)의 사건의 여사건이다. 따라서 $1-0.004-0.874 = 0.122$
(4) A에서 불량품이, B에서 양호품이 각각 생산될 확률은 $0.08\times 0.95 = 0.076$이다. 따라서 (3)이 일어났을 때 이런 상황이 발생할 확률은 $\dfrac{0.076}{0.122} \approx 0.623$이다.

2 확률변수

2.1 이산확률변수

5. 10원짜리 동전 5개와 100원짜리 동전 3개가 들어 있는 주머니에서 동전 3개를 임의로 꺼낸다고 하자. 이 때 임의로 추출된 동전 3개에 포함된 100원짜리 동전의 개수에 대한 확률질량함수와 분포함수를 구하라.

Solution. 100원짜리 동전의 갯수를 확률변수 X로 두면, 확률질량함수 f는

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56} \\
f(1) &= \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56} \\
f(2) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56} \\
f(3) &= \frac{\binom{5}{0}\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}
\end{aligned}
$$

이고, 따라서 분포함수 F는

$$
F(x) = \begin{cases}
0 & x < 0 \\
\frac{10}{56} & 0 \le x < 1 \\
\frac{40}{56} & 1 \le x < 2 \\
\frac{55}{56} & 2 \le x < 3 \\
1 & 3 \le x
\end{cases}
$$

이다.

6. 1의 눈이 나올 때까지 반복하여 주사위를 던지는 게임에서 주사위 던진 횟수를 X라 할 때, 다음을 구하라.

(1) X의 확률질량함수 $f(x)$
(2) 처음부터 세 번 이내에 1의 눈이 나올 확률
(3) 적어도 다섯 번 이상 던져야 1의 눈이 나올 확률

Solution.

(1) x번 던졌을 때 1의 눈이 처음으로 나왔을 확률은 $x-1$번째까지 1의 눈이 나오지 않다가 x번째에 1의 눈이 나왔을 확률이므로,

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) & x \geq 1, x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다.
(2) 처음부터 세 번 이내에 1의 눈이 나올 확률은 $P(X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{91}{216}$이다.
(3) 적어도 다섯 번 이상 던져야 1의 눈이 나올 확률은 네 번 이내에 1이 나오는 사건의 여사건의 확률이다. 따라서

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = \frac{625}{1296}$$

이다.

9. 두 사람이 주사위를 던져서 먼저 1의 눈이 나오면 이기는 게임을 한다. 그러면 먼저 던지는 사람과 나중에 던지는 사람 중에서 누가 더 유리한지 구하라.

Solution. 주사위 던진 횟수를 X라 할 때, 확률질량함수는 문제 **6**의 $f(x)$과 같다.

먼저 던지는 사람이 이길 확률은

$$\begin{aligned} & f(1) + f(3) + f(5) + \cdots \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} f(2i-1) \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i-2}\left(\frac{1}{6}\right) \\ =& \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{i} \\ =& \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

이고, 나중에 던지는 사람이 이기는 사건은 먼저 던지는 사람이 이기는 사건의 여사건이므로 나중에 던지는 사람이 이길 확률은 $\frac{5}{11}$이다. 따라서 먼저 던지는 사람이 더 유리하다.

10. 확률변수 X의 확률질량함수가 다음과 같을 때, X가 홀수일 확률을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3^x} & x = 1, 2, 3, \cdots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Solution. x가 홀수일 확률은

$$\begin{aligned} & f(1) + f(3) + f(5) + \cdots \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} f(2i-1) \\ =& \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2i-1}} \\ =& 6 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9^i} \\ =& \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

이다.

11. 복원추출에 의하여 52장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 세 장의 카드를 꺼낼 때, 세 장의 카드 안에 포함된 하트의 수를 확률변수 X라 한다.

(1) X의 확률질량함수를 구하라.
(2) 분포함수를 구하라.

Solution. 복원추출의 경우 하트가 그려진 카드를 뽑을 확률은 항상 $\dfrac{1}{4}$이다. 세 장의 카드를 꺼내면 X는 이항분포 $B\left(\dfrac{1}{4}, 3\right)$을 따른다.

(1) $B\left(\dfrac{1}{4}, 3\right)$의 확률질량함수는

$$f(x) = \begin{cases} \dbinom{3}{x} \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3-x} & x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다.

(2) $f(x)$를 통해 $F(x)$를 계산하면,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{27}{64} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{54}{64} & 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{63}{64} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

를 얻을 수 있다.

2.2 연속확률변수

2. 함수 $f(x) = \dfrac{k}{1+x^2}$이 모든 실수 범위에서 확률밀도함수가 되기 위한 상수 k를 구하고, 확률 $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le X \le 1\right)$을 구하라.

Solution. 모든 실수 범위에서 $f(x)$가 확률밀도함수가 되려면, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$이어야 한다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1+x^2}\,dx \\
&= k\left[\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right] \\
&= k\left[\lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big|_t^0 + \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big|_0^t\right] \\
&= k\pi
\end{aligned}$$

$k\pi = 1$이므로, $k = \dfrac{1}{\pi}$이다.

또한 이 때 $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le X \le 1\right)$는

$$\begin{aligned}
&P\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \le X \le 1\right) \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

이 된다.

5. 다음 확률밀도함수에 대한 분포함수 $F(x)$를 구하고, 확률 $P(3 \le X \le 7)$을 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

Solution. 분포함수 $F(x)$는 밀도함수 f를 적분해 얻을 수 있다. 따라서

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{x}{10} & 0 \le x \le 10 \\ 1 & 10 \le x \end{cases}$$

이다. 또한 $P(3 \le X \le 7)$은 $\int_3^7 f(x)\,dx = \dfrac{2}{5}$이다.

8. 생명보험에 가입한 어떤 가입자는 의사로부터 평균 100일 정도 살 수 있다는 통보를 받았다. 그리고 이 환자가 사망할 때까지 걸리는 시간 X는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는다고 한다.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) 이 환자가 150일 이내에 사망할 확률을 구하라.
(2) 이 환자가 200일 이상 생존할 확률을 구하라.

Solution. 이 함수의 누적분포함수 $F(x)$는 다음과 같다.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \end{cases}$$

(1) 150일 이내에 사망할 확률: $P(X < 150) = F(150) = 1 - e^{-1.5} \approx 0.7769$
(2) 200일 이상 생존할 확률: $P(X \ge 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - F(200) = e^{-2} \approx 0.1353$

12. 전기회로의 가변저항 X는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는다고 한다.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2\left(1 - x^2\right) & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) 상수 k를 구하라.
(2) 분포함수 $F(x)$를 구하라.
(3) 이 전기저항이 1.05와 1.65 사이일 확률을 구하라.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\\ =&\int_{1}^{2} kx^2\left(1-x^2\right)dx\\ =&k\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_1^2\\ =&-\frac{15}{58}k=1\end{aligned}$$

$-\frac{15}{58}k=1$이므로 $k=-\frac{58}{15}$이다.

(2) (1)의 적분 과정을 이용하면

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{3}{58}x^5-\frac{5}{58}x^3+\frac{1}{29} & 1\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

이다.

(3) $P(1.05\le X\le 1.65)=F(1.05)-F(1.65)\approx 0.2791$

14. 확률변수 X의 분포함수가 다음과 같을 때, 다음 확률을 구하라.

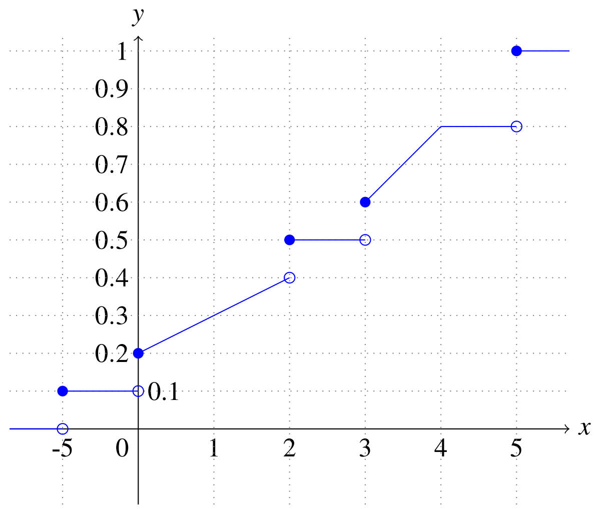
(1) $P(X=0)$

(2) $P(0<X\le 3)$

(3) $P(0<X<3)$

(4) $P(4<x\le 5)$

(5) $P(X\ge 1)$



Solution.

(1) 0.1

(2) 0.4

(3) 0.3

(4) 0.2

(5) 0.7

15. 다음 분포함수를 갖는 확률변수 X에 대하여 밀도함수 $f(x)$와 확률 $P(X=1)$, $P(X<1.5)$을 구하라.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \dfrac{x^2-2x+2}{2} & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

Solution. $\lim_{t\to 1^-} F(t)=0$, $F(1)=\dfrac{1}{2}$이고, $\lim_{t\to 2^-} F(t)=1$, $F(2)=1$임을 통해 F는 $x=1$에서 불연속임을 알 수 있다. 따라서 $f(1)=F(1)-\lim_{t\to 1^-} F(t)=\dfrac{1}{2}$이고, 나머지 구간에서는 F를 미분해 f의 값을 구할 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ x - 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

그러므로 $P(X = 1) = f(1) = 0.5$, $P(X < 1.5) = f(1) + \int_{1}^{1.5} f(x)\,dx = 0.625$이다.

2.3 기댓값

3. 10원짜리 동전 5개와 100원짜리 동전 3개가 들어 있는 주머니에서 동전 3개를 임의로 꺼낸다고 하자. 이 때 임의로 추출된 동전 3개에 포함된 100원짜리 동전의 개수에 대한 기댓값을 구하라.

Solution. 꺼낸 100원짜리 동전의 갯수를 확률변수 X라 하자.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{3}{0} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{10}{56} \\ P(X=1) &= \binom{3}{1} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{30}{56} \\ P(X=2) &= \binom{3}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{15}{56} \\ P(X=3) &= \binom{3}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56} \end{aligned}$$

이 때 $E(X) = \sum_{x=0}^{3} xP(X=x)$이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{3} xP(X=x) \\ &= \frac{0 \times 10 + 1 \times 30 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{56} \\ &= \frac{9}{8} = 1.125 \end{aligned}$$

4. 1~6의 숫자가 적힌 카드가 들어 있는 주머니에서 두 카드를 임의로 비복원추출할 때, 나온 카드의 수에 대한 차의 절댓값의 기댓값을 구하라.

Solution. 나온 카드에 적힌 수에 대한 차의 절댓값을 확률변수 X라 하자. 세로줄을 첫 번째 뽑은 카드에 적힌 수, 가로줄을 두 번째 뽑은 카드에 적힌 수라고 할 때 가능한 모든 사건은 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6
1	-	1	2	3	4	5
2	1	-	1	2	3	4
3	2	1	-	1	2	3
4	3	2	1	-	1	2
5	4	3	2	1	-	1
6	5	4	3	2	1	-

따라서 다음과 같은 확률질량함수를 얻을 수 있다.

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

그러므로 기댓값 $E(X)=\sum_{x=1}^{5} xP(X=x)$는

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{5} xP(X=x) \\ &= \frac{1\times 10+2\times 8+3\times 6+4\times 4+5\times 2}{30} \\ &= \frac{7}{3} \approx 2.333 \end{aligned}$$

이다.

9. 이산확률변수 X의 확률표가 다음과 같다.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(1) X의 평균을 구하라.
(2) 분산의 정의 $Var(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]$을 이용하여 분산을 구하라.
(3) 분산의 간편계산방법 $Var(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)^2\right]$을 이용하여 분산을 구하라.

Solution.

(1) $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$

(2) $Var(X) = E\left[\left(X - \frac{4}{3}\right)^2\right]$

$X - E(X)$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
$(X - E(X))^2$	$\frac{16}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{25}{9}$
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore Var(X) = \frac{16}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{25}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{9}$

(3)

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - \left[E(X)^2\right] \\
&= \sum_{x=0}^{3} x^2 f(x) - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\
&= \left[0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6}\right] - \frac{16}{9} \\
&= \frac{11}{9}
\end{aligned}$$

18. 확률변수 X의 분포함수가 $F(x) = \frac{x^2}{16}, \quad 0 \leq x \leq 4$이다.

(1) 기댓값 $E(X)$와 분산 σ^2를 구하라.
(2) 중앙값과 최빈값을 구하라.

Solution. 확률밀도함수 $f(x) = \frac{x}{8}, \quad 0 \leq x \leq 4$이다.

(1)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^4 x f(x)\, dx \\
&= \int_0^4 \frac{x^2}{8}\, dx \\
&= \left.\frac{x^3}{24}\right|_0^4 = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_0^4 x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^4 \frac{x^3}{8}\,dx \\ &= \left.\frac{x^4}{32}\right|_0^4 = 8 \end{aligned}$$

따라서 $\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[(E(X))^2\right] = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$

(2) 중앙값은 $F(M_e) = \frac{1}{2}$일 때이므로,

$$\frac{M_e^2}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_e = 2\sqrt{2}$$

이다.

최빈값은 f가 최대일 때이므로, $M_o = 4$이다.

24. 연속확률변수 X의 분포함수가 다음과 같을 때, X의 기댓값과 분산을 구하라.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

Solution. F의 각 구간을 미분해 밀도함수 f를 얻을 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

기댓값 $E(X)$는

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{2}\,dx \\
&= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{13}{48}
\end{aligned}
$$

분산 $Var(X)$는

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left(X^2\right) - \left[(E(X))^2\right] \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{13}{48}\right)^2 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^3\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{2}\,dx - \left(\frac{13}{48}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}x^4\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{6}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \left(\frac{13}{48}\right)^2 \\
&= \frac{17}{96} - \left(\frac{13}{48}\right)^2 = \frac{239}{2304}
\end{aligned}
$$

25. 장거리 전화통화 시간 X는 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는다고 한다.

$$
f(x) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \qquad x \geq 0
$$

(1) X의 기댓값과 분산을 구하라.

(2) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$와 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$를 구하라.

Solution.

(1) 기댓값 μ는

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^\infty xf(x)\,dx \\ &= \frac{1}{10}\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-\frac{x}{10}}\,dx \\ &= -\frac{1}{10}\lim_{t\to\infty}\left[(10x+100)\,e^{-\frac{x}{10}}\right]_0^t \\ &= -\frac{1}{10}\lim_{t\to\infty}\left[(10t+100)\,e^{-\frac{t}{10}}-(100)\,e^0\right] \\ &= -\frac{1}{10}(-100)=10\end{aligned}$$

분산 σ^2는

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_0^\infty x^2f(x)\,dx-\mu^2 \\ &= \frac{1}{10}\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2e^{-\frac{x}{10}}\,dx-100 \\ &= -\frac{1}{10}\lim_{t\to\infty}\left[\left(10x^2+200x+2000\right)e^{-\frac{x}{10}}\right]_0^t-100 \\ &= -\frac{1}{10}\lim_{t\to\infty}\left[\left(10t^2+200t+2000\right)e^{-\frac{t}{10}}-(2000)\,e^0\right]-100 \\ &= -\frac{1}{10}(-2000)-100=100\end{aligned}$$

표준편차 σ는 $\sqrt{100}=10$이다.

(2)

$$\begin{aligned}&P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma) \\ &=P(0\le X\le 20) \\ &=\int_0^{20}f(x)\,dx \\ &=\frac{1}{10}\int_0^{20}e^{-\frac{x}{10}}\,dx \\ &=1-e^{-2}\approx 0.8647\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma) \\ &=P(-10\le X\le 30) \\ &=\int_0^{30}f(x)\,dx \\ &=\frac{1}{10}\int_0^{30}e^{-\frac{x}{10}}\,dx \\ &=1-e^{-3}\approx 0.9502\end{aligned}$$

26. 패스트푸드점에서 음식이 나오는 시간은 평균 63초, 표준편차 6.5초 걸린다고 한다. 체비쇼프 (Chebyshev) 부등식을 이용하여 음식이 나올 확률이 75%와 89% 이상일 시구간을 구하여라.

Solution. 체비쇼프 부등식에서, 어떤 확률변수 X가 $\mu \pm 2\sigma$에 놓일 확률은 75%, $\mu \pm 3\sigma$에 놓일 확률은 89%이다. 따라서 음식이 나올 확률이 75%인 시구간은 $[50, 76]$초, 89%인 시구간은 $[43.5, 82.5]$초이다.

3 결합확률분포

3.1 결합확률분포

4. 53장의 카드가 들어 있는 주머니에서 비복원추출에 의하여 카드 두 장을 꺼낸다고 하자. 하트의 개수를 X, 스페이드의 개수를 Y라 한다.

(1) X와 Y의 결합질량함수를 구하라.
(2) X와 Y의 주변질량함수를 구하라.
(3) X의 평균과 분산을 구하라.

Solution. (1), (2):

X / Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{26}{52}\times\frac{25}{51}$	$2\times\frac{13}{52}\times\frac{26}{51}$	$\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}$	$\frac{1482}{2652}$
1	$\frac{26}{52}\times\frac{13}{51}$	$2\times\frac{13}{52}\times\frac{13}{51}$	0	$\frac{1014}{2652}$
2	$\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}$	0	0	$\frac{156}{2652}$
$f_Y(y)$	$\frac{1482}{2652}$	$\frac{1014}{2652}$	$\frac{156}{2652}$	1

(3) $E(X)=0.5, E\left(X^2\right)\approx 0.6176, Var(X)\approx 0.3676$

5. 문제 **4**에서 복원추출을 할 경우, (1)~(3)을 구하라.

Solution. (1), (2):

X / Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\frac{25}{102}$	$\frac{26}{102}$	$\frac{6}{102}$	$\frac{57}{102}$
1	$\frac{26}{102}$	$\frac{13}{102}$	0	$\frac{39}{102}$
2	$\frac{6}{102}$	0	0	$\frac{6}{102}$
$f_Y(y)$	$\frac{57}{102}$	$\frac{39}{102}$	$\frac{6}{102}$	1

(3) $E(X)=0.5, E\left(X^2\right)\approx 0.6176, Var(X)\approx 0.3676$

7. X와 Y의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \frac{x+y}{110} \quad x = 1,2,3,4, y = 1,2,3,4,5$$

(1) X와 Y의 주변질량함수를 구하라.
(2) $E(X), E(Y)$를 구하라.
(3) $P(X < Y)$
(4) $P(Y = 2X)$
(5) $P(X + Y = 5)$
(6) $P(3 \le X + Y \le 5)$

Solution.

(1) $f_X(x) = \sum_{y=1}^{5} \frac{x+y}{110} = \frac{x+3}{22}$

$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{4} \frac{x+y}{110} = \frac{2y+5}{55}$

(2) $E(X) = \sum_{x=1}^{4} \sum_{y=1}^{5} x \cdot \frac{x+y}{110} = \frac{30}{11}$

$E(Y) = \sum_{x=1}^{4} \sum_{y=1}^{5} y \cdot \frac{x+y}{110} = \frac{37}{11}$

(3) $P(X < Y) = \sum_{y=2}^{5} \sum_{x=1}^{y-1} \frac{x+y}{110} = \frac{6}{11}$

(4) $P(Y = 2X) = f(1,2) + f(2,4) = \frac{9}{110}$

(5) $P(X + Y = 5) = f(1,4) + f(2,3) + f(3,2) + f(4,1) = \frac{2}{11}$

(6) $P(3 \le X + Y \le 5) = f(1,2) + f(2,1) + f(1,3) + f(2,2) + f(3,1) + f(1,4) + f(2,3) + f(3,2) + f(4,1) = \frac{3}{11}$

11. 연속확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 다음과 같을 때, X와 Y의 주변밀도함수를 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

Solution. X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f(x,y)\,dy \\
&= \int_0^\infty e^{-(x+y)}\,dy \\
&= e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}\,dy \\
&= e^{-x}\lim_{t\to\infty} -e^{-y}\Big|_0^t \\
&= e^{-x}\lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t}+e^0\right) \\
&= e^{-x} \qquad 0<x<\infty
\end{aligned}$$

Y의 주변밀도함수 f_Y는 같은 방법으로 $0<y<\infty$에서 $f_Y(y)=e^{-y}$이다.

13. 연속확률변수 X와 Y의 결합분포함수가 $F(x,y)=\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right), 0<x<\infty, 0<y<\infty$이다.

(1) X와 Y의 결합밀도함수를 구하라.
(2) X와 Y의 주변분포함수와 주변밀도함수를 구하라.
(3) 확률 $P(1\le X\le 2, 0\le Y\le 1)$을 구하라.

Solution.

(1) X와 Y의 결합밀도함수 $f(x,y)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F(x,y) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right) \\
&= \left(2e^{-2x}\right)\left(3e^{-3y}\right) \\
&= 6e^{-2x-3y} \qquad 0<x<\infty, 0<y<\infty
\end{aligned}$$

(2) X의 주변분포함수 $F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)=1-e^{-2x} \qquad 0<x<\infty$
X의 주변밀도함수 $f_X(x)=\dfrac{d}{dx}F_X(x)=2e^{-2x} \qquad 0<x<\infty$

(3)

$$\begin{aligned}
&P(1\le X\le 2, 0\le Y\le 1) \\
&= F(2,1)-F(2,0)-F(1,1)+F(1,0) \\
&= \left(1-e^{-4}\right)\left(1-e^{-3}\right)-\left(1-e^{-4}\right)\left(1-e^{0}\right)-\left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{-3}\right)+\left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{0}\right) \\
&= \left(1-e^{-4}\right)\left(1-e^{-3}\right)-\left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{-3}\right) \\
&= e^{-7}-e^{-5}-e^{-4}+e^{-2}\approx 0.1112
\end{aligned}$$

15. 연속확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 $f(x,y) = \dfrac{3}{16}, x^2 \le y \le 4, 0 \le x \le 2$이다.

(1) X와 Y의 주변밀도함수를 구하라.
(2) $P\left(1 \le X \le \sqrt{2}, 1 \le Y \le 2\right)$
(3) $P(2X > Y)$

Solution.

(1) X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{x^2}^{4} \frac{3}{16}\,dy \\ &= \frac{3}{16}\left(4 - x^2\right) \qquad 0 \le x \le 2 \end{aligned}$$

Y의 주변밀도함수 f_Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)\,dx \\ &= \int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{3}{16}\,dx \\ &= \frac{3}{16}(2 - \sqrt{y}) \qquad 0 \le y \le 4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &P\left(1 \le X \le \sqrt{2}, 1 \le Y \le 2\right) \\ &= \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \frac{3}{16} \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} dy\,dx \\ &= \frac{3}{16} \int_{1}^{\sqrt{2}} 2 - x^2\,dx \\ &= \frac{3}{16} \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 5}{16} \end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&P(2X > Y) \\
&= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{16} \int_0^2 2x - x^2\,dx \\
&= \frac{3}{16} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

21. 두 확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 다음과 같다.

$$
f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 < y < 1-x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}
$$

(1) X와 Y의 주변밀도함수를 구하라.

(2) $P(X > Y)$를 구하라.

Solution. $0 < y < 1-x \Rightarrow 0 < x < 1-y$

(1) X의 주변밀도함수 f_X:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \\
&= \int_0^{1-x} 24xy\,dy \\
&= 12xy^2\Big|_0^{1-x} \\
&= 12x(1-x)^2 \qquad 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

같은 방법으로 $0 < y < 1$에서 Y의 주변밀도함수 $f_Y(y) = 12y(1-y)^2$이다.

(2)

$$
\begin{aligned}
&P(X>Y) \\
&= \int_0^1 \int_0^{\min(x,1-x)} f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx \\
&= 24\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^x xy\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-x} xy\,dy\,dx\right] \\
&= 24\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x \int_0^x y\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \int_0^{1-x} y\,dy\,dx\right] \\
&= 24\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{x^2}{2}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x\cdot\frac{(1-x)^2}{2}\,dx\right] \\
&= 24\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{x^2}{2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\cdot\frac{x^2}{2}\,dx\right] \\
&= 24\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx \\
&= 4\,x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

26. 두 확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 $f(x,y) = 3e^{-x-3y}$, $x>0$, $y>0$이다.

(1) 결합분포함수 $F(x,y)$를 구하라.

(2) X와 Y의 주변밀도함수를 구하라.

(3) $P(x<y)$를 구하라.

Solution.

(1) 결합분포함수 $F(x,y)$:

$$\begin{aligned}
&F(x,y)\\
&= \int_0^x \int_0^y f(u,v)\,dv\,du\\
&= 3\int_0^x \int_0^y e^{-u-3v}\,dv\,du\\
&= 3\int_0^x e^{-u} \int_0^y e^{-3v}\,dv\,du\\
&= -\left(e^{-3y}-1\right)\int_0^x e^{-u}\,du\\
&= \left(e^{-x}-1\right)\left(e^{-3y}-1\right) \qquad x>0, y>0
\end{aligned}$$

(2) X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty f(x,y)\,dy\\
&= \int_0^\infty 3e^{-x-3y}\,dy\\
&= 3e^{-x}\int_0^\infty e^{-3y}\,dy\\
&= 3e^{-x}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-3y}\,dy\\
&= -e^{-x}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-3t}-e^0\right)\\
&= e^{-x} \qquad 0<x<\infty
\end{aligned}$$

Y의 주변밀도함수 f_Y:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^\infty f(x,y)\,dx\\
&= \int_0^\infty 3e^{-x-3y}\,dx\\
&= 3e^{-3y}\int_0^\infty e^{-x}\,dx\\
&= 3e^{-3y}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx\\
&= -3e^{-3y}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}-e^0\right)\\
&= 3e^{-3y} \qquad 0<y<\infty
\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&P(x<y)\\
&=\int_0^\infty \int_x^\infty f(x,y)\,dy\,dx\\
&=\int_0^\infty \int_x^\infty 3e^{-x-3y}\,dy\,dx\\
&=\int_0^\infty 3e^{-x}\int_x^\infty e^{-3y}\,dy\,dx\\
&=\int_0^\infty 3e^{-x}\left(\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx\\
&=\int_0^\infty e^{-4x}\,dx\\
&=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

31. 보험회사는 대단히 많은 운전자를 가입자로 가지고 있다. 자동차 충돌에 의한 보험회사의 손실을 확률변수 X라 하고, 책임보험에 의한 손실을 Y라고 하자. 두 확률변수의 결합밀도함수가 다음과 같을 때, 두 손실의 총액이 적어도 1 이상일 확률을 구하라.

$$
f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x+2-y}{4} & 0<x<1, 0<y<2\\ 0 & \text{다른 곳에서}\end{cases}
$$

Solution. 구하고자 하는 값은 $P(X+Y\geq 1)$이다. $P(X+Y\geq 1)=1-P(X+Y<1)$이므로, 구하고자 하는 확률은 $P(X+Y<1)$을 구해 해결할 수 있다. $x+y<1$이면 $y<1-x$이다.

$$
\begin{aligned}
&P(X+Y<1)\\
&=\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx\\
&=\int_0^1\int_0^{1-x} \frac{2x+2-y}{4}\,dy\,dx\\
&=\int_0^1 \left[\frac{4xy+4y-y^2}{8}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx\\
&=\int_0^1 \frac{-5x^2+2x+3}{8}\,dx\\
&=\frac{1}{8}\left[-\frac{5}{3}x^3+x^2+3x\right]_0^1\\
&=\frac{7}{24}
\end{aligned}
$$

따라서 $P(X+Y \geq 1) = 1 - P(X+Y < 1) = \frac{17}{24}$이다.

3.2 조건부 확률분포

4. 연속확률변수 X와 Y의 결합분포함수가 다음과 같다.

$$F(x,y) = \left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right) \qquad 0 < x < \infty, 0 < y < \infty$$

(1) X와 Y의 주변분포함수를 구하라.
(2) X와 Y의 독립성을 조사하라.
(3) 확률 $P(1 < X \le 2, 0 < Y \le 1)$을 구하라.

Solution.

(1) X의 주변분포함수 F_X:

$$\begin{aligned}
&F_X(x)\\
&= \lim_{y\to\infty} F(x,y)\\
&= \lim_{y\to\infty} \left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right)\\
&= 1-e^{-2x} \qquad 0 < x < \infty
\end{aligned}$$

같은 방법으로 $0 < y < \infty$에서 $F_Y(y) = 1-e^{-3y}$이다.
(2) $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$이므로 X와 Y는 독립이다.
(3) X와 Y가 독립이므로

$$\begin{aligned}
&P(1 < X \le 2, 0 < Y \le 1)\\
&= P(1 < X \le 2)P(0 < Y \le 1)\\
&= [F_X(2) - F_X(1)][F_Y(1) - F_Y(0)]\\
&= \left[\left(1-e^{-4}\right) - \left(1-e^{-2}\right)\right]\left[\left(1-e^{-3}\right) - \left(1-e^{0}\right)\right]\\
&= \left(e^{-2}-e^{-4}\right)\left(1-e^{-3}\right) \approx 0.1112
\end{aligned}$$

5. 연속확률변수 X와 Y가 다음의 결합밀도함수를 갖는다.

$$f(x,y) = \begin{cases} 15y & x^2 \le y \le x \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) X의 주변밀도함수 $f_X(x)$를 구하라.
(2) $X = 0.5$일 때, Y의 조건부 밀도함수를 구하라.
(3) (2)의 조건 아래서 $0.3 \le Y \le 0.4$일 조건부 확률을 구하여라.

Solution. $x^2 \le y \le x \Rightarrow y \le x \le \sqrt{y}$

(1) X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned} & f_X(x) \\ &= \int_{x^2}^{x} 15y\,dy \\ &= \frac{15}{2} y^2\Big|_{x^2}^{x} \\ &= \frac{15}{2}\left(x^2 - x^4\right) \qquad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & f(y|x=0.5) \\ &= \frac{f(0.5,y)}{f_X(0.5)} \\ &= \frac{32}{3}y \qquad \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & P(0.3 \le Y \le 0.4|X=0.5) \\ &= \int_{0.3}^{0.4} f(y|x=0.5)\,dy \\ &= \int_{0.3}^{0.4} \frac{32}{3} y\,dy \\ &= \frac{16}{3}y^2\Big|_{0.3}^{0.4} \approx 0.3733 \end{aligned}$$

9. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) X와 Y의 주변확률밀도함수를 구하라.
(2) X와 Y는 독립인지 보여라.
(3) 사건 $\{X < 1\}$과 $\left\{Y \ge \frac{1}{2}\right\}$은 독립인지 보여라.

Solution.

(1) X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned} & f_X(x) \\ & = \int_0^1 \frac{3}{2} y^2 dy \\ & = \left. \frac{1}{2} y^3 \right|_0^1 \\ & = \frac{1}{2} \qquad 0 \le x \le 2 \end{aligned}$$

Y의 주변밀도함수 f_Y:

$$\begin{aligned} & f_Y(y) \\ & = \int_0^2 \frac{3}{2} y^2 dx \\ & = 3y^2 \qquad 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$

(2) $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$이므로 독립이다.

(3) $P(X < 1) = \int_0^1 f_X(x)\, dx = \frac{1}{2}$,

$P\left(Y \ge \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f_Y(y)\, dy = \frac{7}{8}$,

$P\left(X < 1, Y \ge \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x,y)\, dy\, dx = \frac{7}{16}$에서

$P\left(X < 1, Y \ge \frac{1}{2}\right) = P(X < 1) P\left(Y \ge \frac{1}{2}\right)$임을 얻을 수 있다. 따라서 두 사건은 독립이다.

11. 두 확률변수 X와 Y가 결합밀도함수

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 < y < 1 - x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

을 갖는다고 하자. 이 때 $P\left(Y < X \middle| X = \frac{1}{3}\right)$을 구하라.

Solution. $0 < x < 1$에서 $f_X(x) = \int_0^{1-x} 24xy\,dy = 12x(1-x)^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
&P\left(Y < X \middle| X = \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{P\left(Y < X, X = \frac{1}{3}\right)}{P\left(X = \frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{9}{16}\int_0^{\frac{1}{3}} 8y\,dy \\
&= \frac{9}{16}\, 4y^2\Big|_0^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

15. X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} k\left(x^2 - 2\right)y & 1 \le x \le 4, 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) 상수 k를 구하라.
(2) X와 Y의 주변확률밀도함수를 구하라.
(3) X와 Y는 독립인지 보여라.
(4) $Y = 3$일 때, X의 조건부 확률밀도함수를 구하라.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned}
&\int_1^4 \int_0^4 f(x,y)\,dy\,dx \\
&= k\int_1^4 \int_0^4 \left(x^2 - 2\right) y\,dy\,dx \\
&= k\int_1^4 \left(x^2 - 2\right) \times \frac{1}{2}y^2\Big|_0^4 dx \\
&= 8k\int_1^4 x^2 - 2\,dx \\
&= 8k\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x\right]_1^4 \\
&= 15 \times 8k = 1 \\
\therefore k &= \frac{1}{120}
\end{aligned}$$

(2) X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned}
& f_X(x) \\
&= \int_0^4 f(x,y)\,dy \\
&= \int_0^4 \frac{1}{120}\left(x^2-2\right) y\,dy \\
&= \frac{1}{15}\left(x^2-2\right) \qquad 1 \le x \le 4
\end{aligned}$$

Y의 주변밀도함수 f_Y:

$$\begin{aligned}
& f_Y(y) \\
&= \int_1^4 f(x,y)\,dx \\
&= \int_1^4 \frac{1}{120}\left(x^2-2\right) y\,dx \\
&= \frac{1}{8} y \qquad 0 \le y \le 4
\end{aligned}$$

(3) $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$이므로 X와 Y는 독립이다.

(4)

$$\begin{aligned}
& f(x|y=3) \\
&= \frac{f(x,3)}{f_Y(3)} \\
&= \frac{\frac{1}{40}\left(x^2-2\right)}{\frac{3}{8}} \\
&= \frac{1}{40}\left(x^2-2\right) \times \frac{8}{3} \\
&= \frac{1}{15}\left(x^2-2\right) \qquad 1 \le x \le 4
\end{aligned}$$

16. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{x+y} & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) 상수 k를 구하라.
(2) X와 Y의 주변밀도함수를 구하라.
(3) X와 Y는 i.i.d. 확률변수인지 보여라.
(4) $P(0.2 \le X \le 0.8, 0.2 \le Y \le 0.8)$을 구하라.
(5) $Y = \frac{1}{2}$일 때, X의 조건부 밀도함수를 구하라.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 ke^{x+y}\,dy\,dx \\
&= k\int_0^1 e^x\,dx \int_0^1 e^y\,dy \\
&= k(e-1)^2 = 1 \\
\therefore\ & k = (e-1)^{-2}
\end{aligned}$$

(2) X의 주변밀도함수 f_X:

$$\begin{aligned}
&f_X(x) \\
&= \int_0^1 f(x,y)\,dy \\
&= (e-1)^{-2} e^x \int_0^1 e^y\,dy \\
&= \frac{e^x}{e-1} \qquad 0 < x < 1
\end{aligned}$$

같은 방법으로 $0 < y < 1$에서 Y의 주변밀도함수 $f_Y(y) = \dfrac{e^y}{e-1}$이다.

(3) 우선 $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$이므로 X와 Y는 독립이고, $f_X(x) = f_Y(x)$이므로 항등분포를 이룬다. 따라서 X와 Y는 i.i.d. 확률변수이다.

(4) (3)에서 보인 것과 같이 X와 Y는 i.i.d. 확률변수이므로

$$\begin{aligned}
&P(0.2 \le X \le 0.8, 0.2 \le Y \le 0.8) \\
&= [P(0.2 \le X \le 0.8)]^2 \\
&= \left[\int_{0.2}^{0.8} f_X(x)\,dx\right]^2 \\
&= \left[\int_{0.2}^{0.8} \frac{e^x}{e-1}\,dx\right]^2 \\
&= \left(\frac{e^{0.8} - e^{0.2}}{e-1}\right)^2 \approx 0.3415
\end{aligned}$$

(5) 역시 X와 Y는 i.i.d. 확률변수이므로 $f\left(x \middle| y = \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^x}{e-1}$이다.

3.3 결합분포에 대한 기댓값

2. 확률변수 X와 Y가 다음 결합확률질량함수를 갖는다고 한다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x,y) = (0,1),(1,0),(2,1) \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) X와 Y의 독립성을 조사하라.
(2) X와 Y의 공분산을 구하라.

Solution.

(1) X의 주변확률함수는

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0,1,2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Y의 주변확률함수는

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y = 0 \\ \frac{2}{3} & y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

인데, $f(0,0) \neq f_X(0)\, f_Y(0)$이므로 X와 Y는 독립이 아니다.

(2) $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$이고 $E(Y) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$이다. 또한 $E(XY) = 0 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이다. X와 Y의 공분산 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$으로 주어지므로, 공분산은 0이다.

4. 연속확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \frac{3}{16} \qquad x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2$$

(1) X와 Y의 평균과 표준편차를 구하라.
(2) X와 Y의 공분산을 구하라.
(3) X와 Y의 상관계수를 구하라.

Solution. $x^2 \le y \le 4 \Rightarrow x \le \sqrt{y}$

(1) X의 평균:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x f(x,y)\, dy\, dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 x\, dy\, dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 x\left(4-x^2\right) dx \\ &= \frac{3}{16} \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

X^2의 평균:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2 f(x,y)\, dy\, dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 x^2\, dy\, dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 x^2\left(4-x^2\right) dx \\ &= \frac{3}{16} \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Y의 평균:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 y f(x,y)\, dy\, dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 \int_{x^2}^4 y\, dy\, dx \\ &= \frac{3}{16} \int_0^2 8 - \frac{1}{2}x^4\, dx \\ &= \frac{3}{16} \left[8x - \frac{1}{10}x^5\right]_0^2 \\ &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Y^2의 평균:

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 y^2 f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{16}\int_0^2 \int_{x^2}^4 y^2\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{16}\int_0^2 64 - x^6\,dx \\
&= \frac{1}{16}\left[64x - \frac{1}{7}x^7\right]_0^2 \\
&= \frac{48}{7}
\end{aligned}$$

따라서 X와 Y의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

	X	Y
μ	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$
σ^2	$\frac{19}{80}$	$\frac{192}{175}$
σ	$\frac{\sqrt{95}}{20}$	$\frac{8\sqrt{21}}{35}$

(2) XY의 평균:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^2 \int_{x^2}^4 xy f(x,y)\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{16}\int_0^2 \int_{x^2}^4 xy\,dy\,dx \\
&= \frac{3}{16}\int_0^2 x\left(8 - \frac{1}{2}x^4\right)dx \\
&= \frac{3}{16}\left[4x^2 - \frac{1}{12}x^6\right]_0^2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{5}$이다.

(3) $\mathrm{Corr}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{\sqrt{1995}}{114} \approx 0.3918$

5. $E(X) = 3$, $E(Y) = 2$, $E\left(X^2\right) = 13$, $E\left(Y^2\right) = 7$ 그리고 $E(XY) = 3$이다.

(1) 공분산 $\mathrm{Cov}(X,Y)$를 구하라.
(2) 공분산 $\mathrm{Cov}(X-Y, X+Y)$를 구하라.
(3) X와 Y의 상관계수를 구하라.

Solution.

(1) $\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -3$

(2)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}(X-Y, X+Y) \\
=&E((X-Y)(X+Y)) - E(X-Y)E(X+Y) \\
=&E\left(X^2 - Y^2\right) - [E(X) - E(Y)][E(X) + E(Y)] \\
=&E\left(X^2\right) - E\left(Y^2\right) - \left[(E(X))^2\right] + \left[(E(Y))^2\right] \\
=&13 - 7 - 9 + 4 = 1
\end{aligned}$$

(3) $\sigma_X^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 4$, $\sigma_Y^2 = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = 3$이므로 $\operatorname{Corr}(X,Y) = \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

7. 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) X와 Y의 공분산을 구하라.
(2) X와 Y의 상관계수를 구하고, 상관관계를 확인하라.
(3) 기댓값 $E(X-2Y)$와 분산 $Var(X-2Y)$를 구하라.

Solution. X의 평균:

$$\begin{aligned}
&E(X) \\
=&\int_0^1 \int_0^1 x f(x,y)\,dy\,dx \\
=&\int_0^1 \int_0^1 x(x+y)\,dy\,dx \\
=&\int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx \\
=&\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

X^2의 평균:

$$\begin{aligned}
&E\left(X^2\right) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2 f(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2 (x+y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 x\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

X의 분산은 $\frac{11}{144}$이다. 같은 방법으로 Y의 평균은 $\frac{7}{12}$, Y의 분산은 $\frac{11}{144}$이다.

(1) XY의 평균:

$$\begin{aligned}
&E(X) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 xyf(x,y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) dx \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

이므로, $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{144}$이다.

(2) $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = -\frac{1}{11}$이다. X와 Y는 음의 상관관계를 가진다.

(3) $E(X-2Y) = E(X) - 2E(Y) = -\frac{7}{12}$, $Var(X-2Y) = Var(X) + 4Var(Y) - 4\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{59}{144}$