2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx=$________

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,\ -2,\ 2)$ 的法线方程为___________

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为______________

(4) 已知方程组 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$ 无解，则 $a=$_______

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$ ，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)$ $=$_______

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 则当 $a<x<b$ 时，有 (　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(2) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0),S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有 (　)

(A) $\iint\limits_S xdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$　　(B) $\iint\limits_S ydS=4\iint\limits_{S_1} xdS$

(C) $\iint\limits_S zdS=4\iint\limits_{S_1} xdS$　　(D) $\iint\limits_S xyzdS=4\iint\limits_{S_1} xyzdS$

(3) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 (　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}.$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2.$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n}).$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1}).$

(4) 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为 (　)

(A) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示.

(C) 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$与向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价.

(D) 矩阵$A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)$与矩阵$B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$等价.

(5) 设二维随机变量$\left(X\ ,Y\right)$服从二维正态分布，则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充分必要条件为 (　)

(A) $E(X)=E(Y)$.　　(B) $E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$.

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$.　　(D) $E(X^2)+\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)+\left[E(Y)\right]^2$.

三、(本题满分5分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

四、(本题满分6分)

设$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中$f$具有二阶连续偏导数，$g$具有二阶连续导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分6分)

计算曲线积分$I=\oint\limits_L\dfrac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$\left(1,0\right)$为中心，$R$为半径的圆周$\left(\mathrm{R}>1\right)$，取逆时针方向.

六、(本题满分7分)

设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S，都有

$$\oiint\limits_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1,=$ 求$f(x)$.

七、(本题满分6分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$的收敛区域，并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分7分)

设有一半径为R的球体，P_0是此球的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到P_0距离的平方成正比(比例常数$k>0$)，求球体的重心位置.

九、(本题满分6分)

设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0,$ 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$

十、(本题满分6 分)

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 为4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

十一、(本题满分8分)

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n, y_n 记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. (1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

十二、(本题满分8分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p\left(0<p<1\right)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修.设开机后第一次停机时已生产了产品的个数为 X，求 X 的数学期望 $E\left(\mathrm{X}\right)$ 和方差 $D\left(\mathrm{X}\right)$.

十三、(本题满分8分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\0, & x<\theta\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】$\frac{\pi}{4}$

【详解】$I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

解法 1：用换元积分法：设 $x-1=\sin t$，当 $x=0$ 时，$\sin t=-1$，所以下限取 $-\frac{\pi}{2}$；当 $x=1$ 时，$\sin t=0$，所以上限取 0.

所以 $I\overset{x-1=\sin t}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left|cost\right|\cos tdt$

由于在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$，函数 $\cos t$ 非负，则 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t=\frac{\pi}{4}$

解法 2：由于曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 是以点 $(1,0)$ 为圆心，以 1 为半径的上半圆周，它与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围图形的面积为圆面积的 $\frac{1}{4}$，故答案是 $\frac{\pi}{4}$

(2)【答案】$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.

【详解】曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的法矢量为：

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$, 则有

$$F_x{}'(1,\text{-}2,2)=2x|_{(1,\text{-}2,2)}=2,$$
$$F_y{}'(1,\text{-}2,2)=4y|_{(1,\text{-}2,2)}=-8,$$
$$F_z{}'(1,\text{-}2,2)=6z|_{(1,\text{-}2,2)}=12.$$

所以曲面在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{12}$. 即 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.

(3)【答案】$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$

【分析】此方程为二阶可降阶的微分方程，属于 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程.

【详解】令 $p=y'$，有 $y''=\frac{dp}{dx}$.原方程化为：$x\frac{dp}{dx}+3p=0$，$\Rightarrow\frac{dp}{dx}+3\frac{p}{x}=0$

分离变量： $\dfrac{dp}{p}=-3\dfrac{dx}{x}$

两端积分： $\displaystyle\int\frac{dp}{p}=-3\int\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|p|=-3\ln|x|+C_1$

从而 $|p|=e^{-3\ln|x|+C_1}=e^{C_1}e^{-3\ln|x|}=e^{C_1}|x|^{-3}=e^{C_1}\dfrac{1}{|x|^3}$

因记$C_2=e^{C_1}>0$是大于零的任意常数，上式可写成 $p=\pm\dfrac{C_2}{x^3}$；

记 $C_3=\pm C_2$， $p=\dfrac{C_3}{x^3}$，便得方程的通解 $p=C_3x^{-3}$，

即 $\dfrac{dy}{dx}=C_3x^{-3}\Rightarrow dy=C_3x^{-3}dx$，其中 C_3 是任意常数

对上式再积分，得：

$$y=\int C_3x^{-3}dx=-\frac{C_3}{2}x^{-2}+C_4=\frac{C_5}{x^2}+C_4,\left(C_5=-\frac{C_3}{2}\right)$$

所以原方程的通解为：

$$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$$

(4)【答案】-1.

【详解】化增广矩阵为阶梯形，有

$$\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&1\\2&3&a+2&\vdots&3\\1&a&-2&\vdots&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&a&\vdots&1\\0&a-2&-3&\vdots&-1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&a&\vdots&1\\0&0&(a-3)(a+1)&\vdots&a-3\end{bmatrix}$$

当$a=-1$时，系数矩阵的秩为2，而增广矩阵的秩为3，根据方程组解的判定，其系数矩阵与增广矩阵的秩不同，因此方程组无解.

当$a=3$时，系数矩阵和增光矩阵的秩均为2，由方程组解的判定，系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，而且小于未知量的个数，所以方程组有无穷多解.

(5)【答案】$2/3$ (由 A,B 独立的定义： $P(AB)=P(A)P(B)$)

【详解】由题设，有 $P(\overline{A}\overline{B})=\dfrac{1}{9},P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$

因为 A 和 B 相互独立，所以 A 与 $\overline{B}$， $\overline{A}$ 与 B 也相互独立.

于是由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$, 有 $P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$

即有 $P(A)\left[1-P(B)\right]=\left[1-P(A)\right]P(B)$,

可得 $P(A)=P(B)$ ，$P(\overline{A})=P(\overline{B})$

从而 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\left[P(\overline{A})\right]^2=\left[1-P(A)\right]^2=\dfrac{1}{9}$,

解得 $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

二、选择题

(1)【答案】A

【分析】由选项答案可知需要利用单调性证明，关键在于寻找待证的函数. 题设中已知 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$, 想到设函数为相除的形式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

【详解】

设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $\left(F(x)\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$,

则 $F(x)$ 在 $a<x<b$ 时单调递减，所以对 $\forall a<x<b$ ，$F(a)>F(x)>F(b)$ ，即

$$\frac{f(a)}{g(a)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b)>f(b)g(x),\ a<x<b$ ，(A) 为正确选项.

(2)【答案】C

【性质】第一类曲面积分关于奇偶性和对称性的性质有：

性质 1：设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续，S 关于 yoz 平面对称，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & \text{若}f(x,y,z)\text{关于}x\text{为奇函数}\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dS & \text{若}f(x,y,z)\text{关于}x\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 $S_1=S\cap\{x\ge 0\}$.

性质 2：设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续，S 关于 xoz 平面对称，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & \text{若}f(x,y,z)\text{关于}y\text{为奇函数}\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dS & \text{若}f(x,y,z)\text{关于}y\text{为偶函数}\end{cases}$$

其中 $S_1=S\cap\{y\ge 0\}$.

性质 3：设 $f(x,y,z)$ 在分块光滑曲面 S 上连续，S 关于 xoy 平面对称，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\begin{cases}0 & 若f(x,y,z)关于z为奇函数\\ 2\iint_{S_1} f(x,y,z)dS & 若f(x,y,z)关于z为偶函数\end{cases}$$

其中 $S_1=S\cap\{z\geq 0\}$.

【详解】

方法 1：直接法：

本题中 S 在 xoy 平面上方，关于 yoz 平面和 xoz 平面均对称，而 $f(x,y,z)=z$ 对 x,y 均为偶函数，则

$$\iint_S zdS\overset{性质1}{=}2\iint_{S\cap\{x\geq 0\}} zdS\overset{性质2}{=}4\iint_{S_1} zdS$$

又因为在 S_1 上将 x 换为 y，y 换为 z，z 换为 x，S_1 不变(称积分区域 S_1 关于 x,y,z 轮换对称)，从而将被积函数也作此轮换变换后，其积分的值不变，即有

$4\iint_{S_1} zdS=4\iint_{S_1} xdS=4\iint_{S_1} ydS$. 选项 (C) 正确.

方法 2：间接法(排除法)

曲面 S 关于 yoz 平面对称，x 为 x 的奇函数，所以 $\iint_S xdS=0$，而 $\iint_{S_1} xdS$ 中 $x\geq 0$ 且仅在 yoz 面上 $x=0$，从而 $\iint_{S_1} xdS>0$，(A) 不成立.

曲面 S 关于 zox 平面对称，y 为 y 的奇函数，所以 $\iint_S ydS=0$，而 $\iint_{S_1} xdS>0$，所以 (B) 不成立.

曲面 S 关于 zox 平面对称，xyz 为 y 的奇函数，所以 $\iint_S xyzdS=0$，而 $\iint_{S_1} xyzdS>0$，所以 (D) 不成立.

(3)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则必收敛的级数为 ( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$.

【答案】D

【详解】

方法 1：直接法. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛.由收敛级数的性质(如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 、σ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \pm v_n\right)$ 也收敛，且其和为 $s \pm \sigma$). 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+u_{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n+\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$. 选项 (D) 成立.

方法 2：间接法. 找反例：

(A)：取 $u_n=(-1)^n \frac{1}{\ln (1+n)}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n \ln (1+n)}$

是发散的；（关于上述结束的敛散，有下述结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln ^p(1+n)}\begin{cases}\text{收敛} & \text{当} p>1 \\ \text{发散} & \text{当} p \leq 1\end{cases})$$

(B)：取 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；

(C)：取 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但

$$u_{2n-1}-u_{2n}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}=\frac{4n-1}{2n(2n-1)} \sim \frac{1}{n}$$

由比较审敛法的极限形式知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}-u_{2n}\right)$ 发散.

(4)【答案】(D)

【详解】用排除法.

(A)为充分但非必要条件：若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性表示，则一定可推导 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关，因为若 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性相关，则 $r\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_m\right)<m$, 于是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 必线性相关，矛盾. 但反过来不成立，如当 $m=1$ 时，$\alpha_1=(1,0)^T, \beta_1=(0,1)^T$ 均为单个非零向量是线性相关的，但 α_1 并不能用 β_1 线性表示.

(B)为既非充分又非必要条件：如当 $m=1$ 时，考虑 $\alpha_1=(1,0)^T, \beta_1=(0,1)^T$ 均线性无关，但并不能由 α_1 线性表示，必要性不成立；又如 $\alpha_1=(1,0)^T, \beta_1=(0,0)^T$, 可由 α_1 线性表示，

但 β_1 并不线性无关，充分性也不成立.

(C)为充分但非必要条件：若向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价，由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关知，$r\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)=r\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)=m$，因此 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关，充分性成立；当 $m=1$ 时，考虑 $\alpha_1=(1,0)^T,\beta_1=(0,1)^T$ 均线性无关，但 α_1 与 β_1 并不是等价的，必要性不成立.

(D) 剩下(D)为正确选项. 事实上，矩阵 $A=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)$ 与矩阵 $B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$ 等价 $\Leftrightarrow$ $r\left(A\right)=r\left(B\right)\Leftrightarrow r\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)=r\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)=m$，因此是向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充要条件.

(5)【答案】B.

【详解】ξ 和 η 不相关的充分必要条件是它们的相关系数

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{Cov\left(\xi,\eta\right)}{\sqrt{D\left(\xi\right)}\cdot\sqrt{D\left(\eta\right)}}=0\Leftrightarrow Cov\left(\xi,\eta\right)=0$$

由协方差的性质：$\operatorname{cov}(aX+bY,Z)=a\operatorname{cov}(X,Z)+b\operatorname{cov}(Y,Z)$

故 $$Cov\left(\xi,\eta\right)=Cov\left(X+Y,X-Y\right)$$

$$=Cov\left(X,X\right)-Cov\left(X,Y\right)+Cov\left(Y,X\right)-Cov\left(Y,Y\right)$$

$$=Cov\left(X,X\right)-Cov\left(Y,Y\right)=D\left(X\right)-D\left(Y\right)$$

可见 $$Cov\left(\xi,\eta\right)=0\Leftrightarrow D\left(X\right)-D\left(Y\right)=0\Leftrightarrow D\left(X\right)=D\left(Y\right)$$

$$\Leftrightarrow E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$$ (由方差定义 $DX=EX^2-(EX)^2$)

故正确选项为(B).

三【分析】由于极限中含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$，故应分别求其左极限与右极限，若左极限与右极限相等，则极限值存在且等于其极限值，否则极限不存在.

【详解】

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1\ ;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1;$$

左极限与右极限相等，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

四【详解】根据复合函数的求导公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

于是 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[f_{11}''x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]y+f_1'+\left[f_{21}''x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]\frac{1}{y}$$

$$+f_2'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+g''\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+g''\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

五【详解】

方法 1：(复连通条件下的封闭曲线积分)

设：(1) L_1 与 L_2 是两条分段光滑的简单封闭曲线，具有相同的走向，(2)在 L_1 与 L_2 所包围的有界闭区域 D_1 与 D_2 的内部除一些点外，$P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 连续并具有连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$. 则

$$\oint_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{L_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

解：以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周的参数方程是：$x=1+R\cos\theta, y=R\sin\theta$，逆时针方向一周为从 $t=0$ 到 $t=2\pi$，代入曲线积分

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

由于分母很繁，计算不方便. 由曲线封闭，可以考虑使用格林公式，但在 L 所包围的区域内部有点 $O(0,0)$，该点处分母为 0，导致被积函数不连续，格林公式不能用.

记 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$, 且 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{y^2-4x^2}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$,

$(x,y)\neq(0,0)$. 作足够小的椭圆:

$$L_1:\varepsilon\begin{cases}x=\dfrac{\varepsilon}{2}\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases}(t\in[0,2\pi],C\text{取逆时针方向}),$$

于是 L 与 L_1 及函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 满足"分析"中所述定理的一切条件，于是

$$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

而后一积分可用参数法计算

$$I=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cos t\cdot\varepsilon\cos t-\varepsilon\sin t\cdot\frac{\varepsilon}{2}(-\sin t)}{\varepsilon^2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\varepsilon^2}dt=\pi$$

方法2：记 $P=\dfrac{-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}-\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$，$(x,y)\neq(0,0)$. 在 L 内加 L_1：

椭圆 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 的顺时针方向，则

$$I=\int_{L+L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=\iint_D 0dxdy-\int_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}\qquad (D\text{ 由 }L\text{ 与 }L_1\text{ 所围})$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2dxdy\qquad (D_1:4x^2+y^2\le\varepsilon^2)$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi$$

六【详解】由题设条件，可以用高斯公式:

$$0=\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy$$

$$=\pm\iiint_\Omega\left[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dv$$

其中Ω为S所围成的有界闭区域，当 S 的法向量指向 Ω 外时，"±"中取"+"；当 S 的法向量指向 Ω 内时，"±"中取"−". 由S的任意性，知被积函数应为恒等于零的函数

即 $\qquad xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,(x>0)$

变形后得 $$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},(x>0)$$

这是一阶线性非齐次微分方程，

利用一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解公式：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

其通解为

$$f(x)=e^{\int(1-\frac{1}{x})dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}dx+C\right]=\frac{e^x}{x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot xe^{-x}dx+C\right]=\frac{e^x}{x}\left(e^x+C\right)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}\right)=1$，故必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+Ce^x\right)=0$，(否则不能满足极限值为1)，即 $C+1=0$，从而 $C=-1$.

因此 $$f(x)=\frac{e^x}{x}\left(e^x-1\right).$$

七【定义概念】幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中 a_n,a_{n+1} 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数，则该幂级数的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho} & \rho\neq 0\\ +\infty & \rho=0\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$$

开区间 $(-R,R)$ 叫做幂级数的收敛区间.

【详解】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[3^n+(-2)^n\right]n}{\left[3^{n+1}+(-2)^{n+1}\right](n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[1+(\frac{-2}{3})^n\right]n}{3\left[1+(\frac{-2}{3})^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3}$$

所以收敛半径为$R=3$，相应的收敛区间为$\left(-3,3\right)$.

当$x=3$时，因为

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$$

且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较审敛法的极限形式，所以原级数在点$x=3$处发散；

当$x=-3$ 时， 由于

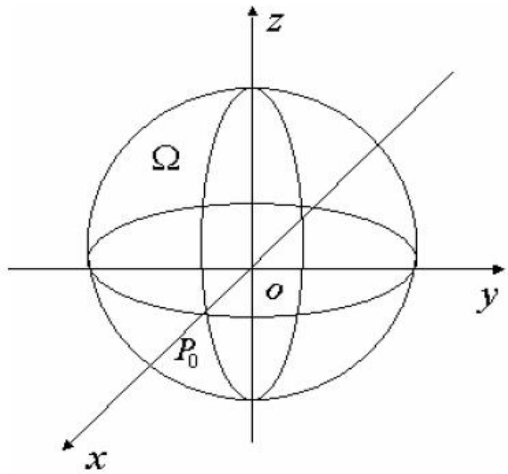
$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{(-3)^n+2^n}{3^n+(-2)^n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\right)\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

分别考虑两个级数，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$是收敛的. 又因$\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n=\infty$，从而

$$\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}<\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

再由$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，根据比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\right)$收敛. 于是$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\right)$收敛，所以原级数在点$x=-3$处收敛. 所以收敛域为$[-3,3)$.

八【详解】本题为一物理应用题，由于重心坐标是相对某一些坐标系而言的，因此本题的关键是建立适当的坐标系，一般来说，可考虑选取球心或固定点P_0作为坐标原点，相应的有两种求解方法.



方法1：记所考虑的球体为Ω，以Ω的球心为坐标原点O, 射线OP_0为正x轴建立直角坐标系，

则球面方程为：$x^2+y^2+z^2=R^2$，点P_0的坐标为$(R,0,0)$，设Ω的重心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得$\bar{y}=0,\bar{z}=0,$ 设μ为Ω上点(x,y,z)处的密度，按题设

$\mu = k\left[(x-R)^2 + y^2 + z^2\right]$，则

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\mu dV}{\iiint\limits_{\Omega} \mu dV} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x \cdot k\left[(x-R)^2 + y^2 + z^2\right] dV}{\iiint\limits_{\Omega} k\left[(x-R)^2 + y^2 + z^2\right] dV}$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega} k\left[(x-R)^2 + y^2 + z^2\right] dV$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} k\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2\right) dV - 2kR\iiint\limits_{\Omega} z dV$$

$$= k\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV + k\iiint\limits_{\Omega} R^2 dV - 0 \quad \text{（利用奇函数的对称性）}$$

$$= 8k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr + \frac{4k}{3}\pi R^5$$

（利用奇偶函数的对称性轮换对称性＋球体体积公式）

$$= 8k \cdot \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \frac{4k}{3}\pi R^5$$

$$= 8k \cdot \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \cdot \left(\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^R + \frac{4k}{3}\pi R^5 \quad \text{（牛-莱公式）}$$

$$= 8k \cdot \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \cdot \frac{R^5}{5} + \frac{4k}{3}\pi R^5$$

$$= \frac{4k\pi R^5}{5}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4k}{3}\pi R^5 \quad \text{（牛-莱公式）}$$

$$= \frac{4k\pi R^5}{5} + \frac{4k}{3}\pi R^5 = \frac{32k\pi R^5}{15}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} kx\left[(x-R)^2 + y^2 + z^2\right] dV$$

$$= k\iiint\limits_{\Omega} x(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) - 2kR\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV$$

其中第一个积分的被积函数为 z 的奇函数，Ω 对称于 xOy 平面，所以该积分值为零，又由于 Ω 关于 x,y,z 轮换对称，所以 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \iiint\limits_{\Omega} y^2 dV$

从而

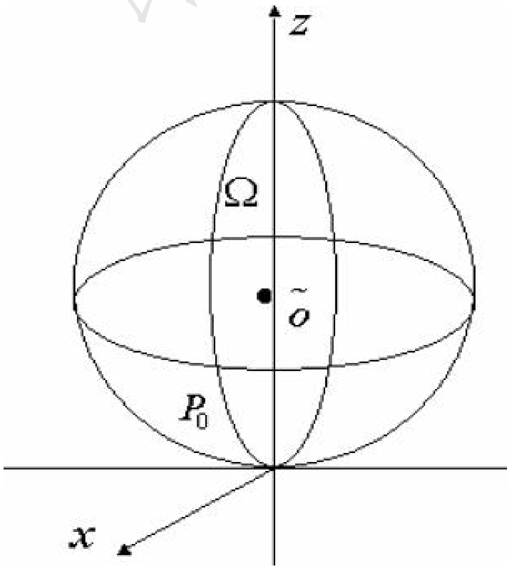
$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dV = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_o^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{4}{15}\pi R^5$$

于是

$$\iiint_{\Omega} kx\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dV = -2kR\cdot\frac{4}{15}\pi R^5 = -\frac{8k}{15}\pi R^6$$

故 $\bar{x}=-\frac{R}{4}$. 因此，球体Ω的重心位置为 $(-\frac{R}{4},0,0)$

方法2：



用Ω表示所考虑的球体，$\widetilde{O}$ 表示球心，以点 P_0 选为原点，射线 $P_0\widetilde{O}$ 为正z轴建立直角坐标系，则球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=2Rz$，设Ω的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$，设 μ 为 Ω 上点 (x,y,z) 处的密度，按题设 $\mu=k\left[x^2+y^2+z^2\right]$

所以 $$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\mu dV}{\iiint_{\Omega}\mu dV}=\frac{\iiint_{\Omega} kz\left(x^2+y^2+z^2\right)dV}{\iiint_{\Omega} k\left(x^2+y^2+z^2\right)dV}$$

因为 $$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr = \frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint_{\Omega} z\left(x^2+y^2+z^2\right)dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\sin\varphi\cos\varphi dr$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6$$

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$. 因此，球体Ω的重心位置为 $(0,0,\frac{5R}{4})$.

九【证明】

方法1：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\le x\le\pi$，有 $F(0)=0,$ 由题设有 $F(\pi)=0$.

又由题设 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，用分部积分，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi \cos xdF(x)$$
$$=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx=\int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使

$$0=\int_0^\pi F(x)\sin xdx=F(\xi)\sin\xi\cdot(\pi-0)$$

因为 $\xi\in(0,\pi)$，$\sin\xi\ne0$，所以推知存在 $\xi\in(0,\pi),$ 使得 $F(\xi)=0$. 再在区间 $[0,\xi]$ 与 $[\xi,\pi]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理，推知存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$ 使 $F'(\xi_1)=0,F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=0,f(\xi_2)=0$

方法2：由 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 及积分中值定理知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=0$. 若在区间 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 仅有一个零点 ξ_1，则在区间 $(0,\xi_1)$ 与 (ξ_1,π) 内 $f(x)$ 异号. 不妨设在 $(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在 (ξ_1,π) 内 $f(x)<0$. 于是由 $\int_0^\pi f(x)dx=0,\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$，有

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx-\int_0^\pi f(x)\cos\xi_1dx=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx$$
$$=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx$$

当 $0<x<\xi_1$ 时，$\cos x>\cos\xi_1$，$f(x)(\cos x-\cos\xi_1)>0$；当 $\xi_1<x<\pi$ 时，$\cos x<\cos\xi_1$，仍有 $f(x)(\cos x-\cos\xi_1)>0$，得到：$0>0$. 矛盾，此矛盾证明了 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 仅有1个零点的假设不正确，故在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)$ 至少有2个不同的零点.

十【分析】本题为解矩阵方程问题，相当于是未知矩阵，其一般原则是先简化，再计算，根据题设等式，可先右乘 A，再左乘 A^*，尽量不去计算 A^{-1}

【详解】**方法 1**：由 $AA^*=A^*A=|A|E$，知 $|A^*|=|A|^{n-1}$，因此有 $8=|A^*|=|A|^3$，

于是 $|A|=2$，所以 $A^*A=2$

等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边先右乘 A，得 $ABA^{-1}A=BA^{-1}A+3EA$

再左乘 A^*，得 $A^*ABA^{-1}A=A^*BA^{-1}A+A^*3EA$

化简 $\Rightarrow |A|BE = A^*BE + 3A^*A \Rightarrow 2B = A^*B + 3|A|E$

$$\Rightarrow 2B = A^*B + 6E \Rightarrow \left(2E - A^*\right)B = 6E,$$

于是

$$B = \left(2E - A^*\right)^{-1}$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(由初等变换法求得)

方法2: $|A| = 2$ (同解1)，由 $AA^* = A^*A = |A|E$，得

$$A = |A|\left(A^*\right)^{-1} = 2\left(A^*\right)^{-1} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

(由初等变换法求得)，可见 $A-E$ 为逆矩阵.

于是，由 $\left(A-E\right)BA^{-1} = 3E$，有 $B = 3\left(A-E\right)^{-1}A$, 而

$$\left(A-E\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

因此

$$B = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

方法3：由题设条件 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，得 $\left(A-E\right)BA^{-1} = 3E$.

知：$A-E$，B 均是可逆矩阵，且

$$B = 3\left(A-E\right)^{-1}A = 3\left[A^{-1}\left(A-E\right)\right]^{-1} = 3\left(E - A^{-1}\right)^{-1} = 3\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1}$$

由$\left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$，其中$n=4$，$\left|A^*\right|=8$，得 $\left|A\right|=2$故

$$B = 3\left(E - \frac{A^*}{2}\right)^{-1} = 3\cdot\left(\frac{2E-A^*}{2}\right)^{-1} = 6\left(2E-A^*\right)^{-1}$$

其中

$$2E - A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix},\ \left(2E-A^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

所以 $$B = 6\left(2E-A^*\right)^{-1} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

十一【详解】(1)由题意，$\frac{1}{6}x_n + y_n$是非熟练工人数，$\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right)$是年终由非熟练工人变成的熟练工人数，$\frac{5}{6}x_n$是年初支援其他部门后的熟练工人数，根据年终熟练工的人数列出等式(1)，根据年终非熟练工人人数列出等式(2)得

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) & (1) \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{1}{15}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}，即 \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

可见

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

(2) 把η_1，η_2作为列向量写成矩阵的形式(η_1,η_2)，因为其行列式

$$\left|(\eta_1,\eta_2)\right| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

矩阵为满秩，由矩阵的秩和向量的关系可见η_1,η_2线性无关.

又

$$A\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{9}{10} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\eta_1,\ A\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2,$$

由特征值、特征向量的定义，得η_1为A的属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量，η_2为A 的属于特征值$\lambda_2=\frac{1}{2}$特征向量.

(3)因为

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{pmatrix}\cdots=A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因此只要计算A^n即可. 令

$$P=(\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix},$$

则由$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$，有 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$,

于是

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}^n P^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}$$

其中求逆矩阵的过程为：

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\4 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\\0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

所以 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

因此

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

十二【分析】此分布为一典型分布——几何分布.

【详解】显然 X 是一个离散型随机变量. 取值范围为 1，2，3，……现在关键在于建立 X 的分布律. 生产线上每个产品的生产可理解为一个试验. 各个产品合格与否是相互独立的，可以看成是各次试验是相互独立的.生产了个产品停机，应该理解为第 X 个产品是不合格产品，而前 $X-1$ 个产品则必为合格产品，这就不难写出分布律.

记 $q=1-p, X$ 的概率分布为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p,(k=1,2\cdots)$. 由离散型随机变量的数学期望定义得，X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)'=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{1}{p}$$

因为

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=p\left[q\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'\right]'=p\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]'=\frac{2-p}{p^2}$$

(因为幂级数在其收敛区间内可逐项求导的性质，上面求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$ 时都用到了先求导化为易求和的级数，再积分还原的过程.)

故 X 的方差为

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

十三【概念】最大似然估计，实质上就是找出使似然函数最大的那个参数，问题的关键在于构造似然函数. 似然函数的定义：

设 $x_1,x_2,...,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,...,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为：

$$L(\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$$

【详解】似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x\ge\theta(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, \qquad \text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i\ge\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$，所以 $\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$.

(由于 $\ln L$ 是单调递增函数，L 取最大与 $\ln L$ 取最大取到的 θ 是一致的，而加对数后能把连乘转换成累加，这样求导，找极值比较方便)

而

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0,$$

所以 $L(\theta)$ 单调增加. 要使得 $L(\theta)$ 值最大，θ 是越大越好.

又由于 θ 必须满足 $x_i\ge\theta(i=1,2,\cdots,n)$，因此当 θ 取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值时，

$x_i\ge\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 恒成立，且此时 $L(\theta)$ 取最大值，所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$