

## 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、填空题：1-6 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (2) 微分方程  $y' = \frac{y(1-x)}{x}$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}.$
- (3) 设  $\Sigma$  是锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $0 \leq z \leq 1$ ) 的下侧，则  $\iint_{\Sigma} x dy dz + 2y dz dx + 3(z-1) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
- (4) 点  $(2, 1, 0)$  到平面  $3x + 4y + 5z = 0$  的距离  $d = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $E$  为 2 阶单位矩阵, 矩阵  $B$  满足  $BA = B + 2E$ , 则  $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布, 则

$$P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题：9-14 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

- (7) 设函数  $y = f(x)$  具有二阶导数, 且  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ ,  $\Delta x$  为自变量  $x$  在  $x_0$  处的增量,  $\Delta y$  与  $dy$  分别为  $f(x)$  在点  $x_0$  处对应的增量与微分, 若  $\Delta x > 0$ , 则( )

(A)  $0 < dx < \Delta y.$                       (B)  $0 < \Delta y < dy.$

(C)  $\Delta y < dy < 0.$                       (D)  $dy < \Delta y < 0.$

- (8) 设  $f(x, y)$  为连续函数, 则  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  等于( )

(A)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$                       (B)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(C)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$                       (D)  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

- (9) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数( )

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛.                      (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛.

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$  收敛.

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  收敛.

(10) 设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ . 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是( )

(A) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

(B) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

(C) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ .

(D) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

(11) 设  $a_1, a_2, \dots, a_s$  均为  $n$  维列向量,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 下列选项正确的是( )

(A) 若  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性相关, 则  $Aa_1, Aa_2, \dots, Aa_s$  线性相关.

(B) 若  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性相关, 则  $Aa_1, Aa_2, \dots, Aa_s$  线性无关.

(C) 若  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关, 则  $Aa_1, Aa_2, \dots, Aa_s$  线性相关.

(D) 若  $a_1, a_2, \dots, a_s$  线性无关,  $Aa_1, Aa_2, \dots, Aa_s$  线性无关.

(12) 设  $A$  为 3 阶矩阵, 将  $A$  的第 2 行加到第 1 行得  $B$ , 再将  $B$  的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列

得  $C$ , 记  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则( )

(A)  $C = P^{-1}AP$ .

(B)  $C = PAP^{-1}$ .

(C)  $C = P^T AP$ .

(D)  $C = PAP^T$ .

(13) 设  $A, B$  为随机事件, 且  $P(B) > 0, P(A|B) = 1$ , 则必有( )

(A)  $P(A \cup B) > P(A)$ .

(B)  $P(A \cup B) > P(B)$ .

(C)  $P(A \cup B) = P(A)$ .

(D)  $P(A \cup B) = P(B)$ .

(14) 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y$  服从正态分布  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且

$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$ , 则必有( )

(A)  $\sigma_1 < \sigma_2$ .

(B)  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

(C)  $\mu_1 < \mu_2$ .

(D)  $\mu_1 > \mu_2$ .

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ , 计算二重积分  $I = \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$ .

(16)(本题满分 12 分)

设数列  $\{x_n\}$  满足  $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$ .

(I) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限;

(II) 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ .

(17)(本题满分 12 分)

将函数  $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$  展开成  $x$  的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数  $f(u)$  在  $(0, +\infty)$  内具有二阶导数, 且  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  满足等式  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(I) 验证  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$ .

(II) 若  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ , 求函数  $f(u)$  的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面  $D = \{(x, y) | y > 0\}$  内, 函数  $f(x, y)$  是有连续偏导数, 且对任意的  $t > 0$  都有  $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$ .

证明: 对  $D$  内的任意分段光滑的有向简单闭曲线  $L$ , 都有  $\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$
 有 3 个线性无关的解

(I) 证明方程组系数矩阵  $A$  的秩  $r(A) = 2$ ;

(II) 求  $a, b$  的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵  $A$  的各行元素之和均为 3, 向量  $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$  是线性方程组  $Ax = 0$  的两个解.

(I) 求  $A$  的特征值与特征向量

(II) 求正交矩阵  $Q$  和对角矩阵  $\Lambda$ , 使得  $Q^T A Q = \Lambda$ .

(22)(本题满分 9 分)

随机变量  $x$  的概率密度为 
$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令  $y = X^2, F(x, y)$  为二维随机变量  $(X, Y)$  的分布函数. 求

(I)  $Y$  的概率密度  $f_Y(y)$ ; (II)  $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ .

(23)(本题满分 9 分)

设总体  $X$  的概率密度为 
$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
 其中  $\theta$  是未知参数 ( $0 < \theta < 1$ ).

$X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 记  $N$  为样本值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中小于 1 的个数, 求  $\theta$  的最大似然估计.

## 2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

## 一、填空题

(1) 【答案】 2.

【详解】 由等价无穷小替换,  $x \rightarrow 0$  时,  $\ln(1+x) \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$$

(2) 【答案】  $Cxe^{-x}$ .

【详解】 分离变量,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y(1-x)}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{(1-x)}{x} dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} dx - \int dx \\ &\Rightarrow \ln y = \ln x - x + c \Rightarrow e^{\ln y} = e^{\ln x - x + c} \Rightarrow y = Cxe^{-x} \end{aligned}$$

(3) 【答案】  $2\pi$ 【详解】 补一个曲面  $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 1 \end{cases}$ , 取上侧, 则  $\Sigma_1 + \Sigma$  组成的封闭立体  $\Omega$  满足高斯公式,

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma_1 + \Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = I$$

设  $P=x, Q=2y, R=3(z-1)$ , 则  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1+2+3=6$  $\therefore I = \iiint_{\Omega} 6dx dy dz$  ( $\Omega$  为锥面  $\Sigma$  和平面  $\Sigma_1$  所围区域)  $= 6V$  ( $V$  为上述圆锥体体积)注: 以下几种解法针对于不同的方法求圆锥体体积  $V$ 方法 1:  $I = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$  (高中方法, 圆锥的体积公式, 这种方法最简便)而  $\iint_{\Sigma_1} xdydz + 2ydzdx + 3(z-1)dx dy = 0$  ( $\because$  在  $\Sigma_1$  上:  $z=1, dz=0$ )

方法 2: 先二重积分, 后定积分.

因为  $V = \int_0^1 Sdz$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $r^2 = z^2$ ,  $S = \pi r^2 = \pi z^2$ ,所以  $V = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{1}{3} \pi z^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \pi$ . 从而  $I = 6V = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$

方法 3: 利用球面坐标.  $z=1$  在球坐标下为:  $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$ ,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} 6\rho^2 \sin \varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi \\ &= (-2) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \cos \varphi}{\cos^3 \varphi} = (-2) \int_0^{2\pi} d\theta \left( -\frac{1}{2} \right) \cos^{-2} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

方法 4: 利用柱面坐标.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 6rdz = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r)rdr \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right) \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

(4) 【答案】  $\sqrt{2}$

【详解】代入点  $P(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|6 + 4 + 0|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \sqrt{2}$$

(5) 【答案】 2

【详解】由已知条件  $BA = B + 2E$  变形得,  $BA - 2E = B \Rightarrow B(A - E) = 2E$ , 两边取行列式, 得

$$|B(A - E)| = |2E| = 4|E| = 4$$

$$\text{其中, } |A - E| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2, \quad |2E| = 2^2 |E| = 4$$

$$\text{因此, } |B| = \frac{|2E|}{|A - E|} = \frac{4}{2} = 2.$$

(6) 【答案】  $1/9$

【详解】根据独立性原理: 若事件  $A_1, \dots, A_n$  独立, 则

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\} = P\{A_1\} P\{A_2\} \dots P\{A_n\}$$

事件  $\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \{X \leq 1, Y \leq 1\} = \{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 1\}$ , 而随机变量  $X$  与  $Y$  均服从区间  $[0, 3]$  上的均匀分布, 有  $P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$  和  $P\{Y \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}$ . 又随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 所以,

$$P\{\max(x, y) \leq 1\} = P\{x \leq 1, Y \leq 1\} = P\{x \leq 1\} \cdot P\{Y \leq 1\} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

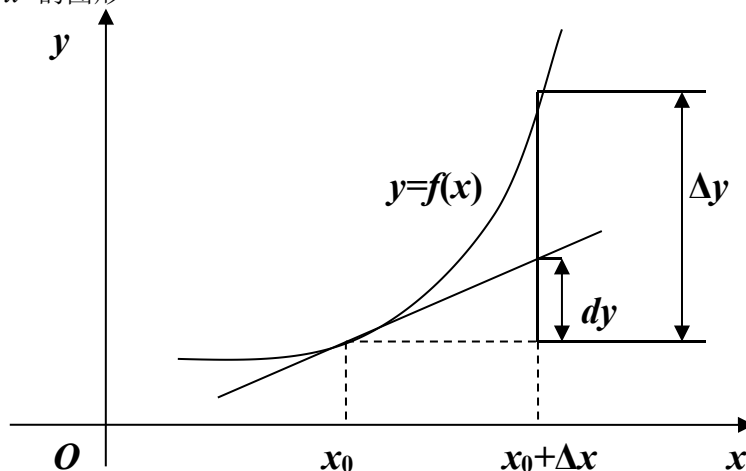
## 二、选择题.

(7) 【答案】A

【详解】

方法 1: 图示法.

因为  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  严格单调增加; 因为  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  是凹函数, 又  $\Delta x > 0$ , 画  $f(x) = x^2$  的图形



结合图形分析, 就可以明显得出结论:  $0 < dy < \Delta y$ .

方法 2: 用两次拉格朗日中值定理

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \quad (\text{前两项用拉氏定理})$$

$$= f'(\xi)\Delta x - f'(x_0)\Delta x \quad (\text{再用一次拉氏定理})$$

$$= f''(\eta)(\xi - x_0)\Delta x, \quad \text{其中 } x_0 < \xi < x_0 + \Delta x, x_0 < \eta < \xi$$

由于  $f''(x) > 0$ , 从而  $\Delta y - dy > 0$ . 又由于  $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$ , 故选 [A]

方法 3: 用拉格朗日余项一阶泰勒公式. 泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

其中  $R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ . 此时  $n$  取 1 代入, 可得

$$\Delta y - dy = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2 > 0$$

又由  $dy = f'(x_0)\Delta x > 0$ , 选 (A).

## (8) 【答案】 (C)

【详解】 记  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr = \iint_D f(x, y) dx dy$ , 则区域  $D$  的极坐标表示是:

$0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . 题目考察极坐标和直角坐标的互化问题, 画出积分区间, 结合图形可以看出, 直角坐标的积分范围(注意  $y = x$  与  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限的交点是  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ), 于是  $D: 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

所以, 原式  $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ . 因此选 (C)

## (9) 【答案】 D

【详解】

方法 1: 数列收敛的性质: 收敛数列的四则运算后形成的新数列依然收敛

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  也收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$  也收敛. 选 D.

方法 2: 记  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 但  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , ( $p$  级数,  $p = \frac{1}{2}$  级数发散);

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$  ( $p$  级数,  $p = 1$  级数发散) 均发散. 由排除法可知, 应选 D.

## (10) 【答案】 D

【详解】

方法 1: 化条件极值问题为一元函数极值问题.

已知  $\varphi(x_0, y_0) = 0$ , 由  $\varphi(x, y) = 0$ , 在  $(x_0, y_0)$  邻域, 可确定隐函数  $y = y(x)$ ,

满足  $y(x_0) = y_0$ ,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} / \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ .

$(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点  $\Leftrightarrow x = x_0$  是  $z = f(x, y(x))$  的极值点. 它的必要条件是

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \bigg|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \bigg|_{x=x_0} = 0$$

若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ , 或  $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$ , 因此不选 (A), (B).

若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$  (否则  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} \neq 0$ ). 因此选 (D)

方法 2: 用拉格朗日乘子法. 引入函数  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ , 有



$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \phi'_x(x, y) = 0 & (1) \\ F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \phi'_y(x, y) = 0 & (2) \\ F'_\lambda = \phi'(x, y) = 0 \end{cases}$$

因为  $\phi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 所以  $\lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\phi'_y(x_0, y_0)}$ , 代入(1)得

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{f'_y(x_0, y_0)\phi'_x(x_0, y_0)}{\phi'_y(x_0, y_0)}$$

若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 选(D)

(11) 【答案】A

【详解】

方法 1: 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则由线性相关定义存在不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

为了得到  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  的形式, 用  $A$  左乘等式两边, 得

$$k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + \dots + k_sA\alpha_s = 0 \quad \textcircled{1}$$

于是存在不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得①成立, 所以  $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$  线性相关.

方法 2: 如果用秩来解, 则更加简单明了. 只要熟悉两个基本性质, 它们是:

1.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ ; 2.  $r(AB) < r(B)$ .

矩阵  $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ , 设  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ , 则由

$r(AB) < r(B)$  得  $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$ . 所以答案应该为(A).

(12) 【答案】B

【详解】用初等矩阵在乘法中的作用(矩阵左乘或右乘初等矩阵相当于对矩阵进行初等行变换或列变换)得出

$$\text{将 } A \text{ 的第 2 行加到第 1 行得 } B, \text{ 即 } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \xrightarrow{\text{记}} PA$$

$$\text{将 } B \text{ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 } C, \text{ 即 } C = B \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记}} BQ$$

$$\text{因为 } PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \text{ 故 } Q = P^{-1}E = P^{-1}.$$

从而  $C = BQ = BP^{-1} = PAP^{-1}$ , 故选(B).

(13) 【答案】C

【详解】本题考条件概率的概念和概率的一般加法公式

根据条件概率的定义, 当  $P(B) > 0$  时,  $P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} = 1$  得  $P\{AB\} = P\{B\}$

根据加法公式有  $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} = P\{A\}$ , 故选(C)

(14) 【答案】A.

【详解】由于  $X$  与  $Y$  的分布不同, 不能直接判断  $P\{|X - \mu_1| < 1\}$  和  $P\{|Y - \mu_2| < 1\}$  的大小与参数关系. 如果将其标准化后就可以方便地进行比较了.

随机变量标准化, 有  $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1)$ , 且其概率密度函数是偶函数. 所以

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2P\left\{0 < \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2\left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \Phi(0)\right] = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1.$$

同理有,  $P\{|Y - \mu_2| < 1\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1$

因为  $\Phi(x)$  是单调递增函数, 当  $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$  时,

$2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1 > 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1$ , 即  $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$ , 所以  $\sigma_1 < \sigma_2$ , 故选(A).

### 三、解答题

(15) 【详解】积分区域对称于  $x$  轴,  $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$  为  $y$  的奇函数,

$$\text{从而知 } \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$$

$$\text{所以 } I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \xrightarrow{\text{极坐标}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln 2$$

(16)【详解】(I) 由于  $0 < x < \pi$  时,  $0 < \sin x < x$ , 于是  $0 < x_{n+1} = \sin x_n \leq x_n$ , 说明数列  $\{x_n\}$  单调减少且  $x_n > 0$ . 由单调有界准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 记为  $A$ .

递推公式两边取极限得  $A = \sin A$ ,  $\therefore A = 0$

(II) 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$ , 为 “ $1^\infty$ ” 型.

因为离散型不能直接用洛必达法则, 先考虑  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^{\frac{1}{t^2}} &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln \left( \frac{\sin t}{t} \right)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \cdot \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{(t \cos t - \sin t)}{t^2}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t - \sin t}{2t^3}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - t \sin t - \cos t}{6t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{6t}} = e^{-\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

(17)【详解】用分解法转化为求  $\frac{1}{1+ax}$  的展开式, 而这是已知的.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{1}{2+x-x^2} &= \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

$$\text{因此 } f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1} \quad (|x| < 1).$$

(18)【详解】(I) 由于题目是验证, 只要将二阶偏导数求出来代入题目中给的等式就可以了

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

同理 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{y^2}{(x^2+y^2)} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

代入  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , 得 
$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + \frac{f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

所以  $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$  成立.

(II) 令  $f'(u) = p$  于是上述方程成为  $\frac{dp}{du} = -\frac{p}{u}$ , 则  $\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{du}{u} + c$ ,

即  $\ln|p| = -\ln u + c$ , 所以  $f'(u) = p = \frac{c}{u}$

因为  $f'(1) = 1$ , 所以  $c = 1$ , 得  $f(u) = \ln u + c_2$

又因为  $f(1) = 0$ , 所以  $c_2 = 0$ , 得  $f(u) = \ln u$

(19) 【详解】

方法 1: 把  $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$  两边对  $t$  求导, 得:  $xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y)$

令  $t = 1$ , 则  $xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = -2f(x, y)$ ;

再令  $P = yf(x, y)$ ,  $Q = -xf(x, y)$ ,

所以  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x, y) - xf'_x(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y) + yf'_y(x, y)$

得  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 所以由格林公式知结论成立.

方法 2:  $D$  是单连通区域, 对于  $D$  内的任意分段光滑简单闭曲线  $L$ ,  $\Gamma$  为  $D$  内的一曲线

$$\oint_L yf(x, y)dx - xf(x, y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Gamma} yf(x, y)dx - xf(x, y)dy \text{ 在 } D \text{ 内与路径无关}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(-xf(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(yf(x, y)) \quad ((x, y) \in D)$$

$$\Leftrightarrow xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) + 2f(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in D)$$

同方法 1, 由  $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$  可证得上式.

因此结论成立.

(20) 【详解】(I) 系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$  未知量的个数为  $n=4$ ，且又  $AX=b$  有三个

线性无关解，设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是方程组的 3 个线性无关的解，则  $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$  是  $AX=0$  的两个线性无关的解。因为  $\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$  线性无关又是齐次方程的解，于是  $AX=0$  的基础解系中解的个数不少于 2，得  $4-r(A) \geq 2$ ，从而  $r(A) \leq 2$ 。

又因为  $A$  的行向量是两两线性无关的，所以  $r(A) \geq 2$ 。所以  $r(A) = 2$ 。

(II) 对方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & |-1 \\ a & 1 & 3 & b & |1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{[2]+[1] \times (-4) \\ [3]+[1] \times (-a)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & |1+a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3]+[2] \times (1-a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & |-1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & |3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & |4-2a \end{bmatrix},$$

由  $r(A)=2$ ，得  $\begin{cases} 4-2a=0 \\ 4a+b-5=0 \end{cases}$ ，即  $a=2, b=-3$ 。

所以  $[A|b]$  作初等行变换后化为： $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & |2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & |-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{bmatrix}$ ，

它的同解方程组  $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = -3 + x_3 - 5x_4 \end{cases}$  ①

①中令  $x_3=0, x_4=0$  求出  $AX=b$  的一个特解  $(2, -3, 0, 0)^T$ ；

$AX=0$  的同解方程组是  $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 4x_4 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 \end{cases}$  ②

取  $x_3=1, x_4=0$ ，代入②得  $(-2, 1, 1, 0)^T$ ；取  $x_3=0, x_4=1$ ，代入②得  $(4, -5, 0, 1)^T$ 。所以

$AX=0$  的基础解系为  $(-2, 1, 1, 0)^T, (4, -5, 0, 1)^T$

所以方程组  $AX=b$  的通解为：

$$(2, -3, 0, 0)^T + c_1(-2, 1, 1, 0)^T + c_2(4, -5, 0, 1)^T, \quad c_1, c_2 \text{ 为任意常数}$$

(21) 【详解】(I) 由题设条件  $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1$ ,  $A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$ , 故  $\alpha_1, \alpha_2$  是  $A$  的对应于  $\lambda = 0$  的特征向量, 又因为  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 故  $\lambda = 0$  至少是  $A$  的二重特征值. 又因为  $A$  的每行元素之和为 3, 所以有  $A(1,1,1)^T = (3,3,3)^T = 3(1,1,1)^T$ , 由特征值、特征向量的定义,  $\alpha_0 = (1,1,1)^T$  是  $A$  的特征向量, 特征值为  $\lambda_3 = 3$ ,  $\lambda_3$  只能是单根,  $k_3\alpha_0, k_3 \neq 0$  是全体特征向量, 从而知  $\lambda = 0$  是二重特征值.

于是  $A$  的特征值为  $3, 0, 0$ ; 属于 3 的特征向量:  $k_3\alpha_3, k_3 \neq 0$ ; 属于 0 的特征向量:

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ ,  $k_1, k_2$  不都为 0.

(II) 为了求出可逆矩阵必须对特征向量进行单位正交化.

先将  $\alpha_0$  单位化, 得  $\eta_0 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$ .

对  $\alpha_1, \alpha_2$  作施密特正交化, 得  $\eta_1 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ ,  $\eta_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})^T$ .

作  $Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , 则  $Q$  是正交矩阵, 并且  $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(22) 【详解】 $f_Y(y) = F'_Y(y)$ , 由于  $f_X(x)$  是分段函数, 所以在计算  $P\{X^2 \leq y\}$  时, 要相应分段讨论. 求  $F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4)$ , 只是与  $X$  有关, 不必先求出  $F(x, y)$  的函数.

(I) 因为  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$ , 当  $y < 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ;

当  $0 \leq y < 1$  时,  $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} \sqrt{y}$ ;

当  $1 \leq y < 4$  时,  $F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 \frac{1}{2} dx + \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{y}$ ;

当  $y \geq 4$  时,  $F_Y(y) = 1$ ;

综上所述, 有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1 \leq y < 4 \\ 1, & 4 \leq y \end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的微分, 所以,

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这个解法是从分布函数的最基本的概率定义入手, 对  $y$  进行适当的讨论即可, 属于基本题型.

$$(II) \text{ 由协方差的计算公式 } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2)$$

需要计算  $E(X)$ ,  $E(X^2)$ ,  $E(X^3)$ .

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{2} dx + \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4};$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx = \frac{5}{6};$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^3}{2} dx + \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx = \frac{7}{8}.$$

$$\text{故 } \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2) = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

(III) 根据二维随机变量的定义  $F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}$ , 有

$$F(-\frac{1}{2}, 4) = P(X \leq -\frac{1}{2}, Y \leq 4) = P\left\{X \leq -\frac{1}{2}, X^2 \leq 4\right\} = P\left\{-2 \leq X \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{由一维概率计算公式 } P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx \text{ 有, } F(-\frac{1}{2}, 4) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}.$$

$$(23) \text{ 【答案】 } \hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}; \theta \text{ 的最大似然估计 } \hat{\theta} = \frac{N}{n}.$$

【详解】矩估计的实质在于用样本矩来估计相应的总体矩, 此题中被估参数只有一个, 故只需要用样本一阶原点矩(样本均值)来估计总体的一阶原点矩(期望), 所以矩估计的关键在于

找出总体的矩  $E(X)$ .

最大似然估计, 实质上就是找出使似然函数最大的那个参数, 问题的关键在于构造似然函数. 样本值中  $x_i$  小于 1 的概率是  $\theta$ ,  $x_i$  大于 1 的概率是  $(1-\theta)$ . 因此, 似然函数应为:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N}.$$

(I) 由数学期望的定义:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta)dx = \int_0^1 \theta x dx + \int_1^2 (1-\theta)x dx = \frac{1}{2}\theta + \frac{3}{2}(1-\theta) = \frac{3}{2} - \theta$$

样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

用样本均值估计期望有  $EX = \bar{X}$  即  $\frac{3}{2} - \theta = \bar{X}$ , 解得  $\theta = \frac{3}{2} - \bar{X}$ .

所以参数  $\theta$  的矩估计为  $\hat{\theta} = \frac{3}{2} - \bar{X}$ . 其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

(II) 对样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  按照  $<1$  或者  $\geq 1$  进行分类, 不妨设:  $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1$ ,

$x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1$ . 似然函数

$$L(\theta) = \begin{cases} \theta^N (1-\theta)^{n-N}, & x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1, x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在  $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pN} < 1$ ,  $x_{pN+1}, x_{pN+2}, \dots, x_{pn} \geq 1$  时, 等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n-N) \ln(1-\theta),$$

由于  $\ln L(\theta)$  和  $L(\theta)$  在  $\theta$  的同一点取得最大值, 所以令

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n-N}{1-\theta} = 0,$$

解得  $\theta = \frac{N}{n}$ , 所以  $\theta$  的最大似然估计值为  $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$ .