

FPCV 스터디 4주차

곽나영

2024.09.24.

Image Processing I

Overview

Image Processing I

Transform image to new one that is clearer or easier to analyze.

Topics:

- (1) Pixel Processing
- (2) LSIS and Convolution
- (3) Linear Image Filters
- (4) Non-Linear Image Filters
- (5) Template Matching by Correlation



© 2020 Shree K. Nayar

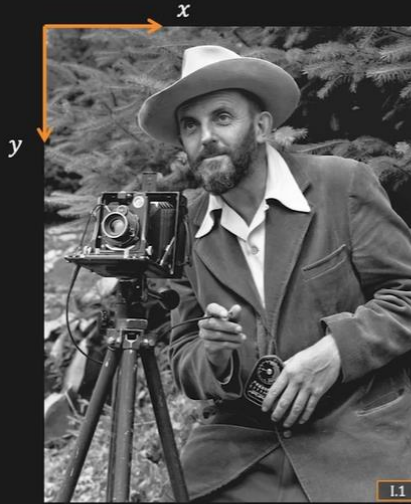
야간 이미지, 모션 블러나 초점 흐림과 같은 다양한 이미지 노이즈들을 이미지 프로세싱으로 제거할 수 있다.

1. 픽셀 프로세싱

Image Processing I

Pixel Processing

Image as a Function



$f(x, y)$ is the image intensity at position (x, y)



- 이미지를 함수로 정의
- 공간좌표 x, y 가 주어지고 밝기 값인 f 를 갖는다.
- 컬러 이미지라면 각각 RGB값을 갖는다고 생각!

Pixel (Point) Processing

Transformation T of intensity f at each pixel to intensity g :

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$



© 2020 Shree K. Nayar

- 픽셀 프로세싱이란 픽셀의 밝기 값을 확인해서 어떠한 밝기 값이나 다른 색상으로 매핑하는 것
- 말 그대로 어떠한 작업을 할 때 픽셀값을 사용해서 처리를 하는 것
- 블러 필터: 주변 픽셀의 평균을 사용해 이미지를 부드럽게 한다.
- 색상 조정: 필터 값을 변경해 이미지의 밝기를 조정

Point Processing



Original (f)



Darken ($f - 128$)



Lighten ($f + 128$)



Invert ($255 - f$)



© 2020 Shree K. Nayar

- 이미지의 색상을 조정하는 방법
- 어둡게 하고 싶으면 3채널 각각에서 -128을 한다.
- 밝게 하고 싶으면 +128, 반전을 하고 싶다면 (8비트 이미지의 경우) 255에서 각 픽셀 값들을 뺀다.

Pixel Processing

Low Contrast ($f/2$)

Original (f)

High Contrast ($f * 2$)

Gray ($0.3f_R + 0.6f_G + 0.1f_B$)

© 2020 Shree K. Nayar

- 이미지의 대비를 변경하는 방법
- 대비를 낮추고 싶다면 각 픽셀 값에 $/2$ 를 해준다.
- 대비를 높이고 싶다면 각 픽셀 값에 $*2$ 를 해준다. 이때 픽셀 값은 이미지 자체의 동적범위를 넘어설 수 없다.
- 토끼의 하얀색 몸이 **과포화**된 상태!
- 픽셀의 RGB 값을 변경해 그레이스케일 이미지도 만들 수 있다.

Image Processing I

LSIS and Convolution

Linear Shift Invariant System (LSIS)



Study of Linear Shift Invariant Systems (LSIS)
leads to useful image processing algorithms.



© 2020 Shree K. Nayar

- 선형 이동 불변 시스템은 이미지 프로세싱 알고리즘에 중요한 역할을 한다.
- 입력 $f(x)$ 와 출력 $g(x)$ 가 있는 시스템

LSIS: Linearity

$$f_1 \rightarrow \boxed{\text{LSIS}} \rightarrow g_1 \quad f_2 \rightarrow \boxed{\text{LSIS}} \rightarrow g_2$$

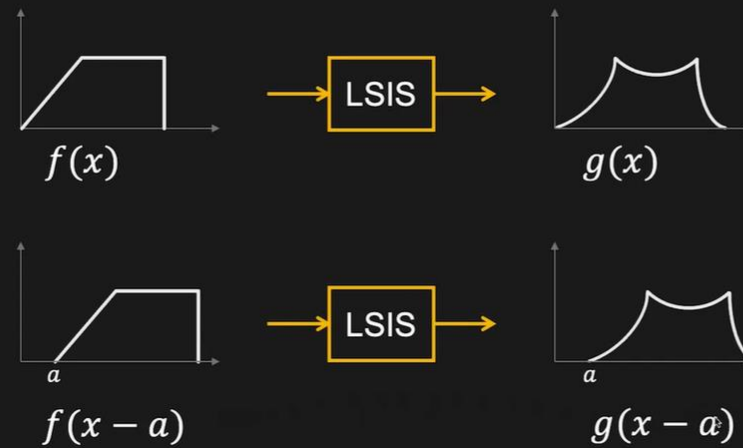
$$\alpha f_1 + \beta f_2 \rightarrow \boxed{\text{LSIS}} \rightarrow \alpha g_1 + \beta g_2$$



© 2020 Shree K. Nayar

- 1. 선형성(Linearity)
- 입력 f_1 에 대해 출력 g_1 , 입력 f_2 에 대해 g_2 가 발생한다.
- 선형성을 가진 시스템은 $\alpha f_1 + \beta f_2$ 을 입력했을 때 $\alpha g_1 + \beta g_2$ 를 출력한다.
- 입력 신호에 상수배를 하고 더했을 때, 출력 신호에도 동일하게 상수배와 덧셈 연산이 적용되는 성질

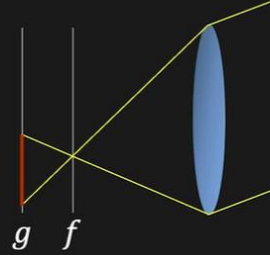
LSIS: Shift Invariance



© 2020 Shree K. Nayar

- 2. 이동 불변성
- 입력 $f(x)$ 을 a 만큼 움직이면 출력 $g(x)$ 도 a 만큼 움직인다.
- 선형성과 이동 불변성을 모두 만족하는 시스템을 LSIS라고 한다.

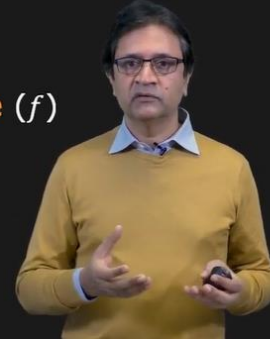
Ideal Lens is an LSIS



Defocused Image (g): Processed version of Focused Image (f)

Linearity: Brightness variation

Shift invariance: Scene movement



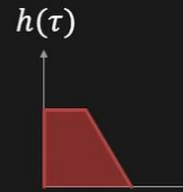
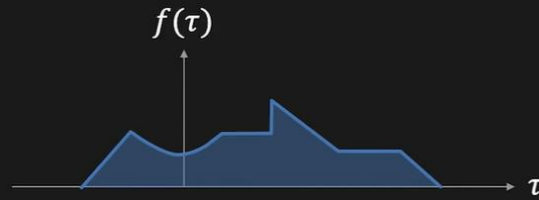
© 2020 Shree K. Nayar

- 초점이 맞춰진 f 와 초점이 흐린 g 가 있다.
- 3차원 장면의 밝기가 증가하면 f 와 g 모두 밝기가 올라간다. -> 선형성
- 3차원 장면 내 물체를 이동시키면 f 와 g 에서도 개체가 똑같이 이동한다. -> 이동 불변

Convolution

Convolution of two functions $f(x)$ and $h(x)$

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$



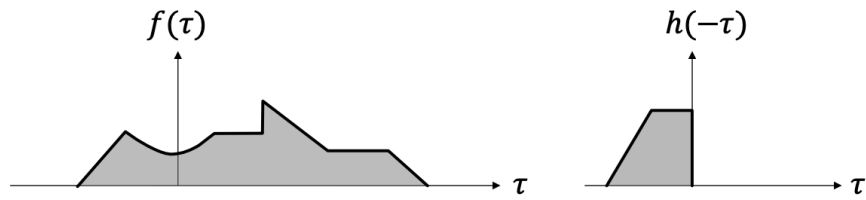
© 2020 Shree K. Nayar

- 컨볼루션이란 두 함수나 신호를 결합하여 새로운 출력을 생성하는 방식으로 기호는 * 이다.
- 원본 신호에 대해 특정 패턴을 강조하거나 특정 노이즈를 제거하는 데 사용
- 시간에 따라 적분을 하는데 두 함수가 각 순간에 얼마나 겹치는 지 평가하는 것이다.
- 음성신호라면 1차원의 시간이 되겠지만 이미지에서는 2차원의 픽셀이 얼마나 일치하는 지를 보는 것.

Convolution

Convolution of two functions $f(x)$ and $h(x)$

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$

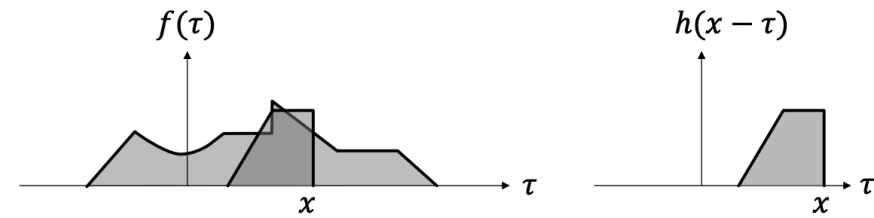


13

Convolution

Convolution of two functions $f(x)$ and $h(x)$

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$



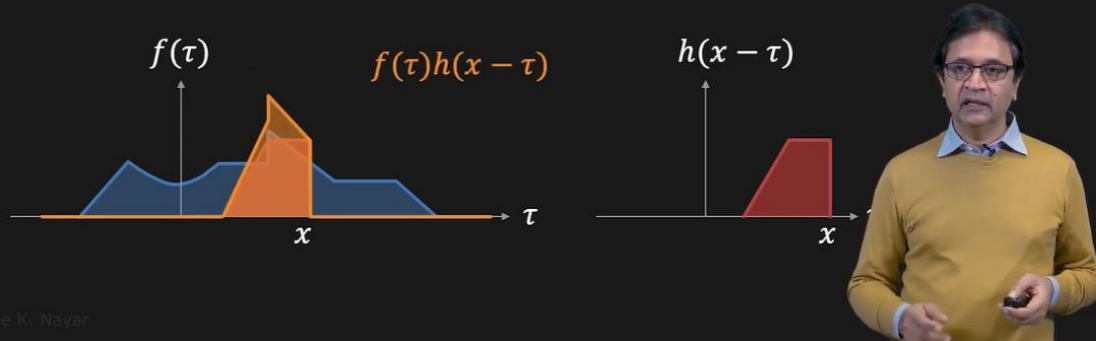
14

- 1. $h(\tau)$ 를 수직 축에 대해 뒤집어 $h(-\tau)$ 을 구하고 이를 x 만큼 이동시켜 $h(x - \tau)$ 를 만든다.
- 2. $h(x - \tau)$ 를 $f(\tau)$ 위에 겹쳐둔다.

Convolution

Convolution of two functions $f(x)$ and $h(x)$

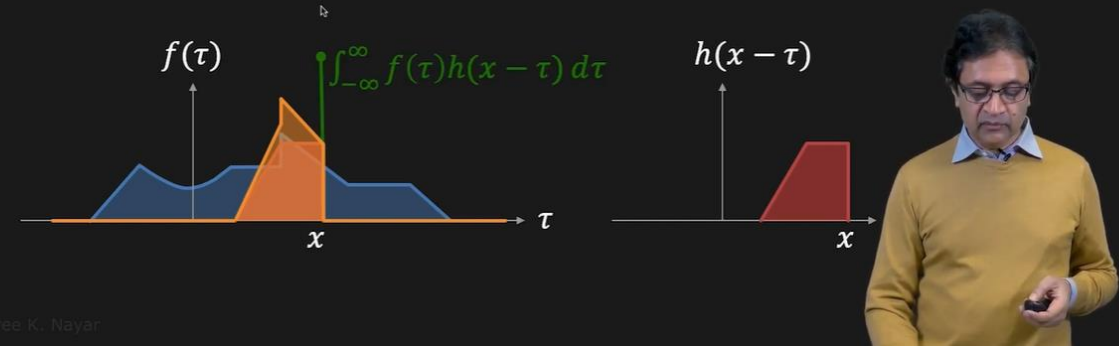
$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$



Convolution

Convolution of two functions $f(x)$ and $h(x)$

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$

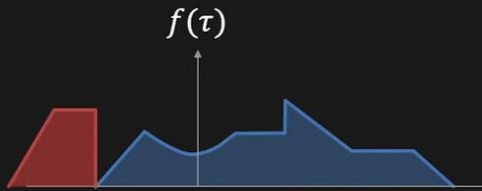


- 3. 겹쳐진 두 함수 $f(\tau)$ 와 $h(x - \tau)$ 의 곱을 구하고 적분을 구한다.
- 4. 해당 스칼라 값이 특정 x 에서의 g 값이다.

Convolu

Convolution of two func

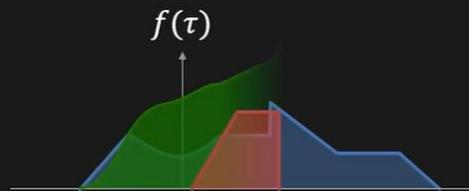
$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(x - \tau) d\tau$$



Convolu

Convolution of two func

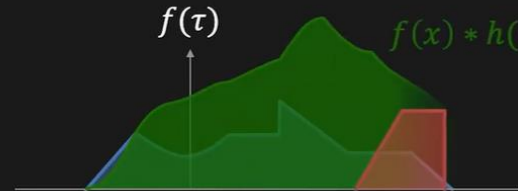
$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(x - \tau) d\tau$$



Convolutio

Convolution of two functio

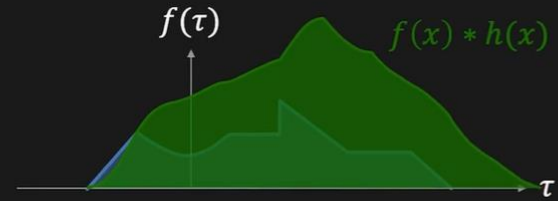
$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(x - \tau) d\tau$$



Convolution

Convolution of two functions f

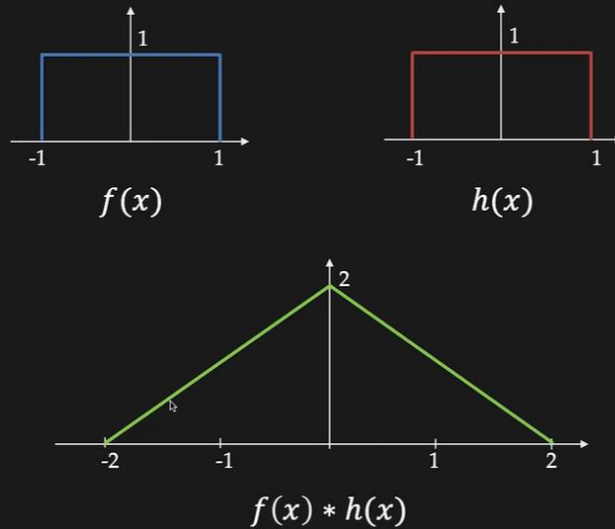
$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(x - \tau) d\tau$$



LSIS implies Convolution and Convolution

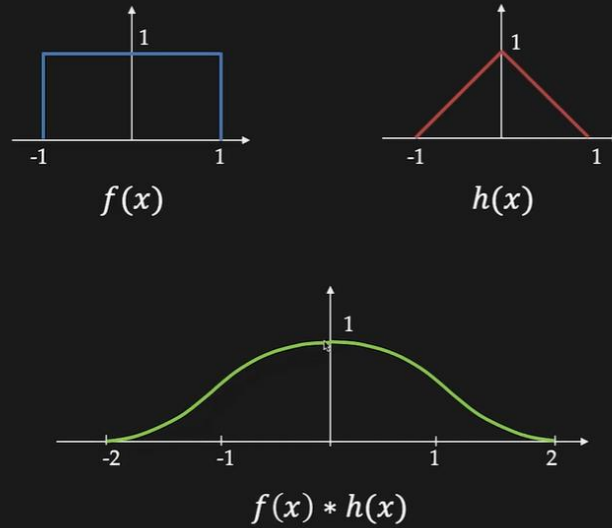
- 전체 함수 $g(x)$ 를 찾기 위해서는 $h(-\tau)$ 을 만들고 $-\infty$ 에서부터 ∞ 까지 슬라이딩을 시킨다.
- 그리고 이를 $f(x)$ 와 $h(-\tau)$ 을 곱하고 적분하면 $g(x)$ 가 나온다.

Convolution: Example



- 직사각형 $h(x)$ 함수를 뒤집어 $h(-x)$ 를 만들고 (같은 모양) $-\infty$ 부터 ∞ 까지 슬라이드 한다.
- 그러면 두 함수가 만나기 시작하는 -2부터 겹치는 영역이 증가해 정확히 겹쳐지는 원점까지 계속 증가한다.
- 그때 겹치는 영역은 2가 된다. 그리고 서서히 줄어들고 $x=2$ 가 되면 겹치는 영역이 0이 된다.

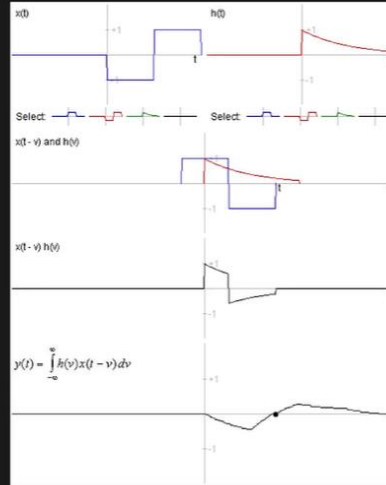
Convolution: Example



© 2020 Shree K. Nayar

- 삼각형 $h(x)$ 함수를 뒤집어 $h(-x)$ 를 만들고 (같은 모양) $-\infty$ 부터 ∞ 까지 슬라이드 한다.
- 그러면 두 함수가 만나기 시작하는 -2부터 겹치는 영역이 증가해 정확히 겹쳐지는 원점까지 계속 증가한다.
- 그때 겹치는 영역은 삼각형 너비인 1이 된다. 그리고 서서히 줄어들고 $x=2$ 가 되면 겹치는 영역이 0이 된다.

Convolution: Online Demo



<http://www.jhu.edu/signals/convolve/>

© 2020 Shree K. Nayar



<https://pages.jh.edu/signals/convolve/>

Convolution is LSIS

Linearity:

$$\text{Let: } g_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)h(x-\tau) d\tau \quad \text{and} \quad g_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)h(x-\tau) d\tau$$

Then:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1(\tau) + \beta f_2(\tau))h(x-\tau) d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)h(x-\tau) d\tau + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau)h(x-\tau) d\tau \\ &= \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) \end{aligned}$$



Convolution is LSIS

Shift Invariance:

$$\text{Let: } g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau) d\tau$$

Then:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau-a)h(x-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)h(x-a-\mu) d\mu \quad (\text{Substituting } \mu = \tau - a) \\ &= g(x-a) \end{aligned}$$



- 1. 선형성

f1과 h의 컨볼루션 결과를 g1, f2와 h의 컨볼루션 결과를 g2라고 가정

두 입력 f1과 f2에 상수배를 하고 더하면 그대로 출력에도 똑같이 상수배를 하고 더한 $\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$ 가 된다.

- 2. 이동 불변

입력 $f(\tau)$ 대신 a만큼 이동시켜 $f(\tau - a)$ 을 만들고 $\mu = \tau - a$ 로 치환해 식을 정리하면 출력도 a만큼 이동하게 된다.

두 가지를 모두 만족한 컨볼루션은 선형 이동 불변 하다.

Can we find h ?

$$f \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow g \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x - \tau) d\tau$$

What input f will produce output $g = h$?

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ?(\tau)h(x - \tau) d\tau$$



© 2020 Shree K. Navar

- 우리는 컨볼루션이 선형 이동 불변하다는 것을 알지만 입력이 어떤 함수와 연산되는 지는 모른다. **블랙박스 시스템**
- $h(x)$ 를 구하는 방법은 따로 없을까?

Unit Impulse Function

$$\delta(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot 2\varepsilon = 1$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) b(x - \tau) d\tau = b(x)$$

Sifting Property

© 2020 Shree K. Nayar



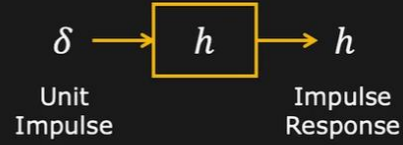
- 유닛 임펄스 함수(델타 함수)의 면적은 1이다.
- 이 함수를 입력으로 넣어서 $h(x)$ 와 컨볼루션을 하면 $\delta(x) \cdot h(x)$ 는 $\delta(x)$ 면적이 1이므로 $h(x)$ 의 값을 얻게 된다.
- 따라서 단위 임펄스 함수와 컨볼루션한 모든 함수는 원래 함수 자체가 된다.

Impulse Response



$$g(x) = f(x) * h(x)$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(x - \tau) d\tau$$



$$h(x) = \delta(x) * h(x)$$

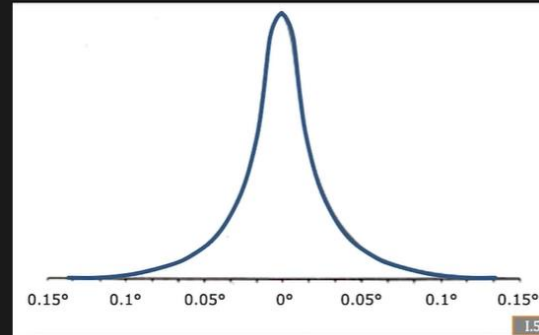
$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(x - \tau) d\tau$$



© 2020 Shree K. Navar

- 유닛 임펄스 함수와 컨볼루션한 결과 h 함수를 임펄스 응답이라고도 한다.
- 임펄스 응답은 블랙박스에 어떤 함수가 있는 지를 설명해 줄 수 있다.

Impulse Response of Human Eye



Human Eye PSF

© 2020 Shree K. Nayar

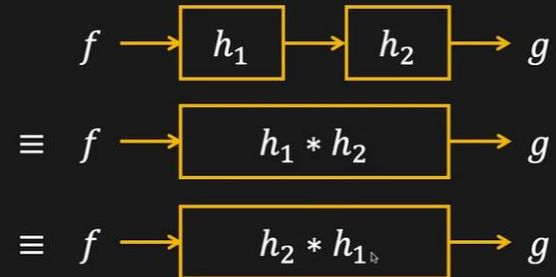
- 사람의 눈의 임펄스 응답을 어떻게 관찰 할 수 있을까?
- 눈에 2차원 임펄스 함수를 주면 눈의 임펄스 응답을 측정할 수 있다.
- 아주 멀리 있는 빛을 임펄스 함수로 주고 망막에 형성하는 이미지는 눈의 임펄스 응답

Properties of Convolution

Commutative $a * b = b * a$

Associative $(a * b) * c = a * (b * c)$

Cascaded System



© 2020 Shree K. Nayar



- 컨볼루션 연산은 교환 법칙과 결합 법칙이 성립한다.
- 따라서 두 번의 컨볼루션 연산을 하나의 컨볼루션 연산으로 결합하는 것이 가능하다.

2D Convolution

LSIS:

$$f(x, y) \longrightarrow \boxed{h(x, y)} \longrightarrow g(x, y)$$

Convolution:

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\tau, \mu) h(x - \tau, y - \mu) d\tau d\mu$$



© 2020 Shree K. Nayar

- 2차원의 이미지의 LSIS의 시스템에서는 입력도, 임펄스 응답도, 출력도 모두 2차원이 된다.
- 컨볼루션 연산에서는 h 함수가 x, y 각각 두 번 뒤집히게 되고 이중 적분을 한다.