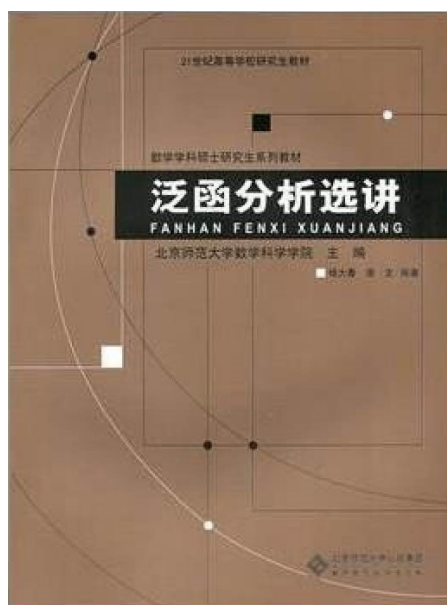


《泛函分析选讲》

习题参考解答



吴瀚霖

2018 年 3 月 10 日

目录

第一章 紧算子的谱理论	2
1.1 有界线性算子的谱	2
1.2 紧算子	7
1.3 紧算子的谱理论	13
1.4 Hilbert-Schmidt 定理	18
第二章 Banach 代数	22
2.1 代数准备知识	22
2.2 Banach 代数	25
2.3 例子与应用	29
2.4 C^* 代数	30
2.5 Hilbert空间上的正常算子	30
参考文献	31

第一章 紧算子的谱理论

1.1 有界线性算子的谱

习题 1.1.1 设 \mathcal{X} 是一个有限维 Banach 空间, $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 为有界线性算子。则对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值之一。

证明: 若 A 为有限维空间 \mathcal{X} 上的有界算子, 则 A 可由矩阵 (a_{ij}) 表示. A 单射当且仅当 A 满射. 从而 $\lambda I - A$ 可逆当且仅当 $\lambda E - A$ 可逆. 而当

- $\det(\lambda E - A) = 0$ 时, $\lambda \in \sigma(A)$;
- $\det(\lambda E - A) \neq 0$ 时, $\lambda \in \rho(A)$.

故对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值. □

习题 1.1.2 设 \mathcal{X} 为一个 Banach 空间. 证明 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 中的可逆 (有有界逆) 算子集为开集.

证明: $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ 且 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ 且 $\|T - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}\|T^{-1}\| &= \|(T - A + A)^{-1}\| \\ &= \|A^{-1}(I + (T - A)A^{-1})^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|(I + (T - A)A^{-1})^{-1}\| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

由引理 1.1.9, $\|(T - A)A^{-1}\| \leq \|T - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$. 故 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 中的可逆算子为开集. □

习题 1.1.3 考虑 ℓ^2 上的左推移算子

$$A: (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots),$$

证明 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ 且 $\sigma_r(A) = \emptyset$.

证明: 首先说明 A 是有界线性算子且 $\|A\| = 1$. 设

$$\begin{aligned}x &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2, \\y &= Ax = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots).\end{aligned}$$

有

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 \implies \|Ax\| \leq \|x\| \implies \|A\| \leq 1.$$

另一方面, $x' := (0, 1, 0, \dots)$, 则 $Ax' = (1, 0, 0, \dots)$, $\|Ax'\| = \|x'\|$. 故 $\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$.

(1) 当 $|\lambda| > 1$ 时, $|\lambda| > \|A\| \implies \lambda \in \rho(A)$.

(2) $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. $\forall \lambda \in D, \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$. 因为

$$A(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = (\lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots),$$

所以 $\lambda \in \sigma_p(A)$.

(3) 先考虑 $\lambda = 1$ 时. 首先证明 $(I - A)^{-1}$ 存在. $\forall x \in \ell^2$, 若 $(I - A)x = 0$, 则

$$(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

于是 $x = x_1(1, 1, \dots)$. 又因为 $x \in \ell^2$, 所以 $x_1 = 0$, 从而 $x = \theta$. 即 $(I - A)^{-1}$ 存在.

下证 $R(I - A) \neq \ell^2$, 但 $\overline{R(I - A)} = \ell^2$.

若 $y = (I - A)x$, 则 $y_k = x_k - x_{k+1}$, 即

$$\left. \begin{aligned}y_1 &= x_1 - x_2 \\y_2 &= x_2 - x_3 \\&\dots \\y_k &= x_k - x_{k+1}\end{aligned} \right\} \implies \sum_{j=1}^k y_j = x_1 - x_{k+1}.$$

即 $x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^k y_j$. 易知, 非零分量为有限个的 $y \in R(I - A)$. 事实上, 设 y 的非零分量个数为 K , 取 $x_1 = \sum_{j=1}^K y_j$,

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_1 - \sum_{j=1}^k y_j, & k = 1, 2, \dots, K \\ 0, & k > K \end{cases}.$$

由上式可知, $x \in \ell^2$.

存在 $y \in \ell^2$, 但是 $y \notin R(I - A)$. 事实上, 取 $y = \{\frac{1}{j}\}_{j=1}^\infty \in \ell^2$. 则

$$x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

所以, $x \notin \ell^2$, 也就是说 $y \notin R(I - A)$, 那么 $R(I - A) \neq \ell^2$.

下证 $\overline{R(I - A)} = \ell^2$, 为此, 设 $\xi := \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in (0, \infty)$. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum_{k=N+1}^\infty |\xi_k|^2 < \varepsilon$. 令 $y := \{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. 其中

$$y_j = \begin{cases} \xi_j, & j \leq N \\ 0, & j > N. \end{cases}$$

有

$$\|y - \xi\|_{\ell^2} = \|\{\xi_j - y_j\}_{j=N+1}^\infty\|_{\ell^2} = \sum_{k=N+1}^\infty |\xi_k|^2 < \varepsilon.$$

故 $\overline{R(I - A)} = \ell^2$. 从而 $1 \in \sigma_c(A)$.

其次, 对于一般的 λ 使 $|\lambda| = 1$. 可以划归为 $\lambda = 1$ 的情形. 事实上,

$$(\lambda I - A)x = y \iff \lambda x_k - x_{k+1} = y_k \iff \frac{x_k}{\lambda^k} - \frac{x_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

令 $\xi_k = \frac{x_k}{\lambda^k}, \eta_k = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \dots$. 则有 $\xi_k - \xi_{k+1} = \eta_k, k = 1, 2, \dots$. 即划归为 $\lambda = 1$ 的情形. □

习题 1.1.4 考虑 $L^2(0, +\infty)$ 上的微分算子:

$$A : x(t) \mapsto x'(t). D(A) = H^1(0, +\infty).$$

证明 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = 0\}$ 且 $\sigma_r(A) = \emptyset$. 其中 $\operatorname{Re} \lambda$ 表示 λ 的实部.

证明: 记 $\Omega := (0, \infty)$. 由 Meyers-Serrin 定理有

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \tilde{d}^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}.$$

其中 $\langle \tilde{d}u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \tilde{d}^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

先证明 A 是闭算子. 只需证明当 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$. 且

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega) \\ u'_n \rightarrow v \text{ in } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (n \rightarrow \infty).$$

时, 有 $u \in D(A)$, 且 $u' = v$. $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle u'_n, \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle$. 从而由

$$|\langle u_n, \varphi' \rangle - \langle u, \varphi' \rangle| = |\langle u_n - u, \varphi' \rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi'\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0. (n \rightarrow \infty).$$

知 $\langle u'_n, \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle \rightarrow -\langle u, \varphi' \rangle$.

类似可以证明 $\langle u'_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle v, \varphi \rangle, n \rightarrow \infty$. 即 $\langle v, \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立. 由弱导数的定义知 $u' = v \in L^2(\Omega)$. 从而 $u \in H^1(\Omega)$, 且 $u' = v$. 故 A 为闭算子.

再证 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 考虑方程 $(\lambda I - A)u = 0$, 即 $u' - \lambda u = 0$. 由PDE知系数光滑从而弱解也光滑. 解ODE, $u' - \lambda u = 0$. 得 $u = 0$ 或 $ce^{\lambda x} \in L^2(\Omega)$. 故 $(\lambda I - A)^{-1}$ 不存在. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

再证 $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = 0\}$. 先说明 $R(\lambda I - A) \subsetneq L^2(\Omega)$. 令 $v(x) := \frac{e^{\lambda x}}{x+1} \in L^2(\Omega)$. 由 $(\lambda I - A)u = v$ 得

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\lambda x} [u(0) - \int_0^x e^{-\lambda t} v(t) dt] \\ &= e^{\lambda x} [u(0) - \ln(x+1)] \notin L^2(\Omega). \end{aligned}$$

故 $R(\lambda I - A) \subsetneq L^2(\Omega)$.

再证 $\overline{R(\lambda I - A)} = L^2(\Omega)$. 因 $C_c^\infty(\Omega) = L^2(\Omega)$, 故只需说明 $R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 事实上, 对 $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$. $\exists M_v$, 使得 $\operatorname{supp} v \subset (0, M_v)$. 由 $(\lambda I - A)u = v$, 得 $u(x) = e^{\lambda x} [u(0) - \int_0^x e^{-\lambda t} v(t) dt]$. 令 $u(0) := \int_0^{M_v} e^{-\lambda t} v(t) dt$. 则

$$u(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} \int_x^{M_v} e^{-\lambda t} v(t) dt, & x \in (0, M_v) \\ 0, & x \in (M_v, \infty). \end{cases}$$

满足 $u \in H^1(\Omega)$. 即 $R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 故 $\overline{R(\lambda I - A)} = L^2(\Omega)$.

最后说明 $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 设 $\operatorname{Re} \lambda > 0$, 此时 $ce^{\lambda x} \notin L^2(\Omega)$. 从而 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在. 断言 $R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 事实上, 对 $\forall v \in L^2(\Omega)$. 令 $u(x) = e^{\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda t} v(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda s} v(s+x) ds$. 则 u 满足 $u' - \lambda u = v$ 且 $u \in H^1(\Omega)$. 由Minkovski不等式, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s} v(s+x) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^\infty |e^{-\lambda s}| ds \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

即 $R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 由命题1.1.4知, $\lambda \in \rho(A)$. 故 $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 又因 $\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C}$ 且互不相交, 故结论得证. \square

习题 1.1.5 (1) 证明(1.1.1)和(1.1.2)成立

(2) 利用 $S^n y = \sum_{k=0}^n A^k y$ 给出引理 1.1.9 的另一个证明.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 \mathbb{R} 上的线性算子 $A_x : y \mapsto xy, \forall y \in \mathbb{R}$. 利用此算子说明当 $|x| < 1$ 时.

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

只是(1.1.3)的一个特例.

证明: (1) 因为 $\|\sum_{n=0}^N A^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=0}^N \|A^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=0}^N \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n$. 所以 $\forall k, N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n \xrightarrow{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < 1} 0, N \rightarrow \infty.$$

故 $\{\sum_{n=0}^N A^n\}_{N \in \mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 中的基本列. 而 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 为 Banach 空间, 故此基本列收敛, 设其极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. 由此, 有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^N A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} + \left\| \sum_{n=0}^N A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \\ &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^N A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} + \sum_{n=0}^N \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n. \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 有 $\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n$.

$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n x \right\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n \|x\|_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < 1} 0, N \rightarrow \infty.$$

故 $\{\sum_{n=0}^N A^n x\}_{N \in \mathbb{N}}$ 为 \mathcal{X} 中的基本列. 由 \mathcal{X} 的完备性知其有极限, 记其极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n x$.

$\|y - y_k\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} A^n x \right\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

(2) $\forall y \in \mathcal{X}$. 由压缩映射原理知, 存在唯一的 $x_y \in \mathcal{X}$. 使得 $Sx_y = x_y$. 即 $y = (I - A)^{-1}x_y$. 令 $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n y$. 又由 $S^n y = \sum_{k=0}^n A^k y$ 及(1.1.2) 式知 $\tilde{x} \in \mathcal{X}$.

因 S 连续, 则 $S\tilde{x} = S(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n y) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n+1} y = \tilde{x}$. 由压缩映射原理的唯一性知, $\tilde{x} = x_y$, 即

$$y = (I - A)x_y = (I - A)\tilde{x} = (I - A)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n\right)y.$$

由 y 的任意性知, $(I - A)(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n) = I$. 类似可证 $(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I - A) = I$. 故

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

(3) 当 $|x| < 1$ 时, $\|A_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} < 1$. 由(2)知, $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_x^n$. 故 $(I - A)(\sum_{n=0}^{\infty} A_x^n) = I$. 注意到 $I = 1$ 且 $A_x(1) = x$, 知

$$(1 - x)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = 1.$$

从而 $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. □

习题 1.1.6 (补充题) $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$

证明: 因 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, 则 $0 \in \rho(A)$ 且 $0 \in \rho(A^{-1})$. 下证

$$\rho(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}.$$

若 $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$, 则 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. 对 $\forall x \in \mathcal{X}$, 方程

$$(\lambda^{-1}I - A^{-1})y = x$$

有唯一解 $y = -\lambda A(\lambda I - A)^{-1}x \in \mathcal{X}$. 从而 $R(\lambda^{-1}I - A^{-1}) = \mathcal{X}$, 又因 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, 由命题1.1.4知 $\lambda^{-1} \in \rho(A)$. 故 $\rho(A^{-1}) \supset \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$.

若 $\lambda \in \rho(A^{-1}) \setminus \{0\}$, 同上可证 $\lambda^{-1} \in \rho((A^{-1})^{-1}) = \rho(A)$. 故

$$\rho(A^{-1}) \subset \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}.$$

从而 $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$. □

1.2 紧算子

习题 1.2.1 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 为Banach空间. $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 为线性算子. 证明以下三条等价:

(1) A 为全连续算子;

(2) 对 \mathcal{X} 中任意弱收敛于 θ 的点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. 均有 $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 \mathcal{Y} 中强收敛于 θ .

(3) 存在 $x_0 \in \mathcal{X}$ 且对 \mathcal{X} 中任意弱收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 均有 $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 \mathcal{Y} 中强收敛于 Ax_0 .

证明: (1) \Rightarrow (2) 因 A 为全连续算子. $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ 且 $x_n \rightharpoonup \theta, n \rightarrow \infty$. 根据全连续算子的定义知 $Ax_n \rightarrow A\theta, n \rightarrow \infty$. 又因 A 为线性算子, 知 $A\theta = \theta$. 故 $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 \mathcal{Y} 中强收敛于 θ .

(2) \Rightarrow (3) 设 $\forall x_n \rightharpoonup, n \rightarrow \infty$, 则 $x_n - x_0 \rightharpoonup \theta$. 由(2)知 $A(x_n - x_0) \rightarrow \theta$, 于是 $Ax_n \rightarrow Ax_0$.

(3) \Rightarrow (1) 若 $\exists x_0 \in \mathcal{X}, \forall \{x_n\}, x_n \rightharpoonup x_0, n \rightarrow \infty$. 有 $Ax_n \rightarrow Ax_0, n \rightarrow \infty$. 那么, $\forall x \in \mathcal{X}, \forall \{x'_n\} \subset \mathcal{X}$ 且 $x'_n \rightharpoonup x, n \rightarrow \infty$. 则对于 $\forall f \in \mathcal{X}^*, f(x'_n) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$. 那么

$$\begin{aligned} |f(x'_n - x + x_0) - f(x_0)| &= |f(x'_n) - f(x) + f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x'_n) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故 $x'_n - x + x_0 \rightharpoonup x_0$. 则

$$\begin{aligned} A(x'_n - x + x_0) &\rightarrow A(x_0) \\ \implies A(x'_n) - A(x) + A(x_0) &\rightarrow A(x_0) \\ \implies A(x'_n) &\rightarrow A(x), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

所以 A 为全连续算子. □

习题 1.2.2 记 S_n 如引理 1.2.26 之证明. 证明: $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致有界当且仅当, 对 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{X}^*$.

证明: $S_n(x) := \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i$.

(\Rightarrow) 若 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致有界. 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0$, 使得 $\|S_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq M$.

$$\|C_n(x)e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq 2M\|x\|_{\mathcal{X}},$$

而 $\forall n \in \mathbb{N}, \|C_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 2M\|e_n\|_{\mathcal{X}}^{-1}$. 故 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{X}^*$.

(\Leftarrow) 若 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{X}^*$, 而 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n > 0$, 使得 $\|C_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq M_n$. 由 $\|x - S_n(x)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 故 $\exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时,

$$\|S_n(x)\| \leq \|x\|_{\mathcal{X}} + 1. \quad (1.2.1)$$

又 $n \in \{1, 2, \dots, N_0\}$,

$$\|S_n(x)\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i \right\|_{\mathcal{X}} \leq M_0 N_0 \|e_0\|_{\mathcal{X}} \|x\|_{\mathcal{X}}, \quad (1.2.2)$$

其中 $M_0 := \max\{M_1, \dots, M_{N_0}\}$, $\|e_0\|_{\mathcal{X}} := \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_{N_0}\|\}$. 由(1.2.1) 和(1.2.2)知, $\exists \widetilde{M} > 0, \forall x \in \mathcal{X}$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(x)\|_{\mathcal{X}} \leq \widetilde{M}.$$

则由共鸣定理, 知 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致有界. □

习题 1.2.3 证明: 若 \mathcal{X} 为无穷维 Banach 空间, 则 \mathcal{X} 上紧算子没有有界逆.

证明: 若不然, $A \in \mathfrak{C}$ 且 A 有有界逆, 即 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. 由命题 1.2.6(vi) 可知, $AA^{-1} = I \in \mathfrak{C}(\mathcal{X})$. $\forall B \in \mathcal{X}$ 且 B 为有界集, $\overline{I(B)}$ 为 \mathcal{X} 中的紧集. 从而 \overline{B} 为 \mathcal{X} 中的紧集, 故 \overline{B} 自列紧.

$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B \subset \overline{B}$, 由 \overline{B} 是自列紧的知 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有收敛子列, 故 B 是列紧的. 由[1]推论 1.4.30: “ B^* 空间 \mathcal{X} 是有穷维的, 当且仅当任意有界集是列紧的.” 可知 \mathcal{X} 是有穷维的. 矛盾. □

习题 1.2.4 设 \mathcal{X} 为 Banach 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. 满足对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}} \geq \alpha \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

其中 α 为一正常数. 证明 A 紧当且仅当 \mathcal{X} 是又穷维的.

证明: (\Leftarrow) 若 $\dim \mathcal{X} < \infty$. 由注记 1.2.4 知, $A \in \mathfrak{C}(\mathcal{X})$.

(\Rightarrow) 令 $Ax = \theta$. 若 $\|Ax\|_{\mathcal{X}} \geq \alpha \|x\|_{\mathcal{X}}$, 知 $x = \theta$. 故 A 为单射. 从而 A^{-1} 存在. $\forall x \in \mathcal{X}$, 令 $y = Ax$. 则

$$\|y\|_{\mathcal{X}} \geq \alpha \|A^{-1}y\|_{\mathcal{X}} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

故 A 有有界逆. 由习题 3 知, $\dim \mathcal{X} < \infty$. □

习题 1.2.5 设 $p \in [1, \infty]$. $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$. 证明算子

$$T : \{\xi_n\} \rightarrow \{\omega_n \xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

是 ℓ^p 上的紧算子.

证明: $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell^p$. 令 $T_N \xi = (\omega_1 \xi_1, \omega_2 \xi_2, \dots, \omega_n \xi_n, 0, \dots)$. 下证 $T_N \xi$ 为 ℓ^p 上的有界线性算子.

① 线性: $\forall \xi, \eta \in \ell^p$,

$$\begin{aligned} T_N(\alpha \xi + \beta \eta) &= (\omega(\alpha \xi_1 + \beta \eta_1), \dots, \omega(\alpha \xi_N + \beta \eta_N), 0, \dots) \\ &= (\alpha \omega_1 \xi_1, \dots, \alpha \omega_N \xi_N, 0, \dots) + (\alpha \omega_1 \eta_1, \dots, \alpha \omega_N \eta_N, 0, \dots) \\ &= \alpha T_N \xi + \beta T_N \eta. \end{aligned}$$

②有界性:

$$\|T_N\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^p} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^N |\omega_i \xi_i|^p \right)^{1/p}.$$

令 $M = \max_{1 \leq i \leq N} \{|\omega_i|\}$. 则

$$\begin{aligned} \|T_N\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} &\leq M \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^p \right)^{1/p} \\ &\leq M \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|\xi\|_{\ell^p} \\ &= M. \end{aligned}$$

由①, ②知 $T_N \in \mathcal{L}(\ell^p)$. 再由注记1.2.4及 $\dim R(T_N) < \infty$ 知 $T_N \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. 因

$$\|T_N\xi - T\xi\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\omega_i \xi_i|^p \right)^{1/p} \leq \sup_{n \geq N} |\omega_n| \|\xi\|_{\ell^p}.$$

故

$$\|T - T_N\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T\xi - T_N\xi\|_{\ell^p} \leq \sup_{n \geq N} |\omega_n| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

由命题1.2.6(iii)知 $T \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. □

习题 1.2.6 设 H 是 Hilbert 空间, A 是 H 上紧算子. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 H 的规范正交集. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ae_n, e_n) = 0.$$

证明: 因 $\{e_n\}$ 为 H 的规范正交集, 所以由 Bessel 不等式有 $\forall x \in \mathcal{X}, \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x, e_n) = 0, \forall x \in H$ 成立.

$\forall f \in \mathcal{X}^*$, 由 F. Riesz 定理, 存在唯一的 $y_f \in \mathcal{X}$, 使 $f(x) = (x, y_f)$. 故 $f(e_n) = (e_n, y_f) = \overline{(y_f, e_n)}$, 由于 $y_f \in \mathcal{X}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_f, e_n) = 0$. 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{(y_f, e_n)} = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(e_n) = 0$, 故 $e_n \rightharpoonup 0$.

由命题1.2.14知, A 是全连续算子, 故 $Ae_n \rightarrow 0$. 由[1]习题2.5.18知, 在 H 中 $x_n \rightharpoonup x_0, y_n \rightarrow y_0$, 有 $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ae_n, e_n) = 0$. □

习题 1.2.7 证明注记1.2.23中的 $\ell^2(\Gamma)$ 为 Hilbert 空间.

证明: 首先证明 $\ell^2(\Gamma)$ 为内积空间.

$$\textcircled{1} (f, g) = \sum_{x \in \Gamma} f(x)g(x) = \sum_{x \in \Gamma} g(x)f(x) = (g, f).$$

$$\textcircled{2} (f, f) = \sum_{x \in \Gamma} [f(x)]^2 \geq 0.$$

$$\textcircled{3} (f, f) = \sum_{x \in \Gamma} [f(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0.$$

下证完备性. 任取 $\ell^2(\Gamma)$ 中的基本列 $f^{(n)}$, 则

$$\|f_m - f_n\|_{\ell^2(\Gamma)} := \left\{ \sum_{x \in \Gamma} |f_m(x) - f_n(x)|^2 \right\}^{1/2} \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty.$$

那么, $|f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$. 即 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 \mathbb{R} 中的Cauchy列. 可设其极限函数

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Gamma : f_n(x) \neq 0\}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} &= \left\{ \sum_{x \in \Gamma} \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \right\}^{1/2} \\ (\text{Fatou引理}) &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{x \in \Gamma} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

再令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{x \in \Gamma} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \right\}^{1/2} = 0.$$

即 $f_n \rightarrow f$ in $\ell^2(\Gamma)$. $\|f\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} + \|f_n\|_{\ell^2(\Gamma)} < \infty$. 完备性得证. \square

习题 1.2.8 设 \mathcal{X} 为线性赋范空间, \mathcal{Y} 为Hilbert空间. 证明 $\overline{F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

证明: 同书中定理. \square

习题 1.2.9 设 \mathcal{X} 为线性赋范空间, \mathcal{Y} 为具有Schauder基的Banach空间. 证明 $\overline{F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} = \mathfrak{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

证明: 同书中定理. \square

习题 1.2.10 (补充题) 定义 $T : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^2 \\ \{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mapsto \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right\}_{i \in \mathbb{N}}. \end{cases}$ 其中 $\{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

i) 证明 T 是 ℓ^2 上的紧算子.

ii) 举例说明: 存在无穷维的矩阵 (a_{ij}) 使 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \infty$. 但按上述定义的 T 仍然是紧算子.

iii) 若 $\forall i \neq j, a_{ij} = 0$. 证明: T 是紧算子 $\iff a_{mm} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

证明: i) 令 $T_N(\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}) := \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{Nj}\xi_j, 0, \dots\}$, 则 $\dim(R(T)) < \infty$. 往证 $T_N \in \mathcal{L}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned} \|T_N\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} &:= \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^2} \\ &= \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \left\{ \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right|^2 \right\}^{1/2} \\ (\text{Cauchy-Schwarz不等式}) &\leq \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right\} < \infty. \end{aligned}$$

从而 $T_N \in F(\ell^2)$. 由注记知 $T_N \in \mathfrak{C}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned} \|T - T_N\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} &= \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \left\{ \sum_{i=N+1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \left\{ \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|^2 \right) \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2}, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

从而由命题1.2.6(iii)知, $T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$.

ii) 令

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

则 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. 由例题1.3.7知, T 为紧算子.

iii) 由习题1.2.5知, $a_{m,m} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \implies T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$. 若 $T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$, 则 $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$. 于是

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \|T\xi\|_{\ell^2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

则 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,m} = 0$. □

1.3 紧算子的谱理论

习题 1.3.1 举例说明Banach空间 \mathcal{X} 及 $A \in \mathfrak{C}(\mathcal{X})$, 但 $0 \notin \sigma(A)$.

解 : 固定 $n \in \mathbb{N}$, 取 $\mathcal{X} := \mathbb{R}^n$. 定义 $A := I$. 对 \mathcal{X} 中任意有界集 B , $\overline{I(B)} = \overline{B}$ 为有界闭集. 由于有限维Banach空间中紧集 \iff 有界闭集. 故 I 为紧算子. 又由于 $I^{-1} = I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. 故 $0 \notin \sigma(A)$.

习题 1.3.2 举例说明注记1.3.4情形(i)中的连续谱, 情形(ii)中的连续谱, 剩余谱, 情形(iii)中的剩余谱.

解 : (i) 取 $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$, $\lambda_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{Z}_+$ 且 $\lambda_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. 定义

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

和

$$T_1 : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\cdots, \lambda_2 x_{-2}, \lambda_1 x_{-1}, \lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots), \end{cases}$$

则 T_1 是紧算子. 事实上, 对于 $\forall m \in \mathbb{N}$. 定义

$$T_1^{(m)}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) := \{\cdots, 0, \lambda_m x_{-m}, \cdots, \lambda_0 x_0, \cdots, \lambda_m x_m, 0, \cdots\},$$

则 $T_1^{(m)} \in \mathcal{F}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由 $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N^* \in \mathbb{N}$, 使当 $i > N^*$ 时, $|\lambda_i| < \varepsilon$. 此时

$$\begin{aligned} \|T_1^{(m)} - T_1\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))} &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1^{(m)} - T_1)x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sum_{|n| > m} |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

对于 T_1 , 寻找到了—列有穷秩算子, 且依范数收敛到 T_1 , 故 $T_1 \in \mathfrak{C}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由于 $\dim(\ell^2(\mathbb{Z})) = \infty$, 又由定理1.3.1(i)知, $0 \in \sigma(T_1)$.

先证 $\sigma(T_1) = \{0\}$. 事实上, 对 $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 若 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足 $(\lambda I - T_1)(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \theta$, 则 $\lambda x_n - \lambda_{|n-1|} x_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. 故

$$x_n = \begin{cases} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\lambda^n} x_0, n \in \mathbb{N} \\ \frac{\lambda^{|n|}}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{|n|}} x_0, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

由此及 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 有 $x_0 = 0 \implies \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \theta$. 即 $\sigma(T_1) = \{0\}$.

再证 $\{0\} = \sigma_c(T_1)$. 注意到若 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足 $T_1(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \theta$. 则对 $\forall n \in \mathbb{Z}, \lambda_{|n|} x_n = 0 \implies x_n = 0$. 所以 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \theta$. 即 $0 \notin \sigma_p(T_1)$ 且 T_1 为单射, 因此 T_1^{-1} 存在. 又因为 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset R(T_1)$ 且 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 为 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的一组Schauder基. 故 $\overline{R(T_1)} = \ell^2(\mathbb{Z})$. 因此 $\{0\} = \sigma_c(T_1)$. 即 T_1 满足要求.

(ii)-(a)(连续谱) 令 $\ell^2(\mathbb{Z}), T_1$ 如(i)中. 给定 $m \in \mathbb{N}$ 与 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$. 定义

$$T_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m \\ (x_1, \dots, x_m) \mapsto (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_m x_m) \end{cases}$$

和

$$A_1 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \\ x \oplus y \mapsto T_2 x \oplus T_1 y \end{cases}$$

且对 $\forall x \oplus y \in \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}), \|x \oplus y\|_{\mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z})} := \|x\|_{\mathbb{C}^m} + \|y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. 则 A_1 为紧算子且 $\sigma(A_1) = \sigma_c(A_1) \cup \sigma_p(A_1)$. 其中 $\sigma_c(A_1) = \{0\}, \sigma_p(A_1) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(ii)-(b)(剩余谱) 令 T_2 如(a)中所示, 给定 $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{C}, \mu_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}$ 且 $\mu_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. 定义

$$T_3 : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^2 \\ \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \{0, \mu_1 a_1, \mu_2 a_2, \dots\} \end{cases}$$

和

$$A_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \oplus \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}^m \oplus \ell^2 \\ x \oplus y \mapsto T_2 x \oplus T_3 y. \end{cases}$$

且对 $\forall x \oplus y \in \mathbb{C}^m \oplus \ell^2, \|x \oplus y\|_{\mathbb{C}^m \oplus \ell^2} := \|x\|_{\mathbb{C}^m} + \|y\|_{\ell^2}$. 则 A_2 为紧算子且 $\sigma(A_2) = \sigma_r(A_2) \cup \sigma_p(A_2)$. 其中 $\sigma_r(A_2) = \{0\}, \sigma_p(A_2) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(iii) 令 T_3 和 $\{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 如(ii)所示. 定义

$$T_4 : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^2 \\ \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \{\mu_k a_k\}_{k \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

和

$$A_3 : \begin{cases} \ell^2 \oplus \ell^2 \rightarrow \ell^2 \oplus \ell^2 \\ x \oplus y \mapsto T_3 x \oplus T_4 y. \end{cases}$$

且对 $\forall x \oplus y \in \ell^2 \oplus \ell^2$, $\|x \oplus y\|_{\ell^2 \oplus \ell^2} := \|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}$. 则 A_3 为紧算子且 $\sigma(A_3) = \sigma_r(A_3) \cup \sigma_p(A_3)$, 其中 $\sigma_r(A_3) = \{0\}$, $\sigma_p(A_3) = \{\mu_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

习题 1.3.3 设 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 在 ℓ^2 上定义算子

$$A : (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$$

(1) 证明: A 在 ℓ^2 上有界当且仅当 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为有界数列.

(2) 若 A 有界. 求 $\sigma(A)$.

证明: (1)(\Rightarrow) 反证法. 若 $\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| = \infty$, 对 $\forall k \in \mathbb{N}$, 取 $e_k := (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$. 则 $\|Ae_k\|_{\ell^2} = 1$. 故由算子范数定义知 $\|A\| \geq \|Ae_k\|_{\ell^2} = |a_k|$. 因此 $\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \leq \|A\|$. 这与 $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$ 矛盾. 即 $\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| < \infty$. 即 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 为有界数列.

(\Leftarrow) A 显然为线性算子且对 $\forall x \in \ell^2$, 有

$$\|Ax\|_{\ell^2} = \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i x_i|^2 \right]^{1/2} \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \|x\|_{\ell^2}.$$

于是 $\|A\| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| < \infty$. 故 $A \in \mathcal{L}(\ell^2)$.

(2) 取 $\lambda := a_i$, 和 $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $i \in \mathbb{N}$. 因 $(\lambda I - A)e_i = \theta$. 故 $\lambda \in \sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. 又由 A 有界及推论 1.1.11 知 $\sigma(A)$ 闭. 故 $\overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(A)$.

下证 $\sigma(A) \subset \overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}}$, 为此只需证明 $\forall \lambda \in \overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}}$, 有 $\lambda \notin \sigma(A)$. 事实上, 对 $\forall \lambda \notin \overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}}$ 与 $x \in \ell^2$ 满足

$$(\lambda I - A)(x_1, x_2, \dots) = ((\lambda - a_1)x_1, (\lambda - a_2)x_2, \dots) = \theta.$$

有 $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$, 即 $x = \theta$. 故 $(\lambda I - A)$ 为单射, 即 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在. 注意到对 $\forall \lambda \notin \overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}}$, 存在正常数 c , 使得对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 有 $|\lambda - a_i| > c$. 由此及 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在且对 $\forall x \in \ell^2$,

$$(\lambda I - A)^{-1}(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{1}{\lambda - a_1} x_1, \frac{1}{\lambda - a_2} x_2, \dots \right)$$

知 $(\lambda I - A)^{-1}$ 有界. 又因若 $y_i = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$, 则 $x = (x_1, x_2, \dots) := (\frac{y_1}{\lambda - a_1}, \frac{y_2}{\lambda - a_2}, \dots) \in \ell^2$, 且 $(\lambda I - A)x = y$. 即 $R(\lambda I - A) = \ell^2$. 故 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$. 因此 $\lambda \in \sigma(A)$. 从而有 $\sigma(A) \subset \overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}}$. 综上得 $\sigma(A) = \overline{\{a_i : i \in \mathbb{N}\}}$. \square

习题 1.3.4 在 $C[0, 1]$ 中考虑映射 $T : x(t) \rightarrow \int_0^t x(s)ds, \forall x \in C[0, 1]$. 证明

(i) T 是紧算子.

(ii) 求 $\sigma(T)$ 及 T 的一个非平凡的闭的不变子空间.

证明: (i) 定义

$$k(s, t) = \begin{cases} 1, 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ 0, 0 \leq t < s \leq 1 \end{cases},$$

则 $k(s, t) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. 且对 $\forall x \in C[0, 1]$ 和 $t \in [0, 1]$,

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)ds = \int_0^1 k(s, t)x(s)ds.$$

由于 $C([0, 1] \times [0, 1])$ 在 $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ 中稠, 故 $\exists \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1] \times [0, 1])$. 使得 $k_n \rightarrow k$ in $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. 注意到对 $\forall x \in C([0, 1])$ 与 $t \in [0, 1]$. 类似于例1.2.17可证

$$T_N x(t) := \int_0^1 k_n(s, t)x(s)ds$$

为紧算子. 且有Holder不等式知

$$\begin{aligned} \|T_N x - Tx\|_{L^2} &= \left\{ \int_0^1 \left| \int_0^1 [k_n(s, t) - k(s, t)]x(s)ds \right|^2 dt \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 |k_n(s, t) - k(s, t)|^2 \right] \left[\int_0^1 |x(s)|^2 ds \right] dt \right\}^{1/2} \\ &\leq \|x\| \|k_n - k\|_{L^2([0, 1] \times [0, 1])}. \end{aligned}$$

所以

$$\|T_n - T\| \leq \|k_n - k\|_{L^2([0, 1] \times [0, 1])} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

由此及命题1.2.6(iii)知 T 为紧算子.

(ii) 由 T 紧及定理1.3.1(i)知 $0 \in \sigma(T)$. 下证 $\sigma(T) = \{0\}$. 为此只需证明 $r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^{1/n} = 0$. 事实上, 注意到对 $\forall x \in C[0, 1]$ 与 $t \in [0, 1]$. 有

$$\begin{aligned} Tx(t) &= \int_0^t x(s)ds \\ T^2 x(t) &= \int_0^t \int_0^u x(s)dsdu = \int_0^t (t-s)x(s)ds. \end{aligned}$$

由此及数学归纳法知, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T^n x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} x(s) ds.$$

故

$$\|T^n x\| \leq \frac{1}{(n-1)!} \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (t-s)^{n-1} x(s) ds \right| \leq \frac{1}{n!} \|x\|.$$

于是 $\|T^n\| \leq \frac{1}{n!}$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$, 因此 $\sigma(T) = \{0\}$.

下面说明 T 存在非平凡不变子空间, 为此只需证 $\{0\} = \sigma_r(T)$. 事实上, 由 T 的定义与微积分基本定理知 $R(T) = \{y \in C^1[0,1] : y(0) = 0\}$. 注意到若 $Tx = \theta$. 则 $x = \theta$. 故 T 为单射, 即 T^{-1} 存在. 由此及 $x \equiv 1 \in C[0,1]$, 但 $1 \notin \overline{R(T)}$ 知 $0 \in \sigma_r(T)$. 故 T 存在非平凡的不变子空间.

令 $\Omega := \{y \in C[0,1] : y(0) = 0\}$. Ω 即为一个非平凡的不变子空间. 下证 Ω 闭. $\forall \{x_n\} \subset \Omega$ 且 $x_n \rightarrow x$ in $C[0,1]$.

$$|x(0)| = |x(0) - x_n(0)| \leq \|x - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

于是 $x(0) = 0$. 即 $x \in \Omega$, 故 Ω 闭. □

习题 1.3.5 (补充题) 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 定义 $A : \begin{cases} \ell^1 \rightarrow \ell^1 \\ \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \{a_i x_i\}_{i \in \mathbb{N}}. \end{cases}$ 证明:

$$(1) A \in \mathcal{L}(\ell^1) \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty.$$

$$(2) A^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^1) \iff \inf_{n \in \mathbb{N}} |a_n| > 0.$$

$$(3) A \in \mathfrak{C}(\ell^1) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

证明: (1) 同习题 1.2.2(i).

(2) (\Rightarrow) 若 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^1)$, 则 $\exists M \in (0, \infty)$. 使得 $\forall x \in \ell^1, \|Ax\|_{\ell^1} \geq M \|x\|_{\ell^1}$. 取 $e_n := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 则有 $|a_n| = \|Ae_n\|_{\ell^1} \geq M \|e_n\|_{\ell^1} = M$. 于是 $\inf_{n \in \mathbb{N}} |a_n| > 0$.

(\Leftarrow) 若 $\inf_{n \in \mathbb{N}} |a_n| > 0$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $|a_n| > 0$, 定义

$$B : \begin{cases} \ell^1 \rightarrow \ell^1 \\ (x_1, x_2, \dots) \mapsto (a_1^{-1} x_1, a_2^{-1} x_2, \dots) \end{cases},$$

则 $AB = BA = I$. 故 $A^{-1} = B$. 由 (1) 知,

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} = \|B\|_{\mathcal{L}(\ell^1)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n^{-1}| = \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{N}} |a_n|} < \infty.$$

故 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^1)$.

(3) (\Leftarrow) 同习题1.2.5.

(\Rightarrow) 反证法. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 及 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. 使得对于 $\forall k \in \mathbb{N}, |a_{n_k}| \geq \varepsilon_0 > 0$, 取 $e_{n_k} := (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. 则 $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 为 ℓ^1 中有界列, 但对于 $\forall l \in \mathbb{N}, \|Ae_k - Ae_{n_{k_l}}\|_{\ell^1} = |a_{n_k}| + |a_{k_l}| \geq 2\varepsilon_0 > 0$. 即 $\{Ae_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 没有收敛子列. 从而 $A \notin \mathcal{L}(\ell^1)$, 矛盾. \square

1.4 Hilbert-Schmidt 定理

习题 1.4.1 设 H 为复 Hilbert 空间, 且 A 为 H 上的有界线性算子. 证明 $A + A^*, AA^*, A^*A$ 均为对称算子, 且

$$\|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}^2.$$

证明: (i) ①

$$\begin{aligned} ((A + A^*)x, y) &= (Ax, y) + (A^*x, y) \\ &= (x, A^*y) + (x, Ay) \\ &= (x, (A + A^*)y). \end{aligned}$$

所以 $A + A^*$ 是对称算子.

② $(AA^*x, y) = (A^*x, A^*y) = (x, AA^*y)$. 所以 AA^* 是对称算子.

③ $(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)$. 所以 A^*A 是对称算子.

(2) 因为 $(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|_H^2$. 所以

$$\|AA^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|x\|_H=1} |(AA^*x, x)| = \sup_{\|x\|_H=1} \|A^*x\|_H^2 = \|A^*\|_{\mathcal{L}(H)}^2.$$

同理

$$\|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|x\|_H=1} |(A^*Ax, x)| = \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|_H^2 = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}^2.$$

又因 $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$, 故 $\|AA^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A^*A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}^2$. \square

习题 1.4.2 设 H 为复 Hilbert 空间, 且 A 为 H 上的有界线性算子, 满足 $(Ax, x) \geq 0, \forall x \in H$, 且 $(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$. 证明

$$\|Ax\|_H^2 \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}(Ax, x), \forall x \in H.$$

证明: 设 $a(x, y) = (Ax, y)$, 则 $a(\cdot, \cdot)$ 为 $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ 上的共轭双线性函数, 由《泛函分析(上册)》命题1.6.9有

$$|a(x, y)| \leq [a(x, x)a(y, y)]^{1/2}, \forall x, y \in H.$$

那么

$$|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y).$$

在上式中, 令 $y = Ax$, 则

$$\begin{aligned} \|Ax\|_H^4 &\leq (Ax, x)(A^2x, Ax) \\ &\leq (Ax, x)\|A^2x\|_H\|Ax\|_H. \end{aligned}$$

所以 $\|Ax\|_H^4 \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}\|Ax\|_H^2$. 即得 $\|Ax\|_H^4 \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}(Ax, x)$. □

习题 1.4.3 设 H 为复 Hilbert 空间, 且 A 为 H 上的对称紧算子. 令

$$m(A) := \inf_{\|x\|_H=1} (Ax, x), \quad M(A) := \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x).$$

证明:

(1) 若 $m(A) \neq 0$, 则 $m(A) \in \sigma_p(A)$;

(2) 若 $M(A) \neq 0$, 则 $M(A) \in \sigma_p(A)$.

证明: (1) 因 A 为紧算子, 则 $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$. 从而为证 $m(A) \in \sigma_p(A)$, 只需证 $m(A) \in \sigma(A)$. 令 $B := A - m(A)I$, 则 $B \in \mathcal{L}(H)$, 且对 $\forall x, \|x\|_H = 1$, 有 $(Bx, x) = (Ax, x) - m(A) \geq 0$. 从而对 $\forall x \in H, (Bx, x) \geq 0$. 从而对 $\forall t \in \mathbb{R}$ 及 $\|x\|_H = 1$,

$$0 \leq (B(tBx + x), tBx + x) = t^2(B^2x, Bx) + 2t\|Bx\|_H + (Bx, x).$$

于是 $4\|Bx\|_H^4 \leq 4\|B\|_H^3(Bx, x)$. 取 $\inf_{\|x\|_H=1} = 0$, 若 $m(A) \notin \sigma(A)$, 则 $m(A) \in \rho(A)$. 从而 $B^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. 取 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x \in H : \|x\|_H = 1\}$ 使得 $\|Bx_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 则

$$1 = \|x_n\| = \|B^{-1}Bx_n\| \leq \|B^{-1}\|\|Bx_n\| \rightarrow 0.$$

矛盾. 故 $m(A) \in \sigma(A)$.

(2) 记 $B := -A$, 则

$$m(B) = \inf_{\|x\|_H=1} (Bx, x) = \inf_{\|x\|_H=1} (-Ax, x) = - \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x) = -M(A).$$

由(1)知 $m(B) \in \sigma_p(B)$, 从而 $-M(A) \in \sigma_p(-A)$. 故 $M(A) \in \sigma_p(A)$. □

习题 1.4.4 设 H 为复Hilbert空间, 且 A 为 H 上的对称紧算子. 证明

(1) 若 A 非零, 则 A 至少有一个非零本征值.

(2) 若 M 是 A 的非零闭不变子空间, 则 M 上必含有 A 的本征值.

证明: (1) 由定理1.4.6知, $\exists x_0 \in H, \|x_0\|_H = 1$ 使得

$$|(Ax_0, x_0)| = \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)},$$

且 $Ax_0 = (Ax_0, x_0)x_0$. 因为 A 非零, $\|x_0\|_H = 1$, 故 $(Ax_0, x_0) \neq 0$, 且 (Ax_0, x_0) 为 A 的非零本征值.

(2) 由命题1.4.5(ii)及命题1.2.6(iv)知, $A|_M$ 还是对称紧算子.

若 $A|_M = \theta$, 则 $0 \in \sigma_p(A|_M)$. 事实上, $\forall \theta \neq x_0 \in M, A|_M x_0 = 0 = x_0$.

若 $A|_M \neq 0$, 同(1)中的结果, $\exists x_0 \in M, \|x_0\|_H = 1$. 使得 $A|_M x_0 = (A|_M x_0, x_0)x_0$.

于是 $(A|_M x_0, x_0)$ 为 $A|_M$ 的本征值. □

习题 1.4.5 设 H 为复Hilbert空间. 则 $P \in \mathcal{L}(H)$ 为 H 上的正交投影算子当且仅当

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2, \quad \forall x \in H.$$

证明: (\Rightarrow) 因 $P \in \mathcal{L}(H)$ 是 H 的正交投影算子. 设 M 是一个闭的线性子空间. 由正交分解定理, 对 $\forall x, y \in H$, 有

$$x = x_M + x_{M^\perp}, \quad (x_M \in M, x_{M^\perp} \in M^\perp)$$

$$y = y_M + y_{M^\perp}. \quad (y_M \in M, y_{M^\perp} \in M^\perp)$$

有 P 的定义知, $x_M = Px, y_M = Py$. 故

$$(Px, y) = (x_M, y_M + y_{M^\perp}) = (x_M, y_M) = (x, Py).$$

所以 P 对称. 因此 $(P^2x, x) = (Px, Px) = \|Px\|_H^2$. 又因 $P^2 = P$, 故 $(Px, x) = \|Px\|_H^2$.

(\Leftarrow) 因 $(Px, x) = \|Px\|_H^2 \in \mathbb{R}$, 故 P 是对称算子(由命题1.4.5(i)). 又因

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2 = (Px, Px) = (P^2x, x),$$

所以 $((P - P^2)x, x) = 0, \forall x \in H$. 再由[1]习题1.6.1中的极化恒等式, 有

$$((P - P^2)x, y) = 0, \quad \forall x, y \in H.$$

所以 $P = P^2$.

令 $M = P(H)$, 可知 M 闭. 事实上, 设 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, 且有 $Px_n \rightarrow y$, $P^2x_n = Px_n \rightarrow Py$. 所以 $P = Py \in M$. 故 M 是闭的. 下证 P 是正交投影算子. 对 $\forall x \in H$, 有 $x = Px + (I - P)x$, $Px \in M$. 又因 $\forall y \in H$,

$$((I - P)x, Py) = (x, Py) - (Px, Py) = (x, Py) - (x, P^2y) = 0.$$

从而 $(I - P)x \in M^\perp$, 即 P 为 $H \rightarrow M$ 的正交投影算子.

□

第二章 Banach 代数

2.1 代数准备知识

习题 2.1.1 在注记2.1.8中, 若 \mathcal{A} 为一个Banach代数, 并在 $\hat{\mathcal{A}}$ 上赋予范数

$$\|(x, \alpha)\| := \|x\| + |\alpha|.$$

证明 $\hat{\mathcal{A}}$ 是一个Banach代数.

证明: ① 由习题2.1.3知, $\hat{\mathcal{A}}$ 是一个代数.

② 首先说明 $\|\cdot\|$ 是范数. $\forall (a, \lambda) \in \hat{\mathcal{A}}$,

i) $\|(a, \lambda)\| \geq 0$ 显然成立. $\|(a, \lambda)\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| + \|\lambda\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| = 0 = \|\lambda\| \Leftrightarrow (a, \lambda) = (\theta, 0)$.

ii) $\|(a, \lambda) + (b, \mu)\| = \|(a + b, \lambda + \mu)\| = \|a + b\| + |\lambda + \mu| \leq \|a\| + \|b\| + |\lambda| + |\mu| = \|(a, \lambda)\| + \|(b, \mu)\|$.

iii) $\|\alpha(a, \lambda)\| = \|(\alpha a, \alpha \lambda)\| = \|\alpha a\| + \|\alpha \lambda\| = |\alpha|(\|a\| + |\lambda|) = |\alpha| \|(a, \lambda)\|$.

再证其完备性. 设 $\{(a_n, \lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 $\hat{\mathcal{A}}$ 中的基本列. 由 \mathcal{A} 和 \mathbb{C} 的完备性知, $\exists a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$, 使

$$\|a_n - a\| \rightarrow 0, |\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0.$$

那么

$$\|(a_n, \lambda_n) - (a, \lambda)\| = \|a_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0.$$

故 $\hat{\mathcal{A}}$ 完备. $\hat{\mathcal{A}}$ 在 $\|\cdot\|$ 下是一个完备的Banach空间.

③ 最后证明 $\|(a, \lambda)(b, \mu)\| \leq \|(a, \lambda)\| \|(b, \mu)\|$.

$$\begin{aligned}
\|(a, \lambda)(b, \mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| \\
&= \|ab + \lambda b + \mu a\| + \|\lambda\mu\| \\
&\leq \|ab\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu| \\
&= (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) \\
&= \|(a, \lambda)\| \|(b, \mu)\|.
\end{aligned}$$

综上, $\hat{\mathcal{A}}$ 是一个 Banach 代数. □

习题 2.1.2 证明定义 2.1.1 中 $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ 等价于

$$\begin{cases} (a + b)c = ac + bc \\ a(c + d) = ac + ad. \end{cases}$$

且 $(\lambda\mu)(ab) = (\lambda a)(\mu b)$ 等价于

$$\begin{cases} \lambda(ab)c = (\lambda a)b \\ \lambda(ab) = a(\lambda b). \end{cases}$$

证明: ① (\Rightarrow) 若 $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$. 取 $d = \theta$, 则 $(a + b)c = ac + bc$. 同理取 $b = \theta$, 则 $a(c + d) = ac + ad$.

(\Leftarrow) 若

$$\begin{cases} (a + b)c = ac + bc \\ a(c + d) = ac + ad. \end{cases}$$

则 $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$.

② (\Rightarrow) 令 $\mu = 1$, 得 $\lambda(ab) = (\lambda a)b, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. 令 $\lambda = 1$, 得 $\mu(ab) = a(\mu b), \forall \mu \in \mathbb{C}$.

(\Leftarrow) $(\lambda\mu)(ab) = (\lambda\mu a)b = \mu(\lambda a)b = (\lambda a)(\mu b)$. □

习题 2.1.3 设 $\hat{\mathcal{A}}$ 为一个代数, 令 $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ 并且规定 $\hat{\mathcal{A}}$ 上代数运算如下:

$$\begin{aligned}
\alpha(a, \lambda) + \beta(b, \mu) &:= (\alpha a + \beta b, \alpha \lambda + \beta \mu). \\
(a, \lambda)(b, \mu) &:= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu).
\end{aligned}$$

$(a, \lambda), (b, \mu) \in \hat{\mathcal{A}}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. 证明 $\hat{\mathcal{A}}$ 为一个代数.

证明: ① 易验证 $\hat{\mathcal{A}}$ 满足线性空间的八条性质, 故 $\hat{\mathcal{A}}$ 为线性空间.

② 结合律:

$$[(a, \lambda)(b, \mu)](c, \xi) = (a, \lambda)[(b, \mu)(c, \xi)].$$

③

$$[(a, \lambda) + (b, \mu)](c, \xi) = (a, \lambda)(c, \xi) + (b, \mu)(c, \xi),$$

$$(a, \lambda)[(c, \xi) + (d, \eta)] = (a, \lambda)(c, \xi) + (a, \lambda)(d, \eta).$$

④

$$\alpha[(a, \lambda)(b, \mu)] = [\alpha(a, \lambda)](b, \mu),$$

$$\alpha[(a, \lambda)(b, \mu)] = (a, \lambda)[\alpha(b, \mu)].$$

综上, $\hat{\mathcal{A}}$ 为一个代数. □

习题 2.1.4 (补充题) 设 \mathcal{A} 是一个代数. $x, y \in \mathcal{A}$, 记 $G(\mathcal{A})$ 为 \mathcal{A} 中的全体可逆元.

i) 若 $x, xy \in G(\mathcal{A})$, 证明 $y \in G(\mathcal{A})$.

ii) 若 $xy, yx \in G(\mathcal{A})$. 证明 $x, y \in G(\mathcal{A})$.

iii) 说明可能存在 $xy = e$, 但 $yx \neq e$ 的情况.

iv) 若 $xy = e$ 且 $yx = z \neq e$. 说明 z 是非平凡幂等元. ($z^2 = z, z \neq 0$)

证明: i) 因 $x, xy \in G(\mathcal{A})$. 则 $y = x^{-1}xy$. 故 $y(x^{-1}xy)^{-1} = e$. 由于 $G(\mathcal{A})$ 是群, 故 $y \in G(\mathcal{A})$.

ii) 因 $x, y \in G(\mathcal{A})$, 则 $xy(xy)^{-1} = e$. 从而 $x^{-1} = y(xy)^{-1}$. 即 $x \in G(\mathcal{A})$. 类似可证 $y \in G(\mathcal{A})$.

iii) 令 $\mathcal{A} := \mathcal{L}(\ell^2)$. 令

$$x : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^2 \\ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (a_2, a_3, \dots) \end{cases}, y : \begin{cases} \ell^2 \rightarrow \ell^2 \\ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (0, a_1, a_2, \dots) \end{cases}.$$

易知满足条件.

iv) 因为 $z^2 = (yx)(yx) = y(xy)x = yx = z$, 故只需证 $z \neq \theta$. 事实上, 若 $z = \theta$, 则 $\theta = (yx)y = y(xy) = y$. 从而 $xy = x\theta = \theta$. 矛盾. 所以 z 是非平凡幂等元. □

2.2 Banach 代数

习题 2.2.1 证明例 2.2.6 中 \mathcal{A} 完备.

证明: S^1 是平面上的单位圆周且

$$\mathcal{A} := \{u \in C(S^1) : u(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty\}.$$

范数 $\|u\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$.

设 $\{u^{(m)}\}$ 为 \mathcal{A} 中的基本列. $u^{(m)}(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{(m)} e^{in\theta}$. 则

$$\|u^{(m)} - u^{(\ell)}\| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \rightarrow 0, m, \ell \rightarrow \infty.$$

即对 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 有 $|c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \rightarrow 0, m, \ell \rightarrow \infty$. 故对 $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\{c_n^{(m)}\}$ 为 \mathbb{C} 中的基本列. 由 \mathbb{C} 的完备性, 可设其极限为 c_n . 令 $u(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$. 因为

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} |(u_j - u)(e^{i\theta})| = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n^{(j)} - c_n) e^{in\theta} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^{(j)} - c_n| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty.$$

即 $u_j \rightarrow u$. 故 $u \in C(S^1)$.

$$\begin{aligned} \|u^{(m)} - u\| &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\lim_{\ell \rightarrow \infty} (c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}) \right) \\ (\text{Fatou 引理}) &\leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}|. \end{aligned}$$

再令 $m \rightarrow \infty$. 则

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u^{(m)} - u\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| = 0.$$

即 $u^{(m)} \rightarrow u, m \rightarrow \infty$. 又

$$\|u\| \leq \|u^{(m)} - u\| + \|u^{(m)}\| < \infty.$$

故 $u \in \mathcal{A}$. 完备性得证. □

习题 2.2.2 设 \mathcal{B} 及其他记号同定理 2.2.13 且商模 $\|[\cdot]\|$ 定义如定理 2.2.13 的证明. 证明 $\|[e]\| = 1$ 且

$$\inf_{x \in [a], y \in [b]} \|xy\| = \inf_{x \in [a]} \|x\| \inf_{y \in [b]} \|y\|.$$

证明: (1) $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J$, $\|a\| = \inf_{x \in [a]} \|x\|$, $\forall a \in \mathcal{B}$. 由商模的定义知 $\|[e]\| = \inf_{x \in [e]} \|x\| \leq \|e\| = 1$. 又因为 J 是极大理想, 故由命题 2.1.13 知, $e \notin J$. 故 $[e] \neq [\theta]$. 由此及 $\|[e]\| = \|[ee]\| = \|[e][e]\| \leq \|[e]\| \cdot \|[e]\|$. 进一步知 $\|[e]\| \geq 1$. 故 $\|[e]\| = 1$.

(2) 一方面, 由下确界的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{x} \in [a], \tilde{y} \in [b]$, 满足

$$\inf_{x \in [a]} \|x\| + \varepsilon \geq \|\tilde{x}\| \geq 0, \inf_{y \in [b]} \|y\| + \varepsilon \geq \|\tilde{y}\| \geq 0.$$

故

$$(\inf_{x \in [a]} \|x\| + \varepsilon)(\inf_{y \in [b]} \|y\| + \varepsilon) \geq \|\tilde{x}\| \cdot \|\tilde{y}\| \geq \|\tilde{x}\tilde{y}\| \geq \inf_{x \in [a], y \in [b]} \|xy\|.$$

由 ε 的任意性知

$$\inf_{x \in [a], y \in [b]} \|xy\| \geq \inf_{x \in [a]} \|x\| \inf_{y \in [b]} \|y\|.$$

另一方面, 由定理 2.2.13 知, $\mathcal{B} = \mathcal{A}/J \cong \mathbb{C}$. 即对 $\forall [a] \in \mathcal{B}, [a] = z[e]$, 其中 $[e]$ 为单位元. $z \in \mathbb{C}, |z| = \|[a]\|$. 故对于 $[a], [b] \in \mathcal{B}$. 设 $[a] = z_1[e], [b] = z_2[e], z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 且 $|z_1| = \|[a]\|, |z_2| = \|[b]\|$. $\forall x \in [a]$, 则 $x \in z_1[e]$, 存在 $\tilde{x} \in [e]$, 使 $x = z_1\tilde{x}$. $\forall y \in [b]$, 则 $y \in z_2[e]$, 存在 $\tilde{y} \in [e]$, 使 $y = z_2\tilde{y}$. 有 $\tilde{x}\tilde{y} \in [e]$. 事实上, $\exists x', y' \in J$, 使 $\tilde{x} = e + x', \tilde{y} = e + y'$. 则 $\tilde{x}\tilde{y} = e + x' + y' + x'y'$. 由 $x', y' \in J$, 故 $x'y' \in J$. 故 $\tilde{x}\tilde{y} \in [e]$. 则

$$\begin{aligned} \inf_{x \in [a], y \in [b]} \|xy\| &= \inf_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [e]} \|(z_1 z_2) \tilde{x} \tilde{y}\| \\ &= \inf_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [e]} |z_1| \cdot |z_2| \|\tilde{x} \tilde{y}\| \\ &= \|[a]\| \cdot \|[b]\| \inf_{\tilde{x}, \tilde{y} \in [e]} \|\tilde{x}, \tilde{y}\| \\ &\geq \|[a]\| \cdot \|[b]\| \\ &= \inf_{x \in [a]} \|x\| \inf_{y \in [b]} \|y\|. \end{aligned}$$

□

习题 2.2.3 设 \mathcal{A} 是有单位元的 Banach 代数, $a, b \in \mathcal{A}$. 证明:

(1) 若 $e - ab$ 可逆, 则 $e - ba$ 也可逆.

(2) 若非零复数 $\lambda \in \sigma(ab)$, 则 $\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 若 a 可逆, 则 $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

证明: (1) 设 $e-ab$ 的逆为 A , 则 $(e-ab)A = e \Rightarrow A-abA = e \Rightarrow bA-babA = eb = b \Rightarrow (e-ab)(bA) = b \Rightarrow (e-ba)(bAa) = ba \Rightarrow (e-ba)(bAa) - (e-ba) = e \Rightarrow (e-ba)(bAa-e) = e$. 同理 $(bAa+e)(e-ba) = e$. 故 $e-ba$ 可逆.

(2) 若 $\lambda \in \sigma(ab)$. 即 $\lambda e - ab \notin G(\mathcal{A})$. 要证 $\lambda \in \sigma(ba)$. 即要证 $\lambda e - ba \notin G(\mathcal{A})$. 利用反证法. 若 $\lambda e - ba \in G(\mathcal{A})$. 即 $e - ba$ 可逆. 则 $e - (\frac{1}{\lambda}b)a$ 可逆. 由(1)的结论知 $e - \frac{1}{\lambda}ab$ 可逆. 故 $\lambda e - ab$ 可逆矛盾. 所以 $\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 由(2)知, $\sigma(ba) \setminus \{0\} = \sigma(ab) \setminus \{0\}$. 故只需证明, 若 $0 \in \sigma(ab)$, 则 $0 \in \sigma(ba)$.

若 $0 \in \sigma(ab)$. 即 $ab \in G(\mathcal{A})$. 即 ab 可逆, 设其逆为 $(ab)^{-1}$. 设 a 的逆为 a^{-1} . 因 $a(ba) = (ab)a \Rightarrow ba = a^{-1}(ab)a \Rightarrow ba[a^{-1}(ab)^{-1}a] = e$ 且 $[a^{-1}(ab)a](ba) = e$. 故 ba 可逆. 反之同理. 证毕. \square

习题 2.2.4 设 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是两个可交换的有单位元的Banach代数. \mathcal{B} 是半单的. 若 φ 是 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 的一个同态. 求证 φ 是连续的.

证明: 设 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, 且 $a_n \rightarrow a, \varphi(a_n) \rightarrow b$. 则 $a \in \mathcal{A}$. 由闭图像定理, 要证 φ 连续, 只需 $\varphi(a) = b$. 不妨设 φ 非零. 若 φ 是零映射, 即 $\forall a \in \mathcal{A}, \varphi(a) = 0$. 则 $\varphi(a_n) = 0$. 结论显然成立.

设 $\Delta_{\mathcal{B}}$ 为 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 上的非零同态全体. $\forall h \in \Delta_{\mathcal{B}}$. 记 $\psi := h \circ \varphi$. 下证 ψ 是 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 的非零连续同态.

① 由 φ 是 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 的同态知, ψ 是 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 的同态. 事实上, $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \lambda, \mu \in \mathcal{C}$. 有

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda a_1 + \mu a_2) &= h \circ \varphi(\lambda a_1 + \mu a_2) = h(\lambda \varphi(a_1) + \mu \varphi(a_2)) \\ &= \lambda(h \circ \varphi)(a_1) + \mu(h \circ \varphi)(a_2) = \lambda \psi(a_1) + \mu \psi(a_2). \end{aligned}$$

$$\psi(a_1 a_2) = h \circ \varphi(a_1 a_2) \xrightarrow{\varphi \text{ 同态}} h(\varphi(a_1) \varphi(a_2)) = \varphi(a_1) \varphi(a_2).$$

故 ψ 是 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 的同态映射.

② 又由 φ 与 h 均为非零, 知 ψ 也非零.

③ 又由命题2.2.14知, $\forall a \in \mathcal{A}, |\psi(a)| \leq \|a\|$. 即 ψ 连续.

故 ψ 是 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ 的非零连续同态. 由假设知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a_n) = b, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 故

$$\begin{aligned} h(b) &= h(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(a_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h \circ \varphi(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(a_n) \\ &= \psi(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \psi(a) = h(\varphi(a)). \end{aligned}$$

故 $h(\varphi(a) - b) = 0$, 对 $\forall h \in \Delta_{\mathcal{B}}$ 均成立. 即 $\varphi(a) - b \in \ker h$ 对 $\forall h \in \Delta_{\mathcal{B}}$ 成立.

记 i 为注记2.2.17, 即:

$$i: \begin{cases} \mathfrak{M} \rightarrow \Delta_{\mathcal{B}} \\ J \mapsto \varphi_J. \end{cases}$$

由引理2.2.19知 i 为双射. 故 $\forall h \in \Delta_{\mathcal{B}}$. 都存在 $J \in \mathfrak{M}$, 使得 $h_J = h$. 故 $\varphi(a) - b \in \ker h_J$ 对 $\forall h_J \in \Delta_{\mathcal{B}}$ 成立.

由 i 为双射, 即 $\varphi(a) - b \in \ker h_J$ 对 $\forall J \in \mathfrak{M}$ 均成立. 又由引理2.2.18知 $\ker h_J = J$. 故 $\varphi(a) - b \in J, \forall J \in \mathfrak{M}$ 成立. 即

$$\varphi(a) - b \in \bigcap_{J \in \mathfrak{M}} J.$$

又由 \mathcal{B} 是半单的. 故 $\bigcap_{J \in \mathfrak{M}} J = \{\theta\}$. 故 $\varphi(a) - b = \theta$, 即 $\varphi(a) = b$. □

习题 2.2.5 证明定理: 设 \mathcal{X} 是一个集合, 又设对于每一点 $x \in \mathcal{X}$ 指定了 \mathcal{X} 的一个集族 \mathcal{U}_x , 它们满足

- (i) 对 $\forall x \in \mathcal{X}, \mathcal{U}_x \neq \emptyset$; 如果 $U \in \mathcal{U}_x$, 则 $x \in U$;
- (ii) 如果 $U, V \in \mathcal{U}_x$, 则 $U \cup V \in \mathcal{U}_x$;
- (iii) 如果 $U \in \mathcal{U}_x$, 并且 $U \subset V$, 则 $V \in \mathcal{U}_x$;
- (iv) 如果 $U \in \mathcal{U}_x$, 则存在 $V \in \mathcal{U}_x$ 满足: $V \subset U$ 且对 $\forall y \in V$, 有 $V \in \mathcal{U}_y$.

则 \mathcal{X} 有唯一的拓扑 τ 使得对于每一个 $x \in \mathcal{X}$, 子集族 \mathcal{U}_x 恰是 x 在拓扑空间 (\mathcal{X}, τ) 中的邻域系.

设 \mathcal{X} 是一个Banach空间, 对任意的 $n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in (0, +\infty)$ 及 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{X}$, 定义

$$V(\varepsilon, x_1, x_2, \dots, x_n) := \{\varphi \in \mathcal{X}^* : |\varphi(x_i)| < \varepsilon, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

域 \mathcal{X}^* 的任一个含有一个形如(2.2.6)的集合的子集为 \mathcal{X}^* 中零泛函的一个邻域. 证明所有的这样的邻域构成 \mathcal{X}^* 原点的邻域系, 且该邻域系及其平移可以唯一确定 \mathcal{X}^* 的*弱拓扑, 并且 \mathcal{X}^* 依此*弱拓扑构成拓扑线性空间.

证明: 参考[2]第61页, 定理2.3.3. □

习题 2.2.6 用定理1.1.14即“有界线性算子 $A, \sigma(A) \neq \emptyset$ ”来证明定理2.2.10 即“可除Banach代数 \mathcal{A} 等距同构与 \mathbb{C} ”.

证明: 令 $\mathcal{B} := \{ze : z \in \mathbb{C}\}$. 为证 \mathcal{A} 等距同构于 \mathcal{C} . 只需证 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. 即对 $\forall a \in \mathcal{A}, \exists z \in \mathbb{C}$, 使得 $a = ze$. 若不然, $\exists a_0 \in \mathcal{A}$, 使得 $\forall z \in \mathbb{C}, a \neq ze$. 由 \mathcal{A} 可除知, $(ze - a_0)^{-1}$ 存在. 对此 a_0 , 定义

$$f_{a_0} : \begin{cases} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ x \mapsto a_0 x. \end{cases}$$

则 $f_{a_0} \in \mathcal{L}(A)$. 由此及定理 1.1.14 知, $\sigma(f_{a_0}) \neq \emptyset$. 注意到对 $\forall z \in \mathbb{C}$. $zI - f_{a_0}$ 为单射, 且 $\forall y \in A$,

$$(zI - f_{a_0})((ze - a_0)^{-1}y) = (ze - a_0)(ze - a_0)^{-1}y = y.$$

即 $zI - f_{a_0}$ 为单射. 故由性质 1.1.4 知 $(zI - f_{a_0})^{-1} \in \mathcal{L}(A)$. 即

$$z \in \rho(f_{a_0}) \Rightarrow \mathbb{C} = \rho(f_{a_0}) \Rightarrow \sigma(f_{a_0}) = \emptyset.$$

矛盾. □

习题 2.2.7 证明以下两条等价.

(1) 设 \mathcal{X} 为 Banach 空间, $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \sigma(A) \neq \emptyset$.

(2) 设 \mathcal{A} 是有单位元的 Banach 代数. 则 $\forall a \in \mathcal{A}, \sigma(a) \neq \emptyset$.

习题 2.2.8 证明引理 2.2.16 证明中的 $\tilde{\varphi}$ 是 $\mathcal{A}/J \rightarrow \mathbb{C}$ 上的等距同构映射.

$$\tilde{\varphi} : \begin{cases} \mathcal{A}/J \rightarrow \mathbb{C} \\ [a] \rightarrow \varphi(a). \end{cases}$$

习题 2.2.9 设 \mathcal{X} 为线性赋范空间, 若 S 为 \mathcal{X}^* 的 $*$ -弱闭集且有界. 证明 S 是 $*$ -弱紧的.

习题 2.2.10 (补充题) 设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, 则对 $\forall x \in \mathcal{A}$. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ 存在且等于 $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

2.3 例子与应用

习题 2.3.1 设 $\mathcal{A} := \{f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\| := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|2^{|n|} < \infty\}$. 按函数的加法和数乘定义线性运算, 并定义乘法: $f * g(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$. 证明:

(1) \mathcal{A} 是可交换的 Banach 代数;

(2) 令 $K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 2\}$. 则 K 与 \mathfrak{M} 一一对应, 且 \mathcal{A} 的 Gelfand 表示是 K 上绝对收敛的 Laurent 级数.

习题 2.3.2 设 M 是 T_2 紧拓扑空间, 证明 M 的全体闭子集与 $C(M)$ 的全体理想间有一一对应.

习题 2.3.3 (补充题) 设 \mathcal{A} 是半单的交换 Banach 代数. 证明: \mathcal{A} 的 Gelfand 表示的值域 $\Gamma(\mathcal{A})$ 是 $C(\mathfrak{M})$ 的闭集的充要条件是存在正常数 $k < \infty$, 使得对 $\forall a \in \mathcal{A}$, 有 $\|a\|^2 \leq k\|a^2\|$.

2.4 C^* 代数

习题 2.4.1 设所有记号如定理 2.4.14 的证明. 证明:

- (1) $\widetilde{\mathcal{A}}$ 为 $C(\mathcal{Y})$ 的实值子代数;
- (2) 对任意 $\tilde{f} \in C(\mathcal{Y})_r$, $\tilde{f} - \tilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathcal{X})$;
- (3) (2.4.1) 成立.

习题 2.4.2 证明注记 2.4.15. 即: $f \in C_\infty(\mathcal{X}) \iff f \in C(\mathcal{Y})_r$ 且 $f(\partial) = 0$.

习题 2.4.3 证明交换半单有单位元的 Banach 代数上的任意对合运算均连续.

习题 2.4.4 (补充题) 设 \mathcal{A} 是一个交换的 C^* 代数. 设其单位元为 e . 若 $\forall x \in \mathcal{A}$. x 为 Hermite 元且 $\sigma(x) \subset [0, \infty)$. 则称 x 是正的, 记作 $x \geq 0$. 证明:

- (1) $x \geq 0 \iff \exists h \in \mathcal{A}$ 是 Hermite 元, 使得 $x = h^2$.
- (2) $x \geq 0 \iff x$ 为 Hermite 元且 $\|x\|e - x \leq \|x\|x$.

2.5 Hilbert 空间上的正常算子

习题 2.5.1 见命题 2.5.7.

习题 2.5.2 证明: N 为 Hilbert 空间 H 上的正常算子当且仅当 $\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H, \forall x \in H$.

习题 2.5.3 证明: 两个可交换的正算子的积仍为正算子.

习题 2.5.4 设 N 为Hilbert空间 H 上的正常算子. 则存在唯一正算子 $P \in \mathcal{L}(H)$ 及酉算子 $Q \in \mathcal{L}(H)$ 使得 $N = PQ = QP$.

习题 2.5.5 设 N 为正常算子. 证明:

- (1) N 是酉算子当且仅当 $\sigma(N) \subset S^1$;
- (2) N 是自伴算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$;
- (3) N 是正算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}_+$.

习题 2.5.6 证明推论2.5.28.

习题 2.5.7 (补充题1) 设 H 为Hilbert空间, $U \in \mathcal{L}(H)$. 证明以下三个论述等价:

- (1) U 是酉算子;
- (2) $R(U) = H$ 且对 $\forall x, y \in H$, $(Ux, Uy) = (x, y)$.
- (3) $R(U) = H$ 且对 $\forall x, y \in H$, $\|Ux\|_H = \|x\|_H$.

习题 2.5.8 (补充题2) 设 H 为Hilbert空间, $T \in \mathcal{L}(H)$. 证明:

- (1) T^*T 的平方根 $P \in \mathcal{L}(H)$ 是唯一满足 $\|Px\|_H = \|Tx\|_H$, $\forall x \in H$ 的正算子.
- (2) 若 T 可逆, 则有唯一分解 $T = UP$, 其中 U 为酉算子, P 为正算子.

证明: (1) 注意到 $(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|_H^2 \geq 0$. 故 T^*T 为正算子. 由此及推论2.5.9知, $\exists P \in \mathcal{L}(H)$. 使得 $P^2 = T^*T$, 且 $P = P^*$. 故对 $\forall x \in H$,

$$\|Px\|_H^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|_H^2.$$

下证唯一性: 若 $P \in \mathcal{L}(H)$ 且 $P = P^*$. 则对 $\forall x \in H$,

$$\|Px\|_H^2 = \|Tx\|_H^2 \Leftrightarrow (Px, Px) = (Tx, Tx) \Leftrightarrow (P^2x, x) = (T^*Tx, x).$$

从而由断言知, $P^2 = T^*T$. 即 P 为 T^*T 的正平方根.

(2) 若 T 可逆, 则 T^*, T^*T 也可逆. 类似(1)可证, T^*T 为正算子. 故由推论2.5.9知. T^*T 存在可逆平方根 P . 令 $U := TP^{-1}$, 则 U 可逆且

$$U^*U = (P^{-1})^*T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I.$$

即 U 为酉算子.

下证唯一性. 若 $T = \tilde{U}\tilde{P}$ 为另一满足上述条件的分解. 则

$$T^*T = \tilde{P}^*\tilde{U}^*\tilde{U}\tilde{P} = \tilde{P}^*\tilde{P} = \tilde{P}^2.$$

由正平方根的唯一性知 $P = \tilde{P}$. 从而 $U = \tilde{U}$, 唯一性得证. □

参考文献

- [1] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册). 北京大学出版社, 1987.
- [2] 熊金城. 点集拓扑讲义(第三版). 高等教育出版社, 2004.