

## 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题(本题共5个小题, 每小题3分, 满分15分。把正确答案填写在题中横线上。)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $y'' - 4y = e^{2x}$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) 设  $n$  阶矩阵  $A$  的元素全为1, 则  $A$  的  $n$  个特征值是  $\underline{\hspace{2cm}}$

(5) 设两两相互独立的三事件  $A, B$  和  $C$  满足条件:

$$ABC = \phi, P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}, P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16},$$

则  $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$

二、选择题(本题共5小题, 每小题3分, 满分15分。每小题给出四个选项中, 只有一个是符合题目要求的, 把所选项前的字母填在提后的括号内。)

(1) 设  $f(x)$  是连续函数,  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 则 ( )

(A) 当  $f(x)$  是奇函数时,  $F(x)$  必是偶函数。

(B) 当  $f(x)$  是偶函数时,  $F(x)$  必是奇函数。

(C) 当  $f(x)$  是周期函数时,  $F(x)$  必是周期函数。

(D) 当  $f(x)$  是单调增函数时,  $F(x)$  必是单调增函数。

(2) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$  其中  $g(x)$  是有界函数, 则  $f(x)$  在  $x = 0$  处 ( )

(A) 极限不存在

(B) 极限存在, 但不连续

(C) 连续, 但不可导

(D) 可导

(3) 设  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}, S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, -\infty < x < +\infty$ , 其中

$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 则  $S\left(-\frac{5}{2}\right)$  等于 ( )

(A)  $\frac{1}{2}$

(B)  $-\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{3}{4}$

(D)  $-\frac{3}{4}$

(4) 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 则

(A) 当  $m > n$  时, 必有行列式  $|AB| \neq 0$  (B) 当  $m > n$  时, 必有行列式  $|AB| = 0$

(C) 当  $n > m$  时, 必有行列式  $|AB| \neq 0$  (D) 当  $n > m$  时, 必有行列式  $|AB| = 0$

(5) 设两个相互独立的随机变量  $X$  和  $Y$  分别服从正态分布  $N(0, 1)$  和  $N(1, 1)$ , 则

$$(A) P\{X+Y \leq 0\} = \frac{1}{2}.$$

$$(B) P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}.$$

$$(C) P\{X-Y \leq 0\} = \frac{1}{2}.$$

$$(D) P\{X-Y \leq 1\} = \frac{1}{2}.$$

### 三、(本题满分5分)

设  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  是由方程  $z = xf'(x+y)$  和  $F(x, y, z) = 0$  所确定的函数, 其中  $f$  和  $F$  分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求  $\frac{dz}{dx}$ .

### 四、(本题满分5分)

求  $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy$ , 其中  $a, b$  为正常数,  $L$  为从点  $A(2a, 0)$  沿曲线  $y = \sqrt{2ax - x^2}$  到点  $O(0, 0)$  的弧.

### 五、(本题满分6分)

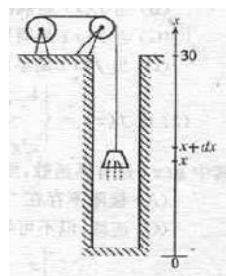
设函数  $y(x) (x \geq 0)$  二阶可导, 且  $y'(x) > 0$ ,  $y(0) = 1$ . 过曲线  $y = y(x)$  上任意一点  $P(x, y)$  作该曲线的切线及  $x$  轴的垂线, 上述两直线与  $x$  轴所围成的三角形的面积记为  $S_1$ , 区间  $[0, x]$  上以  $y = y(x)$  为曲边的曲边梯形面积记为  $S_2$ , 并设  $2S_1 - S_2$  恒为 1, 求此曲线  $y = y(x)$  的方程.

### 六、(本题满分6分)

试证: 当  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$ .

### 七、(本题满分6分)

为清除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口见图, 已知井深  $30m$ , 抓斗自重  $400N$ , 缆绳每米重  $50N$ , 抓斗抓起的污泥重  $2000N$ , 提升速度为  $3m/s$ , 在提升过程中, 污泥以  $20N/s$  的速度从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起污泥的抓斗提升至井口, 问克服重力需作多少焦耳的功? (说明: ①  $1N \times 1m = 1J$ ; 其中  $m, N, s, J$  分别表示米, 牛顿, 秒, 焦耳; ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



### 八、(本题满分7分)

设  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$  的上半部分, 点  $P(x, y, z) \in S$ ,  $\pi$  为  $S$  在点  $P$  处的切平面,

$\rho(x, y, z)$  为点  $O(0, 0, 0)$  到平面  $\pi$  的距离, 求  $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ .

### 九、(本题满分7分)

设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ,

(1) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$  的值;

(2) 试证: 对任意的常数  $\lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛

#### 十、(本题满分8分)

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$ , 其行列式  $|A| = -1$ , 又  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  有一个特征值  $\lambda_0$ , 属

于  $\lambda_0$  的一个特征向量为  $\alpha = (-1, -1, 1)^T$ , 求  $a, b, c$  和  $\lambda_0$  的值.

#### 十一、(本题满分6分)

设  $A$  为  $m$  阶实对称矩阵且正定,  $B$  为  $m \times n$  实矩阵,  $B^T$  为  $B$  的转置矩阵, 试证:  $B^T A B$  为正定矩阵的充分必要条件是  $B$  的秩  $r(B) = n$ .

#### 十二、(本题满分8分)

设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 下表列出了二维随机变量  $(X, Y)$  联合分布律及关于  $X$  和关于  $Y$  的边缘分布律中的部分数值, 试将其余数值填入表中的空白处.

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$P\{X = x_i\} = p_i$
$x_1$		$\frac{1}{8}$		
$x_2$	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y = y_j\} = p_j$	$\frac{1}{6}$			1

#### 十三、(本题满分6分)

设总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$

(2) 求  $\hat{\theta}$  的方差  $D(\hat{\theta})$ .

### 1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、填空题(本题共5个小题, 每小题3分, 满分15分.把正确答案填写在题中横线上.)

(1) 【答案】  $\frac{1}{3}$ .

【分析】 利用  $x \rightarrow 0$  的等价变换和洛必达法则求函数极限.

【详解】

$$\text{方法1: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \stackrel{\tan x \sim x}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

$$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \stackrel{\tan x \sim x}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{方法2: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}$$

$$\stackrel{\sin x \sim x}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

(2) 【答案】  $\sin x^2$

【分析】 欲求  $\frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(x, t) dt$ , 唯一的办法是作变换, 使含有  $\varphi(x, t)$  中的  $x$  “转移”到  $\varphi$  之外

【详解】 令  $u = x - t$ , 则  $dt = -du$ , 所以有

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \frac{d}{dx} \int_x^0 (-\sin u^2) du = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin u^2 du = \sin x^2$$

(3) 【答案】  $y = C_1 e^{-2x} + \left( C_2 + \frac{1}{4}x \right) e^{2x}$ , 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

【分析】 先求出对应齐次方程的通解, 再求出原方程的一个特解.

【详解】 原方程对应齐次方程  $y'' - 4y = 0$  的特征方程为:  $\lambda^2 - 4 = 0$ , 解得  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$ , 故  $y'' - 4y = 0$  的通解为  $y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ ,

由于非齐次项为  $f(x) = e^{2x}$ , 因此原方程的特解可设为  $y^* = A x e^{2x}$ , 代入原方程可求得

$$A = \frac{1}{4}, \text{ 故所求通解为 } y = y_1 + y^* = C_1 e^{-2x} + \left( C_2 + \frac{1}{4}x \right) e^{2x}$$

(4) 【详解】 因为

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad (\text{对应元素相减})$$

两边取行列式,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加到第1列}]{\text{把第2, \dots, n列}} \begin{vmatrix} \lambda-n & -1 & \dots & -1 \\ \lambda-n & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda-n & -1 & \dots & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{提取第1列的公因子}]{(\lambda-n)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{n行-1行}]{\begin{matrix} 2\text{行}-1\text{行} \\ 3\text{行}-1\text{行} \\ \dots \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{n-1}(\lambda-n)$$

令  $|\lambda E - A| = \lambda^{n-1}(\lambda-n) = 0$ , 得  $\lambda_1 = n(1\text{重})$ ,  $\lambda_2 = 0((n-1)\text{重})$ , 故矩阵  $A$  的  $n$  个特征值是  $n$  和  $0((n-1)\text{重})$

(5) 【答案】  $1/4$

【详解】 根据加法公式有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$$

因为  $P(A) = P(B) = P(C)$ , 设  $P(A) = P(B) = P(C) = p$

由于  $A, B, C$  两两相互独立, 所以有

$$P(AB) = P(A)P(B) = p \times p = p^2,$$

$$P(AC) = P(A)P(C) = p \times p = p^2,$$

$$P(BC) = P(B)P(C) = p \times p = p^2,$$

又由于  $ABC = \emptyset$ , 因此有  $P(ABC) = P(\emptyset) = 0$ ,

所以  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(AB) - P(BC) + P(ABC)$

$$= p + p + p - p^2 - p^2 - p^2 + 0 = 3p - 3p^2$$

又  $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$ , 从而  $P(A \cup B \cup C) = 3p - 3p^2 = \frac{9}{16}$ , 则有  $3p - 3p^2 - \frac{9}{16} = 0$

$$\Rightarrow p^2 - p + \frac{3}{16} = 0, \text{ 解得 } p = \frac{3}{4} \text{ 或 } p = \frac{1}{4}$$

因  $P(A) = P(B) = P(C) = p < \frac{1}{2}$ , 故  $p = \frac{1}{4}$ , 即  $P(A) = \frac{1}{4}$ .

## 二、选择题

(1) 【答案】(A)

【详解】应用函数定义判定函数的奇偶性、周期性和单调性.

$f(x)$  的原函数  $F(x)$  可以表示为  $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ , 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \stackrel{u=-t}{=} \int_0^x f(-u)d(-u) + C.$$

当  $f(x)$  为奇函数时,  $f(-u) = -f(u)$ , 从而有

$$F(-x) = \int_0^x f(u)du + C = \int_0^x f(t)dt + C = F(x)$$

即  $F(x)$  为偶函数. 故(A)为正确选项.

(B)、(C)、(D)可分别举反例如下:

$f(x) = x^2$  是偶函数, 但其原函数  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$  不是奇函数, 可排除(B);

$f(x) = \cos^2 x$  是周期函数, 但其原函数  $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$  不是周期函数, 可排除(C);

$f(x) = x$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增函数, 但其原函数  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内非单调增函数, 可排除(D).

(2) 【答案】(D)

【详解】由于可导必连续, 连续则极限必存在, 可以从函数可导性入手.

$$\text{因为 } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} xg(x) = 0,$$

从而,  $f'(0)$  存在, 且  $f'(0) = 0$ , 故正确选项为(D).

(3) 【答案】(C)

【详解】由题设知, 应先将  $f(x)$  从  $[0, 1]$  作偶延拓, 使之成为区间  $[-1, 1]$  上的偶函数, 然后再作周期(周期2)延拓, 进一步展开为傅里叶级数,

$$S(-\frac{5}{2}) = S(-2 - \frac{1}{2}) = S(-\frac{1}{2}) = S(\frac{1}{2})$$

而  $x = \frac{1}{2}$  是  $f(x)$  的间断点, 按狄利克雷定理有,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right) + f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}.$$

(4) 【答案】 B

【详解】

方法1:  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 则  $AB$  是  $m$  阶方阵, 因

$$r(AB) \leq \min[r(A), r(B)] \leq \min(m, n).$$

当  $m > n$  时, 有  $r(AB) \leq \min[r(A), r(B)] \leq n < m$ . ( $(AB)x = 0$  的系数矩阵的秩小于未知数的个数), 故有行列式  $|AB| = 0$ , 故应选(B).

方法2:  $B$  是  $n \times m$  矩阵, 当  $m > n$  时, 则  $r(B) = n$  (系数矩阵的秩小于未知数的个数), 方程组  $Bx = 0$  必有非零解, 即存在  $x_0 \neq 0$ , 使得  $Bx_0 = 0$ , 两边左乘  $A$ , 得  $ABx_0 = 0$ , 即  $ABx = 0$  有非零解, 从而  $|AB| = 0$ , 故选(B).

方法3: 用排除法

$$(A) m > n, \text{ 取 } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, |AB| = 0, (A) \text{ 不成立}$$

$$(C) n > m, \text{ 取 } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, AB = 0, |AB| = 0, (C) \text{ 不成立}$$

$$(D) n > m, \text{ 取 } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{n \times m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, AB = 1, |AB| = 1, (D) \text{ 不成立, 故选(B).}$$

(5) 【答案】 B

【详解】 根据正态分布的性质: 服从正态分布的独立随机变量的线性组合仍服从正态分布.

因  $X$  和  $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(1, 1)$ , 所以

$$T_1 = X + Y \sim N(u_1, \sigma_1^2), T_2 = X - Y \sim N(u_2, \sigma_2^2)$$

其中  $u_1 = E(X + Y)$ ,  $\sigma_1^2 = D(X + Y)$ ,  $u_2 = E(X - Y)$ ,  $\sigma_2^2 = D(X - Y)$

由期望的性质:  $E(T_1) = E(X + Y) = EX + EY = 0 + 1 = 1$ ,

$$E(T_2) = E(X - Y) = EX - EY = 0 - 1 = -1$$

由独立随机变量方差的性质:  $D(T_1) = D(X + Y) = DX + DY = 1 + 1 = 2$

$$D(T_2) = D(X - Y) = DX + DY = 1 + 1 = 2$$

所以  $T_1 = X + Y \sim N(1, 2)$ ,  $T_2 = X - Y \sim N(-1, 2)$

(一般来说遇到正态分布的小题, 主要就考两点, 标准化和对称性, 考虑问题也是从这两点出发)

A选项:  $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ . 因  $T_1 = X + Y \sim N(1, 2)$

由标准化的定义: 若  $X \sim N(u, \sigma^2)$ , 则  $\frac{X-u}{\sigma} \sim N(0, 1)$

所以,  $\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ , 将其标准化有

$$P\{X + Y \leq 0\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq \frac{0-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

(保证变换过程中概率不变, 所以不等号的左边怎么变, 右边也同样的变化)

又因为标准正态分布图像是关于  $y$  轴对称, 所以

$$P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq 0\right\} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} < \frac{1}{2}, \text{ 所以A错.}$$

B选项:  $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ .

将其标准化有:  $P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1-1}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}} \leq 0\right\} = \frac{1}{2}$  (根据标准正态分布的对称性)

故B正确.

C选项:  $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$ .

将其标准化有:  $P\left\{\frac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \leq \frac{0-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} > \frac{1}{2}$ , 故C错.

D选项:  $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ .

将其标准化有:  $P\left\{\frac{X-Y-(-1)}{\sqrt{2}} \leq \frac{1-(-1)}{\sqrt{2}}\right\} = P\left\{\frac{X-Y+1}{\sqrt{2}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}\right\} > \frac{1}{2}$ , 故D错.

三【详解】分别在  $z = xf(x+y)$  和  $F(x, y, z) = 0$  的两端对  $x$  求导数, 得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = f(x, y) + x\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)f'(x, y) \\ F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$



整理后得

$$\begin{cases} -xf'(x, y) \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = f(x, y) + xf'(x, y) \\ F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = -F'_x \end{cases}$$

解此方程组，得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -xf' & f + xf' \\ F'_y & -F'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -xf' & 1 \\ F'_y & F'_z \end{vmatrix}} = \frac{(f + xf')F'_y - xfF'_z}{F'_y + xfF'_z}, (F'_y + xfF'_z \neq 0)$$

#### 四【详解】

**方法1:** 凑成闭合曲线，应用格林公式.

添加从点  $O(0,0)$  沿  $y=0$  到点  $A(2a,0)$  的有向直

线段  $L_1$ ，如图，则

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_1} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &\quad - \int_{L_1} (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \end{aligned}$$

利用格林公式，前一积分

$$I_1 = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (b-a) dx dy = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a)$$

其中  $D$  为  $L_1+L$  所围成的半圆域，后一积分选择  $x$  为参数，得  $L_1$ ：

$$\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}, (0 \leq x \leq 2a),$$

可直接积分  $I_2 = \int_0^{2a} (-bx)dx = -2a^2b$ ，故  $I = I_1 - I_2 = \left( \frac{\pi}{2} + 2 \right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3$ .

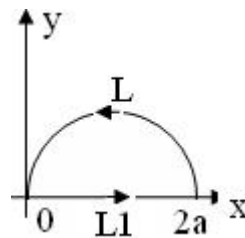
**方法2:** 将曲线积分分成两部分，其中一部分与路径无关，余下的积分利用曲线的参数方程计算.

$$\begin{aligned} I &= \int_L (e^x \sin y - b(x+y))dx + (e^x \cos y - ax)dy \\ &= \int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy - \int_L b(x+y)dx + ax dy \end{aligned}$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = e^x \sin y \Big|_{(2a,0)}^{(0,0)} = 0$$

对后一积分，取  $L$  的参数方程



$$\begin{cases} x = a + a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, \text{ 则 } \begin{cases} dx = -a \sin t dt \\ dy = a \cos t dt \end{cases}, t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \pi, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned} & \int_L b(x+y)dx + axdy \\ &= \int_0^\pi (-a^2b \sin t - a^2b \sin t \cos t - a^2b \sin^2 t + a^3 \cos t + a^3 \cos^2 t) dt \\ &= -2a^2b - \frac{1}{2}\pi a^2b + \frac{1}{2}\pi a^3 \end{aligned}$$

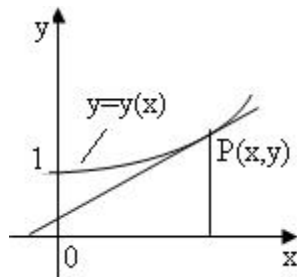
$$\text{从而 } I = 0 - (-2a^2b - \frac{1}{2}\pi a^2b + \frac{1}{2}\pi a^3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3$$

五【详解】如图，曲线  $y = y(x)$  上点  $P(x, y)$  处的切线方程为  $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$

所以切线与  $x$  轴的交点为  $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$

由于  $y'(x) > 0, y(0) = 1$ , 因此  $y(x) > 0 (x > 0)$

$$\text{于是 } S_1 = \frac{1}{2}y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'}\right) \right| = \frac{y^2}{2y'}$$



$$\text{又 } S_2 = \int_0^x y(t)dt,$$

$$\text{根据题设 } 2S_1 - S_2 = 1, \text{ 即 } 2 \cdot \frac{y^2}{2y'} - \int_0^x y(t)dt = 1, \text{ 两边对 } x \text{ 求导并化简得 } yy'' = (y')^2$$

这是可降阶得二阶常微分方程，令  $p = y'$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ ,

则上述方程可化为  $yp \frac{dp}{dy} = p^2$ , 分离变量得  $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ , 解得  $p = C_1 y$ , 即  $\frac{dy}{dx} = C_1 y$ ,

从而有  $y = C_1 e^x + C_2$ , 根据  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ , 可得  $C_1 = 1, C_2 = 0$ ,

故所求曲线得方程为  $y = e^x$

六【详解】构造函数，利用函数的单调性，

证法1: 令  $f(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2$ . 易知  $f(1) = 0$

$$\text{又 } f'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, f'(1) = 0$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x^2}, f''(1) = 2 > 0$$

$$f'''(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

可见, 当  $0 < x < 1$  时,  $\begin{cases} f'''(x) < 0 \\ f''(x) \searrow \end{cases}$ ; 当  $1 < x < +\infty$  时,  $\begin{cases} f'''(x) > 0 \\ f''(x) \nearrow \end{cases}$

因此,  $f''(1) = 2$  为  $f''(x)$  的最小值, 即当  $0 < x < +\infty$  时,  $f''(x) \geq f''(1) = 2 > 0$ , 所以  $f'(x)$  为单调增函数. 又因为  $f'(1) = 0$ , 所以有

$$0 < x < 1 \text{ 时 } f'(x) < 0; \quad 1 < x < +\infty \text{ 时 } f'(x) > 0,$$

所以利用函数单调性可知,  $f(1)$  为  $f(x)$  的最小值, 即  $f(x) \geq f(1) = 0$

所以有  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$ .

**证法2:** 先对要证的不等式作适当变形, 当  $x = 1$  时, 原不等式显然成立;

当  $0 < x < 1$  时, 原不等式等价于  $\ln x \leq \frac{x-1}{x+1}$ ;

当  $1 < x < +\infty$  时, 原不等式等价于  $\ln x \geq \frac{x-1}{x+1}$ ;

$$\text{令} \quad f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{则} \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0 \quad (x > 0)$$

又因为  $f(1) = 0$ , 利用函数单调性可知

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f(x) < 0, \text{ 即 } \ln x < \frac{x-1}{x+1}; \text{ 当 } 1 < x < +\infty \text{ 时, } f(x) > 0, \text{ 即 } \ln x > \frac{x-1}{x+1};$$

综上所述, 当  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$ .

**七【详解】** 建立坐标轴如图所示,

**解法1:** 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功  $W = W_1 + W_2 + W_3$ , 其中  $W_1$  是克服抓斗自重所作的功;  $W_2$  是克服缆绳重力作的功;  $W_3$  为提出污泥所作的功. 由题意知

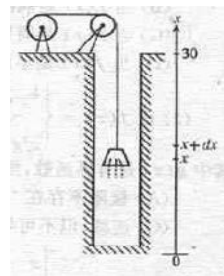
$$W_1 = 400N \times 30m = 12000J.$$

将抓斗由  $x$  处提升到  $x + dx$  处, 克服缆绳重力所作的功为

$$\begin{aligned} dW_2 &= \text{缆绳每米重} \times \text{缆绳长} \times \text{提升高度} \\ &= 50(30 - x)dx, \end{aligned}$$

$$\text{从而} \quad W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500J.$$

在时间间隔  $[t, t + dt]$  内提升污泥需做功为



$$\begin{aligned} dW_3 &= (\text{原始污泥重} - \text{漏掉污泥重}) \times \text{提升高度}(3dt) \\ &= (2000 - 20t)3dt \end{aligned}$$

将污泥从井底提升至井口共需时间  $\frac{30m}{3m/s} = 10s$ ,

$$\text{所以 } W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000J.$$

因此, 共需做功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = (12000 + 22500 + 57000)J = 91500J$$

**解法2:** 将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功记为  $W$ , 当抓斗运动到  $x$  处时, 作用力  $f(x)$  包括

抓斗的自重  $400N$ , 缆绳的重力  $50(30-x)N$ , 污泥的重力  $(2000 - \frac{x}{3} \cdot 20)N$ ,

$$\text{即 } f(x) = 400 + 50(30-x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

$$\text{于是 } W = \int_0^{30} \left( 3900 - \frac{170}{3}x \right) dx = 3900x - \frac{85}{3}x^2 \Big|_0^{30} = 117000 - 24500 = 91500J$$

**八【分析】** 先写出切平面方程, 然后求  $\rho(x, y, z)$ , 最后将曲面积分化成二重积分.

**【详解】** 点  $P(x, y, z) \in S$ ,  $S$  在点  $P$  处的法向量为  $\vec{n} = \{x, y, 2z\}$ , 设  $(X, Y, Z)$  为  $\pi$  上任意一点, 则  $\pi$  的方程为

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0, \text{ 化简得 } \frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1$$

由点到平面的公式,  $O(0, 0, 0)$  到  $\pi$  的距离

$$\rho(x, y, z) = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left| \frac{x}{2}x + \frac{y}{2}y + z \cdot z \right|}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2}} = \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{从而 } \iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \iint_S z \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2} dS$$

用投影法计算此第一类曲面积分, 将  $S$  投影到  $xOy$  平面, 其投影域为  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$

由曲面方程知  $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}, (x, y) \in D$ , 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)}}$$

因此 
$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}} d\sigma$$

故有 
$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)} dS &= \iint_S z \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2} dS \\ &= \frac{1}{4} \iint_D (4-x^2-y^2) d\sigma \stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4-r^2) r dr = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

九【详解】(1) 因为 
$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d \tan x \stackrel{\tan x=t}{=} \frac{1}{n} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

又由部分和数列

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

有 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1,$$

因此 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = 1.$$

(2) 先估计  $a_n$  的值, 因为

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \text{ 令 } t = \tan x, \text{ 则 } dt = \sec^2 x dx, \text{ 即 } dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

所以 
$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

所以 
$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由于  $\lambda+1>0$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  也收敛.

十【详解】根据题设,  $A^*$  有一个特征值  $\lambda_0$ , 属于  $\lambda_0$  的一个特征向量为  $\alpha = (-1, -1, 1)^T$ , 根据特征值和特征向量的概念, 有  $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$ ,

把  $|A| = -1$  代入  $AA^* = |A|E$  中, 得  $AA^* = |A|E = -E$ , 则  $AA^* \alpha = -E\alpha = -\alpha$ . 把  $A^* \alpha = \lambda_0 \alpha$  代入, 于是  $AA^* \alpha = A\lambda_0 \alpha = \lambda_0 A\alpha$ , 即  $-\alpha = \lambda_0 A\alpha$

$$\text{也即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \Rightarrow \lambda_0 \begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

常数  $\lambda_0$  乘以矩阵  $\begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix}$ , 需用  $\lambda_0$  乘以矩阵的每一个元素

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} -a+1+c \\ -5-b+3 \\ -(1-c)-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0(-a+1+c) \\ \lambda_0(-5-b+3) \\ \lambda_0[-(1-c)-a] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵相等, 则矩阵的对应元素都相同, 可得

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3) \end{cases}$$

因  $|A|=-1 \neq 0$ ,  $A$  的特征值  $\lambda \neq 0$ ,  $A^*$  的特征值  $\lambda^* = \frac{|A|}{\lambda} \neq 0$ , 故  $\lambda_0 \neq 0$

由(1),(3)两式得

$$\lambda_0(-a+1+c) = -\lambda_0(-1+c-a),$$

两边同除  $\lambda_0$ , 得  $-a+1+c = -(-1+c-a)$

整理得  $a=c$ , 代入(1)中, 得  $\lambda_0=1$ . 再把  $\lambda_0=1$  代入(2)中得  $b=-3$

又由  $|A|=-1$ ,  $b=-3$  以及  $a=c$ , 有

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix} \xrightarrow{3\text{行}+1\text{行}} \begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\text{列}+1\text{列}} \begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{按第3行展开}} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a-1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } (-1)^{3+1} \text{ 的指数 } 3, 1 \text{ 分别是 } 1 \text{ 的行数和列数}) \\ &= 3(a-1) - 2a = a-3 = -1 \end{aligned}$$

故  $a=c=2$ , 因此  $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1$ .

### 十一【详解】

“必要性”. 设  $B^T A B$  为正定矩阵, 则由定义知, 对任意的实  $n$  维列向量  $x \neq 0$ , 有  $x^T (B^T A B) x > 0$ , 即  $(Bx)^T A (Bx) > 0$ , 于是,  $Bx \neq 0$ , 即对任意的实  $n$  维列向量  $x \neq 0$ , 都有  $Bx \neq 0$ . (若  $Bx=0$ , 则  $A(Bx)=A0=0$  矛盾). 因此,  $Bx=0$  只有零解, 故有  $r(B)=n$  ( $Bx=0$

有唯一零解的充要条件是  $r(B) = n$ ).

“充分性”. 因  $A$  为  $m$  阶实对称矩阵, 则  $A^T = A$ , 故  $(B^T AB)^T = B^T A^T B = B^T AB$ , 根据实对称矩阵的定义知  $B^T AB$  也为实对称矩阵. 若  $r(B) = n$ , 则线性方程组  $Bx = 0$  只有零解, 从而对任意的实  $n$  维列向量  $x \neq 0$ , 有  $Bx \neq 0$ . 又  $A$  为正定矩阵, 所以对于  $Bx \neq 0$  有  $(Bx)^T A (Bx) = x^T (B^T AB) x > 0$ , 故  $B^T AB$  为正定矩阵(对任意的实  $n$  维列向量  $x \neq 0$ , 有  $x^T (B^T AB) x > 0$ ).

十二【详解】离散型随机变量边缘分布律的定义:

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \dots$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

(通俗点说就是在求关于  $X$  的边缘分布时, 就把对应  $x$  的所有  $y$  都加起来, 同理求关于  $Y$  的边缘分布时, 就把对应  $y$  的所有  $x$  都加起来)

$$\text{故 } P\{Y = y_1\} = p_{\cdot 1} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_1\} = \sum_i p_{i1} \quad \text{即}$$

$$P\{Y = y_1\} = P\{X = x_1, Y = y_1\} + P\{X = x_2, Y = y_1\}$$

而由表知  $P\{Y = y_1\} = \frac{1}{6}$ ,  $P\{X = x_2, Y = y_1\} = \frac{1}{8}$ , 所以

$$P\{X = x_1, Y = y_1\} = P\{Y = y_1\} - P\{X = x_2, Y = y_1\} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

又根据  $X$  和  $Y$  相互独立, 则有:

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\} \quad \text{即 } p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

因  $P\{X = x_1, Y = y_1\} = \frac{1}{24}$ ,  $P\{Y = y_1\} = \frac{1}{6}$ , 而  $P\{X = x_1, Y = y_1\} = P\{X = x_1\}P\{Y = y_1\}$

$$\text{所以 } P\{X = x_1\} = \frac{P\{X = x_1, Y = y_1\}}{P\{Y = y_1\}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}$$

再由边缘分布的定义有

$$P\{X = x_1\} = P\{X = x_1, Y = y_1\} + P\{X = x_1, Y = y_2\} + P\{X = x_1, Y = y_3\}$$

$$\text{所以 } P\{X = x_1, Y = y_3\} = P\{X = x_1\} - P\{X = x_1, Y = y_1\} - P\{X = x_1, Y = y_2\}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

又由独立性知  $P\{X = x_1, Y = y_3\} = P\{X = x_1\}P\{Y = y_3\}$

$$\text{所以 } P\{Y = y_3\} = \frac{P\{X = x_1, Y = y_3\}}{P\{X = x_1\}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

由边缘分布定义有  $P\{Y = y_3\} = P\{X = x_1, Y = y_3\} + P\{X = x_2, Y = y_3\}$

$$\text{所以 } P\{X = x_2, Y = y_3\} = P\{Y = y_3\} - P\{X = x_1, Y = y_3\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{再由 } \sum_i p_i = 1, \text{ 所以 } P\{X = x_2\} = 1 - P\{X = x_1\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{而 } P\{X = x_2\} = P\{X = x_2, Y = y_1\} + P\{X = x_2, Y = y_2\} + P\{X = x_2, Y = y_3\}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } P\{X = x_2, Y = y_2\} &= P\{X = x_2\} - P\{X = x_2, Y = y_1\} - P\{X = x_2, Y = y_3\} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{又 } \sum_j p_j = 1, \text{ 所以 } P\{Y = y_2\} = 1 - P\{Y = y_1\} - P\{Y = y_3\} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

所以有:

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash \\ X \end{array}$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$P\{X = x_i\} = p_i$
$x_1$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$x_2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y = y_j\} = p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

十三【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩，此题中被估参数只有一个，故只需要用样本矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望)

(1) 矩估计：由期望的定义：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\theta} x \frac{6x}{\theta^3} (\theta - x) dx = \int_0^{\theta} \left( \frac{6x^2}{\theta^2} - \frac{6x^3}{\theta^3} \right) dx \\ &= \frac{6}{\theta^2} \int_0^{\theta} x^2 dx - \frac{6}{\theta^3} \int_0^{\theta} x^3 dx = \frac{6}{\theta^2} \frac{\theta^3}{3} - \frac{6}{\theta^3} \frac{\theta^4}{4} = 2\theta - \frac{3\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$



样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，用样本均值估计期望有  $EX = \bar{X}$ ，

即  $\frac{\theta}{2} = \bar{X}$ ，解得  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

(2) 由随机变量方差的性质： $D(cX) = c^2 D(X)$ ，所以  $D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X})$

又由独立随机变量方差的性质：若  $X$  和  $Y$  独立，则  $D(X+Y) = DX + DY$

因  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的简单随机样本，所以  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立且  $X_1, X_2, \dots, X_n$  与  $X$  服从同一分布，即  $DX_i = DX \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{而 } D(\bar{X}) &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X) \\ &= \frac{1}{n^2} D(X) \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n}{n^2} D(X) = \frac{1}{n} D(X) \end{aligned}$$

方差的定义： $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ ，所以求方差只需要求出  $E(X^2)$  和  $E(X)$

根据二阶原点矩的定义： $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

$$\text{故 } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3} (\theta - x) dx = \int_0^{\theta} \left( \frac{6x^3}{\theta^2} - \frac{6x^4}{\theta^3} \right) dx = \frac{6\theta^2}{20}$$

而  $E(X) = \frac{\theta}{2}$ ，所以

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{6\theta^2}{20} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20}$$

因此  $\hat{\theta} = 2\bar{X}$  的方差为  $D(\hat{\theta}) = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{X}) = \frac{4}{n} D(X) = \frac{\theta^2}{5n}$ 。