

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

- (1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为 _____.
- (2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$ ，且 $f(1) = 0$ ，则 $f(x) =$ _____.
- (3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy - 2ydx$ 的值为 _____.
- (4) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为 _____.
- (5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$ ，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵， E 是单位矩阵，则 $|B| =$ _____.
- (6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

二、选择题：本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

- (7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ ，排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是()
- (A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .
- (8) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使得()
- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.
- (C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ ，有 $f(x) > f(0)$.
- (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ ，有 $f(x) > f(0)$.
- (9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是()
- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于 ()

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0 .

(11) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为 ()

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(12) 设 A, B 为满足 $AB = 0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 ()

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 数 u_α 满足

$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于 ()

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

(14) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$. 令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

则 ()

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$.

$$(C) \quad D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2. \quad (D) \quad D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n} \sigma^2.$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 12 分)

$$\text{设 } e < a < b < e^2, \text{ 证明 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h . 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？(注 kg 表示千克， km/h 表示千米/小时.)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$ 的上侧.

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$ ，其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_n ，并证明当

$\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19)(本题满分 12 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数，求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0, \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似

对角化.

(22)(本题满分 9 分)

设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求: (I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 9 分)

$$\text{设总体 } X \text{ 的分布函数为 } F(x; \beta) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta > 1, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

求: (I) β 的矩估计量; (II) β 的最大似然估计量.

2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $y = x - 1$

【详解】方法 1: 因为直线 $x + y = 1$ 的斜率 $k_1 = -1$, 所以与其垂直的直线的斜率 k_2 满足

$$k_1 k_2 = -1, \text{ 所以 } -k_2 = -1, \text{ 即 } k_2 = 1,$$

曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程的斜率为 1, 即

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = 1, \text{ 得 } x = 1, \text{ 把 } x = 1 \text{ 代入 } y = \ln x, \text{ 得切点坐标为 } (1, 0), \text{ 根据点斜}$$

式公式得所求切线方程为: $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$, 即 $y = x - 1$

方法 2: 本题也可先设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 曲线 $y = \ln x$ 过此切点的导数为 $y' \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} = 1$,

得 $x_0 = 1$, 所以切点为 $(x_0, \ln x_0) = (1, 0)$, 由此可知所求切线方程为 $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$,

即 $y = x - 1$.

(2) 【答案】 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

【详解】先求出 $f'(x)$ 的表达式, 再积分即可.

方法 1: 令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t$, $e^{-x} = \frac{1}{t}$, 于是有 $f'(t) = \frac{\ln t}{t}$, 即 $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{两边积分得 } f(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

利用初始条件 $f(1) = 0$, 代入上式: $f(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + C = C = 0$, 即 $C = 0$, 故所

$$\text{求函数为 } f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

方法 2: 由 $x = \ln e^x$, 所以 $f'(e^x) = x e^{-x} = \ln e^x \cdot e^{-x} = \frac{\ln e^x}{e^x}$, 所以 $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$. 下同.

(3) 【答案】 $\frac{3}{2}\pi$

【详解】利用极坐标将曲线用参数方程表示, 相应曲线积分可化为定积分.

L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 用参数式可表示为

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta, \end{cases} \quad \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_L xdy - 2ydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{2} \cos \theta d\sqrt{2} \sin \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta d\sqrt{2} \cos \theta] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{2} \cos \theta \cdot \sqrt{2} \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cdot \sqrt{2} \sin \theta] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2 \sin^2 \theta] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 + 2 \sin^2 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \theta d\theta = 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \pi + \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d2\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{3\pi}{2} - 0 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

(4) 【答案】 $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}$

【详解】欧拉方程的求解有固定方法, 作变量代换 $x = e^t$ 化为常系数线性齐次微分方程即可.

令 $x = e^t$, 有 $t = \ln x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d(uv)}{dx} = vdu + u dv = \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

代入原方程: $x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 4x \cdot \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} + 2y = 0$, 整理得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

此式为二阶齐次线性微分方程, 对应的特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$, 所以特征根为:

$r_1 = -1, r_2 = -2$, $r_1 \neq r_2$, 所以 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0$ 的通解为

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

又因为 $x = e^t$ ，所以 $e^{-t} = \frac{1}{x}$, $e^{-2t} = \frac{1}{x^2}$ ，代入上式得

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}.$$

(5) 【答案】 $\frac{1}{9}$

【详解】

方法 1: 已知等式两边同时右乘 A ，得 $ABA^*A = 2BA^*A + A$ ，

由伴随矩阵的运算规律： $A^*A = AA^* = |A|E$ ，有 $AB|A| = 2B|A| + A$ ，而

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3,$$

于是有 $3AB = 6B + A$ ，移项、合并有 $(3A - 6E)B = A$ ，再两边取行列式，由方阵乘积的行列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，有

$$|(3A - 6E)B| = |3A - 6E||B| = |A| = 3,$$

$$\begin{aligned} \text{而 } |3A - 6E| &= \left| 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right| \\ &= (-1)^{3+3}(-3) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \times 3 \times 3 = 27, \end{aligned}$$

$$\text{故所求行列式为 } |B| = \frac{|A|}{|3A - 6E|} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

方法 2: 由题设条件 $ABA^* = 2BA^* + E$ ，得 $ABA^* - 2BA^* = (A - 2E)BA^* = E$

由方阵乘积行的列式的性质：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的积，故两边取行列式，有 $|(A - 2E)BA^*| = |A - 2E||B||A^*| = |E| = 1$

$$\text{其中 } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3;$$

由伴随矩阵行列式的公式：若 A 是 n 阶矩阵，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

所以, $|A^*| = |A|^{3-1} = |A|^2 = 9$; 又 $|A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

$$\text{故 } |B| = \frac{1}{|A - 2E||A^*|} = \frac{1}{9}.$$

(6) 【答案】 $\frac{1}{e}$

【详解】 本题应记住常见指数分布等的期望与方差的数字特征, 而不应在考试时再去推算. 指数分布的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{若 } x > 0 \\ 0 & \text{若 } x \leq 0 \end{cases}, \text{ 其方差 } DX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

于是, 由一维概率计算公式, $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx$, 有

$$P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

二、选择题

(7) 【答案】 (B)

【详解】

方法 1: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{\cos x^2} = 0$, 则 β 是 α 的高阶无穷小,

根据题设, 排在后面的是前一个的高阶无穷小, 所以可排除(C),(D)选项,

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt} \xrightarrow{\text{洛必达}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x \tan x}$$

$$\xrightarrow{\text{等价无穷小替换}} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \infty,$$

可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量, 故应选(B).

方法 2: 用 x^k (当 $x \rightarrow 0$ 时) 去比较.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} \xrightarrow{\text{洛}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0, 应取 $k=1$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos t^2}{x^0} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos t^2}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^0} = 1$,

所以(当 $x \rightarrow 0^+$ 时) α 与 x 同阶.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{x^k} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{kx^{k-3}}$$

欲使上式极限存在但不为 0, 应取 $k=3$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan x}{3x^{3-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \tan x}{3x} = \frac{2}{3}$,

所以(当 $x \rightarrow 0^+$ 时) β 与 x^3 同阶.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{x^k} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{2kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2kx^{k-1}},$$

欲使上式极限存在但不为 0, 应取 $k=2$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2 \cdot 2x^{2-1}} = \frac{1}{4}$,

所以(当 $x \rightarrow 0^+$ 时) γ 与 x^2 同阶. 因此, 后面一个是前面一个的高阶小的次序是

α, γ, β , 选(B).

(8) 【答案】 (C)

【详解】 函数 $f(x)$ 只在一点的导数大于零, 一般不能推导出单调性, 因此可排除(A),(B).

由导数的定义, 知 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$

根据极限的保号性, 知存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 时, 有 $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$.

即当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $x < 0$, 有 $f(x) < f(0)$; 而当 $x \in (0, \delta)$ 时, $x > 0$ 有 $f(x) > f(0)$.

(9) 【答案】 (B)

【详解】 对于敛散性的判定问题, 若不便直接推证, 往往可通过反例排除找到正确选项.

方法 1: 排除法. 取 $a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$,

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)} \begin{cases} \text{收敛, 当 } p > 1 \\ \text{发散, 当 } p \leq 1 \end{cases}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 发散, 排除 A, D;

又取 $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, 因为 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛, 当 } p > 1 \\ \text{发散, 当 } p \leq 1 \end{cases}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收

敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$, 排除(C), 故应选(B).

方法 2: 证明(B)正确. $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda \neq 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

由比较判别法的极限形式知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散, 故应选(B).

(10) 【答案】(B)

【详解】在应用变限的积分对变量 x 求导时, 应注意被积函数中不能含有变量 x :

$$[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt]' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

否则, 应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量 x 换到积分号外或积分线上.

方法 1: 交换积分次序, 使得只有外面这道积分限中才有 t , 其他地方不出现 t

由 $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ 知: $\begin{cases} y < x < t \\ 1 < y < t \end{cases}$, 交换积分次序 $\begin{cases} 1 < x < t \\ 1 < y < x \end{cases}$, 得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t [\int_1^x f(x) dy] dx = \int_1^t f(x)(x-1) dx$$

于是, $F'(t) = f(t)(t-1)$, 从而有 $F'(2) = f(2)$, 故应选(B).

方法 2: 设 $\Phi'(x) = f(x)$, 于是

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t dy \int_y^t \Phi'(x) dx = \int_1^t dy \int_y^t d\Phi(x) \\ &= \int_1^t [\Phi(t) - \Phi(y)] dy = \Phi(t)(t-1) - \int_1^t \Phi(y) dy \end{aligned}$$

所以 $F'(t) = \Phi'(t)(t-1) + \Phi(t) - \Phi(t) = f(t)(t-1)$,

所以 $F'(2) = f(2)$, 选(B).

(11) 【答案】(D)

【详解】由题设, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换, 即

$$AE_{12} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B,$$

将 B 的第 2 列加到第 3 列, 即

$$B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AQ.$$

$$\text{故 } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 应选(D).}$$

(12) 【答案】(A)

【详解】方法 1: 由矩阵秩的重要公式: 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵, 如果 $AB = 0$,

$$\text{则 } r(A) + r(B) \leq n$$

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 由 $AB = 0$ 知, $r(A) + r(B) \leq n$, 其中 n 是矩阵 A 的列数, 也是 B 的行数

因 A 为非零矩阵, 故 $r(A) \geq 1$, 因 $r(A) + r(B) \leq n$, 从而 $r(B) \leq n - 1 < n$, 由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数, 知 B 的行向量组线性相关.

因 B 为非零矩阵, 故 $r(B) \geq 1$, 因 $r(A) + r(B) \leq n$, 从而 $r(A) \leq n - 1 < n$, 由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数, 知 A 的列向量组线性相关. 故应选(A).

方法 2: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 将 B 按列分块, 由 $AB = 0$ 得,

$$AB = A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s] = 0, A\beta_i = 0, i = 1, 2, \dots, s.$$

因 B 是非零矩阵, 故存在 $\beta_i \neq 0$, 使得 $A\beta_i = 0$. 即齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件 $r(A) < n$, 知 $r(A) < n$. 所以 A 的列向量组线性相关.

又 $(AB)^T = B^T A^T = 0$, 将 A^T 按列分块, 得

$$B^T A^T = B^T[\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_m^T] = 0, B^T \alpha_i^T = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

因 A 是非零矩阵, 故存在 $\alpha_i^T \neq 0$, 使得 $B^T \alpha_i^T = 0$, 即齐次线性方程组 $Bx = 0$ 有非零解. 由齐次线性方程组 $Bx = 0$ 有非零解的充要条件, 知 B^T 的列向量组线性相关,

由 B^T 是由 B 行列互换得到的, 从而 B 的行向量组线性相关, 故应选(A).

方法 3: 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times s}$, 将 A 按列分块, 记 $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$

$$\begin{aligned} \text{由 } AB=0 \Rightarrow (A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix} \\ = (b_{11}A_1 + \cdots + b_{n1}A_n, \ \cdots, \ b_{1s}A_1 + \cdots + b_{ns}A_n) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $B \neq 0$, 所以至少有一个 $b_{ij} \neq 0$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s$), 又由 (1) 知, $b_{1j}A_1 + b_{2j}A_2 + \cdots + b_{ij}A_i + \cdots + b_{nj}A_n = 0$, 所以 A_1, A_2, \cdots, A_n 线性相关. 即 A 的列向量组线性相关.

(向量组线性相关的定义: 如果对 m 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in R^n$, 有 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in R$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$ 成立, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.)

$$\begin{aligned} \text{又将 } B \text{ 按行分块, 记 } B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}, \text{ 同样,} \\ AB=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + \cdots + a_{1n}B_n \\ a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + \cdots + a_{2n}B_n \\ \cdots \\ a_{m1}B_1 + a_{m2}B_2 + \cdots + a_{mn}B_n \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

由于 $A \neq 0$, 则至少存在一个 $a_{ij} \neq 0$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$), 使

$$a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + a_{ij}B_j + \cdots + a_{in}B_n = 0,$$

由向量组线性相关的定义知, B_1, B_2, \cdots, B_m 线性相关, 即 B 的行向量组线性相关,

故应选(A).

方法 4: 用排除法. 取满足题设条件的 A, B .

$$\text{取 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ 有 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

A 的行向量组, 列向量组均线性相关, 但 B 的列向量组线性无关, 故(B), (D)不成立.

$$\text{又取 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ 有 } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性相关, 故(C)不成立.

由排除法知应选(A).

(13) 【答案】C

【详解】利用正态分布概率密度函数图形的对称性, 对任何 $x > 0$ 有

$$P\{X > x\} = P\{X < -x\} = \frac{1}{2}P\{|X| > x\}. \text{ 或直接利用图形求解.}$$

方法 1: 由标准正态分布概率密度函数的对称性知, $P\{X < -u_\alpha\} = \alpha$, 于是

$$1 - \alpha = 1 - P\{|X| < x\} = P\{|X| \geq x\} = P\{X \geq x\} + P\{X \leq -x\} = 2P\{X \geq x\}$$

即有 $P\{X \geq x\} = \frac{1-\alpha}{2}$, 可见根据分位点的定义有 $x = u_{\frac{1-\alpha}{2}}$, 故应选(C).

方法 2:

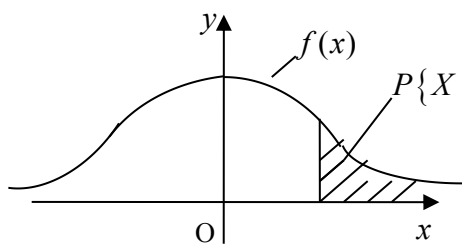


图 1

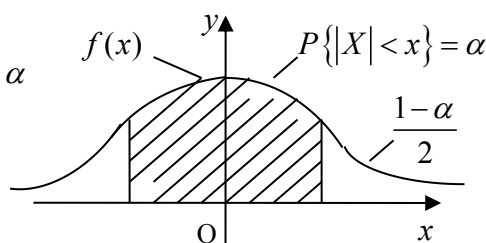


图 2

如图 1 所示题设条件. 图 2 显示中间阴影部分面积 α , $P\{|X| < x\} = \alpha$. 两端各余面积

$\frac{1-\alpha}{2}$, 所以 $P\{X < u_{\frac{1-\alpha}{2}}\} = \alpha$, 答案应选(C).

(14) 【答案】A.

【详解】由于随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 所以必有:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{又 } D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$$

下面求 $Cov(X_1, Y)$ 和 $D(X_1 + Y)$.

而 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 故本题的关键是将 Y 中的 X_1 分离出来, 再用独立性来计算.

对于选项(A):

$$Cov(X_1, Y) = Cov(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \frac{1}{n} Cov(X_1, X_1) + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n Cov(X_1, X_i) = \frac{1}{n} DX_1 = \frac{1}{n} \sigma^2$$

所以(A)对, (B)不对. 为了熟悉这类问题的快速、正确计算. 可以看本题(C),(D)选项.

因为 X 与 Y 独立时, 有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$. 所以, 这两个选项的方差也可直接计算得到:

$$D(X_1 + Y) = D(\frac{1+n}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \cdots + \frac{1}{n} X_n) = \frac{(1+n)^2}{n^2} \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{n^2 + 3n}{n^2} \sigma^2 = \frac{n+3}{n} \sigma^2,$$

$$D(X_1 - Y) = D(\frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} X_2 - \cdots - \frac{1}{n} X_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2$$

$$= \frac{n^2 - 2n}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-2}{n} \sigma^2.$$

所以本题选 (A)

三、解答题

(15) 【详解】根据要证不等式的形式, 可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

方法 1: 因为函数 $f(x) = \ln^2 x$ 在 $[a, b] \subset (e, e^2)$ 上连续, 且在 (a, b) 内可导, 所以满足拉格朗日中值定理的条件,

对函数 $f(x) = \ln^2 x$ 在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\ln^2 b - \ln^2 a = (\ln^2 \xi)' (b-a) = \frac{2 \ln \xi}{\xi} (b-a), \quad e < a < \xi < b < e^2$$

$$\text{下证: } \frac{2 \ln \xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}.$$

设 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, 当 $t > e$ 时, $1 - \ln t < 1 - \ln e = 0$, 即 $\varphi'(t) < 0$,

所以 $\varphi(t)$ 单调减少, 又因为 $\xi < e^2$, 所以 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$, 即

$$\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}, \text{ 得 } \frac{2 \ln \xi}{\xi} > \frac{4}{e^2}$$

$$\text{故 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

方法 2: 利用单调性, 设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$, 证 $\varphi(x)$ 在区间 (e, e^2) 内严格单调增即可.

$$\varphi'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}, \quad (\varphi'(e^2) = 2 \frac{\ln e^2}{e^2} - \frac{4}{e^2} = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0, \quad) \varphi''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

当 $x > e$ 时, $1 - \ln x < 1 - \ln e = 0$, $\varphi''(x) < 0$, 故 $\varphi'(x)$ 单调减少, 从而当 $e < x < e^2$ 时,

$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = 0$, 即当 $e < x < e^2$ 时, $\varphi(x)$ 单调增加.

$$\text{因此当 } e < x < e^2 \text{ 时, } \varphi(b) > \varphi(a), \text{ 即 } \ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a,$$

$$\text{故 } \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

方法 3: 设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \ln^2 a - \frac{4}{e^2}(x-a)$, 则 $\varphi'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2}$, $\varphi''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

$\Rightarrow x > e$ 时, $1 - \ln x < 1 - \ln e = 0$, 得 $\varphi''(x) < 0$,

$\Rightarrow \varphi'(x)$ 在 (e, e^2) 上单调减少, 从而当 $e < x < e^2$ 时, $\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0$,

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 (e, e^2) 上单调增加. 从而当 $e < a < x \leq b < e^2$ 时, $\varphi(x) > \varphi(a) = 0$.

$\Rightarrow \varphi(b) > 0$, 即 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

(16) 【详解】 本题是标准的牛顿第二定理的应用, 列出关系式后再解微分方程即可.

方法 1: 由题设, 飞机质量 $m = 9000 \text{ kg}$, 着陆时的水平速度 $v_0 = 700 \text{ km/h}$. 从飞机接触

跑道开始计时, 设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$, 速度为 $v(t)$, 则 $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

根据牛顿第二定律, 得 $m \frac{dv}{dt} = -kv$. 又 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$.

由以上两式得 $dx = -\frac{m}{k} dv$, 积分得 $x(t) = -\frac{m}{k} v + C$.

由于 $v(0) = v_0, x(0) = 0$, 所以 $x(0) = -\frac{m}{k} v_0 + C = 0$. 故得 $C = \frac{m}{k} v_0$,

从而 $x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t))$.

当 $v(t) \rightarrow 0$ 时, $x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = \frac{9000 \times 700}{6.0 \times 10^6} = 1.05(\text{km})$.

所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05km.

方法 2: 根据牛顿第二定律, 得 $m \frac{dv}{dt} = -kv$,

分离变量: $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$, 两端积分得: $\ln v = -\frac{k}{m} t + C_1$,

通解: $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$, 代入初始条件 $v|_{t=0} = v_0$, 解得 $C = v_0$, 故 $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机在跑道上滑行得距离相当于滑行到 $v \rightarrow 0$, 对应地 $t \rightarrow +\infty$. 于是由 $dx = vdt$, 有

$$x = \int_0^{+\infty} v(t) dt = \int_0^{+\infty} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(km).$$

或由 $v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$, 知 $x(t) = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{kv_0}{m} (e^{-\frac{k}{m}t} - 1)$, 故最长距离为

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow \frac{kv_0}{m} = 1.05(km)$.

方法 3: 由 $m \frac{dv}{dt} = -kv$, $v = \frac{dx}{dt}$, 化为 x 对 t 的求导, 得 $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$, 变形为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = 0, \quad v(0) = x'(0) = v_0, x(0) = 0$$

其特征方程为 $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$, 解之得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{k}{m}$, 故 $x = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x|_{t=0} = 0, v|_{t=0} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{kC_2}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_{t=0} = v_0$, 得 $C_1 = -C_2 = \frac{mv_0}{k}$,

于是 $x(t) = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$. 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = 1.05(km)$.

所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

(17) 【详解】这是常规题, 加、减曲面片高斯公式法, 转换投影法, 逐个投影法都可用.

方法 1: 加、减曲面片高斯公式. 取 Σ_1 为 xoy 平面上被圆 $x^2 + y^2 = 1$ 所围部分的下侧, 记 Ω

为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域, 则

$$I = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = I_1 - I_2$$

由高斯公式：设空间闭区域 Ω 是由分段光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + R dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

$$\text{这里 } P = 2x^3, Q = 2y^3, R = 3(z^2 - 1), \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 6x^2, \frac{\partial Q}{\partial y} = 6y^2, \frac{\partial R}{\partial z} = 6z,$$

$$\text{所以 } I_1 = \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dv$$

$$\text{利用柱面坐标: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, dv = r dr d\theta dz \\ z = z \end{cases} \text{ 有:}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z) dxdydz = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2) r dz \\ &= 12\pi \int_0^1 r \left(\frac{z^2}{2} + r^2 z \right) \Big|_0^{1-r^2} dr = 12\pi \int_0^1 r \frac{(1-r^2)^2}{2} + r^3 (1-r^2) dr \\ &= 12\pi \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{(1-r^2)^3}{3} + \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 12\pi \cdot \frac{1}{6} = 2\pi \end{aligned}$$

记 D 为 Σ_1 在 xoy 平面上的投影域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，则 $z = 0, dz = 0$ ，

又 Σ_1 为 $z = 0(x^2 + y^2 \leq 1)$ 的下侧，从而：

$$I_2 = \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy = - \iint_D 3(0 - 1) dxdy = 3 \iint_D dxdy = 3\pi$$

(其中 $\iint_D dxdy$ 为半径为 1 圆的面积，所以 $\iint_D dxdy = \pi \cdot 1^2 = \pi$)

$$\text{故 } I = I_1 - I_2 = 2\pi - 3\pi = -\pi.$$

方法 2: 用转换投影法：若 $z = z(x, y)$ ， z 对 x, y 具有一阶连续偏导数，则

$$dzdx = -\frac{\partial z}{\partial x} dxdy, \quad dydz = -\frac{\partial z}{\partial y} dxdy.$$

曲面 $\Sigma_1: z = 1 - x^2 - y^2, (x^2 + y^2 \leq 1), \frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ ，由转换投影公式

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy \\
&= \iint_{\Sigma} \left[2x^3 \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2y^3 \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 3(z^2 - 1) \right] dxdy \\
&= \iint_D [4x^4 + 4y^4 + 3(1 - x^2 - y^2)^2 - 3] dxdy
\end{aligned}$$

利用极坐标变换: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $dxdy = r dr d\theta$, 所以

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [4r^4 \cos^4 \theta + 4r^4 \sin^4 \theta + 3(1 - r^2)^2 - 3] r dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [4r^5 \cos^4 \theta + 4r^5 \sin^4 \theta + 3(r^5 - 2r^3)] dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{6} \cos^4 \theta + \frac{4}{6} \sin^4 \theta + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{4}{6} \left[(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right] d\theta - \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{4}{6} [1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta] d\theta - 2\pi \\
&= \frac{4}{6} \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta - 2\pi \\
&= \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta - 2\pi \\
&= \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - 2\pi - \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta d\theta = -\pi - \frac{1}{24} \sin 4\theta \Big|_0^{2\pi} \\
&= -\pi - 0 = -\pi
\end{aligned}$$

或 $\int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{6} \cos^4 \theta + \frac{4}{6} \sin^4 \theta \right) d\theta$ 直接利用公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$ 及

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta$$

$$\text{则 } \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{6} \cos^4 \theta + \frac{4}{6} \sin^4 \theta \right) d\theta = 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

所以, 原式 $= \pi - 2\pi = -\pi$

(18) 【分析】利用零点定理证明存在性, 利用单调性证明惟一性. 而正项级数的敛散性可用比较法判定.

零点定理: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么在开区间

(a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$; 单调性: 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在

(a, b) 内可导, 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加; 比较审敛

法: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【证明】记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$, 则 $f_n(x)$ 是连续函数, 由 $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n > 0$, 对照连续函数的零点定理知, 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在正实数根 $x_n \in (0, 1)$. 当 $x > 0$ 时, $f'_n(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 可见 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 故方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在惟一正实数根 x_n .

由 $x^n + nx - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知 $0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n}$, 故当 $\alpha > 1$ 时, 函数 $y = x^\alpha$ 单调

增, 所以 $0 < x_n^\alpha < \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$. 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 所以当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

(19) 【分析】根据极值点存在的充分条件:

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某领域内连续且有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C$, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

(1) $AC - B^2 > 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;

(2) $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;

(3) $AC - B^2 = 0$ 时, 可能有极值, 也可能没有极值, 需另外讨论.

所以对照极值点存在的充分性定理, 先求出一阶偏导, 再令其为零确定极值点, 接下来求函数二阶偏导, 确定是极大值还是极小值, 并求出相应的极值.

求二元隐函数的极值与求二元显函数的极值的有关定理是一样, 差异仅在于求驻点及极值的充分条件时, 用到隐函数求偏导数.

【详解】因为 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 所以

$$\text{两边对 } x \text{ 求导: } 2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\text{两边对 } y \text{ 求导: } -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

根据极值点存在的充分条件, 令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -3x + 10y - z = 0 \end{cases}$, 故 $\begin{cases} x = 3y, \\ z = y. \end{cases}$

将上式代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 可得 $\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \\ z = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$

对照极值点存在的充分条件, 为判别两点是否为极值点, 再①分别对 x, y 求偏导数, ②分别对 x, y 求偏导数

$$\text{①式对 } x \text{ 求导: } 2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\text{②式对 } x \text{ 求导: } -6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\text{①式对 } y \text{ 求导: } -6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\text{②式对 } y \text{ 求导: } 20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{将 } \begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \\ z = 3 \end{cases} \text{ 代入, 于是 } A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6}, \quad B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2},$$

$$C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3}, \text{ 故 } AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0, \text{ 又 } A = \frac{1}{6} > 0, \text{ 从而点 } (9,3) \text{ 是 } z(x,y) \text{ 的极小}$$

值点, 极小值为 $z(9,3) = 3$.

$$\text{类似地, 将 } \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases} \text{ 代入, 于是 } A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{1}{6},$$

$$B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2}, \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{5}{3}, \text{ 可知 } AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0,$$

又 $A = -\frac{1}{6} < 0$, 从而点 $(-9, -3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9, -3) = -3$.

(20) 【详解】

方法 1: 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{1\text{行} \times (-i) + i\text{行} \\ (i=2, \cdots, n)}]{} \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = B$$

对 $|B|$ 是否为零进行讨论:

当 $a=0$ 时, $r(A)=1 < n$, 由齐次方程组有非零解的判别定理: 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $r(A) < n$. 故此方程组有非零解, 把 $a=0$ 代入原方程组, 得其同解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \quad (*)$$

此时, $r(A)=1$, 故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量. 选 x_2, x_3, \cdots, x_n 为自由未知量, 将他们的 $n-1$ 组值 $(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$ 分别代入 $(*)$ 式, 得基础解系

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \quad \eta_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \quad \cdots, \quad \eta_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x = k_1 \eta_1 + \cdots + k_{n-1} \eta_{n-1}, \quad \text{其中 } k_1, \cdots, k_{n-1} \text{ 为任意常数.}$$

当 $a \neq 0$ 时, 对矩阵 B 作初等行变换, 有

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{i \times (-1) + 1\text{行} \\ (i=2, 3, \cdots, n)}]{} \begin{bmatrix} a + \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

可知 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, $r(A) = n-1 < n$, 由齐次方程组有非零解的判别定理, 知方程

组也有非零解, 把 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 代入原方程组, 其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

此时, $r(A) = n-1$, 故方程组有 $n-r = n-(n-1) = 1$ 个自由未知量. 选 x_2 为自由

未知量, 取 $x_2 = 1$, 由此得基础解系为 $\eta = (1, 2, \cdots, n)^T$, 于是方程组的通解为 $x = k\eta$,

其中 k 为任意常数.

方法 2: 计算方程组的系数行列式:

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{矩阵加法}} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$= aE + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \triangleq aE + Q,$$

下面求矩阵 Q 的特征值:

$$|\lambda E - Q| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -2 & \cdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & -n & -n & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{1\text{行} \times (-i) + i\text{行} \\ (i=2,3,\cdots,n)}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{i\text{列} \times (i)+1\text{列} \\ (i=2,3,\cdots,n)}} \begin{vmatrix} \lambda - \frac{n(n+1)}{2} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1} \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

则 Q 的特征值 $0, \cdots, 0, \frac{n(n+1)}{2}$, 由性质: 若 $Ax = \lambda x$, 则 $(kA)x = (k\lambda)x, A^m x = \lambda^m x$,

因此对任意多项式 $f(x)$, $f(A)x = f(\lambda)x$, 即 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值.

故, A 的特征值为 $a, a, \cdots, a + \frac{n(n+1)}{2}$, 由特征值的乘积等于矩阵行列式的值, 得

$$A \text{ 行列式 } |A| = \left(a + \frac{n(n+1)}{2}\right) a^{n-1}.$$

由齐次方程组有非零解的判别定理: 设 A 是 n 阶矩阵, 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $|A| = 0$. 可知, 当 $|A| = 0$, 即 $a = 0$ 或 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时, 方程组有非零解.

当 $a = 0$ 时, 对系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1\text{行} \times (-i) + i\text{行} \\ (i=2,\cdots,n)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

此时, $r(A)=1$, 故方程组有 $n-r=n-1$ 个自由未知量. 选 x_2, x_3, \cdots, x_n 为自由未知量, 将他们的 $n-1$ 组值 $(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$ 分别代入(*)式, 由此得基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \eta_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \eta_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T,$$

于是方程组的通解为

$$x = k_1 \eta_1 + \cdots + k_{n-1} \eta_{n-1}, \text{ 其中 } k_1, \cdots, k_{n-1} \text{ 为任意常数.}$$

当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$ 时,

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[i \times (-1) + 1 \text{ 行}]{(i=2, 3 \cdots n)} \begin{bmatrix} a + \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{即 } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \text{ 其同解方程组为 } \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0, \end{cases}$$

此时, $r(A)=n-1$, 故方程组有 $n-r=n-(n-1)=1$ 个自由未知量. 选 x_2 为自由未知量,

取 $x_2=1$, 由此得基础解系为 $\eta = (1, 2, \cdots, n)^T$, 于是方程组的通解为 $x = k\eta$, 其中 k 为任意常数.

(21) 【详解】 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行} \times (-1) + 1 \text{ 行}} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-2) & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{提出1行公因数}(\lambda-2)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} \times (-1) + 2 \text{ 行}(\lambda-2)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行}(\lambda-2)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 \\ -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)+3(a+1)] = (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a). \end{aligned}$$

已知 A 有一个二重特征值, 有两种情况, (1) $\lambda = 2$ 就是二重特征值, (2) 若 $\lambda = 2$ 不是二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 是一个完全平方

(1) 若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根, 则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$. 由

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3 \times (-2)) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6) = 0$$

求得 A 的特征值为 2, 2, 6, 由

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{行}(-1) \text{倍加到} 2 \text{行}, \\ 1 \text{行的} 1 \text{倍加到} 3 \text{行}}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

知秩 $(2E - A) = 1$, 故 $\lambda = 2$ 对应的线性无关的特征向量的个数为 $n - r = 3 - 1 = 2$, 等于

$\lambda = 2$ 的重数. 由矩阵与对角矩阵相似的充要条件: 对矩阵的每个特征值, 线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 从而 A 可相似对角化.

(2) 若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方, 从而

$18 + 3a = 16$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$. 当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, 由

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3 \times (-\frac{2}{3})) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)^2 = 0$$

知 A 的特征值为 2, 4, 4, 由

$$4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \text{行} \times \frac{1}{3} + 3 \text{行}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知秩 $(4E - A) = 2$, 故 $\lambda = 4$ 对应的线性无关的特征向量有 $n - r = 3 - 2 = 1$, 不等于 $\lambda = 4$

的重数, 则由矩阵与对角矩阵相似的充要条件: 对矩阵的每个特征值, 线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重根数, 知 A 不可相似对角化.

(22) 【分析】本题尽管难度不大, 但考察的知识点很多, 综合性较强. 通过随机事件定义随机变量或通过随机变量定义随机事件, 可以比较好地将概率论的知识前后连贯起来, 这种命题方式值得注意.

先确定 (X, Y) 的可能取值, 再求在每一个可能取值点上的概率, 而这可利用随机事件的运算性质得到, 即得二维随机变量 (X, Y) 的概率分布; 利用联合概率分布可求出边缘概率分布, 进而可计算出相关系数.

【详解】(I) 由于 $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$, 所以 $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6}$,

利用条件概率公式和事件间简单的运算关系, 有

$$P\{X=1, Y=1\} = P(AB) = \frac{1}{12},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12},$$

$$P\{X=0, Y=0\} = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A+B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = \frac{2}{3}$$

(或 $P\{X=0, Y=0\} = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$), 故 (X, Y) 的概率分布为

| $\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$ | 0 | 1 |
|--|---------------|----------------|
| 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{12}$ |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ |

(II) X, Y 的概率分布分别为

$$P\{X=0\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=0, Y=0\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$

$$P\{X=1\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6},$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=0\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

所以 X, Y 的概率分布为

| X | 0 | 1 |
|-----|---------------|---------------|
| P | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

| Y | 0 | 1 |
|-----|---------------|---------------|
| P | $\frac{5}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

由 0-1 分布的数学期望和方差公式, 则

$$EX = \frac{1}{4}, EY = \frac{1}{6}, DX = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, DY = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36},$$

$$E(XY) = 0 \cdot P\{XY=0\} + 1 \cdot P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{12},$$

故 $Cov(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{24}$, 从而

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(23) 【分析】本题是基础题型, 难度不大, 但计算量比较大, 实际做题时应特别注意计算的

准确性.先由分布函数求出概率密度,再根据求矩估计量和最大似然估计量的标准方法进行

讨论即可. 似然函数的定义: $L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$

【详解】 X 的概率密度为

$$f(x; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$$

(I) 矩估计. 由数学期望的定义:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \beta)dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{\beta}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\beta}{\beta-1},$$

用样本均值估计期望有 $EX = \bar{X}$,

令 $\frac{\beta}{\beta-1} = \bar{X}$, 解得 $\beta = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$, 所以参数 β 的矩估计量为

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}. \quad \text{其中 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

(II) 最大似然估计. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是相应于样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一组观测值, 则似然函数为:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^n}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, $L(\beta) > 0$, $L(\beta)$ 与 $\ln L(\beta)$ 在相同的 β 点取得最大值;

所以等式两边取自然对数, 得 $\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$,

两边对 β 求导, 得 $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$,

令 $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = 0$, 可得 $\beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$,

解得 β 的最大似然估计值为: $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

从而得, β 的最大似然估计量为: $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.