

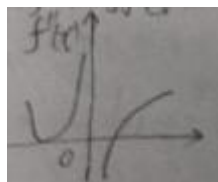
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线

$y = f(x)$ 的拐点的个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



【答案】(C)

【解析】拐点出现在二阶导数等于 0, 或二阶导数不存在的点, 并且在这点的左右两侧二阶导函数异号. 因此, 由 $f''(x)$ 的图形可得, 曲线 $y = f(x)$ 存在两个拐点. 故选 (C).

(2) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则 ()

(A) $a = -3, b = 2, c = -1$

(B) $a = 3, b = 2, c = -1$

(C) $a = -3, b = 2, c = 1$

(D) $a = 3, b = 2, c = 1$

【答案】(A)

【分析】此题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的反问题——已知解来确定微分方程的系数, 此类题有两种解法, 一种是将特解代入原方程, 然后比较等式两边的系数可得待估系数值, 另一种是根据二阶线性微分方程解的性质和结构来求解, 也就是下面演示的解法.

【解析】由题意可知, $\frac{1}{2}e^{2x}$ 、 $-\frac{1}{3}e^x$ 为二阶常系数齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解, 所以 2, 1

为特征方程 $r^2 + ar + b = 0$ 的根, 从而 $a = -(1+2) = -3$, $b = 1 \times 2 = 2$, 从而原方程变为

$y'' - 3y' + 2y = ce^x$, 再将特解 $y = xe^x$ 代入得 $c = -1$. 故选 (A)

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的 ()

- (A) 收敛点, 收敛点
- (B) 收敛点, 发散点
- (C) 发散点, 收敛点
- (D) 发散点, 发散点

【答案】(B)

【分析】此题考查幂级数收敛半径、收敛区间, 幂级数的性质.

【解析】因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 即 $x = 2$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的条件收敛点, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$

的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(0, 2)$. 而幂级数逐项求导不改变收敛区间, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛

区间还是 $(0, 2)$. 因而 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛点, 发散点. 故选 (B).

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy = 1$, $4xy = 1$ 与直线 $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区

域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ ()

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

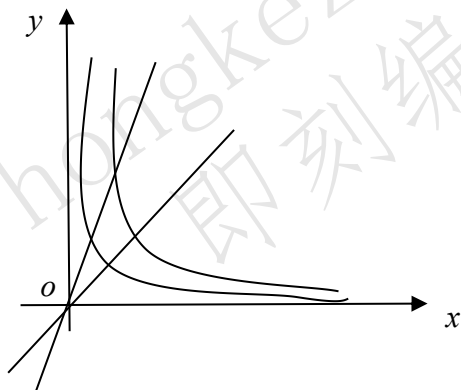
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

【答案】(B)

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出 D 的图形，



所以 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ ，故选 (B)

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ ， $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ ，若集合 $\Omega = \{1, 2\}$ ，则线性方程组 $Ax = b$ 有

无穷多解的充分必要条件为

()

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

【答案】D

【解析】 $(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix}$ ，

由 $r(A) = r(A, b) < 3$ ，故 $a=1$ 或 $a=2$ ，同时 $d=1$ 或 $d=2$ 。故选 (D)

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换为 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ ，其中

$P = (e_1, e_2, e_3)$ ，若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ ，则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

()

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x = Py$, 故 $f = x^T Ax = y^T (P^T AP)y = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. 且

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = PC$$

$$Q^T AQ = C^T (P^T AP) C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $f = x^T Ax = y^T (Q^T AQ)y = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. 选 (A)

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则 ()

(A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$

(B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \leq \frac{P(A)P(B)}{2}$

(D) $P(AB) \geq \frac{P(A)P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB \subset A, AB \subset B$, 按概率的基本性质, 我们有 $P(AB) \leq P(A)$ 且 $P(AB) \leq P(B)$,从而 $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$, 选(C).(8) 设随机变量 X, Y 不相关, 且 $EX = 2, EY = 1, DX = 3$, 则 $E[X(X + Y - 2)] = ()$

(A) -3

(B) 3

(C) -5

(D) 5

【答案】(D)

【解析】 $E[X(X+Y-2)] = E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X)$

$$= D(X) + E^2(X) + E(X) \cdot E(Y) - 2E(X)$$

$$= 3 + 2^2 + 2 \times 1 - 2 \times 2 = 5, \text{ 选(D).}$$

二、填空题：9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】此题考查 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限, 可直接用洛必达法则, 也可以用等价无穷小替换.

【解析】方法一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$

方法二: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算, 需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简.

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{\pi^2}{4}.$

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^z + xyz + x + \cos x = 2$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-dx$

【分析】此题考查隐函数求导.

【解析】令 $F(x, y, z) = e^z + xyz + x + \cos x - 2$, 则

$$F'_x(x, y, z) = yz + 1 - \sin x, F'_y = xz, F'_z(x, y, z) = e^z + xy$$

又当 $x=0, y=1$ 时 $e^z = 1$, 即 $z=0$.

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = -\frac{F'_x(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = -\frac{F'_y(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)} = 0, \text{ 因而 } dz \Big|_{(0,1)} = -dx.$$

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域, 则

$$\iiint_{\Omega} (x+2y+3z) dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】此题考查三重积分的计算, 可直接计算, 也可以利用轮换对称性化简后再计算.

【解析】由轮换对称性, 得

$$\iiint_{\Omega} (x+2y+3z) dx dy dz = 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面, 其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$. 所以

$$\iiint_{\Omega} (x+2y+3z) dx dy dz = 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2}(1-z)^2 dz = 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z) dz = \frac{1}{4}.$$

$$(13) \quad n \text{ 阶行列式 } \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $2^{n+1} - 2$

【解析】按第一行展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + (-1)^{n+1} 2(-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 = 2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2 \\
 &= 2^{n+1} - 2
 \end{aligned}$$

(14) 设二维随机变量 (x, y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1, 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知, $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$, 而且 X, Y 相互独立, 从而

$$\begin{aligned}
 P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X - 1)Y < 0\} = P\{X - 1 > 0, Y < 0\} + P\{X - 1 < 0, Y > 0\} \\
 &= P\{X > 1\}P\{Y < 0\} + P\{X < 1\}P\{Y > 0\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

【答案】 $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$.

【解析】法一: 原式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = 1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) + bx \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)}{kx^3} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 - \frac{b}{6}x^4 + o(x^3)}{kx^3} = 1$$

即 $1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, \frac{a}{3k}=1$

$\therefore a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$

$$\text{法二: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} = 1$$

因为分子的极限为 0, 则 $a = -1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 2b \cos x - bx \sin x}{6kx} = 1, \text{ 分子的极限为 } 0, b = -\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{(1+x)^3} - 2b \sin x - b \sin x - bx \cos x}{6k} = 1, k = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$$

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0 \in I$, 由线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【答案】 $f(x) = \frac{8}{4-x}$.

【解析】 设 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,

令 $y=0$, 得到 $x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$,

故由题意, $\frac{1}{2} f(x_0) \cdot (x_0 - x) = 4$, 即 $\frac{1}{2} f(x_0) \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4$, 可以转化为一阶微分方程,

即 $y' = \frac{y^2}{8}$, 可分离变量得到通解为: $\frac{1}{y} = -\frac{1}{8}x + C$,

已知 $y(0)=2$, 得到 $C = \frac{1}{2}$, 因此 $\frac{1}{y} = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$;

即 $f(x) = \frac{8}{-x+4}$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x, y) = x + y + xy$, 曲线 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$, 求 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

【答案】3

【解析】因为 $f(x, y)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大, 且最大值为梯度的模.

$$f'_x(x, y) = 1 + y, f'_y(x, y) = 1 + x,$$

故 $\text{grad} f(x, y) = \{1 + y, 1 + x\}$, 模为 $\sqrt{(1 + y)^2 + (1 + x)^2}$,

此题目转化为对函数 $g(x, y) = \sqrt{(1 + y)^2 + (1 + x)^2}$ 在约束条件 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ 下的最大值. 即为条件极值问题.

为了计算简单, 可以转化为对 $d(x, y) = (1 + y)^2 + (1 + x)^2$ 在约束条件 $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ 下的最大值.

构造函数: $F(x, y, \lambda) = (1 + y)^2 + (1 + x)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$

$$\begin{cases} F'_x = 2(1 + x) + \lambda(2x + y) = 0 \\ F'_y = 2(1 + y) + \lambda(2y + x) = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}, \text{ 得到 } M_1(1, 1), M_2(-1, -1), M_3(2, -1), M_4(-1, 2).$$

$$d(M_1) = 8, d(M_2) = 0, d(M_3) = 9, d(M_4) = 9$$

所以最大值为 $\sqrt{9} = 3$.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解析】(I) $[u(x)v(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) \\
 &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x)
 \end{aligned}$$

(II) 由题意得

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= [u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)]' \\
 &= u_1'(x)u_2(x) \cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x) \cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x) \cdots u_n'(x)
 \end{aligned}$$

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算

曲线积分 $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】由题意假设参数方程 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \\ z = \cos \theta \end{cases}, \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} [-(\sqrt{2} \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + (1 + \sin^2 \theta) \sin \theta] d\theta \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + (1 + \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
 \end{aligned}$$

(20) (本题满 11 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 内 \mathbb{R}^3 的一个基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

(I) 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 \mathbb{R}^3 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非 0 向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求所有的

ξ .

【答案】

【解析】(I)证明:

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2\alpha_1 + 2k\alpha_3, 2\alpha_2, \alpha_1 + (k+1)\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2k & k+1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为 \mathbb{R}^3 的一个基.

(II) 由题意知,

$$\xi = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \xi \neq 0$$

即

$$k_1(\beta_1 - \alpha_1) + k_2(\beta_2 - \alpha_2) + k_3(\beta_3 - \alpha_3) = 0, \quad k_i \neq 0, i = 1, 2, 3$$

$$k_1(2\alpha_1 + 2k\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(2\alpha_2 - \alpha_2) + k_3(\alpha_1 + (k+1)\alpha_3 - \alpha_3) = 0$$

$$k_1(\alpha_1 + 2k\alpha_3) + k_2(\alpha_2) + k_3(\alpha_1 + k\alpha_3) = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\text{即 } |\alpha_1 + 2k\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + k\alpha_3| = 0$$

$$\text{即 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } k=0$$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_1 = 0$$

$$\therefore k_2 = 0, k_1 + k_3 = 0$$

$$\xi = k_1\alpha_1 - k_1\alpha_3, k_1 \neq 0$$

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ 相似于矩阵 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解析】(I) $A \sim B \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \Rightarrow 3 + a = 1 + b + 1$

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$$

(II)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = E + C$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3)$$

C 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$

$\lambda = 0$ 时 $(0E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T; \xi_2 = (-3, 0, 1)^T$

$\lambda = 5$ 时 $(4E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A = 1 + \lambda_C : 1, 1, 5$

$$\text{令 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 EY

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率, 则 $p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$,

从而 $P\{Y = n\} = C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2} p = (n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$

为 Y 的概率分布;

$$(II) E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot P\{Y = n\} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} - 2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{8}\right)^n\right]$$

记 $S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^{n-2}$ $-1 < x < 1$, 则

$$S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^{n-2} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot x^{n-1}\right)' = \left(\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^{n-2} = x S_1(x) = \frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^n = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) x^{n-2} = x^2 S_1(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\text{所以 } S(x) = S_1(x) - 2S_2(x) + S_3(x) = \frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2}{1-x},$$

$$\text{从而 } E(Y) = S\left(\frac{7}{8}\right) = 16.$$

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的概率密度为:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, x_1, x_2, \dots, x_n 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量.

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta)dx = \int_{\theta}^1 x \cdot \frac{1}{1-\theta} dx = \frac{1+\theta}{2},$

令 $E(X) = \bar{X}$, 即 $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$, 解得 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为 θ 的矩估计量;

(II) 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta),$

当 $\theta \leq x_i \leq 1$ 时, $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\theta} = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n$, 则 $\ln L(\theta) = -n \ln(1-\theta).$

从而 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1-\theta}$, 关于 θ 单调增加,

所以 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.