

MAT2410 (응용수학I)

중간시험 솔루션

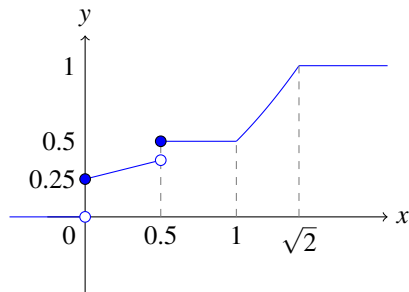
서강대학교 컴퓨터공학과 박수현 (20181634)

서강대학교 컴퓨터공학과

1. (12점) 확률변수(random variable) X 의 분포함수(CDF)가 다음과 같을 때, $P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right)$ 과 $f(x)$ 을 구하시오.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.25x + 0.25 & 0 \leq x < 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \leq x < 1 \\ 0.5x^2 & 1 \leq x < \sqrt{2} \\ 1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Solution. 위의 함수의 그래프는 다음과 같이 주어진다.



이 때

$$\begin{aligned} & P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right) \\ &= P(X < 1) - P\left(X < \frac{1}{2}\right) \\ &= F(1^-) - F\left(\frac{1}{2}^-\right) \\ &= 0.5 - 0.375 = 0.125 \end{aligned}$$

이다.

그래프에서, F 는 $x = 0, x = 0.5$ 에서 불연속임을 확인할 수 있다. 그러므로

$$\begin{aligned} f(0) &= F(0^+) - F(0^-) = 0.25 \\ f(0.5) &= F(0.5^+) - F(0.5^-) = 0.125 \end{aligned}$$

이고, 나머지 구간에서 f 는 F 를 x 에 대해 미분해 얻을 수 있다. 따라서

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.25 & 0 \leq x < 0.5 \\ 0.125 & x = 0.5 \\ 0 & 0.5 < x < 1 \\ x & 1 < x < \sqrt{2} \\ 0 & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

를 얻을 수 있다.

2. (6점) 명품을 취급하는 가게에는 60%가 진품인 것으로 알려져 있다. 이 가게의 진품 감별사는 진품을 모조품으로 감별할 확률이 0.05이고 모조품을 진품이라고 감별할 확률은 0.1이라고 한다. 이 감별사가 모조품이라고 감별한 제품이 실제로는 진품이었을 확률은 얼마인가?

Solution. 문제에서 주어진 사건들을 다음과 같이 정의하자.

사건 A = 명품이 진품인 사건

사건 B = 명품을 진품으로 감별한 사건

그러면 문제에서 등장한 명제들을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(A) = 0.6 \quad P(B^c|A) = 0.05 \quad P(B|A^c) = 0.1$$

우리가 구하고자 하는 값은 $P(A|B^c)$ 이다.

$$\begin{aligned}
& P(A|B^c) \\
&= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \\
&= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \times \frac{P(A)}{P(B^c)} \\
&= P(B^c|A) \times \frac{P(A)}{P(B^c)} \\
&= \frac{0.05 \times 0.6}{P(B^c)} \tag{1}
\end{aligned}$$

또한 $P(B^c|A) = 0.05$ 에서 $P(A \cap B^c) = 0.05P(A) = 0.03$ 을, $P(B|A^c) = 0.1$ 에서 $P(A^c \cap B) = 0.1P(A^c) = 0.1[1 - P(A)] = 0.04$ 를 얻을 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
\Rightarrow 0.6 &= P(A \cap B) + 0.03 \\
\Rightarrow P(A \cap B) &= 0.57 \tag{2}
\end{aligned}$$

이고, 또한

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\
\Rightarrow P(B) &= 0.57 + 0.04 \quad \because (2) \\
\Rightarrow P(B) &= 0.61 \tag{3}
\end{aligned}$$

이므로 (1)과 (3)에 의해

$$\begin{aligned}
P(A|B^c) &= \frac{0.05 \times 0.6}{P(B^c)} \\
&= \frac{0.05 \times 0.6}{1 - P(B)} \\
&= \frac{0.05 \times 0.6}{1 - 0.61} = \frac{0.03}{0.39} = \frac{1}{13}
\end{aligned}$$

이다.

3. (12점) 두 확률변수 X 와 Y 의 결합확률밀도함수(joint PDF)가 다음과 같을 때,

$$f(x, y) = 2x \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

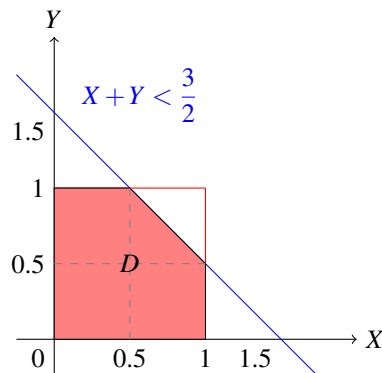
$P\left(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2}\right)$ 와 $P\left(X + Y < \frac{3}{2}\right)$ 을 각각 구하시오.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned} & P\left(X^2 + Y^2 < \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r f(x, y) dr d\theta \quad r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2rx dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 dr \\ &= 2 [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(2) $P\left(X + Y < \frac{3}{2}\right)$ 에 해당하는 영역을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서

$$\begin{aligned}
 & P\left(X+Y < \frac{3}{2}\right) \\
 &= \iint_D f(x,y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\min(1, \frac{3}{2}-x)} f(x,y) dy dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 2x dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{3}{2}-x} 2x dy dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 2x \left(\frac{3}{2}-x\right) dy dx \\
 &= x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\right) = \frac{19}{24}
 \end{aligned}$$

4. (15점) 도심의 순찰차는 호출이 있을 때마다 순찰을 하는데 그 순찰 횟수는 시간당 평균 5회인 포아송(Poisson) 분포를 따른다고 할 때

- (1) 2시간 동안 한 번의 호출도 없을 확률을 구하시오.
- (2) 순찰차가 호출을 3번 받을 때까지의 시간을 나타내는 확률변수를 T 라고 할 때, T 의 분포를 구하시오.
- (3) 호출이 없었던 상태로 3시간이 지난 상태에서 다음 호출까지의 총 시간이 8시간을 넘길 확률을 구하시오.

Solution.

- (1) 2시간 동안 일어나는 호출의 기댓값은 10회이다. 따라서 $\lambda = 10$ 인 포아송 분포 $\text{Poi}(10)$ 에 대해

$$f(0) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = e^{-10}$$

이다.

- (2) $T \sim \Gamma\left(3, \frac{1}{5}\right)$ 이다.
- (3) 포아송 분포는 무기억성을 가지므로 호출이 없었던 상태로 3시간이 지난 상태에서 다음 호출까지의 총 시간이 8시간을 넘길 확률은 5시간 동안 한 번의 호출도 없었을 확률과 같다. 따라서 이 때의 확률을 (1)과 같은 방법으로 계산하면 e^{-25} 이다.

5. (15점) 이산인 두 확률변수 X 와 Y 의 결합확률질량함수(joint PMF)가 다음과 같을 때,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{n(n+1)} \quad x = 1, 2, \dots, n \quad y = 1, 2, \dots, x$$

- (1) 두 확률변수 X 와 Y 의 표본공간(sample space)를 구하고 결합확률질량함수(joint PMF)임을 확인하시오.
- (2) 각각의 확률변수에 대한 주변확률질량함수(marginal PMF)를 구하고 이를 이용하여 X 와 Y 의 독립성 여부를 결정하시오.

Solution.

- (1) $x = 1, 2, \dots, n$ 이고 $y = 1, 2, \dots, x$ 이므로 표본공간 Ω 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Omega = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq x, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$$

f 가 확률질량함수라면 Ω 의 모든 원소 (x, y) 에 대해 $\sum_{(x,y) \in \Omega} f(x, y) = 1$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{(x,y) \in \Omega} f(x, y) \\ &= \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^x f(x, y) \\ &= \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^x \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \sum_{x=1}^n \frac{2x}{n(n+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = 1 \end{aligned}$$

따라서 f 는 확률질량함수이다.

(2)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{y=1}^x f(x, y) \\ &= \sum_{y=1}^x \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \frac{2x}{n(n+1)} \quad 1 \leq x \leq n, x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \sum_{x=y}^n f(x, y) \\
 &= \sum_{x=y}^n \frac{2}{n(n+1)} \\
 &= \frac{2(n-y+1)}{n(n+1)} \quad 1 \leq y \leq n, y \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

X 와 Y 가 독립일 경우 $f_{X,Y} = f_X f_Y$ 이어야 한다. 그러나 $f_{X,Y} \neq f_X f_Y$ 이므로 X 와 Y 는 독립이 아니다.

6. (10점) 두 확률변수 X 와 Y 의 결합확률밀도함수(joint PDF)가

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y} \quad x > 0, y > 0$$

일 때, 조건부 확률밀도함수(conditional PDF) $f(x|y)$ 을 구하고 이를 이용하여 $P(X > 1|Y = y)$ 를 구하시오.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \\
 &= \frac{f(x, y)}{\int_0^\infty f(x, y) dx} \\
 &= \frac{f(x, y)}{\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y} dx} = \frac{f(x, y)}{\frac{e^{-y}}{y} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx} \\
 &= \frac{f(x, y)}{\frac{e^{-y}}{y} \left[-ye^{-\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{x=\infty}} \\
 &= \frac{f(x, y)}{\frac{e^{-y}}{y} (0 + ye^0)} = \frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}-y}}{y}}{e^{-y}} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
P(X > 1 | Y = y) &= \int_1^{\infty} f(x|y) dx \\
&= \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y} dx = \frac{1}{y} \int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{y}} dx \\
&= -e^{-\frac{x}{y}} \Big|_{x=1}^{x=\infty} \\
&= 0 + e^{-\frac{1}{y}} = e^{-\frac{1}{y}}
\end{aligned}$$

7-1. (10점) 연속확률변수 X_1, X_2, \dots, X_n 에 대하여

(1) $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ 임을 증명하십시오.

(2) $\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$ 임을 증명하십시오.

Solution. X_1 의 PDF를 f_1 , X_2 의 PDF를 f_2 라고 하자.

(1)

$$\begin{aligned}
&E(X_1) + E(X_2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x [f_1(x) + f_2(x)] dx \\
&= E(X_1 + X_2) \quad \square
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \\
&= [E(X_1^2) - [E(X_1)]^2] + [E(X_2^2) - [E(X_2)]^2] + 2E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))] \\
&= [E(X_1^2) + E(X_2^2)] - [E(X_1)]^2 + [E(X_2)]^2 + 2E[X_1X_2 - X_1E(X_2) - X_2E(X_1) + E(X_1)E(X_2)] \\
&= [E(X_1^2) + E(X_2^2)] - [E(X_1)]^2 + [E(X_2)]^2 + 2[E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)] \\
&= [E(X_1^2) + 2E(X_1X_2) + E(X_2^2)] - [E(X_1)]^2 + 2E(X_1)E(X_2) + [E(X_2)]^2 \\
&= E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) - [E(X_1)]^2 + 2E(X_1)E(X_2) + [E(X_2)]^2 \\
&= E[(X_1 + X_2)^2] - [E(X_1) + E(X_2)]^2 \\
&= \text{Var}(X_1 + X_2) \quad \square
\end{aligned}$$

7-2. (25점) N 명의 사람들이 자신의 소지품을 향아리에 하나씩 담고 임의로 한 개를 뽑을 때 자신의 것을 선택하게 되는 사람의 수를 확률변수 X 라 하자.

- (1) i 번째 사람이 자신의 소지품을 선택하면 $X_i = 1$, 그렇지 않으면 $X_i = 0$ 이라 하면 확률변수 X_i 가 베르누이(Bernoulli) 분포를 갖는다고 할 수 있는지 설명하고, 확률변수 X 를 X_i 의 함수로 표시하십시오.
- (2) $E(X_i) = \frac{1}{N}$ 와 $\text{Var}(X_i) = \frac{N-1}{N^2}$ 임을 보이시오.
- (3) 자신의 소지품을 선택하게 될 기댓값 $E(X)$ 와 분산 $\text{Var}(X)$ 를 구하십시오.

Solution. $A_1 \cdots A_N$ 의 소지품이 있을 때, i 번째 사람이 각각 소지품 A_j 를 고르는 것을 i 번째 원소가 A_j 인 집합 P_k 라고 정의하면 P_k 는 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ 의 원소들의 순서를 섞은 순열이다. 그러면 각 순열이 나오는 경우가 균등분포를 따른다고 생각할 수 있을 것이다.

- (1) 문제에서 X_i 의 정의는 베르누이 분포의 정의와 같다. 따라서 X_i 는 베르누이 분포를 갖는다고 할 수 있다. 이 경우

$$X = \sum_{i=1}^N X_i$$

이다.

- (2) 각 순열이 나오는 경우는 균등분포를 따르므로, i 번째 사람이 A_i 번 소지품을 고를 확률은 $\frac{1}{N}$ 으로 일정하다. 따라서 기댓값은

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) + 1 \times \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

이다. 또한 분산은

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \left[0^2 \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) + 1^2 \times \frac{1}{N}\right] - \frac{1}{N^2} \\ &= \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} = \frac{N-1}{N^2} \end{aligned}$$

이다.

- (3) (1)에서 $X = \sum_{i=1}^N X_i$ 임을 보였다. 이를 이용해 기댓값을 구하면

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^N E(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} = 1 \end{aligned}$$

이다.

문제 7-1에서 증명한 내용을 귀납적으로 확장하면, 여러 확률변수의 합에 대해서 분산은 일반적으로

$$\text{Var}(X) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

이다.

X 의 분산을 구하기 위해 임의의 $1 \leq i < j \leq N$ 에 대한 공분산 $\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$ 을 먼저 구하자. X_i 와 X_j 는 모두 베르누이 분포를 따르므로 $E(X_i X_j)$ 는 i 번째 사람과 j 번째 사람이 모두 자신의 소지품을 선택하는 확률을 뜻한다. 각 순열이 나오는 경우가 균등분포를 따름을 이용한다면 i 번째 사람과 j 번째 사람이 모두 자신의 소지품을 선택하는 확률은 먼저 i 번째 사람이 N 개의 소지품 중 자신의 소지품 1개를 고르고, j 번째 사람이 남은 $N-1$ 개의 소지품 중 자신의 소지품 1개를 고르는 확률로 생각할 수 있으므로

$$E(X_i X_j) = \frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1}$$

이고, 이를 통해 공분산을 구하면 공분산은

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) \\ &= \frac{1}{N} \times \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \times \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N^2(N-1)} \end{aligned}$$

으로 일정하다. 따라서 X 의 분산은

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^N \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{N-1}{N^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} + 2 \binom{N}{2} \frac{1}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} + \frac{N(N-1)}{N^2(N-1)} \\ &= \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = 1 \end{aligned}$$

이다.