《泛函分析选讲》习题参考解答

吴瀚霖 hlwu.bnu@gmail.com

2018 年 2 月 22 日

1 紧算子的谱理论

1.1 有界线性算子的谱

习题 1.1.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个有限维 *Banach* 空间，$A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 为有界线性算子。则对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, λ 必为A的正则值或特征值之一.

证明: 若 A 为有限维空间 $\mathscr{X}$ 上的有界算子, 则 A 可由矩阵 (a_{ij}) 表示. A 单射当且仅当 A 满射. 从而$\lambda I - A$ 可逆当且仅当 $\lambda E - A$ 可逆. 而当

- $\det(\lambda E - A) = 0$ 时, $\lambda \in \sigma(A)$;
- $\det(\lambda E - A) \neq 0$ 时, $\lambda \in \rho(A)$.

故对$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值. □

习题 1.1.2 设 $\mathscr{X}$ 为一个 *Banach* 空间. 证明 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆（有有界逆）算子集为开集.

证明: $\forall A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. $\forall T \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|T - A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}\|T^{-1}\| &= \|(T - A + A)^{-1}\| \\ &= \|A^{-1}(I + (T - A)A^{-1})^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|(I + (T - A)A^{-1})^{-1}\| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

由引理1.1.9, $\|(T - A)A^{-1}\| \leq \|T - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$. 故 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆算子为开集. □

习题 1.1.3 考虑 ℓ^2 上的左推移算子

$$A:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

证明$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\},\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ 且 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明: 首先说明A是有界线性算子且$\|A\|=1$. 设

$$\begin{aligned}&x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\ell^2,\\&y=Ax=(x_2,x_3,\cdots,x_{n+1},\cdots).\end{aligned}$$

有

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\|x\|^2\Longrightarrow\|Ax\|\le\|x\|\Longrightarrow\|A\|\le1.$$

另一方面, $x':=(0,1,0\cdots)$, 则$Ax'=(1,0,0,\cdots)$, $\|Ax'\|=\|x'\|$. 故 $\|A\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=1$.

(1) 当$|\lambda|>1$时, $|\lambda|>\|A\|\Longrightarrow\lambda\in\rho(A)$.

(2) $D:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$. $\forall\lambda\in D,\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell^2$. 因为

$$A(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)=(\lambda,\lambda^2,\cdots)=\lambda(1,\lambda,\lambda^2,\cdots),$$

所以$\lambda\in\sigma_p(A)$.

(3) 先考虑$\lambda=1$时. 首先证明$(I-A)^{-1}$存在. $\forall x\in\ell^2$, 若$(I-A)x=0$, 则

$$(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots).$$

于是 $x=x_1(1,1,\cdots)$. 又因为$x\in\ell^2$, 所以$x_1=0$, 从而$x=\theta$. 即$(I-A)^{-1}$存在.

下证$R(I-A)\neq\ell^2$, 但$\overline{R(I-A)}=\ell^2$.

若$y=(I-A)x$, 则$y_k=x_k-x_{k+1}$, 即

$$\left.\begin{aligned}&y_1=x_1-x_2\\&y_2=x_2-x_3\\&\quad\cdots\\&y_k=x_k-x_{k+1}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{k}y_j=x_1-x_{k+1}.$$

即$x_{k+1}=x_1-\sum_{j=1}^{k}y_j$. 易知, 非零分量为有限个的$y\in R(I-A)$. 事实上, 设$y$的非零分量个数为$K$, 取$x_1=\sum_{j=1}^{k}y_j$,

$$x_{k+1}=\begin{cases}x_1-\sum\limits_{j=1}^{k}y_j,k=1,2,\cdots,K\\0,k>K\end{cases}.$$

由上式可知, $x \in \ell^2$.

存在$y \in \ell^2$, 但是$y \notin R(I-A)$. 事实上, 取$y = \{\frac{1}{j}\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$. 则

$$x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \to -\infty,\ k \to \infty.$$

所以, $x \notin \ell^2$, 也就是说$y \notin R(I-A)$, 那么$R(I-A) \neq \ell^2$.

下证$\overline{R(I-A)} = \ell^2$, 为此, 设$\xi := \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in (0,\infty)$. 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon$. 令 $y := \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. 其中

$$y_j = \begin{cases} \xi_j, j \le N \\ 0, j > N. \end{cases}$$

有

$$\|y - \xi\|_{\ell^2} = \|\{\xi_j - y_j\}_{j=N+1}^{\infty}\|_{\ell^2} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon.$$

故$\overline{R(I-A)} = \ell^2$. 从而$1 \in \sigma_c(A)$.

其次, 对于一般的λ使$|\lambda| = 1$. 可以划归为$\lambda = 1$的情形. 事实上,

$$(\lambda I - A)x = y \Longleftrightarrow \lambda x_k - x_{k+1} = y_k \Longleftrightarrow \frac{x_k}{\lambda^k} - \frac{x_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \cdots$$

令$\xi_k = \frac{x_k}{\lambda^k}, \eta_k = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \cdots$. 则有$\xi_k - \xi_{k+1} = \eta_k, k = 1, 2, \cdots$. 即划归为$\lambda = 1$的情形. □

习题 1.1.4 *考虑$L^2(0,+\infty)$上的微分算子:*

$$A : x(t) \mapsto x'(t). D(A) = H^1(0,+\infty).$$

证明$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = 0\}$且$\sigma_r(A) = \varnothing$. 其中$Re\lambda$表示$\lambda$的实部.

证明: 记$\Omega := (0,\infty)$. 由Meyers-Serrin定理有

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \tilde{d}^{\alpha} u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}.$$

其中$\langle \tilde{d} u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \tilde{d}^{\alpha}\varphi\rangle$. $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

先证明A是闭算子. 只需证明当$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$. 且

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ in } L^2(\Omega) \\ u_n' \to v \text{ in } L^2(\Omega) \end{cases} (n \to \infty).$$

时, 有$u \in D(A)$, 且$u' = v$. $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \langle u_n', \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle$. 从而由

$$|\langle u_n, \varphi' \rangle - \langle u, \varphi' \rangle| = |\langle u_n - u, \varphi' \rangle| \le \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi'\|_{L^2(\Omega)} \to 0. (n \to \infty).$$

知$\langle u_n', \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle \to -\langle u, \varphi' \rangle$.

类似可以证明$\langle u_n', \varphi \rangle \to \langle v, \varphi \rangle, n \to \infty$. 即$\langle v, \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立. 由弱导数的定义知$u' = v \in L^2(\Omega)$. 从而$u \in H^1(\Omega)$, 且$u' = v$. 故A为闭算子.

再证$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 考虑方程$(\lambda I - A)u = 0$, 即$u' - \lambda u = 0$. 由PDE知系数光滑从而弱解也光滑. 解ODE, $u' - \lambda u = 0$. 得$u = 0$或$ce^{\lambda x} \in L^2(\Omega)$. 故$(\lambda I - A)^{-1}$不存在. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

再证$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = 0\}$. 先说明$R(\lambda I - A) \subsetneqq L^2(\Omega)$. 令$v(x) := \frac{e^{\lambda x}}{x+1} \in L^2(\Omega)$. 由$(\lambda I - A)u = v$得

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\lambda x}[u(0) - \int_0^x e^{-\lambda t} v(t) dt] \\ &= e^{\lambda x}[u(0) - \ln(x+1)] \notin L^2(\Omega). \end{aligned}$$

故$R(\lambda I - A) \subsetneqq L^2(\Omega)$.

再证$\overline{R(\lambda I - A)} = L^2(\Omega)$. 因$C_c^\infty(\Omega) = L^2(\Omega)$, 故只需说明$R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 事实上, 对$\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$. $\exists M_v$, 使得$\mathrm{supp} v \subset (0, M_v)$. 由$(\lambda I - A)u = v$, 得$u(x) = e^{\lambda x}[u(0) - \int_0^x e^{-\lambda x} v(t) dt]$. 令 $u(0) := \int_0^{M_v} e^{-\lambda t} v(t) dt$. 则

$$u(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} \displaystyle\int_x^{M_v} e^{-\lambda x} v(t) dt, & x \in (0, M_v) \\ 0, & x \in (M_v, \infty). \end{cases}$$

满足$u \in H^1(\Omega)$. 即$R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 故$\overline{\lambda I - A} = L^2(\Omega)$.

最后说明$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 设$Re\lambda > 0$, 此时$ce^{\lambda x} \notin L^2(\Omega)$. 从而$(\lambda I - A)^{-1}$存在. 断言$R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 事实上, 对$\forall v \in L^2(\Omega)$. 令$u(x) = e^{\lambda x} \int_0^\infty e^{\lambda t} v(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda s} v(s + x) ds$. 则$u$满足$u' - \lambda u = v$ 且$u \in H^1(\Omega)$. 由Minkovski不等式, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \| \int_0^\infty e^{-\lambda x} v(s+x) ds \|_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^\infty |e^{-\lambda s}| ds \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{Re\lambda} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

即$R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 由命题1.1.4知, $\lambda \in \rho(A)$. 故$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 又因$\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C}$且互不相交, 故结论得证. $\square$

习题 1.1.5 *(1) 证明(1.1.1)和(1.1.2)成立*

(2) 利用$S^n y = \sum_{k=0}^{n} A^k y$*给出引理1.1.9的另一个证明.*

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, *定义*$\mathbb{R}$*上的线性算子*$A_x : y \mapsto xy, \forall y \in \mathbb{R}$. *利用此算子说明当*$|x| < 1$*时.*

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

只是(1.1.3)的一个特例.

证明: (1)因为$\| \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{N} \|A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{N} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n$. 所以$\forall k, N \in \mathbb{N}$,

$$\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N \to \infty.$$

故$\{\sum_{n=0}^{N} A^n\}_{N\in\mathbb{N}}$为$\mathscr{L}(\mathscr{X})$中的基本列. 而$\mathscr{L}(\mathscr{X})$为Banach空间, 故此基本列收敛, 设其极限为$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. 由此, 有

$$\begin{aligned}\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} &\le \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \| \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \\ &\le \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \sum_{n=0}^{N} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n.\end{aligned}$$

令$N \to \infty$, 有$\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n$.

$\forall x \in \mathscr{X}$,

$$\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n x \|_{\mathscr{X}} \le \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n \|x\|_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N \to \infty.$$

故$\{\sum_{n=0}^{N} A^n x\}_{N\in\mathbb{N}}$为$\mathscr{X}$中的基本列. 由$\mathscr{X}$的完备性知其有极限, 记其极限为$\sum_{n=0}^{\infty} A^n x$. $\|y - y_k\|_{\mathscr{X}} = \| \sum_{n=k+1}^{\infty} A^n x \| \to 0, k \to \infty$.

(2) $\forall y \in \mathscr{X}$. 由压缩映射原理知, 存在唯一的$x_y \in \mathscr{X}$. 使得$Sx_y = x_y$. 即$y = (I-A)^{-1} x_y$. 令$\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} S^n y$. 又由$S^n y = \sum_{k=0}^{n} A^k y$及(1.1.2)式知$\widetilde{x} \in \mathscr{X}$.

因S连续, 则$S\widetilde{x} = S(\lim_{n\to\infty} S^n y) = \lim_{n\to\infty} S^{n+1} y = \widetilde{x}$. 由压缩映射原理的唯一性知, $\widetilde{x} = x_y$, 即

$$y = (I-A)x_y = (I-A)\widetilde{x} = (I-A)(\lim_{n\to\infty} S^n)y.$$

由y的任意性知, $(I-A)(\lim_{n\to\infty} S^n) = I$. 类似可证$(\sum_{n}^{\infty} A^n)(I-A) = I$. 故

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

且

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

(3) 当$|x|<1$时, $\|A_x\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})}<1$. 由(2)知, $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_x^n$. 故$(I-A)(\sum_{n=0}^{\infty}A_x^n)=I$. 注意到$I=1$且$A_x(1)=x$, 知

$$(1-x)(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)=1.$$

从而$(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. □

习题 1.1.6 (补充题) $\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$

证明: 因$A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则$0\in\rho(A)$且$0\in\rho(A^{-1})$. 下证

$$\rho(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$

若$\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}$, 则$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. 对$\forall x\in\mathscr{X}$, 方程

$$(\lambda^{-1}I-A^{-1})y=x$$

有唯一解$y=-\lambda A(\lambda I-A)^{-1}x\in\mathscr{X}$. 从而$R(\lambda^{-1}I-A^{-1})=\mathscr{X}$, 又因$A^{-1}\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 由命题1.1.4知$\lambda^{-1}\in\rho(A)$. 故$\rho(A^{-1})\supset\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}$.

若$\lambda\in\rho(A^{-1})\backslash\{0\}$, 同上可证$\lambda^{-1}\in\rho((A^{-1})^{-1})=\rho(A)$. 故

$$\rho(A^{-1})\subset\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$

从而$\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$. □

1.2 紧算子

习题 1.2.1 *设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$为Banach空间. $A:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$为线性算子. 证明以下三条等价:*

(1) A为全连续算子;

(2) 对$\mathscr{X}$中任意弱收敛于θ的点列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 均有$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$\theta$.

(3) 存在$x_0\in\mathscr{X}$且对$\mathscr{X}$中任意弱收敛于x_0的点列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 均有$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$Ax_0$.

证明: (1)$\Rightarrow$(2) 因A为全连续算子. $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{X}$且$x_n \rightharpoonup \theta, n \to \theta$. 根据全连续算子的定义知$Ax_n \to A\theta, n \to \infty$. 又因$A$为线性算子, 知$A\theta = \theta$. 故$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$\theta$.

(2)$\Rightarrow$(3) 设$\forall x_n \rightharpoonup, n \to \infty$, 则$x_n - x_0 \rightharpoonup \theta$. 由(2)知$A(x_n - x_0) \to \theta$, 于是$Ax_n \to Ax_0$.

(3)$\Rightarrow$(1) 若$\exists x_0 \in \mathscr{X}$, $\forall \{x_n\}$, $x_n \rightharpoonup x_0, n \to \infty$. 有$Ax_n \to Ax_0, n \to \infty$. 那么, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall \{x_n'\} \subset \mathscr{X}$ 且 $x_n' \rightharpoonup x, n \to \infty$. 则对于 $\forall f \in \mathscr{X}^*$, $f(x_n') \to f(x), n \to \infty$. 那么

$$\begin{aligned}|f(x_n' - x + x_0) - f(x_0)| &= |f(x_n') - f(x) + f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x_n') - f(x)| \to 0, n \to \infty.\end{aligned}$$

故$x_n' - x + x_0 \rightharpoonup x_0$. 则

$$\begin{aligned}&A(x_n' - x + x_0) \to A(x_0) \\ \Longrightarrow &A(x_n') - A(x) + A(x_0) \to A(x_0) \\ \Longrightarrow &A(x_n') \to A(x), n \to \infty.\end{aligned}$$

所以A为全连续算子. □

习题 1.2.2 记S_n如引理*1.2.26*之证明. 证明: $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界当且仅当, 对$\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathscr{X}^*$.

证明: $S_n(x) := \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i$.

($\Rightarrow$) 若$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界. 则$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M > 0$, 使得$\|S_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le M$.

$$\|C_n(x)e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \le 2M\|x\|_{\mathscr{X}},$$

而 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le 2M\|e_n\|_{\mathscr{X}}^{-1}$. 故$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathscr{X}^*$.

($\Leftarrow$) 若$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathscr{X}^*$, 而 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n > 0$, 使得$\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le M_n$. 由$\|x - S_n(x)\| \to 0, n \to \infty$. 故$\exists N_0 > 0$, 当$n > N_0$时,

$$\|S_n(x)\| \le \|x\|_{\mathscr{X}} + 1. \tag{1.1}$$

又$n \in \{1, 2, \cdots, N_0\}$,

$$\|S_n(x)\|_{\mathscr{X}} = \|\sum_{i=1}^n C_i(x)e_i\|_{\mathscr{X}} \le M_0 N_0 \|e_0\|_{\mathscr{X}} \|x\|_{\mathscr{X}}, \tag{1.2}$$

其中$M_0 := \max\{M_1, \cdots, M_{N_0}\}$, $\|e_0\|_{\mathscr{X}} := \max\{\|e_1\|, \cdots, \|e_{N_0}\|\}$. 由(1.1)和(1.2)知, $\exists \widetilde{M} > 0, \forall x \in \mathscr{X}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|_{\mathscr{X}} \le \widetilde{M}.$$

则由共鸣定理, 知$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界. □

习题 1.2.3 *证明: 若$\mathscr{X}$为无穷维Banach空间, 则$\mathscr{X}$上紧算子没有有界逆.*

证明: 若不然, $A \in \mathfrak{C}$且A有有界逆, 即$A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 由命题1.2.6(vi) 可知, $AA^{-1} = I \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$. $\forall B \in \mathscr{X}$且$B$ 为有界集, $\overline{I(B)}$为$\mathscr{X}$中的紧集. 从而$\overline{B}$为$\mathscr{X}$中的紧集, 故$\overline{B}$自列紧.

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \subset \overline{B}$, 由$\overline{B}$ 是自列紧的知$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列, 故B是列紧的. 由《泛函分析(上册)》推论1.4.30: "B^*空间$\mathscr{X}$是有穷维的, 当且仅当任意有界集是列紧的." 可知$\mathscr{X}$是有穷维的. 矛盾. □

习题 1.2.4 *设$\mathscr{X}$为Banach空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 满足对$\forall x \in \mathscr{X}$,*

$$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha \|x\|_{\mathscr{X}}.$$

其中α为一正常数. 证明A紧当且仅当$\mathscr{X}$是又穷维的.

证明: $(\Leftarrow)$若$\dim \mathscr{X} < \infty$. 由注记1.2.4知, $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$.

$(\Rightarrow)$ 令$Ax = \theta$. 若$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha\|x\|_{\mathscr{X}}$, 知$x = \theta$. 故$A$为单射. 从而$A^{-1}$存在. $\forall x \in \mathscr{X}$, 令$y = Ax$. 则

$$\|y\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha \|A_{-1}y\|_{\mathscr{X}} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\mathscr{X}} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

故A有有界逆. 由习题3知, $\dim \mathscr{X} < \infty$. □

习题 1.2.5 *设$p \in [1, \infty]$. $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$且$\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. 证明算子*

$$T : \{\xi_n\} \to \{\omega_n \xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是ℓ^p上的紧算子.

证明: $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in \ell^p$. 令$T_N\xi = (\omega_1\xi_1, \omega_2\xi_2, \cdots, \omega_n\xi_n, 0, \cdots)$. 下证$T_N\xi$为$\ell^p$上的有界线性算子.

①线性: $\forall \xi, \eta \in \ell^p$,

$$\begin{aligned}
T_N(\alpha\xi + \beta\eta) &= (\omega(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1), \cdots, \omega(\alpha\xi_N + \beta\eta_N), 0, \cdots) \\
&= (\alpha\omega_1\xi_1, \cdots, \alpha\omega_N\xi_N, 0, \cdots) + (\alpha\omega_1\eta_1, \cdots, \alpha\omega_N\eta_N, 0, \cdots) \\
&= \alpha T_N\xi + \beta T_N\eta.
\end{aligned}$$

②有界性:

$$\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^p} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^{N} |\omega_i\xi_i|^p \right)^{1/p}.$$

令$M=\max\limits_{1\le i\le N}\{|\omega_i|\}$. 则

$$\begin{aligned}\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} &\le M\sup_{\|\ell^p\|=1}\left(\sum_{i=1}^N|\xi_i|^p\right)^{1/p}\\ &\le M\sup_{\|\ell^p\|=1}\|\xi\|_{\ell^p}\\ &=M.\end{aligned}$$

由①, ②知 $T_N\in\mathscr{L}(\ell^p)$. 再由注记1.2.4及$\dim R(T_N)<\infty$知$T_N\in\mathfrak{C}(\ell^p)$. 因

$$\|T_N\xi-T\xi\|_{\ell^p}=\left(\sum_{i=N+1}^\infty|\omega_i\xi_i|^P\right)^{1/p}\le\sup_{n>N}|\omega_n|\|\xi\|_{\ell^p}.$$

故

$$\|T-T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)}=\sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1}\|T\xi-T_N\xi\|_{\ell^p}\le\sup_{n\ge N}|\omega_n|\to 0,N\to\infty.$$

由命题1.2.6(iii)知$T\in\mathfrak{C}(\ell^p)$. □

习题 1.2.6 设H是*Hilbert*空间, A是H上紧算子. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是H的规范正交集. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(Ae_n,e_n)=0.$$

证明: 因$\{e_n\}$为H的规范正交集, 所以由Bessel不等式有$\forall x\in\mathscr{X}$, $\sum_{n=1}^\infty|(x,e_n)|^2\le\|x\|^2$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}(x,e_n)=0,\forall x\in H$ 成立.

$\forall f\in\mathscr{X}^*$, 由F·Riesz定理, 存在唯一的$y_f\in\mathscr{X}$, 使$f(x)=(x,y_f)$. 故$f(e_n)=(e_n,y_f)=\overline{(y_f,e_n)}$, 由于$y_f\in\mathscr{X}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}(y_f,e_n)=0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{(y_f,e_n)}=0$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(e_n)=0$, 故$e_n\rightharpoonup 0$.

由命题1.2.14知, A是全连续算子, 故$Ae_n\to 0$. 由《泛函分析（上册）》习题2.5.18知, 在H中$x_n\rightharpoonup x_0,y_n\to y_0$, 有$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(Ae_n,e_n)=0$. □

习题 1.2.7 证明注记*1.2.23*中的$\ell^2(\Gamma)$为*Hilbert*空间.

证明: 首先证明$\ell^2(\Gamma)$为内积空间.

①$(f,g)=\sum_{x\in\Gamma}f(x)g(x)=\sum_{x\in\Gamma}g(x)f(x)=(g,f)$.

②$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2\ge 0$.

③$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2=0\Leftrightarrow f(x)\equiv 0$.

下证完备性. 任取$\ell^2(\Gamma)$中的基本列$f^{(n)}$, 则

$$\|f_m - f_n\|_{\ell^2(\Gamma)} := \left\{ \sum_{x\in\Gamma} |f_m(x) - f_n(x)|^2 \right\}^{1/2} \to 0, m, n \to \infty.$$

那么, $|f_m(x) - f_n(x)| \to 0, m, n \to \infty$. 即$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\mathbb{R}$中的Cauchy列. 可设其极限函数

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in \Gamma : f_n(x) \neq 0\}, \\ 0, \text{其它}. \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} &= \left\{ \sum_{x\in\Gamma} \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \right\}^{1/2} \\ (\text{Fatou引理}) &\leq \liminf_{m\to\infty} \left\{ \sum_{x\in\Gamma} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

再令$n \to \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left\{ \sum_{x\in\Gamma} |f_n(x) - f_m(x)|^2 \right\} = 0.$$

即$f_n \to f$ in $\ell^2(\Gamma)$. $\|f\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} + \|f_n\|_{\ell^2(\Gamma)} < \infty$. 完备性得证. □

习题 1.2.8 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$为*Hilbert*空间. 证明$\overline{F(\mathscr{X}, \mathscr{Y})} = \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.9 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$为具有*Schauder*基的*Banach*空间. 证明$\overline{F(\mathscr{X}, \mathscr{Y})} = \mathfrak{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.10 (补充题) 定义T : $\begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\}_{i\in\mathbb{N}}. \end{cases}$ 其中$\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. 满足$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 < \infty$.

i) 证明T是ℓ^2上的紧算子.

ii) 举例说明: 存在无穷维的矩阵(a_{ij})使$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 = \infty$. 但按上述定义的$T$ 仍然是紧算子.

iii) 若$\forall i \neq j, a_{ij}=0$. 证明: T是紧算子$\Longleftrightarrow a_{mm} \to 0, n \to \infty$.

证明: i) 令$T_N(\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}) := \{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j, \cdots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{Nj}\xi_j, 0, \cdots\}$, 则$\dim(R(T)) < \infty$. 往证$T_N \in \mathscr{L}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned}
\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^2)} &:= \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^2} \\
&= \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \left\{ \sum_{i=1}^{N} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j|^2 \right\}^{1/2} \\
\text{(Cauchy-Schwarz不等式)} &\leq \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right\} < \infty.
\end{aligned}$$

从而$T_N \in F(\ell^2)$. 由注记知$T_N \in \mathfrak{C}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned}
\|T - T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^2)} &= \sup_{|\xi|_{\ell^2}=1} \left\{ \sum_{i=N+1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j|^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \left\{ \sum_{i=N+1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2)(\sum_{j=1}^{\infty} |xi_j|^2) \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2}, \ N \to \infty.
\end{aligned}$$

从而由命题1.2.6(iii)知, $T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$.

ii) 令

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

则 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. 由例题1.3.7知, T为紧算子.

iii) 由习题1.2.5知, $a_{m,m} \to 0, m \to 0 \Longrightarrow T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$. 若$T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$, 则$T \in \mathscr{L}(\ell^2)$. 于是

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\ell^2)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \|T\xi\|_{\ell^2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

则 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{m,m} = 0$. $\square$

1.3 紧算子的谱理论

习题 1.3.1 *举例说明Banach空间$\mathscr{X}$及$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$, 但$0 \notin \sigma(A)$.*

解：固定$n \in \mathbb{N}$, 取$\mathscr{X} := \mathbb{R}^n$. 定义$A := I$. 对$\mathscr{X}$中任意有界集$B$, $\overline{I(B)} = \overline{B}$为有界闭集. 由于有限维Banach空间中紧集$\Longleftrightarrow$有界闭集. 故$I$为紧算子. 又由于$I^{-1} = I \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 故$0 \notin \sigma(A)$.

习题 1.3.2 *举例说明注记1.3.4情形(i)中的连续谱, 情形(ii)中的连续谱, 剩余谱, 情形(iii) 中的剩余谱.*

解：(i) 取$\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}, \lambda_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{Z}_+$且$\lambda_i \to 0, i \to \infty$. 定义

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

和

$$T_1 : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\cdots, \lambda_2 x_{-2}, \lambda_1 x_{-1}, \lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots), \end{cases}$$

则T_1是紧算子. 事实上, 对于$\forall m \in \mathbb{N}$. 定义

$$T_1^{(m)}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \{\cdots, 0, \lambda_m x_{-m}, \cdots, \lambda_0 x_0, \cdots, \lambda_m x_m, 0, \cdots\},$$

则$T_1^{(m)} \in \mathscr{F}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由$\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N^* \in \mathbb{N}$, 使当$i > N^*$时, $|\lambda_i| < \varepsilon$. 此时

$$\begin{aligned} \|T_1^{(m)} - T_1\|_{\mathscr{L}(\ell^2(Z))} &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1(m) - T_1)x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sum_{|n|>m} |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

对于T_1, 寻找到了一列有穷秩算子, 且依范数收敛到T_1, 故$T_1 \in \mathfrak{C}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由于$\dim(\ell^2(\mathbb{Z})) = \infty$, 又由定理1.3.1(i)知, $0 \in \sigma(T_1)$.

先证$\sigma(T_1) = \{0\}$. 事实上, 对$\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. 若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$满足$(\lambda I - T_1)(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \theta$, 则$\lambda x_n - \lambda_{|n-1|} x_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. 故

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\lambda^n} x_0, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda^{|n|}}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{|n|}} x_0, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

由此及$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$有$x_0=0\Longrightarrow\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}=\theta$. 即$\sigma(T_1)=\{0\}$.

再证$\{0\}=\sigma_c(T_1)$. 注意到若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$满足$T_1(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}})=\theta$. 则对$\forall n\in\mathbb{Z},\lambda_{|n|}x_n=0\Rightarrow x_n=0$. 所以$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}=\theta$. 即$0\notin\sigma_p(T_1)$且$T_1$为单射, 因此$T_1^{-1}$存在. 又因为$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset R(T_1)$且$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$为$\ell^2(\mathbb{Z})$ 的一组Schauder基. 故$\overline{R(T_1)}=\ell^2(\mathbb{Z})$. 因此$\{0\}=\sigma_c(T_1)$. 即$T_1$满足要求.

(ii)-(a)(连续谱) 令$\ell^2(\mathbb{Z}),T_1$如(i)中. 给定$m\in\mathbb{N}$与$\{\lambda_1\}_{i=1}^m\subset\mathbb{C}$. 定义

$$T_2:\begin{cases}\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m\\(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(\lambda_1x_1,\cdots,\lambda_mx_m)\end{cases}$$

和

$$A_1:\begin{cases}\mathbb{C}^m\oplus\ell^2(\mathbb{Z})\to\mathbb{C}^m\oplus\ell^2(\mathbb{Z})\\x\oplus y\mapsto T_2x\oplus T_1y\end{cases}$$

且对$\forall x\oplus y\in\mathbb{C}^m+\ell^2(\mathbb{Z}),\|x+y\|_{\mathbb{C}^m\oplus\ell^2(\mathbb{Z})}:=\|x\|_{\mathbb{C}^m}+\|y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. 则$A_1$为紧算子且$\sigma(A_1)=\sigma_c(A_1)\cup\sigma_p(A_1)$. 其中$\sigma_c(A_1)=\{0\},\sigma_p(A_1)=\{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(ii)-(b)(剩余谱) 令T_2如(a)中所示, 给定$\{\mu_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathbb{C},\mu_i\neq0.\forall i\in\mathbb{N}$且$\mu_i\to0,i\to\infty$. 定义

$$T_3:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\mapsto\{0,\mu_1a_1,\mu_2a_2,\cdots\}\end{cases}$$

和

$$A_2:\begin{cases}\mathbb{C}^m\oplus\ell^2\to\mathbb{C}^m\oplus\ell^2\\x\oplus y\mapsto T_2x\oplus T_3y.\end{cases}$$

且对$\forall x\oplus y\in\mathbb{C}^m\oplus\ell^2,\|x\oplus y\|_{\mathbb{C}^m\oplus\ell^2}:=\|x\|_{\mathbb{C}^m}+\|y\|_{\ell^2}$. 则$A_2$为紧算子且$\sigma(A_2)=\sigma_r(A_2)\cup\sigma_p(A_2)$. 其中$\sigma_r(A_2)=\{0\},\sigma_p(A_2)=\{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(iii) 令T_3和$\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$如(ii)所示. 定义

$$T_4:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\mapsto\{\mu_ka_k\}_{k\in\mathbb{N}}.\end{cases}$$

和

$$A_3:\begin{cases}\ell^2\oplus\ell^2\to\ell^2\oplus\ell^2\\x\oplus y\mapsto T_3x\oplus T_4y.\end{cases}$$

且对$\forall x\oplus y\in\ell^2\oplus\ell^2,\|x\oplus y\|_{\ell^2\oplus\ell^2}:=\|x\|_{\ell^2}+\|y\|_{\ell^2}$. 则$A_3$为紧算子且$\sigma(A_3)=\sigma_r(A_3)\cup\sigma_p(A_3)$, 其中$\sigma_r(A_3)=\{0\},\sigma_p(A_3)=\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

习题 1.3.3 设$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$,在$\ell^2$上定义算子

$$A:(x_1,x_2,\cdots)\to(a_1x_1,a_2x_2,\cdots)$$

(1) 证明: A在ℓ^2上有界当且仅当$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为有界数列.
(2) 若A有界. 求$\sigma(A)$.

证明: (1)($\Rightarrow$) 反证法. 若$\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|=\infty$, 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 取$e_k:=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$. 则$\|Ae_k\|_{\ell^2}=1$. 故由算子范数定义知$\|A\|\geq\|Ae_k\|_{\ell^2}=|a_k|$. 因此$\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|\leq\|A\|$. 这与$A\in\mathscr{L}(\ell^2)$矛盾. 即$\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<\infty$. 即$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$为有界数列.

($\Leftarrow$) A显然为线性算子且对$\forall x\in\ell^2$, 有

$$\|Ax\|_{\ell^2}=\left[\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_ix_i|^2\right]^{1/2}\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|\|x\|_{\ell^2}.$$

于是$\|A\|\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<\infty$. 故$A\in\mathscr{L}(\ell^2)$.

(2) 取$\lambda:=a_i$, 和$e_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots),i\in\mathbb{N}$. 因$(\lambda I-A)e_i=\theta$. 故$\lambda\in\sigma_p(A)\subset\sigma(A)$. 又由$A$有界及推论1.1.11知$\sigma(A)$闭. 故$\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}\subset\sigma(A)$.

下证$\sigma(A)\subset\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 为此只需证明$\forall\lambda\in\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 有$\lambda\notin\sigma(A)$. 事实上, 对$\forall\lambda\notin\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$与$x\in\ell^2$满足

$$(\lambda I-A)(x_1,x_2,\cdots)=((\lambda-a_1)x_1,(\lambda-a_2)x_2,\cdots)=\theta.$$

有$x_i=0,\forall i\in\mathbb{N}$, 即$x=\theta$. 故$(\lambda I-A)$为单射, 即$(\lambda I-A)^{-1}$存在. 注意到对$\forall\lambda\notin\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 存在正常数$c$, 使得对$\forall i\in\mathbb{N}$, 有$|\lambda-a_i|>c$. 由此及$(\lambda I-A)^{-1}$存在且对$\forall x\in\ell^2$,

$$(\lambda I-A)^{-1}(x_1,x_2,\cdots)=(\frac{1}{\lambda-a_1}x_1,\frac{1}{\lambda-a_2}x_2,\cdots)$$

知$(\lambda I-A)^{-1}$有界. 又因若$y_i=(y_1,y_2,\cdots)\in\ell^2$, 则$x=(x_1,x_2,\cdots):=(\frac{y_1}{\lambda-a_1},\frac{y_2}{\lambda-a_2},\cdots)\in\ell^2$, 且$(\lambda I-A)x=y$. 即$R(\lambda I-A)=\ell^2$. 故$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\ell^2)$. 因此$\lambda\in\sigma(A)$. 从而有$\sigma(A)\subset\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$. 综上得$\sigma(A)=\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$. □

习题 1.3.4 (补充题) 给定数列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 定义$A:\begin{cases}\ell^1\to\ell^1\\ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to\{a_ix_i\}_{i\in\mathbb{N}}.\end{cases}$ 证明:

(1) $A\in\mathscr{L}(\ell^1)\Longleftrightarrow\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<\infty.$

(2) $A^{-1}\in\mathscr{L}(\ell^1)\Longleftrightarrow\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|>0.$

(3) $A\in\mathfrak{C}(\ell^1)\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

1.4 Hilbert-Schmidt 定理

习题 1.4.1 (原第3题) 设H为复*Hilbert*空间，且A为H上的对称紧算子. 令

$$m(A) := \inf_{\|x\|_H=1} (Ax, x),\ M(A) := \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x).$$

证明*:*

(1) 若$m(A) \neq 0$，则$m(A) \in \sigma_p(A)$;

(2) 若$M(A) \neq 0$，则$M(A) \in \sigma_p(A)$.

习题 1.4.2 (原第5题) 设H为复*Hilbert*空间. 则$P \in \mathscr{L}(H)$为H上的正交投影算子当且仅当

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2,\ \forall x \in H.$$

2 Banach 代数

2.1 代数准备知识

2.2 Banach 代数

习题 2.2.1 证明例*2.2.6*中$\mathscr{A}$完备.

习题 2.2.2 设$\mathscr{B}$及其他记号同定理*2.2.13*且商模$\|[\cdot]\|$定义如定理*2.2.13*的证明. 证明$\|[e]\| = 1$且

$$\inf_{x\in[a],y\in[b]} \|xy\| = \inf_{x\in[a]} \|x\| \inf_{y\in[b]} \|y\|.$$

习题 2.2.3 设$\mathscr{A}$是有单位元的*Banach*代数，$a, b \in \mathscr{A}$. 证明*:*

(1) 若$e - ab$可逆，则$e - ba$也可逆.

(2) 若非零复数$\lambda \in \sigma(ab)$，则$\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 若a可逆，则$\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

习题 2.2.4 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是两个可交换的有单位元的*Banach*代数. $\mathscr{B}$是半单的. 若φ是$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的一个同态. 求证φ是连续的.

习题 2.2.5 略

习题 2.2.6 用定理*1.1.14*即"有界线性算子A, $\sigma(A)\neq\varnothing$"来证明定理*2.2.10*即"可除*Banach*代数$\mathscr{A}$等距同构与$\mathbb{C}$".

习题 2.2.7 证明以下两条等价.

(1) 设$\mathscr{X}$为*Banach*空间, $\forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, $\sigma(A)\neq\varnothing$.

(2) 设$\mathscr{A}$是有单位元的*Banach*代数. 则$\forall a\in\mathscr{A}$, $\sigma(a)\neq\varnothing$.

习题 2.2.8 证明引理*2.2.16*证明中的$\widetilde{\varphi}$ 是$\mathscr{A}/J\to\mathbb{C}$上的等距同构映射.

$$\widetilde{\varphi}:\begin{cases}\mathscr{A}/J\to\mathbb{C}\\ \quad [a]\to\varphi(a).\end{cases}$$

习题 2.2.9 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, 若S为$\mathscr{X}^*$ 的$*$弱闭集且有界. 证明S是$*$弱紧的.

习题 2.2.10 (补充题) 设$\mathscr{A}$是*Banach*代数, 则对$\forall x\in\mathscr{A}$. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 存在且等于$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\|x^n\|}$.

2.3 例子与应用

习题 2.3.1 设 $\mathscr{A}:=\left\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}:\|f\|:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|2^{|n|}<\infty\right\}$. 按函数的加法和数乘定义线性运算, 并定义乘法: $f*g(n):=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}f(n-k)g(k)$. 证明:

(1) $\mathscr{A}$是可交换的*Banach*代数;

(2) 令$K:=\{z\in\mathbb{C}:1/2\le|z|\le 2\}$. 则$K$与$\mathfrak{M}$一一对应, 且$\mathscr{A}$ 的*Gelfand*表示是K上绝对收敛的*Laurent* 级数.

习题 2.3.2 设M是T_2紧拓扑空间, 证明M的全体闭子集与$C(M)$的全体理想间有一一对应.

习题 2.3.3 (补充题) 设$\mathscr{A}$是半单的交换*Banach*代数. 证明: $\mathscr{A}$ 的*Gelfand*表示的值域$\Gamma(\mathscr{A})$ 是$C(\mathfrak{M})$的闭集的充要条件是存在正常数$k<\infty$, 使得对$\forall a\in\mathscr{A}$, 有$\|a\|^2\le k\|a^2\|$.

2.4 C^*代数

习题 2.4.1 设所有记号如定理*2.4.14*的证明. 证明:

(1) $\widetilde{\mathscr{A}}$为$C(\mathscr{Y})$的实值子代数;

(2) 对任意$\widetilde{f}\in C(\mathscr{Y})_r$, $\widetilde{f}-\widetilde{f}(\partial)\in C_\infty(\mathscr{X})$;

(3) *(2.4.1)*成立.

习题 2.4.2 证明注记*2.4.15*. 即: $f\in C_\infty(\mathscr{X})\Longleftrightarrow f\in C(\mathscr{Y})_r$且$f(\partial)=0$.

习题 2.4.3 证明交换半单有单位元的*Banach*代数上的任意对合运算均连续.

习题 2.4.4 (补充题) 设$\mathscr{A}$是一个交换的C^*代数. 设其单位元为e. 若$\forall x\in\mathscr{A}.x$ 为*Hermite*元且$\sigma(x)\subset[0,\infty)$. 则称$x$是正的, 记作$x\geq 0$. 证明:

(1) $x\geq 0\Longleftrightarrow\exists h\in\mathscr{A}$是*Hermite*元, 使得$x=h^2$.

(2) $x\geq 0\Longleftrightarrow x$ 为*Hermite*元且$\|\|x\|e-x\|\leq\|x\|$.

2.5 Hilbert空间上的正常算子

习题 2.5.1 见命题*2.5.7*.

习题 2.5.2 证明: N为*Hilbert*空间H上的正常算子当且仅当$\|Nx\|_H=\|N^*x\|_H,\forall x\in H$.

习题 2.5.3 证明: 两个可交换的正算子的积仍为正算子.

习题 2.5.4 设N为*Hilbert*空间H上的正常算子. 则存在唯一正算子$P\in\mathscr{L}(H)$及酉算子$Q\in\mathscr{L}(H)$ 使得$N=PQ=QP$.

习题 2.5.5 设N为正常算子. 证明:

(1) N是酉算子当且仅当$\sigma(N)\subset S^1$;

(2) N是自伴算子当且仅当$\sigma(N)\subset\mathbb{R}$;

(3) N是正算子当且仅当$\sigma(N)\subset\mathbb{R}_+$.

习题 2.5.6 证明推论*2.5.28*.

习题 2.5.7 (补充题1) 设H为*Hilbert*空间,$U \in \mathscr{L}(H)$. 证明以下三个论述等价:

(1) U是酉算子;

(2) $R(U) = H$且对$\forall x, y \in H,\ (Ux, Uy) = (x, y)$.

(3) $R(U) = H$且对$\forall x, y \in H, \|Ux\|_H = \|x\|_H$.

习题 2.5.8 (补充题2) 设H为*Hilbert*空间, $T \in \mathscr{L}(H)$. 证明:

(1) T^*T的平方根$P \in \mathscr{L}(H)$是唯一满足$\|Px\|_H = \|Tx\|_H,\ \forall x \in H$的正算子.

(2) 若T可逆, 则有唯一分解$T = UP$, 其中U为酉算子, P为正算子.

习题 2.5.9 (补充题3) 设H为可分的*Hilbert*空间, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$是任意有界复数列. 证明: 在$H$上存在唯一一个以$\mu_k$ 为特征值的正常算子T, 并且$\|T\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\mu_k|$.