2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 _____

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为. ______

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，则

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}=$_______________.

(4) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$__________________.

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$____.

(6) 从数 1,2,3,4 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则

$P\{Y=2\}=$ ___________ .

二、选择题：7-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　)

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有(　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数.　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数.　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数.

(9) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，则必有( )

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(10) 设有三元方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程( )

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数和$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$.

(11) 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是( )

(A) $\lambda_1\neq 0$.　　(B) $\lambda_2\neq 0$.　　(C) $\lambda_1=0$.　　(D) $\lambda_2=0$.

(12) 设A为n ($n\geq 2$)阶可逆矩阵，交换A的第 1 行与第 2 行得矩阵B，A^*,B^*分别为A，B的伴随矩阵，则( )

(A) 交换A^*的第 1 列与第 2 列得B^*.　　(B) 交换A^*的第 1 行与第 2 行得B^*.

(C) 交换A^*的第 1 列与第 2 列得$-B^*$.　　(D) 交换A^*的第 1 行与第 2 行得$-B^*$.

(13) 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为( )

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) $a=0.2,b=0.3$　　(B) $a=0.4,b=0.1$

(C) $a=0.3,b=0.2$　　(D) $a=0.1,b=0.4$

(14) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则( )

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$ (B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 11 分)

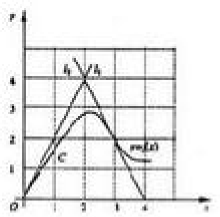
设 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$，$[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1 + x^2 + y^2]dxdy.$

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y = f(x)$，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x)dx.$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明：

(I)存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$；

(II)存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta) f'(\zeta) = 1.$

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分

$\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

(I)证明：对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$；

(II)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值；

(II) 求正交变换 $x = Qy$，把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形；

(III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3)$=0 的解.

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a,b,c),a,b,c$ 不全为零,矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数)，且 $AB = 0$，求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$

求：(I) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1,2,\cdots,n.$

求：(I) Y_i 的方差 $DY_i, i = 1,2,\cdots,n$；　　(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$

【详解】由求斜渐近线公式 $y=ax+b$ (其中 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$， $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$)，得：

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+x}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4},$$

所以所求斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$

(2)【答案】 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

【详解】求方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的解，有公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \text{ (其中 } C \text{ 是常数).}$$

将原方程等价化为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，于是利用公式得方程的通解

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln xdx+C]=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2}, \text{(其中 } C \text{ 是常数)}$$

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x.$

(3)【答案】 $\sqrt{3}/3$

【详解】设 $f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数, $\vec{l^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 为给定的向量 $\vec{l}$ 的单位向量,则 $f(x,y,z)$ 沿 $\vec{l}$ 方向的方向导数计算公式为 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$.

因为$u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$,所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$，且向量$\vec{n}$的

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

于是所求方向导数为$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(4)【答案】$(2-\sqrt{2})\pi R^3$

【详解】如果设函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续偏导数,则有：

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy,$$

其中$\sum$是Ω的整个边界曲面的外侧.

以Ω表示由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$所围成的有界闭区域，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz$$

利用球面坐标得

$$\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=3\int_0^R\rho^2d\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3=(2-\sqrt{2})\pi R^3$$

(5)【答案】2

【详解】

方法 1：因为$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$,

$$(\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix},$$

故 $B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$,

记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式，于是有

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2.$$

方法 2：利用行列式性质(在行列式中，把某行的各元素分别乘以非零常数加到另一行的对应元素上，行列式的值不变；从某一行或列中提取某一公因子行列式值不变)

$$|B| = |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$

$$\overset{[2]-[1]}{\underset{[3]-[1]}{=\!=\!=\!=}} |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, 2\alpha_2+8\alpha_3| \overset{[3]-2[2]}{=\!=\!=\!=} |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, 2\alpha_3|$$

$$=2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+3\alpha_3, \alpha_3| \overset{[1]-[3]}{\underset{[2]-3[3]}{=\!=\!=\!=}} 2|\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3| \overset{[1]-[2]}{=\!=\!=\!=} 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$$

又因为 $|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 1$，故 $|B| = 2|A| = 2$.

(6)【答案】$\dfrac{13}{48}$

【详解】 由全概率公式：

$$P\{Y=2\} = P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\} + P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$$

$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\} + P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}$$

X 表示从数 1,2,3,4 中任取一个数，故 X 是等可能取到 1,2,3,4，所以 $P(X=i)=\dfrac{1}{4}$，$i=1,2,3,4$

而 Y 表示从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，也就是说 Y 是等可能取到 $1,2,\cdots,X$

也就是说 Y 在 X 的条件下等可能取值，即

$P\{Y=2|X=1\}=0$ (X 取 1 的条件下，Y 取 2 是不可能事件)

$P\{Y=2|X=2\}=\dfrac{1}{2}$ (X 取 2 的条件下，Y 在 1，2 等可能取值)

$P\{Y=2|X=3\}=\dfrac{1}{3}$ (X 取 3 的条件下，Y 在 1，2，3 等可能取值)

$P\{Y=2|X=4\}=\dfrac{1}{4}$ (X 取 4 的条件下，Y 在 1，2，3，4 等可能取值)

故 $$P\{Y=2\} = P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\} + P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}$$

$$+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\} + P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\} = \frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{48}.$$

二、选择题

(7)【答案】C

【详解】分段讨论，并应用夹逼准则，

当$|x|<1$时，有$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} \le \sqrt[n]{2}$，命$n \to \infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，由夹逼准则得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$；

当$|x|=1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$；

当$|x|>1$时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}|x|^3$，命$n \to \infty$取极限，得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=|x|^3$，由夹逼准则得$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3(\frac{1}{|x|^{3n}}+1)^{\frac{1}{n}}=|x|^3$.

所以 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ \left|x^3\right|, & |x|\ge 1\end{cases}$

再讨论$f(x)$的不可导点. 按导数定义，易知$x=\pm 1$处$f(x)$不可导，故应选(C).

(8)【答案】A

【详解】

方法 1：应用函数奇偶性的定义判定，

函数$f(x)$的任一原函数可表示为$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，且$F'(x)=f(x)$.

当$F(x)$为偶函数时，有$F(-x)=F(x)$，于是$F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即$-f(-x)=f(x)$，亦即$f(-x)=-f(x)$，可见$f(x)$为奇函数；

反过来，若$f(x)$为奇函数，则$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C$，令$t=-k$，则有$dt=-dk$，

所以 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C=-\int_0^x f(-k)dk+C=\int_0^x f(k)dk+C=F(x)$，

从而 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ 为偶函数，可见(A)为正确选项.

方法 2：排除法，

令$f(x)=1$，则取$F(x)=x+1$，排除(B)、(C);

令$f(x)=x$， 则取$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D);

(9)【答案】B

【详解】因为$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)，$$

于是 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

(10)【答案】D

【详解】隐函数存在定理：设 $F(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某领域内具有连续的一阶偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0,F_z{}'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.则存在点 M_0 的某邻域,在此邻域内由方程 $F(x,y,z)=0$ 可以确定唯一的连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $z(x_0,y_0)=z_0$,且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\left.\frac{F_x{}'(x,y,z)}{F_z{}'(x,y,z)}\right|_{M_0},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-\left.\frac{F_y{}'(x,y,z)}{F_z{}'(x,y,z)}\right|_{M_0}$$

同理，如果 $F(x_0,y_0,z_0)=0,F_y{}'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,可确定 $y=y(x,z)$ 满足 $y_0=y(x_0,z_0)$;

$F(x_0,y_0,z_0)=0,F_x{}'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,可确定 $x=x(y,z)$ 满足 $x_0=x(y_0,z_0)$.

本题中可令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$，则

$$F_x'=y+e^{xz}z,\quad F_y'=x-\frac{z}{y},\quad F_z'=-\ln y+e^{xz}x,$$

所以 $F_x'(0,1,1)=2\neq 0$，$F_y'(0,1,1)=-1\neq 0$，$F_z'(0,1,1)=0$.

由于 $F_z'(0,1,1)=0$，所以由隐函数存在定理知，不一定能确定具有连续偏导数的函数 $z=z(x,y)$，所以排除(A)、(B)、(C)，而 $F_x'(0,1,1)=2\neq 0$ 和 $F_y'(0,1,1)=-1\neq 0$，所以可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故应选(D).

(11)【答案】B

【详解】

方法 1：利用线性无关的定义

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

设有数 k_1,k_2，使得 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，则

$$k_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0 \Rightarrow (k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0.$$

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故 α_1,α_2 线性无关，则

$$\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1=0, \\ k_2\lambda_2=0. \end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$ 时，方程只有零解，则 $k_1=0,k_2=0$，此时 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关；反过来，若 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则必然有 $\lambda_2\neq 0$ (否则，α_1 与 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1$ 线性相关)，故应选(B).

方法 2：将向量组的表出关系表示成矩阵形式

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2 \Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

由于 $\left(\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，知 α_1,α_2 线性无关. 若 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关，则 $r\left(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=2$，则

$$2=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)\le \min\left\{r\left(\alpha_1,\alpha_2\right), r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right\}\le r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\le 2,$$

故 $2\le r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\le 2$ 从而 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2$，从而 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$

若 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$，则 $r\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=2$，又 α_1,α_2 线性无关，则

$$r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right)=r\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=2,$$

则

$$r\left(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)\right)=r\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right)=2$$

从而α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$.故应选(B).

方法 3：利用矩阵的秩

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

因$\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1,α_2线性无关，又

$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，故$\alpha_1$，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=2$

又因为 $\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)\overset{\text{将}\alpha_1\text{的}-\lambda_1\text{倍加到第2列}}{=}\left(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2\right)$

则$r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$ (若$\lambda_2=0$，与$r(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=2$矛盾)

方法 4：利用线性齐次方程组

α_1,α_2分别是特征值λ_1,λ_2对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有

$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

由$\lambda_1\neq\lambda_2$，因不同特征值对应的特征向量必线性无关，故α_1,α_2线性无关，

$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关

$\Leftrightarrow\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$线性无关

$\Leftrightarrow\left|\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right|\neq 0$，

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)X=0$只有零解，又$\left(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$只有零解

$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2$线性无关时$\left(\alpha_1,\alpha_2\right)Y=0$只有零解，故$Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$，只有零解，

$\Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ 的系数矩阵是个可逆矩阵，

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$，故应选(B)

方法 5：由 $\lambda_1\neq\lambda_2$，α_1,α_2 线性无关

α_1,α_2 分别是特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量，根据特征值、特征向量的定义，有 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\Rightarrow A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

向量组 $(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2$ 和向量组 $(\mathrm{II}):\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$. 显然向量组 (II) 可以由向量组 (I) 线性表出；当 $\lambda_2\neq 0$ 时，不论 λ_1 的取值如何，向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出

$$\alpha_1=\alpha_1，\ \alpha_2=(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\alpha_1)+\frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\alpha_1+\frac{1}{\lambda_2}A(\alpha_1+\alpha_2)，$$

从而 (I)，(II) 是等价向量组 $\Rightarrow$ 当 $\lambda_2\neq 0$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=2$

(12)【答案】(C)

【详解】

方法 1：由题设，存在初等矩阵 E_{12} (交换 n 阶单位矩阵的第 1 行与第 2 行所得)，使得 $E_{12}A=B$，(A 进行行变换，故 A 左乘初等矩阵)，于是 $B^*=(E_{12}A)^*=A^*E^*_{12}$，

又初等矩阵都是可逆的，故 $E_{12}{}^{-1}=\dfrac{E_{12}{}^*}{|E_{12}|}$，

又 $|E_{12}|=-|E|=-1$ (行列式的两行互换，行列式反号)，$E_{12}{}^{-1}=E_{12}$，故

$$B^*=A^*E^*_{12}=A^*|E_{12}|\cdot E_{12}{}^{-1}=-A^*E_{12}{}^{-1}=-A^*E_{12}，$$

即 $A^*E_{12}=-B^*$,可见应选(C).

方法 2：交换 A 的第一行与第二行得 B，即 $B=E_{12}A$.

又因为 A 是可逆阵，$|E_{12}|=-|E|=-1$，故 $|B|=|E_{12}A|=|E_{12}||A|=-|A|\neq 0$，

所以 B 可逆，且 $B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}$.

又 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|},B^{-1}=\dfrac{B^*}{|B|}$，故 $\dfrac{B^*}{|B|}=\dfrac{A^*}{|A|}E_{12}$，又因 $|B|=-|A|$，故 $A^*E_{12}=-B^*$.

(13)【答案】B

【详解】

方法 1: 由二维离散型随机变量联合概率分布的性质 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$，有 $0.4+a+b+0.1=1$，

可知 $a+b=0.5$，又事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，于是由独立的定义有：

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\},$$

而 $$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b=0.5$$

由边缘分布的定义：

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a$$

代入独立等式，得 $a=(0.4+a)\times 0.5$，解得 $a=0.4,b=0.1$，

方法 2：如果把独立性理解为：$P\{X+Y=1|X=0\}=P\{X+Y=1\}$ (因为独立，所以 $\{X+Y=1\}$ 发生与 $\{X=0\}$ 发不发生没有关系)，即

$$P\{Y=1\mid X=0\}=P\{X+Y=1\}=a+b=0.5;$$

所以 $$P\{Y=0|X=0\}=1-P\{Y=1|X=0\}=1-0.5=0.5;$$

因此 $$P\{Y=1\mid X=0\}=P\{Y=0|X=0\}=0.5$$

上式两边同乘以 $P\left\{X=0\right\}$，有 $P\{Y=1\mid X=0\}P\left\{X=0\right\}=P\{Y=0|X=0\}P\left\{X=0\right\}$

由乘法公式：$P(AB)=P(A\mid B)P(B)$，上式即为 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=1\}$

即 $0.4=a$. 又因为 $a+b=0.5$，得 $b=0.1$.

(14)【答案】D

【概念】F 分布的定义：若 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则 $\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$

χ^2 分布的定义：若 $Z_1,\cdots,Z_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则

$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$

正态分布标准化的定义：若$Z \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{Z-u}{\sigma} \sim N(0,1)$

【详解】因$X_1,X_2,\cdots,X_n(n \ge 2)$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本，独立正态分布的线性组合也服从正态分布，故$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(0,\frac{1}{n})$.

将其标准化有：$\frac{\overline{X}-0}{1/\sqrt{n}}=\sqrt{n}\overline{X} \sim N(0,1)$，故(A)错

又$\frac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$，故(C)错;

而$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{1^2}=(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$，不能断定(B)是正确选项.

又 $X_1^2 \sim \chi^2(1),\sum_{i=2}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$，且$X_1^2 \sim \chi^2(1)$与$\sum_{i=2}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$相互独立，

于是$\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2\Big/(n-1)}=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2} \sim F(1,n-1)$. 故应选(D).

三、解答题

(15)【详解】

方法1：令 $D_1=\{(x,y)|\ 0 \le x^2+y^2<1, x \ge 0, y \ge 0\}$，

$D_2=\{(x,y)|\ 1 \le x^2+y^2 \le \sqrt{2}, x \ge 0, y \ge 0\}$.

于是有 $[1+x^2+y^2]=\begin{cases}1, & 当（x,y)\in D_1\\ 2, & 当（x,y)\in D_2\end{cases}$

从而

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\iint_{D_1}xydxdy+\iint_{D_2}2xydxdy \text{ (二重积分对区域的可加性)}$$

$$=\iint_{D_1}xydxdy+2\iint_{D_2}xydxdy \text{ (用极坐标把不同区域上的二重积分化为累次积分)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3dr \text{ (根据牛—莱公式)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\frac{r^4}{4}\Big|_0^1+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\frac{r^4}{4}\Big|_1^{\sqrt[4]{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta+2\times\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta \quad (\text{凑微分})$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

方法 2：用极坐标

$$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta\bullet[1+r^2]dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\bullet[1+r^2]dr \ (\text{根据牛—莱公式})$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\bullet[1+r^2]dr=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\bullet[1+r^2]dr.$$

而 $$[1+r^2]=\begin{cases}1 & 0\le r<1\\ 2 & 1\le r<\sqrt[4]{2}\end{cases}$$

从而 $$\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3dr+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3dr\right) \ (\text{定积分对区域的可加性})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1+2\times\frac{r^4}{4}\Big|_1^{\sqrt[4]{2}}\right) \ (\text{根据牛—莱公式})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(2-1)\right)=\frac{3}{8}$$

(16)【详解】因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(1+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right)x^{2n+2}}{(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\bullet\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}x^2=x^2,$$

所以，由比值判别法知，当 $x^2<1$ 时，原级数绝对收敛，当 $x^2>1$ 时，原级数发散，因此原级数的收敛半径为 1，收敛区间为(－1,1). 另外，当 $x=\pm1$ 时由于通项极限不为零，故原幂级数在 $x=\pm1$ 处为发散的.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=S_1(x)+S_2(x)\text{，}\quad x\in(-1,1)$$

对 $S_1(x)$，由等比级数求和公式 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$ 得

$$S_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=-\frac{-1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\text{，}\quad x\in(-1,1)$$

对 $S_2(x)$，则由幂级数在收敛区间上可导并有逐项求导公式得

$$S_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1},x\in(-1,1)\text{，}$$

同理可得

$$S_2''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=2\cdot\frac{1}{1+x^2}\text{，}\quad x\in(-1,1)$$

可得 $S_2(0)=0,S_2'(0)=0,$

所以，由牛—莱公式得

$$S_2'(x)=S_2'(0)+\int_0^x S_2''(t)dt=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan x,\qquad x\in(-1,1)$$

同理得

$$S_2(x)=S_2(0)+\int_0^x S_2'(t)dt=2\int_0^x\arctan t\,dt$$

$$=2t\arctan t\,|_0^x-2\int_0^x t\,d\arctan t\qquad\text{(分部积分)}$$

$$=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\qquad\text{(计算出微分)}$$

$$=2x\arctan x-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}d(1+t^2)\qquad\text{(凑微分)}$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+t^2)\,|_0^x\qquad\text{(基本积分表中的公式)}$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\qquad x\in(-1,1)$$

从而 $$f(x)=S_1(x)+S_2(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2)\quad,\quad x\in(-1,1).$$

(17)【详解】由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点(0,0)的切线，由导数的几何意义知 $f'(0)=2$. 同理可得 $f'(3)=-2$. 另外由点(3,2)是曲线 C 的

一个拐点知 $f''(3)=0$.

由分部积分公式，

$$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3 (x^2+x)df''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=(3^2+3)f''(3)-(0^2+0)f''(0)-\int_0^3 f''(x)(2x+1)dx$$

$$=-\int_0^3 (2x+1)df'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=-(2\times 3+1)f'(3)+(2\times 0+1)f'(0)+2\int_0^3 f'(x)dx$$

$$=16+2[f(3)-f(0)]=20.$$

(18)【详解】

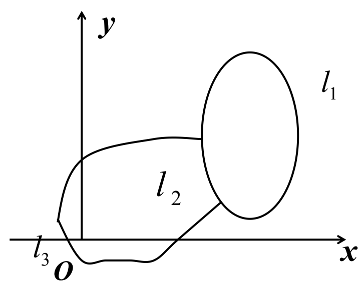
(I) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在[0，1]上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，于是由闭区间连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(II) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

于是 $\quad f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1.$

(19)【详解】

(I) 如图，将 C 分解为：$C=l_1+l_2$，另作一条曲线 l_3 围绕原点且与 C 相接，则



$$\oint_C \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$$

$$=\oint_{l_1+l_3}\frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}-\oint_{l_2+l_3}\frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0.$$

(II) 设 $P=\dfrac{\varphi(y)}{2x^2+y^4},Q=\dfrac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P,Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数，由(I)知，曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 在该区域内与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 经计算，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y(2x^2+y^4)-4x\bullet 2xy}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2} \qquad ②$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y & ③\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5 & ④\end{cases}$$

由③得 $\varphi(y)=-y^2+c$，将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5-4cy^3=2y^5$,

所以 $c=0$，从而 $\varphi(y)=-y^2$.

(20)【详解】 (I) 二次型对应矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

由二次型的秩为 2，知 $r\left(A\right)=2<3$，所以 $|A|=0$，

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第3行展开}}}\ 2\cdot(-1)^{3\times 3}\cdot\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=2\times[(1-a)^2-(1+a)^2]=-8a=0,$$

得 $a=0$.

(II) 当 $a=0$ 时，$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$， 所以

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{pmatrix}$$

两边取行列式，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\cdot(-1)^{3\times 3}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-1)^2-1]\ \ =(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(\lambda-2)^2$$

令$|\lambda E-A|=0$，解得$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$，故$A$有特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，根据特征值的定义，有$(2E-A)X=0$，即$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$，

$r\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$，因为未知数个数为3，故$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$的基础解系中含有2个(未知数的个数-系数矩阵的秩)线性无关的解，同解方程组为$x_1-x_2=0$，选x_2,x_3为自由未知量，分别取$x_2=1,x_3=0$和$x_2=0,x_3=1$，得特征向量为：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

(根据特征向量的定义，α_1,α_2即为特征值λ_1,λ_2所对应的特征向量)因为$\alpha_1\cdot\alpha_2=0$，故α_1,α_2正交.

当$\lambda_3=0$时，由$(0E-A)X=0\Rightarrow -AX=0\Rightarrow AX=0$，即

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

对系数矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{2行-1行}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

故

$$r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=2,$$

基础解系中含有 1 个(未知量的个数—系数矩阵的秩)线性无关的解向量，同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_3=0 \end{cases},$$

选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$ (选取任意非零常数都可，因为特征向量必须为非零向量，不能选 0) ，得特征向量为：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

由于实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，故 α_1,α_2，α_3 两两正交，将 α_1,α_2，α_3 单位化，

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

其中 $\|\alpha_1\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，$\|\alpha_2\|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$，$\|\alpha_3\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$

取 $Q=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}$，即为所求的正交变换矩阵，故 $Q^TQ=E$，则 $Q^{-1}=Q$，令 $x=Qy$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=diag\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix},$$

可化原二次型为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(Qy)^TAQy=y^TQ^TAQy=y^T\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix}y=2y_1^2+2y_2^2.$$

(III) **方法 1**：由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0,y_2=0$ (因为方程中不含有 y_3) 则 $y_3=k$ (k 为任意常数). 从而所求解为：

$$x=Qy=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\k\end{bmatrix}=0\cdot\eta_1+0\cdot\eta_2+k\eta_3=k\eta_3=\frac{k}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=k'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

其中 $k'=\dfrac{k}{\sqrt{2}}$ 为任意常数.

方法 2：用配方法，方程 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+x_2{}^2+2x_3{}^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+x_2{}^2=0$，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases},$$

系数矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的秩为 2，因为未知数的个数为 3，故它的基础解系中含有 1 个(未知数的个数—系数矩阵的秩)线性无关的解向量，选x_1, x_3为自由未知量，取$x_1 = 1$，解得$[1, -1, 0]^T$，

所以，$f = 0$的解为$k[1, -1, 0]^T$，k为任意常数.

(21)【详解】 由$AB = 0$知，B的每一列均为$Ax = 0$的解，且$r(A) + r(B) \le 3$.(3 是A的列数或B的行数)

(1) 若$k \ne 9$，β_1, β_3不成比例，β_1, β_2成比例，则$r(B) = 2$，方程组$Ax = 0$的解向量中至少有两个线性无关的解向量，故它的基础解系中解向量的个数≥ 2，又基础解系中解向量的个数=未知数的个数$-r(A) = 3 - r(A)$，于是$r(A) \le 1$.

又矩阵A的第一行元素$\left(a, b, c\right)$不全为零，显然$r(A) \ge 1$，故$r(A) = 1$. 可见此时$Ax = 0$的基础解系由$3 - r(A) = 2$ 个线性无关解向量组成，β_1, β_3是方程组的解且线性无关，可作为其基础解系，故$Ax = 0$ 的通解为：

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{为任意常数.}$$

(2) 若$k = 9$，则$\beta_1, \beta_2, \beta_3$均成比例，故$r(B)$ =1，从而$1 \le r(A) \le 2$. 故$r(A) = 1$或$r(A) = 2$.

①若$r(A) = 2$，则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成，β_1是方程组$Ax = 0$的基础解系，则$Ax = 0$的通解为：$x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_1$为任意常数.

②若$r(A) = 1$，则A的三个行向量成比例，因第 1 行元素$\left(a, b, c\right)$不全为零，不妨设$a \ne 0$，则$Ax = 0$的同解方程组为：$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$，系数矩阵的秩为 1，故基础解系由$3 - 1 = 2$个线性无关解向量组成，选x_2, x_3为自由未知量，分别取$x_2 = 1, x_3 = 0$或$x_2 = 0, x_3 = 1$，方

程组的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$，则其通解为$x=k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2$为任意常数.

(22)【详解】(I)由边缘密度函数的定义：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

则关于X的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy,0<x<1,\\0,\quad 其他.\end{cases}=\begin{cases}2x,0<x<1,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

关于Y的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx,0<y<2,\\0,\quad 其他.\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2},0<y<2,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

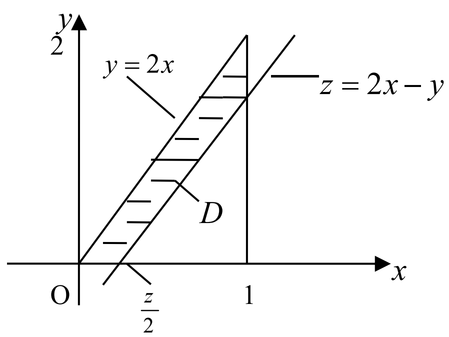
(因为$0<x<1,0<y<2x$，故x的取值范围为$\frac{y}{2}<x<1$)

(II)由分布函数的定义： $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}$

(1) 当$z<0$时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=0$(由定义域为$0<x<1$，$0<y<2x$，故$2X-Y>0$，则$\{2X-Y\le 0\}$是不可能事件)

(2) 当$0\le z<2$时，如图转换成阴影部分的二重积分

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{2X-Y\le z\}\\&=\iint\limits_{2x\text{-}y\le z}f(x,y)dxdy\\&=1-\iint\limits_{2x\text{-}y>z}f(x,y)dxdy\\&=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_0^{2x-z}dy=z-\frac{1}{4}z^2;\end{aligned}$$



(3) 当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\le z\}=1$. (因X最大取1，Y最小取0，故$2X-Y$最大就只能取到2，所以$2X-Y\le 2$是必然事件)

所以分布函数为： $$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

由密度函数与分布函数的关系：$f(x)=F'(x)$

故所求的概率密度为：$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, 0<z<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

(23)【详解】由题设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，且 $EX_i=0,DX_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n)$，

$$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}EX_i}{n}=\frac{n\times 0}{n}=0$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{DX}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$$

(方差的性质：$D(cX)=c^2DX$,$D(X+Y)=DX+DY$ (X,Y 独立))

$$EY_i=E(X_i-\overline{X})=EX_i-E\overline{X}=0,i=1,2,\cdots,n.$$

(根据期望的性质：$EcX=cEX,E(X+Y)=EX+EY$)

(I) $DY_i=D(X_i-\overline{X})=D[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_j]$ (由于 X_i与$\overline{X}$ 不独立，所以把 $\overline{X}$ 中含有 X_i 的剔出来，则 X_i 与剩下的就相互独立)

$$=(1-\frac{1}{n})^2DX_i+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}DX_j=\frac{(n-1)^2\sigma^2}{n^2}+\frac{\sigma^2}{n^2}\cdot(n-1)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

(方差的性质：$D(cX)=c^2DX$,$D(X+Y)=DX+DY$ (X,Y 独立))

(II)由协方差的定义：

$$Cov(Y_1,Y_n)=E[(Y_1-EY_1)(Y_n-EY_n)]=E(Y_1Y_n) \quad (EY_i=0 \quad ,\ i=1,2,\cdots,n)$$

$$=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E\overline{X}^2$$

又 $E(X_1X_n)=EX_1EX_n=0\times 0=0$ (因 X_1,X_n 独立)

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+0=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(X_1\bar{X})=E[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_1X_j]=E[\frac{1}{n}X_1^{\ 2}+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}X_1X_j]=\frac{1}{n}EX_1^{\ 2}+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}EX_1EX_j$$

$$=\frac{1}{n}(DX_1+(EX_1)^2)+0=\frac{1}{n}(\sigma^2+0)=\frac{\sigma^2}{n}$$

同理 $E(X_n\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ (因 X_1 与 X_j 独立 $j=2,\cdots n$)

所以 $Cov(Y_1,Y_n)=E(X_1X_n)-E(X_1\bar{X})-E(X_n\bar{X})+E\bar{X}^{\,2}=0-\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{\sigma^2}{n}$