

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

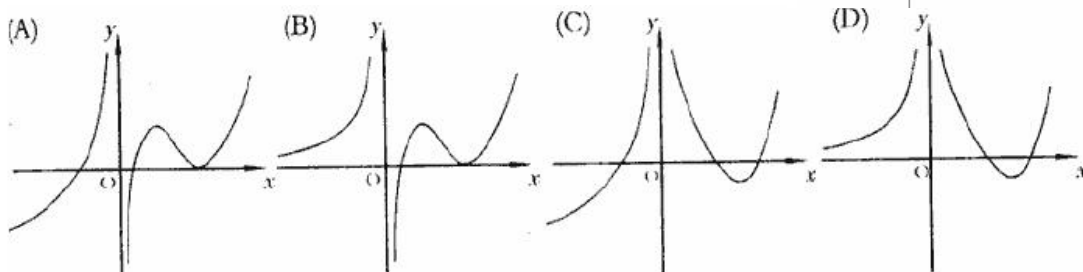
一、填空题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分, 把答案填在题中横线上)

- (1) 设 $y = e^x(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ (c_1, c_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 则该方程为 _____
- (2) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} =$ _____
- (3) 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x, y) dx =$ _____
- (4) 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = 0$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____
- (5) 设随机变量 X 的方差为 2, 则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} \leq$ _____

二、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形如右图所示,

则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为 ()



- (2) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$, 则 ()

(A) $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy$.

(B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $\{3, 1, 1\}$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{1, 0, 3\}$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{3, 0, 1\}$.

- (3) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为 ()

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh)$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh)$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在.

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 ()

(A) 合同且相似.

(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.

(D) 不合同且不相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数等于 ()

(A) -1

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

三、(本题满分 6 分)

求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微, 且 $f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) = f(x, f(x, x))$.

求 $\frac{d}{dx} \varphi^3(x) \Big|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$

与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x) \neq 0$, 试证:

(1) 对于 $(-1, 1)$ 内的任意 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x]$ 成立;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面满足方程

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \quad (\text{设长度单位为厘米, 时间单位为小时}), \text{ 已知体积减少的速率与侧面}$$

积成正比(比例系数 0.9), 问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时?

九、(本题满分 6 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系,

$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$, 其中 t_1, t_2 为实常数. 试问 t_1, t_2 满足什

么关系时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足

$$A^3x = 3Ax - 2A^2x$$

(1) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 2 阶矩阵 B , 使 $A = PBP^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|A + E|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 $P (0 < P < 1)$, 且途中下车与否相互独立, 以 Y 表示在中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 从该总体中抽取简单随机样本

$$X_1, X_2, \dots, X_{2n} (n \geq 2), \text{ 其样本均值为 } \bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i, \text{ 求统计量 } Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$$

的数学期望 $E(Y)$.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

【详解】因为二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解为 $y = e^{\alpha x}(c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x)$ 时, 则特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 对应的两个根为一对共轭复根: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, 所以根据题设 $y = e^x(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ (c_1, c_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 知: $\alpha = 1, \beta = 1$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 1 \pm i$, 从而对应的特征方程为: $(\lambda - (1+i))(\lambda - (1-i)) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, 于是所求二阶常系数线性齐次微分方程为 $y'' - 2y' + 2y = 0$.

(2) 【答案】 $\frac{2}{3}$.

【分析】若 $r(x, y, z)$ 具有连续的一阶偏导数, 梯度 $\text{grad}r$ 在直角坐标中的计算公式为:

$$\text{grad}r = \frac{\partial r}{\partial x}i + \frac{\partial r}{\partial y}j + \frac{\partial r}{\partial z}k$$

设 $A(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$, 其中 P, Q, R 具有一阶连续偏导数, 散度 $\text{div}A$ 在直角坐标中的计算公式为:

$$\text{div}A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

若 $r(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 则在直角坐标中有计算公式:

$$\text{div}(\text{grad}r) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

【详解】本题实际上是计算 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{r-x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{r-x}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$$

类似可得 $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2-y^2}{r^3}; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}, \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2-z^2}{r^3}$

根据定义有 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3} + \frac{r^2-y^2}{r^3} + \frac{r^2-z^2}{r^3}$

$$= \frac{3r^2-x^2-y^2-z^2}{r^3} = \frac{3r^2-r^2}{r^3} = \frac{2r^2}{r^3} = \frac{2}{r} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

于是 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{2}{3}$

(3) 【答案】 $\int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy$.

【详解】由题设二次积分的限，画出对应的积分区域，

如图阴影部分. 但在 $-1 \leq y \leq 0$ 内, $2 \geq 1-y$,

题设的二次积分并不是 $f(x,y)$ 在某区域上的二重积分,

因此, 应先将题设给的二次积分变形为:

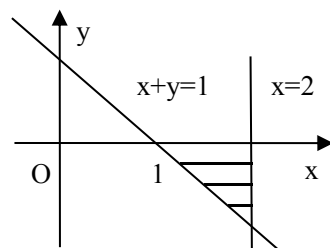
$$\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x,y) dx = - \int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x,y) dx,$$

其中 $D = \{(x,y) | -1 \leq y \leq 0, 1-y \leq x \leq 2\}$, 再由图所示, 又可将 D 改写为

$$D = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2, 1-x \leq y \leq 0\},$$

于是 $\int_{-1}^0 dy \int_2^{1-y} f(x,y) dx = - \int_{-1}^0 dy \int_{1-y}^2 f(x,y) dx = - \int_1^2 dx \int_{1-x}^0 f(x,y) dy$

$$= \int_1^2 dx \int_0^{1-x} f(x,y) dy.$$



(4) 【答案】 $\frac{1}{2}(A+2E)$.

【详解】要求 $(A-E)$ 的逆, 应努力把题中所给条件化成 $(A-E)B=E$ 的形式.

$$\text{由题设 } A^2 + A - 4E = 0 \Rightarrow A^2 + A - 2E = 2E \Rightarrow (A-E)(A+2E) = 2E$$

即 $(A-E) \cdot \frac{1}{2}(A+2E) = E,$

故 $(A-E)^{-1} = \frac{1}{2}(A+2E).$

(5) 【答案】 $1/2$

【分析】切比雪夫不等式: $P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

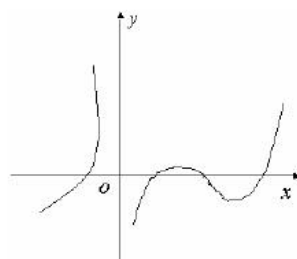
【详解】根据切比雪夫不等式有

$$P\{|X-E(X)| \geq 2\} \leq \frac{D(X)}{2^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

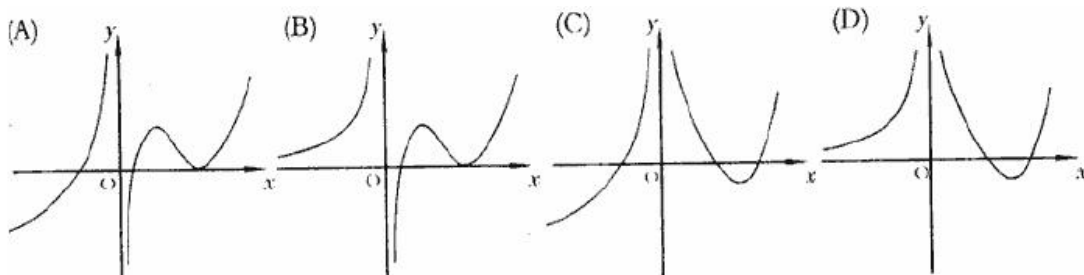
二、选择题

(1) 【答案】 (D)

【详解】从题设图形可见, 在 y 轴的左侧, 曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的, 因此当 $x < 0$ 时, 一定有 $f'(x) > 0$, 对应



$y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方, 由此可排除(A), (C);



又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分是单调增, 所以在这一段内一定有 $f'(x) > 0$, 对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方, 进一步可排除(B), 故正确答案为(D).

(2) 【答案】 (C)

【详解】题目仅设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义及 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$, 未设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微, 也没设 $z=f(x,y)$, 所以谈不上 dz , 因此可立即排除(A);

令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$, 则有 $F'_x=-f'_x, F'_y=-f'_y, F'_z=1$. 因此过点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\pm\{F'_x, F'_y, F'_z\} = \pm\{-f'_x, -f'_y, 1\} = \pm\{-3, -1, 1\}$, 可排除(B);

曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 可表示为参数形式: $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = f(x, 0) \end{cases}$, 点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为

$\pm\{1, 0, f'_x(0, 0)\} = \pm\{1, 0, 3\}$. 故正确选项为(C).

(3) 【答案】(B).

【详解】方法 1: 因为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1-e^h) \stackrel{1-e^h = x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\ln(1-x)}$$

$$\stackrel{\ln(1-x) \sim -x}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{-x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

可见, 若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 则极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1-e^h)$ 一定存在; 反过来也成立.

方法 2: 排除法: 举反例说明(A), (C), (D)说明不成立.

比如, $f(x) = |x|$, 在 $x=0$ 处不可导, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1-\cos h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1-\cos h|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}h\right)}{h^2}$$

$$\stackrel{\sin\left(\frac{1}{2}h\right) \sim \frac{1}{2}h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2} = \frac{1}{2}, \text{ 故排除(A)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h-\sin h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h-\sin h|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h-\sin h}{h^3} \right| \cdot |h|$$

$$\text{其中, } \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h-\sin h}{h^3} \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-\sin h}{h^3} \right| \stackrel{\text{洛}}{=} \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos h}{3h^2} \right| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}h\right)}{3h^2} \right| \stackrel{\text{等}}{=} \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{3h^2} \right| = \frac{1}{6}$$

根据有界量与无穷小的乘积为无穷小, 所以 $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h-\sin h}{h^3} \right| \cdot |h| = 0$. 故排除(C).

又如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不可导, 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$ 存在,

进一步可排除(D).

(4) 【答案】 (A)

【详解】 方法 1: 因为 A 是实对称矩阵, 必相似于对角阵 Λ .

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{2,3,4\text{行分} \\ \text{别加到1行}}} \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{1行提出公} \\ \text{因子 } (\lambda-4)}} (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{1行分别加} \\ \text{到2, 3, 4行}}} (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda-4) = 0$$

得 A 的特征值为: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, 故必存在正交矩阵 Q , 使得

$$Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此, A 与 B 相似. 由两矩阵合同的充要条件: 实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件是

A 与 B 相似. 因此, A 与 B 也合同. 即 A 与 B 既合同且相似. 应选 (A).

方法 2: 因为 A 是实对称矩阵, 故 A 必相似于一对角阵 Λ . 又由相似矩阵有相同的特征值, 相同的秩, 知 A 与 Λ 有相同的秩, 故 $r(\Lambda) = r(A) = 1$, 即 Λ 对角线上有 3 个元素为零.

因此, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 是 A 的特征值.

求另一个特征值, 由特征值的和等于矩阵主对角线元素之和, 知

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \lambda_4 = \sum_{i=1}^4 a_{ii} = 4. \text{ 故, } \lambda_4 = 4.$$

即 A 有特征值 $\lambda = 4$ 和 $\lambda = 0$ (三重根), 和对角阵 B 的特征值完全一致, 故 A, B 相似. 又由两矩阵合同的充要条件: 实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件是 A 与 B 相似. 知 A, B 合同.

(5) 【答案】 A

【详解】 掷硬币结果不是正面向上就是反面向上, 所以 $X + Y = n$, 从而 $Y = n - X$,

故 $DY = D(n - X) = DX$

由方差的定义: $DX = EX^2 - (EX)^2$, 所以

$$\begin{aligned} DY = D(n - X) &= E(n - X)^2 - [E(n - X)]^2 = E(n^2 - 2nX + X^2) - (n - EX)^2 \\ &= n^2 - 2nEX + EX^2 - n^2 + 2nEX - (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = DX \end{aligned}$$

由协方差的性质: $\text{cov}(X, c) = 0$ (c 为常数); $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$

$$\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$$

所以 $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, n - X) = \text{cov}(X, n) - \text{cov}(X, X) = 0 - DX = -DX$

由相关系数的定义, 得 $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-DX}{\sqrt{DX} \sqrt{DX}} = -1$

$$\begin{aligned} \text{三【详解】} \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx &= \int e^{-2x} \arctan e^x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} \arctan e^x d(-2x) \\ &= -\frac{1}{2} \int \arctan e^x d(e^{-2x}) \quad \underline{\text{分部}} - \frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x - \int e^{-2x} d \arctan e^x \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x - \int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x - \int \left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} \right) de^x \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x - \int e^{-2x} de^x + \int \frac{1}{1+e^{2x}} de^x \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x \right) + C \end{aligned}$$

四【详解】由题设,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} [f(x, f(x, x))] = f'_1(x, f(x, x)) + f'_2(x, f(x, x)) (f(x, x))' \\ &= f'_1(x, f(x, x)) + f'_2(x, f(x, x)) [f'_1(x, x) + f'_2(x, x)] \end{aligned}$$

这里 $f'_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$,

所以 $\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=1} = \left\{ f_1'(x, f(x, x)) + f_2'(x, f(x, x)) \left[f_1'(x, x) + f_2'(x, x) \right] \right\}_{x=1}$

$$= f_1'(1, 1) + f_2'(1, 1) \left[f_1'(1, 1) + f_2'(1, 1) \right] = 2 + 3 \cdot [2 + 3] = 17$$

又 $f(1, 1) = 1, \varphi(x) = f(x, f(x, x)),$

所以 $\varphi(1) = f(1, f(1, 1)) \quad \underline{\underline{f(1, 1) = 1}} \quad \underline{\underline{f(1, 1) = 1}},$

所以 $\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1} = \left[3\varphi^2(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_{x=1}$

$$= 3\varphi^2(1) \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=1} \quad \varphi(1) = 1, \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=1} = 17 \quad \underline{\underline{3 \cdot 1 \cdot 17 = 51}}$$

五【详解】 首先将 $\arctan x$ 展开.

因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1)$

故 $\arctan x = \arctan 0 + \int_0^x (\arctan x)' dx = 0 + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

于是 $f(x) = \frac{1+x^2}{x} \arctan x = \frac{1+x^2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = (1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} = \frac{(-1)^0}{2 \cdot 0 + 1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} x^{2(n+1)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1), x \neq 0$$

又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n} \right) = 1$, 且 $f(0) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从

而 $x=0$ 时, $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}$ 也成立. 进而 $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1),$

又在 $x = \pm 1$ 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}$ 收敛,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x^2}{x} \arctan x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x^2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = f(1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1+x^2}{x} \arctan x = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1+x^2}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -1^+} \arctan x = -2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} = f(-1),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续, 在 $x=-1$ 处右连续, 所以等式可扩大到 $x = \pm 1$,

$$\text{从而} \quad f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\text{变形得} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n} = \frac{f(x)-1}{2}$$

$$\text{因此} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cdot 1^{2n} = \frac{1}{2} [f(1)-1] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2}-1\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

六【详解】方法 1: 用斯托克斯公式之后化成第一型曲面积分计算.

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上由 L 所围成的有界部分的上侧, (曲线的正向与曲面的

侧的方向符合右手法则) D 为 S 在 xoy 坐标面上的投影, $D = \{(x, y) | |x| + |y| = 1\}$

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \{-z_x', -z_y', 1\}$$

在 $x+y+z=2$ 中, 左右两边关于 x 求偏导, 得 $1+z_x'=0$, 得 $z_x'=-1$.

在 $x+y+z=2$ 中, 左右两边关于 y 求偏导, 得 $1+z_y'=0$, 得 $z_y'=-1$.

代入上式得

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

为 S 指定侧方向的单位法向量, 由斯托克斯公式得

$$I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} \\
&= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy
\end{aligned}$$

将题中的空间曲线积分化为第二类曲面积分, 而对于第二类曲面积分, 一般的解答方法是将它先化为第一类曲面积分, 进而化为二重积分进行计算.

$$\text{把 } dS = \frac{1}{|\cos \alpha|} dydz, dS = \frac{1}{|\cos \beta|} dzdx, dS = \frac{1}{|\cos \gamma|} dxdy \text{ 代入上式,}$$

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S [(-2y - 4z) \cos \alpha + (-2z - 6x) \cos \beta + (-2x - 2y) \cos \gamma] dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S [(-2y - 4z) + (-2z - 6x) + (-2x - 2y)] dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S [-8x - 4y - 6z] dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z) dS
\end{aligned}$$

按第一型曲面积分的算法, 将 S 投影到 xoy , 记为 σ . dS 与它在 xoy 平面上的投影 $d\sigma$ 的关系是

$$dS = \frac{1}{|\cos \gamma|} d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma$$

故 $dS = \sqrt{3} d\sigma$, 将 $x + y + z = 2$ 代入

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (4x + 2y + 3z) dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S [4x + 2y + 3(2 - x - y)] (\sqrt{3} d\sigma) \\
&= -2 \iint_D (x - y + 6) d\sigma
\end{aligned}$$

由于 D 关于 y 轴对称, 利用区域的对称性, 因为区域关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的奇函数, 所以 $\iint_D x d\sigma = 0$. D 关于 x 轴对称, 利用区域的对称性, 因为区域关于 x 轴对称, 被积函数是关于 y 的奇函数, 故 $\iint_D y d\sigma = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
I &= -2 \iint_D (x - y + 6) d\sigma = -2 \iint_D x d\sigma + 2 \iint_D y d\sigma - 12 \iint_D d\sigma = -12 \iint_D dxdy \\
&= -12 \cdot D \text{ 的面积 (由二重积分的几何意义知, } \iint_D dxdy \text{ 即 } D \text{ 的面积)}
\end{aligned}$$

其中, D 为 $|x|+|y|\leq 1$, D 的面积 $= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2$, 所以 $I = -12 \cdot 2 = -24$.

方法 2: 转换投影法.

用斯托克斯公式, 取平面 $x+y+z=2$ 被 L 所围成的部分为 S , 按斯托克斯公式的规定, 它的方向向上 (曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则), S 在 xoy 平面上的投影域记为

$$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}.$$

由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy \end{aligned}$$

$$\text{由 } dS = \frac{1}{|\cos \alpha|} dydz, dS = \frac{1}{|\cos \beta|} dzdx, dS = \frac{1}{|\cos \lambda|} dxdy,$$

$$\text{及 } \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \{-z_x', -z_y', 1\}$$

$$\text{知 } dS = \frac{1}{|\cos \alpha|} dydz = \frac{1}{|\cos \lambda|} dxdy, \quad dS = \frac{1}{|\cos \beta|} dzdx = \frac{1}{|\cos \lambda|} dxdy,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } dydz &= \frac{|\cos \alpha|}{|\cos \lambda|} dxdy = \frac{\frac{-z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}} dxdy = -z_x' dxdy \\ dzdx &= \frac{|\cos \beta|}{|\cos \lambda|} dxdy = \frac{\frac{-z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}} dxdy = -z_y' dxdy \end{aligned}$$

因为 S 为 $z=2-x-y$, 式子左右两端分别关于 x, y 求偏导, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = -1$, 于是

$$I = \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 6y)dxdy$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \{-2y-4z, -2z-6x, -2x-6y\} \cdot \left\{-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right\} dxdy \\
&= -2 \iint_S (4x+2y+3z) dxdy = -2 \iint_D (x-y+6) dxdy
\end{aligned}$$

因为区域 D 关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的奇函数, 所以 $\iint_D x d\sigma = 0$. 类似的, 因为

区域 D 关于 x 轴对称, 被积函数是关于 y 的奇函数, 故 $\iint_D y d\sigma = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
I &= -2 \iint_D (x-y+6) d\sigma = -2 \iint_D x d\sigma + 2 \iint_D y d\sigma - 12 \iint_D d\sigma = -12 \iint_D dxdy \\
&= -12 \cdot D \text{ 的面积 (由二重积分的几何意义知, } \iint_D dxdy \text{ 即 } D \text{ 的面积)}
\end{aligned}$$

D 为 $|x|+|y| \leq 1$, D 的面积 $= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2$, 所以

$$I = -12 \cdot 2 = -24.$$

方法 3: 降维法.

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上由 L 所围成的有界部分的上侧 (曲线的正向与曲面的

侧的方向符合右手法则), D 为 S 在 xoy 坐标面上的投影, $D = \{(x, y) | |x|+|y|=1\}$

把 $x+y+z=2$ 代入 I 中, L_1 为 L 在 xoy 平面上投影, 逆时针.

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{L_1} (y^2 - (2-x-y)^2) dx + (2(2-x-y)^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2)(-dx - dy) \\
&= \oint_{L_1} (y^2 - 4x^2 - 2xy + 4x + 4y - 4) dx + (3y^2 - 2x^2 + 4xy - 8x - 8y + 8) dy \\
&\stackrel{\text{格林公式}}{=} \oint_{L_1} \left[\frac{\partial(3y^2 - 2x^2 + 4xy - 8x - 8y + 8)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - 4x^2 - 2xy + 4x + 4y - 4)}{\partial y} \right] dxdy \\
&= -2 \iint_D (x-y+6) dxdy = -24
\end{aligned}$$

方法 4: 用斯托克斯公式后用第二型曲面积分逐个投影法.

记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上由 L 所围成的有界部分的上侧, (曲线的正向与曲面的侧的方向符合右手法则)

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{1}{\sqrt{1+z'_x{}^2+z'_y{}^2}} \{-z'_x, -z'_y, 1\}$$

在 $x+y+z=2$ 中, 左右两边关于 x 求偏导, 得 $1+z'_x=0$, 得 $z'_x=-1$.

在 $x+y+z=2$ 中, 左右两边关于 y 求偏导, 得 $1+z'_y=0$, 得 $z'_y=-1$.

代入上式得

$$\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

为 S 指定侧方向的单位法向量, 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{vmatrix} \\ &= \iint_S (-2y - 4z)dydz + (-2z - 6x)dzdx + (-2x - 2y)dxdy \end{aligned}$$

用逐个投影法, 先计算 $I_1 = \iint_S (-2y - 4z)dydz$, 其中

$D_{yz} = \{(y, z) | |2 - y - z| + |y| \leq 1\}$ 为 S 在 yoz 平面上的投影, 分别令 $y \geq 0, y \leq 0, 2 - y - z \geq 0, 2 - y - z \leq 0$, 可得到 D_{yz} 的 4 条边界线的方程:

右: $2y + z = 3$; 上: $z = 3$; 左: $2y + z = 1$; 下: $z = 1$.

$$\text{于是 } I_1 = -2 \int_1^3 dz \int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (y + 2z) dy = -16$$

再计算 $I_2 = \iint_S (-2z - 6x)dzdx$, 其中 $D_{xz} = \{(x, z) | |x| + |2 - x - z| \leq 1\}$ 为 S 在 xoz

平面上的投影, 分别令 $x \geq 0, x \leq 0, 2 - x - z \geq 0, 2 - x - z \leq 0$, 可得到 D_{xz} 的 4 条边界线的方程:

右: $2y + z = 3$; 上: $z = 3$; 左: $2y + z = 1$; 下: $z = 1$.

$$\text{于是 } I_2 = -2 \int_1^3 dz \int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (z + 3x) dx = \int_1^3 (z - 6) dz = -8$$

再计算 $I_3 = \iint_D (-2x - 2y)dxdy$, 其中 $D_{xy} = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ 为 S 在 xoy 平面

上的投影, 因为区域关于 y 轴和 x 轴均对称, 被积函数是关于 x 和 y 都是奇函数,

$$\text{于是 } I_3 = -2 \iint_S (x + y) dxdy = 0$$

$$\text{故 } I = I_1 + I_2 + I_3 = -24.$$

方法 5: 参数式法.

L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 是由 4 条直线段构成的封闭折

线, 将题中要求的空间曲线积分分成四部分来求.

当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时, $L_1: y = 1 - x, z = 2 - x - y$, 则 $dy = -dx, dz = -dx$, x 从 1 到 0. 以 x 为参数, 于是

$$\begin{aligned} & (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= [(1-x)^2 - (2-x-y)^2]dx + [2(2-x-y)^2 - x^2](-dx) + [3x^2 - (1-x)^2](-dx) \\ &= [(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)]dx \end{aligned}$$

则
$$\oint_{L_1} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_1^0 [(1-x)^2 - 1 + (2-x^2)(-1)]dx = \frac{7}{3}.$$

当 $x \leq 0, y \geq 0$, $L_2: y = 1 + x, z = 1 - 2x$, 则 $dy = dx, dz = -2dx$, x 从 0 到 -1 于是

$$\begin{aligned} & (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= [(1+x)^2 - (1-2x)^2]dx + [2(1-2x)^2 - x^2]dx + [3x^2 - (1+x)^2](-2dx) \\ &= (2x+4)dx \end{aligned}$$

所以
$$\oint_{L_2} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_0^{-1} (2x+4)dx = -3$$

当 $x \leq 0, y \leq 0$, $L_3: y = 1 - x, z = 3$, 则 $dy = -dx, dz = 0$, x 从 -1 到 0, 于是

$$\begin{aligned} & (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= [(1-x)^2 - 3^2]dx + [2 \cdot 3^2 - x^2](-dx) + [3x^2 - (1-x)^2] \cdot 0 \\ &= (2x^2 + 2x - 26)dx \end{aligned}$$

所以
$$\oint_{L_3} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_{-1}^0 (2x^2 + 2x - 26)dx = -\frac{79}{3}$$

当 $x \geq 0, y \leq 0$, $L_4: y = x - 1, z = 3 - 2x$, 则 $dy = dx, dz = -2dx$, x 从 0 到 1, 于是

$$\begin{aligned} & (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz \\ &= [(x-1)^2 - (3-2x)^2]dx + [2(3-2x)^2 - x^2]dx + [3x^2 - (x-1)^2](-2dx) \\ &= (-18x+12)dx \end{aligned}$$

所以 $\oint_{L_4} (y^2 - z^2)dx + (2z^2 - x^2)dy + (3x^2 - y^2)dz = \int_0^1 (-18x + 12)dx = 3.$

所以 $I = \oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} = -24.$

七【分析】拉格朗日中值定理：如果 $f(x)$ 满足在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使等式 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 成立

【详解】(1) 因为 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数，所以一阶导数存在，由拉格朗日中值定理得，任给非零 $x \in (-1, 1)$ ，存在 $\theta(x) \in (0, 1)$ ， $\theta(x) \cdot x \in (-1, 1)$ ，使 $f(x) = f(0) + xf'[\theta(x) \cdot x]$ ， $(0 < \theta(x) < 1)$ 成立.

因为 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续且 $f''(x) \neq 0$ ，所以 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x) > 0$ ，则 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内严格单调且增加，故 $\theta(x)$ 唯一.

(2)方法 1: 由(1)知 $f(x) = f(0) + xf'[\theta(x) \cdot x]$ ， $(0 < \theta(x) < 1)$

于是有 $xf'[\theta(x)x] = f(x) - f(0)$ ，即 $f'[\theta(x)x] = \frac{f(x) - f(0)}{x}$

所以 $\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}$

上式两边取极限，再根据导数定义，得

$$\text{左端} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} \theta(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x)$$

$$\begin{aligned} \text{右端} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \stackrel{\text{导数定义}}{=} \frac{1}{2} f''(0) \end{aligned}$$

左边=右边，即 $f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2} f''(0)$ ，故 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

方法 2: 由泰勒公式得 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$ ， $\xi \in (0, x)$

再与(1)中的 $f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x]$ ($0 < \theta(x) < 1$)

比较, 所以 $xf'[\theta(x)x] = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$,

约去 x , 有 $f'[\theta(x)x] = f'(0) + \frac{1}{2}f''(\xi)x$,

凑成 $\frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} \theta(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)$,

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[\theta(x)x] - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0)$

所以 $f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}f''(0)$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

八【详解】 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t)$, 所以侧面在 xoy 面上的投影为:

$$D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t) \right\}$$

记 V 为雪堆体积, S 为雪堆的侧面积, 则由体积公式

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D z dx dy = \iint_D \left[h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \right] dx dy$$

化为极坐标, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq \frac{h(t)}{\sqrt{2}}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2r^2}{h(t)} \right) r dr = 2\pi \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \left(h(t) - \frac{2r^2}{h(t)} \right) r dr \\ &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} h(t) r dr - \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \frac{2r^2}{h(t)} r dr \right) = 2\pi \left(h(t) \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} - \frac{r^4}{2h(t)} \Big|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{h^3(t)}{4} - \frac{h^3(t)}{8} \right) = \frac{\pi}{4} h(t)^3 \end{aligned}$$

再由侧面积公式:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{4x}{h(t)}\right)^2 + \left(\frac{4y}{h(t)}\right)^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h(t)^2}} dx dy$$

化为极坐标, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq \frac{h(t)}{\sqrt{2}}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{16r^2}{h^2(t)}} r dr = 2\pi \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{16r^2}{h^2(t)}} r dr = \pi \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{16r^2}{h^2(t)}} dr^2 \\ &= \frac{\pi h^2(t)}{16} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{16r^2}{h^2(t)}} d\frac{16r^2}{h^2(t)} = \frac{\pi h^2(t)}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{16r^2}{h^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\pi h^2(t)}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\left(1 + \frac{8h^2(t)}{h^2(t)}\right)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi h^2(t)}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot (27 - 1) = \frac{13\pi h^2(t)}{12} \end{aligned}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S(t)$, 将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入, 得

$$\frac{d\frac{\pi}{4}h(t)^3}{dt} = -0.9 \cdot \frac{13\pi h^2(t)}{12} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} h^2(t) \frac{dh(t)}{dt} = -0.9 \cdot \frac{13\pi h^2(t)}{12} \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = -1.3$$

积分解得 $h(t) = -\frac{13}{10}t + C$

由 $h(0) = 130$, 得 $C = 130$. 所以 $h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$.

令 $h(t) \rightarrow 0$, 即 $-\frac{13}{10}t + 130 \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 100$

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需要时间为 100 小时.

九【详解】 由题设知, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 均为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合, 齐次方程组当有非零解时, 解向量的任意组合仍是该齐次方程组的解向量, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 均为 $Ax = 0$ 的解. 下面证明 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关. 设

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0 \quad (*)$$

把 $\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$, 代入整理得,

$$(t_1k_1 + t_2k_s)\alpha_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\alpha_2 + \dots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\alpha_s = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 由线性

无关的定义, 知(*)中其系数全为零, 即

$$\begin{cases} t_1 k_1 + t_2 k_s = 0 \\ t_2 k_1 + t_1 k_2 = 0 \\ \vdots \\ t_2 k_{s-1} + t_1 k_s = 0 \end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & t_1 & 0 & \cdots & -\frac{t_2^2}{t_1} \\ 0 & 0 & t_1 & \cdots & \frac{t_2^3}{t_1^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 + (-1)^{s+1} \frac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \end{vmatrix} = t_1^{s-1} \left(t_1 + (-1)^{s+1} \frac{t_2^s}{t_1^{s-1}} \right) = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s$$

((*)变换: 把原行列式第*i*行乘以 $-\frac{t_2}{t_1}$ 加到第*i*+1行, 其中*i*=1, ..., *s*-1.)

由齐次线性方程组只有零解得充要条件, 可见, 当 $t_1^s + (-1)t_2^s \neq 0$, 即 $t_1^s \neq (-t_2)^s$, 即

当*s*为偶数, $t_1 \neq \pm t_2$; 当*s*为奇数, $t_1 \neq t_2$ 时, 上述方程组只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, 因

此向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关,

故当 $\begin{cases} s=2n, & t_1 \neq \pm t_2 \\ s=2n+1, & t_1 \neq t_2 \end{cases}$ 时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

十【详解】(1)

方法1: 求*B*, 使 $A = PBP^{-1}$ 成立, 等式两边右乘*P*, 即 $AP = PB$ 成立.

由题设知, $AP = A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x)$, 又 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, 故有

$$AP = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x) = (x, Ax, A^2x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

即如果取 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 此时的*B*满足 $A = PBP^{-1}$, 即为所求.

方法 2: 由题设条件 $P = (x, Ax, A^2x)$ 是可逆矩阵, 由可逆的定义, 知有 P^{-1} 使

$$PP^{-1} = P^{-1}P = P^{-1}(x, Ax, A^2x) = (P^{-1}x, P^{-1}Ax, P^{-1}A^2x) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即有 $P^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P^{-1}A^2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 由题设条件, $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, 有

$$P^{-1}A^3x = P^{-1}(3Ax - 2A^2x) = 3P^{-1}Ax - 2P^{-1}A^2x = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

由 $A = PBP^{-1}$, 得

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP = P^{-1}A(x, Ax, A^2x) = P^{-1}(Ax, A^2x, A^3x) \\ &= (P^{-1}Ax, P^{-1}A^2x, P^{-1}A^3x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) 由(1)及矩阵相似的定义知, A 与 B 相似. 由矩阵相似的性质: 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B)$, 则 $A+E$ 与 $A-E$ 也相似. 又由相似矩阵的行列式相等, 得

$$|A+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到2行}]{1\text{行} \times (-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

十一【分析】 首先需要清楚二项分布的产生背景. 它的背景是: 做 n 次独立重复试验, 每次试验的结果只有两个(要么成功, 要么失败), 每次试验成功的概率都为 p , 随机变量 X 表示 n 次试验成功的次数, 则 $X \sim B(n, p)$. 在此题中, 每位乘客在中途下车看成是一次实验, 每个人下车是独立的, 有 n 个人相当于做了 n 次独立重复实验, 把乘客下车看成实验成功, 不下车看成实验失败, 而且每次实验成功的概率都为 p , 则问题(1)成为 n 重伯努利实验中有 m 次成功.

【详解】 (1) 求在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率, 相当于求条件概率 $P\{Y=m | X=n\}$, 由题设知, 此条件概率服从二项分布, 因此根据二项分布的分布律有:

$$P\{Y=m | X=n\} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}, 0 \leq m \leq n, n=0, 1, 2, \dots$$

(2) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布, 其实就是求 $P\{X=n, Y=m\}$, 利用乘法公式,

有 $P\{X=n, Y=m\} = P\{Y=m | X=n\} P\{X=n\}$

又 X 服从参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, 由泊松分布的分布律有 $P\{X=n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

故 $P\{X=n, Y=m\} = P\{Y=m | X=n\} P\{X=n\} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{n!} \lambda^n,$

其中 $0 \leq m \leq n, n=0, 1, 2, \dots$

十二【详解】 记 $\overline{X}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \overline{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}$, 则 $\overline{X} = \frac{1}{2}(\overline{X}_1 + \overline{X}_2)$, 即 $2\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$

且 $E\overline{X}_1 = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^n EX_i}{n} = \frac{nu}{n} = u$, $E\overline{X}_2 = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}\right) = u$

因此 $E(Y) = E\left[\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\overline{X})^2\right] = E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \overline{X}_1) + (X_{n+i} - \overline{X}_2)]^2\right\}$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \overline{X}_1)^2 + 2(X_i - \overline{X}_1)(X_{n+i} - \overline{X}_2) + (X_{n+i} - \overline{X}_2)^2]\right\}$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_1)^2\right] + E\left\{\sum_{i=1}^n [2(X_i - \overline{X}_1)(X_{n+i} - \overline{X}_2)]\right\} + E\left[\sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \overline{X}_2)^2\right]$$

因为样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_1)^2\right]$ 是总体方差的无偏估计, 则 $ES^2 = \sigma^2$, 即

$$ES^2 = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_1)^2\right] = \sigma^2$$

所以 $E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_1)^2\right] = (n-1)\sigma^2$, 同理 $E\left[\sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \overline{X}_2)^2\right] = (n-1)\sigma^2$

而 $E\left\{\sum_{i=1}^n [2(X_i - \overline{X}_1)(X_{n+i} - \overline{X}_2)]\right\} = 2E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \overline{X}_1)(X_{n+i} - \overline{X}_2)]\right\}$

$$= 2\sum_{i=1}^n E[(X_i - \overline{X}_1)(X_{n+i} - \overline{X}_2)] = \sum_{i=1}^n E(X_i X_{n+i} - X_i \overline{X}_2 - \overline{X}_1 X_{n+i} + \overline{X}_1 \overline{X}_2)$$

$$= \sum_{i=1}^n (EX_i X_{n+i} - EX_i \overline{X}_2 - E\overline{X}_1 X_{n+i} + E\overline{X}_1 \overline{X}_2)$$

由于 $X_1, X_2, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$ 相互独立同分布, 则 X_i 与 $\overline{X_2}$, $\overline{X_1}$ 与 X_{n+i} , $\overline{X_1}$ 与 $\overline{X_2}$ 也独立 ($i=1, 2, \dots, n$). 而由独立随机变量期望的性质 (若随机变量 X, Y 独立, 且 EX, EY 都存在, 则 $EXY = EXEY$), 所以

$$EX_i X_{n+i} = EX_i EX_{n+i} = u^2, \quad EX_i \overline{X_2} = EX_i E\overline{X_2} = u^2$$

$$E\overline{X_1} X_{n+i} = E\overline{X_1} EX_{n+i} = u^2, \quad E\overline{X_1} \overline{X_2} = E\overline{X_1} E\overline{X_2} = u^2$$

故有
$$E \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(X_i - \overline{X_1})(X_{n+i} - \overline{X_2}) \right] \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n (EX_i X_{n+i} - EX_i \overline{X_2} - E\overline{X_1} X_{n+i} + E\overline{X_1} \overline{X_2}) = \sum_{i=1}^n (u^2 - u^2 - u^2 + u^2) = 0$$

即
$$E(Y) = E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_1})^2 \right] + E \left\{ \sum_{i=1}^n \left[2(X_i - \overline{X_1})(X_{n+i} - \overline{X_2}) \right] \right\} + E \left[\sum_{i=1}^n (X_{n+i} - \overline{X_2})^2 \right]$$

$$= (n-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2$$