2017年考研数学一真题及答案解析

一、选择题： **1～8** 小题，每小题 **4** 分，共 **32** 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上 **.**

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

$(A) ab=\dfrac{1}{2}$　　　　$(B) ab=-\dfrac{1}{2}$

$(C) ab=0$　　　　$(D) ab=2$

【答案】 A

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，$\because$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore \dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选 A.

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

$(A)\ f(1)>f(-1)$　　$(B)\ f(1)<f(-1)$

$(C)\ |f(1)|>|f(-1)|$　　$(D)\ |f(1)|<|f(-1)|$

【答案】 C

【解析】 $\because$ $f(x)f'(x)>0$, $\therefore \begin{cases}f(x)>0\\ f'(x)>0\end{cases}(1)$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)<0\end{cases}(2)$，只有 C 选项满足 (1) 且满足 (2)，所以选 C。

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $u=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）

(A)12　　(B)6　　(C)4　　(D)2

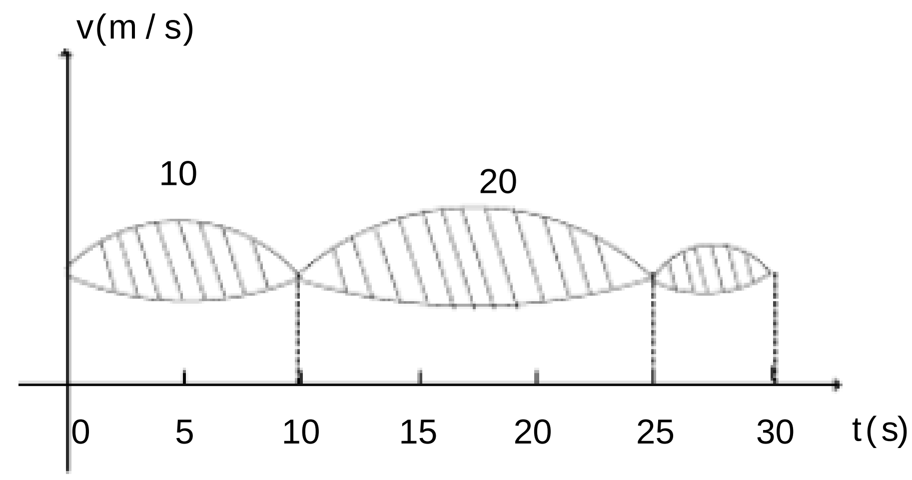
【答案】 D

【解析】 $gradf=\{2xy,x^2,2z\}$, $\Rightarrow$ $gradf\,\big|_{(1,2,0)}=\{4,1,0\}\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial u}=gradf\cdot\dfrac{u}{|u|}=\{4,1,0\}\ \{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\}=2.$

选 D.

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单

位：m/s），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则（　　）



$(A)t_0=10$　　$(B)15<t_0<20$　　$(C)t_0=25$　　$(D)t_0>25$

【答案】 B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)dt, \int_0^{t_0} v_2(t)dt$，则乙要追上甲，则 $\int_0^{t_0} v_2(t)-v_1(t)dt=10$，当 $t_0=25$ 时满足，故选 C.

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

$(A)E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　$(B)E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

$(C)E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　$(D)E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【答案】 A

【解析】选项 A, 由 $(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha=0$ 得 $(E-\alpha\alpha^T)x=0$ 有非零解，故 $\left|E-\alpha\alpha^T\right|=0$。即 $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆。选项 B, 由 $r(\alpha\alpha^T)\alpha=1$ 得 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 n-1 个 0，1.故 $E+\alpha\alpha^T$ 的特征值为 n-1 个 1，2.故可逆。其它选项类似理解。

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则（　）

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

【答案】 B

【解析】由 $(\lambda E-A)=0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1

因为 $3-r(2E-A)=1$，$\therefore$ A 可相似对角化，且 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-B|=0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3-r(2E-B)=2$，$\therefore$ B 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，

$\therefore$ $A\sim C$，且 B 不相似于 C

（7）设 A,B 为随机概率，若 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是（　　）

(A) $P(B|A)>P(B|\bar{A})$　　(B) $P(B|A)<P(B|\bar{A})$

(C) $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$　　(D) $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$

【答案】 A

【解析】按照条件概率定义展开，则A选项符合题意。

（8）设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是（　　）

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　(D) $n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

【答案】 B

【解析】

$$X\sim N(\mu,1), X_i-\mu\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n), \text{A正确}$$

$$\Rightarrow (n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1), \quad \text{C正确},$$

$$\Rightarrow \bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}), \sqrt{n}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1), n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1), \text{D正确},$$

$$\Rightarrow \sim N(0,2), \frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1), \text{故B错误}.$$

由于找不正确的结论，故　B 符合题意。

二、填空题： **9-14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分，请将答案写在答题纸指定位置上 **.**

(9) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________

【答案】 $f(0)=-6$

【解析】

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\Rightarrow f'''(0)=0$$

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________

【答案】 $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$，（$c_1,c_2$ 为任意常数）

【解析】齐次特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1+\sqrt{2}i$

故通解为 $e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

(11) 若曲线积分 $\int_L\dfrac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$________

【答案】 $a=1$

【解析】 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，由积分与路径无关知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=-1$

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$________

【答案】 $s(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

【解析】 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$$

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为

【答案】 2

【解析】由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，可知矩阵 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可逆，故

$r(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=r(A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=r(A)$ 再由 $r(A)=2$ 得 $r(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=2$

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$________

【答案】 2

【解析】 $F'(x)=0.5\varphi(x)+\frac{0.5}{2}\varphi(\frac{x-4}{2})$，故 $EX=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=EX=0$。令 $\frac{x-4}{2}=t$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}(4+2t)\varphi(t)dt=8\cdot1+4\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt=8$

因此 $E(X)=2$.

三、解答题： **15—23** 小题，共 **94** 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1),\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1),$

【解析】

$$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$$

$$\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\left(f_1'e^x+f_2'(-\sin x)\right)\right|_{x=0}=f_1'(1,1)\cdot1+f_2'(1,1)\cdot0=f_1'(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}''e^{2x}+f_{12}''e^x(-\sin x)+f_{21}''e^x(-\sin x)+f_{22}''\sin^2x+f_1'e^x-f_2'\cos x$$

$$\Rightarrow\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

结论：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

（16）（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,dx^2=\frac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx)=\frac{1}{4}$$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$，极小值为 $y(-1)=0$

【解析】

两边求导得：

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0 \qquad (1)$$

令 $y'=0$ 得 $x=\pm1$

对（1）式两边关于 x 求导得 $6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$ （2）

将 $x=\pm1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ or $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$，

将 $x=1,y=1$ 代入（2）得 $y''(1)=-1<0$

将 $x=-1,y=0$ 代入（2）得 $y''(-1)=2>0$

故 $x=1$ 为极大值点， $y(1)=1$ ； $x=-1$ 为极小值点， $y(-1)=0$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(II) 方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

（I） $f(x)$ 二阶导数， $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0,\forall x\in(0,\delta)$ 有 $\frac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)$有$f(\delta)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0, f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$，$\exists\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理 $\exists\eta\in(0,\xi)$, 使 $f'(\eta)=0$，则 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$,

对 $F(x)$ 在 $(0,\eta),(\eta,\xi)$ 分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$ 且 $\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$，使得 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在 $(0,1)$ 至少有两个不同实根。

得证。

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为

$\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。记圆锥面与柱面的交线为 C

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(II) 求 S 的 M 质量。

【答案】 64

【解析】

（1）由题设条件知， C 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2x$

则 C 在 xoy 平面的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$

（2）

$$m=\iint_{S}\mu(x,y,z)dS=\iint_{S}9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=\iint_{D:x^2+y^2\le 2x}9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=64$$

（20）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(Ⅰ) 证明 $r(A)=2$；

(Ⅱ) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

【答案】（Ⅰ）略；（Ⅱ）通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

（Ⅰ）证明：由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 可得 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&0\end{pmatrix},\lambda_1\ne\lambda_2\ne0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（Ⅱ）由（1）$r(A)=2$，知 $3-r(A)=1$，即 $Ax=0$ 的基础解系只有 1 个解向量，

由 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$ 可得 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则 $Ax=0$ 的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

又 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则 $Ax=\beta$ 的一个特解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

综上，$Ax=\beta$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $X=QY$ 下的标准型 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q

【答案】 $a=2;Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $f \stackrel{x=Qy}{=\!=} -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，

故 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 -3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$,,

则 $Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$f\overset{x=Qy}{=}-3y_1^2+6y_2^2$

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

(Ⅰ) 求 $P(Y\le EY)$

(Ⅱ) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

【答案】 (I) $P\{Y\le EY\}=\frac{4}{9}$;(II) $f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1 \\ z-2, & 2<z<3\end{cases}$

【解析】

(Ⅰ)$E(Y)=\int_0^1 y2ydy=\frac{2}{3}$

$P(Y\le EY)=P(Y\le\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$

(Ⅱ)$F_z(Z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$=P(X+Y\le z,X=0)+P(X+Y\le z,X=2)$

$=P(Y\le z,X=0)+P(Y\le z-2,X=2)$

$=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)$

（1） 当 $z<0,z-2<0$，而 $z<0$，则 $F_z(Z)=0$

（2） 当 $z-2\geq 1, z>1$,即 $z\geq 3$时， $F_z(Z)=1$

（3）当 $0\leq z<1$时， $F_z(Z)=\frac{1}{2}z^2$

（4）当 $1\leq z<2$ 时， $F_z(Z)=\frac{1}{2}$

（5）当 $2\leq z<3$时， $F_z(Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$

所以综上 $F_z(Z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ \frac{1}{2}z^2, & 0\leq z<1 \\ \frac{1}{2}, & 1\leq z<2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2, & 2\leq z<3 \\ 1, & z\geq 3 \end{cases}$

所以 $f_z(Z)=[F_z(Z)]'=\begin{cases} z & 0<z<1 \\ z-2 & 2<z<3 \end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=\left|X_i-\mu\right|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1, Z_2\cdots Z_n$ 估计 σ 。

(Ⅰ) 求 Z_i 的概率密度；

(Ⅱ) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量

【答案】

(Ⅰ) $f_{Z_i}(z)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$;

(Ⅱ) 矩估计 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|$;

(Ⅲ) 最大似然估计： $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

【解析】 (Ⅰ) $F_{Z_i}(z)=P(Z_i\leq z)=P(\left|X_i-\mu\right|\leq z)$

当 $z<0, F_{z_i}(z)=0$

当 $z\ge 0, F_{z_i}(z)=P(-z\le X_i-\mu\le z)=P(\mu-z\le X_i\le\mu+z)=F_X(\mu+z)-F(\mu-z)$

当 $z\ge 0$ 时,

$$\therefore f_{z_i}(z)=(F_{z_i}(z))'=f_x(\mu+z)+f_x(\mu-z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

综上 $f_{z_i}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$

$$(\Pi)E(Z_i)=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz^2$$

$$=\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}d(-\frac{z^2}{2\sigma^2})=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

令 $E(Z_i)=\bar{Z}$ $\qquad \bar{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

由此可得 σ 的矩估计量 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

对总体 X 的 n 个样本 $X_1, X_2, \cdots X_n$, 则相交的绝对误差的样本 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_i=|x_i-u|, i=1,2...n$, 令其样本值为 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n, Z_i=|x_i-u|$

则对应的似然函数 $L(\sigma)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}{2\sigma^2}}, Z_1, Z_2, \cdots Z_n>0\\ 0, 其他\end{cases}$

两边取对数，当 $Z_1, Z_2, \cdots Z_n>0$ 时

$$\ln L(\sigma)=n\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

令 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\dfrac{n}{u}+\dfrac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=0$

所以, $\dot{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2}$ 为所求的最大似然估计。