

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则 ()

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$.

(B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$.

(D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

(2) 如图, 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为

为四个区域 D_k ($k = 1, 2, 3, 4$), $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$,

则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

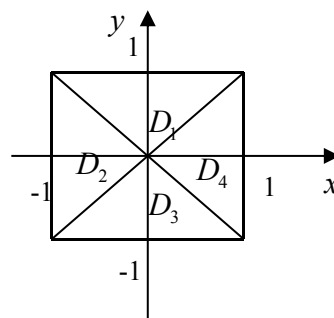
()

(A) I_1 .

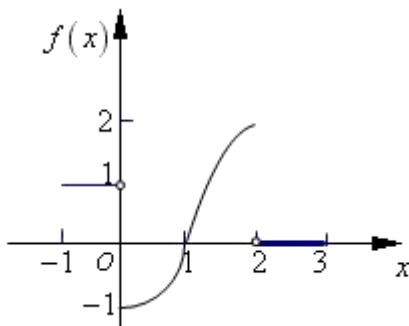
(B) I_2 .

(C) I_3 .

(D) I_4 .

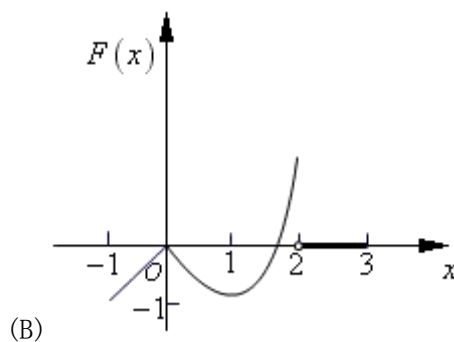
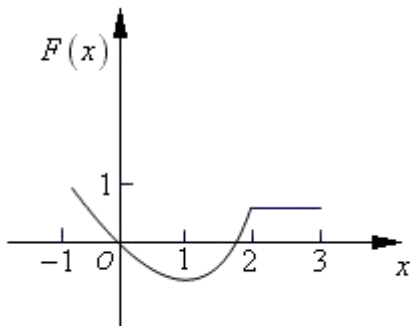


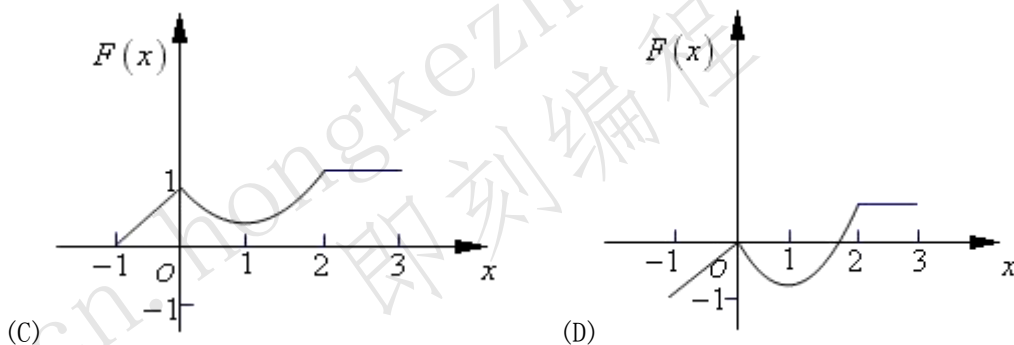
(3) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为

()





(4) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 ()

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

(5) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

(6) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

- (7) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $EX =$ ()
 (A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 ()
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

- (9) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.
- (10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.
- (11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds =$ _____.
- (12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.
- (13) 若 3 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 2$, 其中 α^T 为 α 的转置, 则矩阵 $\beta \alpha^T$ 的非零特征值为 _____.
- (14) 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16) (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 所围成区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

(17) (本题满分 11 分)

椭圆面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4, 0)$ 且与椭圆

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程;

(II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$,

使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则

$f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(19) (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外

侧.

(20) (本题满分 11 分)

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球, 2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X=1|Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。

(1) 【答案】(A)

【解析】 $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小，则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1-bx)} \stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{a^3}{6b} \right) \frac{\sin ax}{ax} = -\frac{a^3}{6b} = 1, \end{aligned}$$

即 $a^3 = -6b$ ，故排除 B, C.

另外， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2}$ 存在，蕴含了 $1 - a \cos ax \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$)，故 $a = 1$ ，排除 D.

所以本题选 A.

(2) 【答案】(A)

【解析】本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性.

令 $f(x, y) = y \cos x$,

D_2, D_4 两区域关于 x 轴对称， $f(x, -y) = -y \cos x = -f(x, y)$ ，即被积函数是关于 y 的

奇函数，所以 $I_2 = I_4 = 0$ ；

D_1, D_3 两区域关于 y 轴对称， $f(-x, y) = y \cos(-x) = y \cos x = f(x, y)$ ，即被积函数是关于 x 的偶函数，所以

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \iint_{\{(x,y)|y \geq x, 0 \leq x \leq 1\}} y \cos x dx dy > 0, \\ I_3 &= 2 \iint_{\{(x,y)|y \leq -x, 0 \leq x \leq 1\}} y \cos x dx dy < 0. \end{aligned}$$

所以正确答案为 (A).

(3) 【答案】(D)

【解析】此题为定积分的应用知识考核，由 $y = f(x)$ 的图形可以看出，其图像与 x 轴及 y 轴、

$x = x_0$ 所围的图形的代数面积为所求函数 $F(x)$ ，从而可得出下面几个方面的特征：

① $x \in [-1, 0]$ 时， $F(x) \leq 0$ 为线性函数，单调递增；

② $x \in [0, 1]$ 时， $F(x) \leq 0$ ，且单调递减；

③ $x \in [1, 2]$ 时, $F(x)$ 单调递增;

④ $x \in [2, 3]$ 时, $F(x)$ 为常函数;

⑤ $F(x)$ 为连续函数.

结合这些特点, 可见正确选项为 (D).

(4) 【答案】C

【解析】解法 1 举反例:

取 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 排除 (A);

取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是发散的, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 排除 (B);

取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 是发散的, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛, 排除 (D),

故答案为 (C).

解法 2 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则由定义可知 $\exists N_1$, 使得 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n| < 1$;

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$, 则由定义可知 $\exists N_2$, 使得 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n| < 1$,

从而, 当 $n > N_1 + N_2$ 时, 有 $a_n^2 b_n^2 < |b_n|$, 则由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(5) 【答案】(A)

【解析】根据过渡矩阵的定义, 知由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵 M 满足:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) &= \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) M \\ &= \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

所以此题选 (A).

(6) 【答案】(B)

【解析】分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 2 \times 3 = 6,$$

即分块矩阵可逆, 且

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = 6 \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} O & \frac{1}{|B|} B^* \\ \frac{1}{|A|} A^* & O \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} O & \frac{1}{3} B^* \\ \frac{1}{2} A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故答案为(B).

(7) 【答案】(C)

【解析】因为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 所以

$$F'(x) = 0.3\Phi'(x) + \frac{0.7}{2}\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

因此,
$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[0.3\Phi'(x) + 0.35\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right) \right] dx$$

$$= 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx + 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx.$$

由于 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx &\stackrel{\frac{x-1}{2}=u}{=} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (2u+1)\Phi'(u)du \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} 2u\Phi'(u)du + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi'(u)du = 2, \end{aligned}$$

$$EX = 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'(x)dx + 0.35 \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi'\left(\frac{x-1}{2}\right)dx = 0 + 0.35 \times 2 = 0.7.$$

(8) 【答案】(B)

【解析】

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{XY \leq z\} \\ &= P\{XY \leq z | Y=0\}P\{Y=0\} + P\{XY \leq z | Y=1\}P\{Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{XY \leq z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{XY \leq z | Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X \cdot 0 \leq z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z | Y=1\}, \end{aligned}$$

由于 X, Y 相互独立, 所以

$$F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{X \cdot 0 \leq z\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z\}.$$

(1) 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2}\Phi(z)$;

(2) 当 $z \geq 0$ 时, $F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z)$,

因此, $z = 0$ 为间断点, 故选 (B).

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 【答案】 $xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf''_{12} + f'_2 + yx \cdot f''_{22} = xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}.$$

(10) 【答案】 $x(1 - e^x) + 2$

【解析】 由常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$ 可知

$y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ 为其两个线性无关的解, 代入齐次方程, 有

$$y''_1 + ay'_1 + by_1 = (1 + a + b)e^x = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0,$$

$$y''_2 + ay'_2 + by_2 = [2 + a + (1 + a + b)x]e^x = 0 \Rightarrow 2 + a = 0,$$

从而可见 $a = -2, b = 1$, 非齐次微分方程为 $y'' - 2y' + y = x$.

设特解 $y^* = Ax + B$, 代入非齐次微分方程, 得 $-2A + Ax + B = x$, 即

$$Ax + (-2A + B) = x \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

所以特解 $y^* = x + 2$, 通解 $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$.

把 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 代入通解, 得 $C_1 = 0, C_2 = -1$. 所以所求解为

$$y = -xe^x + x + 2 = x(1 - e^x) + 2.$$

(11) 【答案】 $\frac{13}{6}$

【解析】 由题意可知, $y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}$, 则

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L x ds &= \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1 + 4x^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

(12) 【答案】 $\frac{4}{15}\pi$

【解析】解法 1:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \rho^2 \cos^2 \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d(-\cos \varphi) \int_0^1 \rho^4 d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left(-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

解法 2: 由轮换对称性可知

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$$

所以,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

(13) 【答案】 2

【解析】 $\alpha^T \beta = 2$, $\therefore \beta \alpha^T \beta = \beta (\alpha^T \beta) = 2 \cdot \beta$, 又由于 $\beta \neq 0$, $\therefore \beta \alpha^T$ 的非零特征值为 2.

(14) 【答案】 -1

【解析】 由于 $\bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量, 所以 $E(\bar{X} + kS^2) = np^2$, 即

$$\begin{aligned} E(\bar{X} + kS^2) &= np^2 \Rightarrow E(\bar{X}) + E(kS^2) = np^2 \\ &\Rightarrow np + knp(1-p) = np^2 \\ &\Rightarrow 1 + k(1-p) = p \\ &\Rightarrow k(1-p) = p-1 \Rightarrow k = -1. \end{aligned}$$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

【解析】 $f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2),$

$$f'_y(x, y) = 2x^2 y + \ln y + 1.$$

$$\text{令} \begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases} \text{解得唯一驻点} (0, \frac{1}{e}).$$

由于

$$A = f''_{xx}(0, \frac{1}{e}) = 2(2 + y^2) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + \frac{1}{e^2}),$$

$$B = f''_{xy}(0, \frac{1}{e}) = 4xy \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0,$$

$$C = f''_{yy}(0, \frac{1}{e}) = (2x^2 + \frac{1}{y}) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e,$$

所以 $B^2 - AC = -2e(2 + \frac{1}{e^2}) < 0$, 且 $A > 0$.

从而 $f(0, \frac{1}{e})$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

(16) (本题满分 9 分)

【解析】曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$, 所围区域的面积

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

考查幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, 知其收敛域为 $(-1, 1]$, 和函数为 $-\ln(1+x)$.

因为 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = x - \ln(1+x)$, 令 $x=1$, 得

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = S(1) = 1 - \ln 2.$$

(17) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 椭球面 S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2 + z^2}{3} = 1$.

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0 x}{4} + \frac{y_0 y}{3} = 1$.

将 $x = 4, y = 0$ 代入切线方程得 $x_0 = 1$, 从而 $y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4 - x_0^2} = \pm \frac{3}{2}$.

所以切线方程为 $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{2} = 1$, 从而圆锥面 S_2 的方程为 $(\frac{x}{4} - 1)^2 = \frac{y^2 + z^2}{4}$, 即

$$(x - 4)^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0.$$

(II) S_1 与 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\frac{3}{2}$ 、高为 3 的锥体体积 $\frac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积

V 之差, 其中 $V = \frac{3\pi}{4} \int_1^2 (4 - x^2) dx = \frac{5}{4}\pi$.

故所求体积为 $\frac{9}{4}\pi - \frac{5}{4}\pi = \pi$.

(18) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 取 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$,

由题意知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a),$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, 即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

(II) 对于任意的 $t \in (0, \delta)$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, t]$ 上连续, 在 $(0, t)$ 内可导, 由右导数定义及拉格朗日中值定理

$$f'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\xi)t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(\xi), \text{ 其中 } \xi \in (0, t).$$

由于 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = A$, 且当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $\xi \rightarrow 0^+$, 所以 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A$, 故 $f'_+(0)$ 存在, 且

$$f'_+(0) = A.$$

(19) (本题满分 10 分)

【解析】取 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, Ω 为 Σ 与 Σ_1 之间的部分.

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \oiint_{\Sigma - \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \oiint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

根据高斯公式

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma - \Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \iiint_{\Omega} 0 dxdydz = 0. \\ \oiint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \oiint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy \\ &= \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} 3dxdydz = 4\pi. \end{aligned}$$

所以 $I = 4\pi$.

(20) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 对矩阵 $(A: \xi_1)$ 施以初等行变换

$$(A: \xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -4 & -2 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

可求得 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{k}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{k}{2} \\ k \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

又 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, 对矩阵 $(A^2: \xi_1)$ 施以初等行变换

$$(A^2 \vdots \xi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & \vdots & -1 \\ -2 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ 4 & 4 & 0 & \vdots & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

可求得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-a \\ a \\ b \end{pmatrix}$, 其中 a, b 为任意常数.

(II) 解法 1 由 (I) 知

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} + \frac{k}{2} & -\frac{1}{2} - a \\ 1 & \frac{1}{2} - \frac{k}{2} & a \\ -2 & k & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

解法 2 由题设可得 $A\xi_1 = 0$. 设存在数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0, \quad (1)$$

等式两端左乘 A , 得 $k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0$, 即

$$k_2\xi_1 + k_3A\xi_3 = 0, \quad (2)$$

等式两端再左乘 A , 得 $k_3A^2\xi_3 = 0$, 即 $k_3\xi_1 = 0$.

由于 $\xi_1 \neq 0$, 于是 $k_3 = 0$, 代入 (2) 式, 得 $k_2\xi_1 = 0$, 故 $k_2 = 0$. 将 $k_2 = k_3 = 0$ 代入 (1) 式, 可得

$k_1 = 0$, 从而 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 二次型 f 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a + 1))(\lambda - (a - 2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

(II) 解法 1 由于 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 合同于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其秩为 2, 故

$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$, 于是 $a = 0$ 或 $a = -1$ 或 $a = 2$.

当 $a = 0$ 时, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$, 此时 f 的规范形为 $y_1^2 - y_2^2$, 不合题意.

当 $a = -1$ 时, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$, 此时 f 的规范形为 $-y_1^2 - y_2^2$, 不合题意.

当 $a = 2$ 时, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$, 此时 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$.

综上所述, $a = 2$.

解法 2 由于 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值有 2 个为正数, 1 个为零.

又 $a - 2 < a < a + 1$, 所以 $a = 2$.

(22) (本题满分 11 分)

【解析】(I) $P(X = 1 | Z = 0) = \frac{P\{X = 1, Z = 0\}}{P\{Z = 0\}} = \frac{C_2^1 \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{9}.$

(II) 由题意知 X 与 Y 的所有可能取值均为 0, 1, 2.

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{4}, P(X = 1, Y = 0) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{36}, P(X = 0, Y = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 1, Y = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{9}, P(X = 2, Y = 1) = 0,$$

$$P(X = 0, Y = 2) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_6^1 \cdot C_6^1} = \frac{1}{9},$$

$$P(X = 1, Y = 2) = 0, P(X = 2, Y = 2) = 0,$$

故 (X, Y) 的概率分布为

X	0	1	2
-----	---	---	---

$Y \backslash X$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

(23) (本题满分 11 分)

【解析】(I) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}.$

令 $\bar{X} = EX$, 即 $\bar{X} = \frac{2}{\lambda}$, 得 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}_1 = \frac{2}{\bar{X}}.$

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$ 为样本观测值, 则似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \lambda^{2n} \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i,$$

$$\ln L = 2n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

由 $\frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$, 得 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}_2 = \frac{2}{\bar{X}}.$