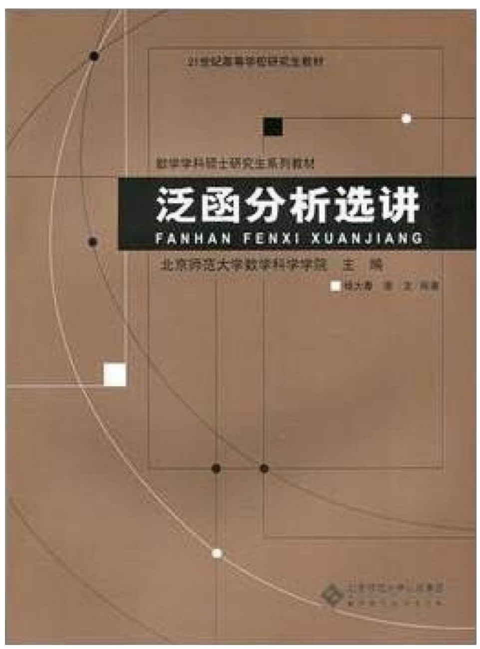
《泛函分析选讲》

习题参考解答



吴瀚霖
hlwu.bnu@gmail.com

2018 年 5 月 6 日

目录

第一章　紧算子的谱理论

1.1　有界线性算子的谱

习题 1.1.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个有限维 *Banach* 空间，$A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 为有界线性算子. 则对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值之一.

证明: 若 A 为有限维空间 $\mathscr{X}$ 上的有界算子, 则 A 可由矩阵 (a_{ij}) 表示. A 单射当且仅当 A 满射. 从而 $\lambda I-A$ 可逆当且仅当 $\lambda E-A$ 可逆. 而当

- $\det(\lambda E-A)=0$ 时, $\lambda\in\sigma(A)$;
- $\det(\lambda E-A)\neq 0$ 时, $\lambda\in\rho(A)$.

故对 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值. □

习题 1.1.2 设 $\mathscr{X}$ 为一个 *Banach* 空间. 证明 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆（有有界逆）算子集为开集.

证明: $\forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. $\forall T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|T-A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}\|T^{-1}\|&=\|(T-A+A)^{-1}\|\\&=\|A^{-1}(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|\\&\leq\|A^{-1}\|\cdot\|(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|\\&<\infty.\end{aligned}$$

由引理 1.1.9, $\|(T-A)A^{-1}\|\leq\|T-A\|\cdot\|A^{-1}\|<1$. 故 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆算子为开集. □

习题 1.1.3 考虑 ℓ^2 上的左推移算子

$$A:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

证明 $\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\},\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ 且 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明: 首先说明 A 是有界线性算子且 $\|A\|=1$. 设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\ell^2,$$
$$y=Ax=(x_2,x_3,\cdots,x_{n+1},\cdots).$$

有

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\|x\|^2\Longrightarrow\|Ax\|\le\|x\|\Longrightarrow\|A\|\le 1.$$

另一方面, $x':=(0,1,0\cdots)$, 则 $Ax'=(1,0,0,\cdots)$, $\|Ax'\|=\|x'\|$. 故 $\|A\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=1$.

(1) 当 $|\lambda|>1$ 时, $|\lambda|>\|A\|\Longrightarrow\lambda\in\rho(A)$.

(2) $D:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$. $\forall\lambda\in D,\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell^2$. 因为

$$A(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)=(\lambda,\lambda^2,\cdots)=\lambda(1,\lambda,\lambda^2,\cdots),$$

所以 $\lambda\in\sigma_p(A)$.

(3) 先考虑 $\lambda=1$ 时. 首先证明 $(I-A)^{-1}$ 存在. $\forall x\in\ell^2$, 若 $(I-A)x=0$, 则

$$(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots).$$

于是 $x=x_1(1,1,\cdots)$. 又因为 $x\in\ell^2$, 所以 $x_1=0$, 从而 $x=\theta$. 即 $(I-A)^{-1}$ 存在.

下证 $R(I-A)\neq\ell^2$, 但 $\overline{R(I-A)}=\ell^2$.

若 $y=(I-A)x$, 则 $y_k=x_k-x_{k+1}$, 即

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x_1-x_2\\ y_2&=x_2-x_3\\ &\cdots\\ y_k&=x_k-x_{k+1}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{k}y_j=x_1-x_{k+1}.$$

即 $x_{k+1}=x_1-\sum_{j=1}^{k}y_j$. 易知, 非零分量为有限个的 $y\in R(I-A)$. 事实上, 设 y 的非零分量个数为 K, 取 $x_1=\sum_{j=1}^{k}y_j$,

$$x_{k+1}=\begin{cases}x_1-\sum\limits_{j=1}^{k}y_j,k=1,2,\cdots,K\\ 0,k>K\end{cases}.$$

由上式可知, $x\in\ell^2$.

存在 $y\in\ell^2$, 但是 $y\notin R(I-A)$. 事实上, 取 $y=\{\frac{1}{j}\}_{j=1}^{\infty}\in\ell^2$. 则

$$x_{k+1}=x_1-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\to-\infty,\ k\to\infty.$$

所以, $x \notin \ell^2$, 也就是说 $y \notin R(I-A)$, 那么 $R(I-A) \neq \ell^2$.

下证 $\overline{R(I-A)} = \ell^2$, 为此, 设 $\xi := \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in (0,\infty)$. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon$. 令 $y := \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. 其中

$$y_j = \begin{cases} \xi_j, j \leq N \\ 0, j > N. \end{cases}$$

有

$$\|y-\xi\|_{\ell^2} = \|\{\xi_j - y_j\}_{j=N+1}^{\infty}\|_{\ell^2} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon.$$

故 $\overline{R(I-A)} = \ell^2$. 从而 $1 \in \sigma_c(A)$.

其次, 对于一般的 λ 使 $|\lambda| = 1$. 可以划归为 $\lambda = 1$ 的情形. 事实上,

$$(\lambda I - A)x = y \Longleftrightarrow \lambda x_k - x_{k+1} = y_k \Longleftrightarrow \frac{x_k}{\lambda^k} - \frac{x_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1,2,\cdots$$

令 $\xi_k = \frac{x_k}{\lambda^k}, \eta_k = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1,2,\cdots$. 则有 $\xi_k - \xi_{k+1} = \eta_k, k = 1,2,\cdots$. 即划归为 $\lambda = 1$ 的情形. □

习题 1.1.4 考虑 $L^2(0,+\infty)$ 上的微分算子:

$$A : x(t) \mapsto x'(t). D(A) = H^1(0,+\infty).$$

证明 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = 0\}$ 且 $\sigma_r(A) = \varnothing$. 其中 $Re\lambda$ 表示 λ 的实部.

证明: 记 $\Omega := (0,\infty)$. 由 Meyers-Serrin 定理有

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \widetilde{d}^{\alpha} u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}.$$

其中 $\langle \widetilde{d}u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \widetilde{d}^{\alpha}\varphi \rangle$. $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

先证明 A 是闭算子. 只需证明当 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$. 且

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ in } L^2(\Omega) \\ u_n' \to v \text{ in } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (n \to \infty).$$

时, 有 $u \in D(A)$, 且 $u' = v$. $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega), \langle u_n', \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle$. 从而由

$$|\langle u_n, \varphi' \rangle - \langle u, \varphi' \rangle| = |\langle u_n - u, \varphi' \rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi'\|_{L^2(\Omega)} \to 0. (n \to \infty).$$

知 $\langle u_n', \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle \to -\langle u, \varphi' \rangle$.

类似可以证明 $\langle u_n', \varphi \rangle \to \langle v, \varphi \rangle, n \to \infty$. 即 $\langle v, \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ 成立. 由弱导数的定义知 $u' = v \in L^2(\Omega)$. 从而 $u \in H^1(\Omega)$, 且 $u' = v$. 故 A 为闭算子.

再证 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 考虑方程 $(\lambda I - A)u = 0$, 即 $u' - \lambda u = 0$. 由 PDE 知系数光滑从而弱解也光滑. 解 ODE, $u' - \lambda u = 0$. 得 $u = 0$ 或 $ce^{\lambda x} \in L^2(\Omega)$. 故 $(\lambda I - A)^{-1}$ 不存在. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

再证 $\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda=0\}$. 先说明 $R(\lambda I-A)\subsetneqq L^2(\Omega)$. 令 $v(x):=\frac{e^{\lambda x}}{x+1}\in L^2(\Omega)$. 由 $(\lambda I-A)u=v$ 得

$$\begin{aligned}u(x)&=e^{\lambda x}[u(0)-\int_0^x e^{-\lambda t}v(t)dt]\\&=e^{\lambda x}[u(0)-\ln(x+1)]\notin L^2(\Omega).\end{aligned}$$

故 $R(\lambda I-A)\subsetneqq L^2(\Omega)$.

再证 $\overline{R(\lambda I-A)}=L^2(\Omega)$. 因 $\overline{C_c^\infty(\Omega)}=L^2(\Omega)$, 故只需说明 $R(\lambda I-A)\supset C_c^\infty(\Omega)$. 事实上, 对 $\forall v\in C_c^\infty(\Omega)$. $\exists M_v$, 使得 $\mathrm{supp}v\subset(0,M_v)$. 由 $(\lambda I-A)u=v$, 得 $u(x)=e^{\lambda x}[u(0)-\int_0^x e^{-\lambda x}v(t)dt]$. 令 $u(0):=\int_0^{M_v}e^{-\lambda t}v(t)dt$. 则

$$u(x)=\begin{cases}e^{\lambda x}\displaystyle\int_x^{M_v}e^{-\lambda x}v(t)dt, & x\in(0,M_v)\\ 0, & x\in(M_v,\infty).\end{cases}$$

满足 $u\in H^1(\Omega)$. 即 $R(\lambda I-A)\supset C_c^\infty(\Omega)$. 故 $\overline{\lambda I-A}=L^2(\Omega)$.

最后说明 $\rho(A)\supset\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>0\}$. 设 $Re\lambda>0$, 此时 $ce^{\lambda x}\notin L^2(\Omega)$. 从而 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在. 断言 $R(\lambda I-A)=L^2(\Omega)$. 事实上, 对 $\forall v\in L^2(\Omega)$. 令 $u(x)=e^{\lambda x}\int_0^\infty e^{\lambda t}v(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda s}v(s+x)ds$. 则 u 满足 $u'-\lambda u=v$ 且 $u\in H^1(\Omega)$. 由 Minkovski 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\Omega)}&=\left\|\int_0^\infty e^{-\lambda x}v(s+x)ds\right\|_{L^2(\Omega)}\\&=\int_0^\infty|e^{-\lambda s}|ds\|v\|_{L^2(\Omega)}\\&=\frac{1}{Re\lambda}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\&<\infty.\end{aligned}$$

即 $R(\lambda I-A)=L^2(\Omega)$. 由命题 1.1.4 知, $\lambda\in\rho(A)$. 故 $\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>0\}$. 又因 $\rho(A)\cup\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)=\mathbb{C}$ 且互不相交, 故结论得证. □

习题 1.1.5 *(1) 证明 (1.1.1) 和 (1.1.2) 成立*

(2) 利用 $S^ny=\sum_{k=0}^n A^ky$ 给出引理 1.1.9 的另一个证明.

(3) $\forall x\in\mathbb{R}$, 定义 $\mathbb{R}$ 上的线性算子 $A_x:y\mapsto xy,\forall y\in\mathbb{R}$. 利用此算子说明当 $|x|<1$ 时.

$$(1-x)^{-1}=\sum_{k=0}^\infty x^k$$

只是 (1.1.3) 的一个特例.

证明: (1) 因为 $\|\sum_{n=0}^N A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\le\sum_{n=0}^N\|A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\le\sum_{n=0}^N\|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$. 所以 $\forall k,N\in\mathbb{N}$,

$$\|\sum_{n=N}^{N+k}A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\le\sum_{n=N}^{N+k}\|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1}0,N\to\infty.$$

故 $\{\sum_{n=0}^{N} A^n\}_{N\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的基本列. 而 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 为 Banach 空间, 故此基本列收敛, 设其极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. 由此, 有

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} &\le \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \|\sum_{n=0}^{N} A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\\ &\le \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \sum_{n=0}^{N} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n.\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 有 $\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n$.

$\forall x\in\mathscr{X}$,

$$\|\sum_{n=N}^{N+k} A^n x\|_{\mathscr{X}} \le \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}^n \|x\|_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N\to\infty.$$

故 $\{\sum_{n=0}^{N} A^n x\}_{N\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的基本列. 由 $\mathscr{X}$ 的完备性知其有极限, 记其极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n x$. $\|y-y_k\|_{\mathscr{X}} = \|\sum_{n=k+1}^{\infty} A^n x\| \to 0, k\to\infty$.

(2) $\forall y\in\mathscr{X}$. 由压缩映射原理知, 存在唯一的 $x_y\in\mathscr{X}$. 使得 $Sx_y = x_y$. 即 $y=(I-A)^{-1}x_y$. 令 $\widetilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} S^n y$. 又由 $S^n y = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k y$ 及 (1.1.2) 式知 $\widetilde{x}\in\mathscr{X}$.

因 S 连续, 则 $S\widetilde{x} = S(\lim\limits_{n\to\infty} S^n y) = \lim\limits_{n\to\infty} S^{n+1} y = \widetilde{x}$. 由压缩映射原理的唯一性知, $\widetilde{x} = x_y$, 即

$$y = (I-A)x_y = (I-A)\widetilde{x} = (I-A)(\lim_{n\to\infty} S^n)y.$$

由 y 的任意性知, $(I-A)(\lim\limits_{n\to\infty} S^n) = I$. 类似可证 $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n)(I-A) = I$. 故

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

且

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

(3) 当 $|x|<1$ 时, $\|A_x\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})} < 1$. 由 (2) 知, $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_x^n$. 故 $(I-A)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_x^n) = I$. 注意到 $I=1$ 且 $A_x(1) = x$, 知

$$(1-x)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = 1.$$

从而 $(1-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. □

习题 1.1.6 (补充题) $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda\in\sigma(A)\}$

证明: 因 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则 $0\in\rho(A)$ 且 $0\in\rho(A^{-1})$. 下证

$$\rho(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$

若 $\lambda \in \rho(A)\backslash\{0\}$, 则 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 对 $\forall x \in \mathscr{X}$, 方程

$$(\lambda^{-1}I - A^{-1})y = x$$

有唯一解 $y = -\lambda A(\lambda I - A)^{-1}x \in \mathscr{X}$. 从而 $R(\lambda^{-1}I - A^{-1}) = \mathscr{X}$, 又因 $A^{-1}\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 由命题 1.1.4 知 $\lambda^{-1} \in \rho(A)$. 故 $\rho(A^{-1}) \supset \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A)\backslash\{0\}\} \cup \{0\}$.

若 $\lambda \in \rho(A^{-1})\backslash\{0\}$, 同上可证 $\lambda^{-1} \in \rho((A^{-1})^{-1}) = \rho(A)$. 故

$$\rho(A^{-1}) \subset \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A)\backslash\{0\}\} \cup \{0\}.$$

从而 $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$. □

1.2 紧算子

习题 1.2.1 *设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为 Banach 空间. $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为线性算子. 证明以下三条等价:*

(1) A 为全连续算子;

(2) 对 $\mathscr{X}$ 中任意弱收敛于 θ 的点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 均有 $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中强收敛于 θ.

(3) 存在 $x_0 \in \mathscr{X}$ 且对 $\mathscr{X}$ 中任意弱收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 均有 $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中强收敛于 Ax_0.

证明: (1)⇒(2) 因 A 为全连续算子. $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{X}$ 且 $x_n \rightharpoonup \theta, n \to \theta$. 根据全连续算子的定义知 $Ax_n \to A\theta, n \to \infty$. 又因 A 为线性算子, 知 $A\theta = \theta$. 故 $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中强收敛于 θ.

(2)⇒(3) 设 $\forall x_n \rightharpoonup, n \to \infty$, 则 $x_n - x_0 \rightharpoonup \theta$. 由 (2) 知 $A(x_n - x_0) \to \theta$, 于是 $Ax_n \to Ax_0$.

(3)⇒(1) 若 $\exists x_0 \in \mathscr{X}$, $\forall\{x_n\}$, $x_n \rightharpoonup x_0, n \to \infty$. 有 $Ax_n \to Ax_0, n \to \infty$. 那么, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall\{x'_n\} \subset \mathscr{X}$ 且 $x'_n \rightharpoonup x, n \to \infty$. 则对于 $\forall f \in \mathscr{X}^*$, $f(x'_n) \to f(x), n \to \infty$. 那么

$$\begin{aligned} |f(x'_n - x + x_0) - f(x_0)| &= |f(x'_n) - f(x) + f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x'_n) - f(x)| \to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

故 $x'_n - x + x_0 \rightharpoonup x_0$. 则

$$\begin{aligned} &A(x'_n - x + x_0) \to A(x_0) \\ \Longrightarrow &A(x'_n) - A(x) + A(x_0) \to A(x_0) \\ \Longrightarrow &A(x'_n) \to A(x), n \to \infty. \end{aligned}$$

所以 A 为全连续算子. □

习题 1.2.2 *记 S_n 如引理 1.2.26 之证明. 证明: $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致有界当且仅当, 对 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathscr{X}^*$.*

证明: $S_n(x) := \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i$.

($\Rightarrow$) 若 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致有界. 则 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M > 0$, 使得 $\|S_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le M$.

$$\|C_n(x)e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \le 2M\|x\|_{\mathscr{X}},$$

而 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le 2M\|e_n\|_{\mathscr{X}}^{-1}$. 故 $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathscr{X}^*$.

($\Leftarrow$) 若 $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathscr{X}^*$, 而 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n > 0$, 使得 $\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le M_n$. 由 $\|x - S_n(x)\| \to 0, n \to \infty$. 故 $\exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时,

$$\|S_n(x)\| \le \|x\|_{\mathscr{X}} + 1. \tag{1.2.1}$$

又 $n \in \{1, 2, \cdots, N_0\}$,

$$\|S_n(x)\|_{\mathscr{X}} = \|\sum_{i=1}^n C_i(x)e_i\|_{\mathscr{X}} \le M_0 N_0 \|e_0\|_{\mathscr{X}} \|x\|_{\mathscr{X}}, \tag{1.2.2}$$

其中 $M_0 := \max\{M_1, \cdots, M_{N_0}\}$, $\|e_0\|_{\mathscr{X}} := \max\{\|e_1\|, \cdots, \|e_{N_0}\|\}$. 由 (1.2.1) 和 (1.2.2) 知, $\exists \widetilde{M} > 0, \forall x \in \mathscr{X}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|_{\mathscr{X}} \le \widetilde{M}.$$

则由共鸣定理, 知 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致有界. □

习题 1.2.3 证明*: 若 $\mathscr{X}$ 为无穷维 Banach 空间, 则 $\mathscr{X}$ 上紧算子没有有界逆.*

证明: 若不然, $A \in \mathfrak{C}$ 且 A 有有界逆, 即 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 由命题 1.2.6(vi) 可知, $AA^{-1} = I \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$. $\forall B \in \mathscr{X}$ 且 B 为有界集, $\overline{I(B)}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的紧集. 从而 $\overline{B}$ 为 $\mathscr{X}$ 中的紧集, 故 $\overline{B}$ 自列紧.

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \subset \overline{B}$, 由 $\overline{B}$ 是自列紧的知 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有收敛子列, 故 B 是列紧的. 由 [2] 推论 1.4.30: "B^* 空间 $\mathscr{X}$ 是有穷维的, 当且仅当任意有界集是列紧的." 可知 $\mathscr{X}$ 是有穷维的. 矛盾. □

习题 1.2.4 *设 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 满足对 $\forall x \in \mathscr{X}$,*

$$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \ge \alpha\|x\|_{\mathscr{X}}.$$

其中 α 为一正常数. 证明 A 紧当且仅当 $\mathscr{X}$ 是有穷维的.

证明: ($\Leftarrow$) 若 $\dim \mathscr{X} < \infty$. 由注记 1.2.4 知, $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$.

($\Rightarrow$) 令 $Ax = \theta$. 若 $\|Ax\|_{\mathscr{X}} \ge \alpha\|x\|_{\mathscr{X}}$, 知 $x = \theta$. 故 A 为单射. 从而 A^{-1} 存在. $\forall x \in \mathscr{X}$, 令 $y = Ax$. 则

$$\|y\|_{\mathscr{X}} \ge \alpha\|A_{-1}y\|_{\mathscr{X}} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\mathscr{X}} \le \frac{1}{\alpha}.$$

故 A 有有界逆. 由习题 3 知, $\dim \mathscr{X} < \infty$. □

习题 1.2.5 设 $p \in [1,\infty]$. $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. 证明算子

$$T : \{\xi_n\} \to \{\omega_n \xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是 ℓ^p 上的紧算子.

证明: $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in \ell^p$. 令 $T_N\xi = (\omega_1\xi_1, \omega_2\xi_2, \cdots, \omega_n\xi_n, 0, \cdots)$. 下证 $T_N\xi$ 为 ℓ^p 上的有界线性算子.

线性: $\forall \xi, \eta \in \ell^p$,

$$\begin{aligned} T_N(\alpha\xi + \beta\eta) &= (\omega(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1), \cdots, \omega(\alpha\xi_N + \beta\eta_N), 0, \cdots) \\ &= (\alpha\omega_1\xi_1, \cdots, \alpha\omega_N\xi_N, 0, \cdots) + (\alpha\omega_1\eta_1, \cdots, \alpha\omega_N\eta_N, 0, \cdots) \\ &= \alpha T_N\xi + \beta T_N\eta. \end{aligned}$$

有界性:

$$\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^p} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^N |\omega_i\xi_i|^p\right)^{1/p}.$$

令 $M = \max\limits_{1\le i\le N}\{|\omega_i|\}$. 则

$$\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} \le M \sup_{\|\ell^p\|=1} \left(\sum_{i=1}^N |\xi_i|^p\right)^{1/p} \le M \sup_{\|\ell^p\|=1} \|\xi\|_{\ell^p} = M.$$

由 ， 知 $T_N \in \mathscr{L}(\ell^p)$. 再由注记 1.2.4 及 $\dim R(T_N) < \infty$ 知 $T_N \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. 因

$$\|T_N\xi - T\xi\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=N+1}^\infty |\omega_i\xi_i|^P\right)^{1/p} \le \sup_{n>N} |\omega_n| \|\xi\|_{\ell^p}.$$

故

$$\|T - T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T\xi - T_N\xi\|_{\ell^p} \le \sup_{n\ge N} |\omega_n| \to 0, N \to \infty.$$

由命题 1.2.6(iii) 知 $T \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. □

习题 1.2.6 设 H 是 *Hilbert* 空间, A 是 H 上紧算子. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 H 的规范正交集. 证明

$$\lim_{n\to\infty} (Ae_n, e_n) = 0.$$

证明: 因 $\{e_n\}$ 为 H 的规范正交集, 所以由 Bessel 不等式有 $\forall x \in \mathscr{X}$, $\sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2 \le \|x\|^2$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} (x, e_n) = 0, \forall x \in H$ 成立.

$\forall f \in \mathscr{X}^*$, 由 F·Riesz 定理, 存在唯一的 $y_f \in \mathscr{X}$, 使 $f(x) = (x, y_f)$. 故 $f(e_n) = (e_n, y_f) = \overline{(y_f, e_n)}$, 由于 $y_f \in \mathscr{X}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} (y_f, e_n) = 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{(y_f, e_n)} = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = 0$, 故 $e_n \rightharpoonup 0$.

由命题 1.2.14 知, A 是全连续算子, 故 $Ae_n \to 0$. 由 [2] 习题 2.5.18 知, 在 H 中 $x_n \rightharpoonup x_0, y_n \to y_0$, 有 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} (Ae_n, e_n) = 0$. □

习题 1.2.7 证明注记 *1.2.23* 中的 $\ell^2(\Gamma)$ 为 *Hilbert* 空间.

证明: 首先证明 $\ell^2(\Gamma)$ 为内积空间.

$(f,g)=\sum_{x\in\Gamma}f(x)g(x)=\sum_{x\in\Gamma}g(x)f(x)=(g,f)$.

$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2\geq 0$.

$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2=0\Leftrightarrow f(x)\equiv 0$.

下证完备性. 任取 $\ell^2(\Gamma)$ 中的基本列 $f^{(n)}$, 则

$$\|f_m-f_n\|_{\ell^2(\Gamma)}:=\left\{\sum_{x\in\Gamma}|f_m(x)-f_n(x)|^2\right\}^{1/2}\to 0, m,n\to\infty.$$

那么, $|f_m(x)-f_n(x)|\to 0, m,n\to\infty$. 即 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列. 可设其极限函数

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x), x\in\cup_{n=1}^{\infty}\{x\in\Gamma: f_n(x)\neq 0\},\\ 0, \text{其它}.\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_{\ell^2(\Gamma)}&=\left\{\sum_{x\in\Gamma}\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|^2\right\}^{1/2}\\ (\text{Fatou 引理})&\leq\varliminf_{m\to\infty}\left\{\sum_{x\in\Gamma}|f_n(x)-f_m(x)|^2\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

再令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\ell^2(\Gamma)}\leq\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{x\in\Gamma}|f_n(x)-f_m(x)|^2\right\}=0.$$

即 $f_n\to f$ in $\ell^2(\Gamma)$. $\|f\|_{\ell^2(\Gamma)}\leq\|f_n-f\|_{\ell^2(\Gamma)}+\|f_n\|_{\ell^2(\Gamma)}<\infty$. 完备性得证. □

习题 1.2.8 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$ 为 *Hilbert* 空间. 证明 $\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})}=\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.9 设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$ 为具有 *Schauder* 基的 *Banach* 空间. 证明 $\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})}=\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.10 (补充题) 定义

$$T:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\ \{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}\mapsto\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\}_{i\in\mathbb{N}}.\end{cases}$$

其中 $\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$. 满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$.

1) 证明 T 是 ℓ^2 上的紧算子.

2) 举例说明: 存在无穷维的矩阵 (a_{ij}) 使 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\infty$. 但按上述定义的 T 仍然是紧算子.

3) 若 $\forall i\neq j, a_{ij}=0$. 证明: T 是紧算子 $\Longleftrightarrow a_{mm}\to 0, n\to\infty$.

证明: 1) 令 $T_N(\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}):=\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,\cdots,\sum_{j=1}^{\infty}a_{Nj}\xi_j,0,\cdots\}$, 则 $\dim(R(T))<\infty$. 往证 $T_N\in\mathscr{L}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned}\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^2)}:=\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\|T_N\xi\|_{\ell^2}&=\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\left\{\sum_{i=1}^{N}|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j|^2\right\}^{1/2}\\ (\text{Cauchy-Schwarz 不等式})&\le\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right\}<\infty.\end{aligned}$$

从而 $T_N\in F(\ell^2)$. 由注记知 $T_N\in\mathfrak{C}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned}\|T-T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^2)}&=\sup_{|\xi|_{\ell^2}=1}\left\{\sum_{i=N+1}^{\infty}|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j|^2\right\}^{1/2}\\&\le\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\left\{\sum_{i=N+1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2)(\sum_{j=1}^{\infty}|xi_j|^2)\right\}^{1/2}\\&=\left\{\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right\}^{1/2},\ N\to\infty.\end{aligned}$$

从而由命题 1.2.6(iii) 知, $T\in\mathfrak{C}(\ell^2)$.

2) 令

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\cdots&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&\cdots&\frac{1}{\sqrt{n}}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

则 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$. 由例题 1.3.7 知, T 为紧算子.

3) 由习题 1.2.5 知, $a_{m,m}\to 0, m\to 0\Longrightarrow T\in\mathfrak{C}(\ell^2)$. 若 $T\in\mathfrak{C}(\ell^2)$, 则 $T\in\mathscr{L}(\ell^2)$. 于是

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\ell^2)}=\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\|T\xi\|_{\ell^2}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}<\infty.$$

则 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{m,m}=0$. □

1.3 紧算子的谱理论

习题 1.3.1 举例说明 *Banach* 空间 $\mathscr{X}$ 及 $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$, 但 $0 \notin \sigma(A)$.

解：固定 $n \in \mathbb{N}$, 取 $\mathscr{X} := \mathbb{R}^n$. 定义 $A := I$. 对 $\mathscr{X}$ 中任意有界集 B, $\overline{I(B)} = \overline{B}$ 为有界闭集. 由于有限维 Banach 空间中紧集 $\Longleftrightarrow$ 有界闭集. 故 I 为紧算子. 又由于 $I^{-1} = I \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 故 $0 \notin \sigma(A)$.

习题 1.3.2 举例说明注记 *1.3.4* 情形 *(i)* 中的连续谱, 情形 *(ii)* 中的连续谱, 剩余谱, 情形 *(iii)* 中的剩余谱.

解：(i) 取 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}, \lambda_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{Z}_+$ 且 $\lambda_i \to 0, i \to \infty$. 定义

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2\right)^{1/2} < \infty \right\}$$

和

$$T_1 : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\cdots, \lambda_2 x_{-2}, \lambda_1 x_{-1}, \lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots), \end{cases}$$

则 T_1 是紧算子. 事实上, 对于 $\forall m \in \mathbb{N}$. 定义

$$T_1^{(m)}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \{\cdots, 0, \lambda_m x_{-m}, \cdots, \lambda_0 x_0, \cdots, \lambda_m x_m, 0, \cdots\},$$

则 $T_1^{(m)} \in \mathscr{F}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由 $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N^* \in \mathbb{N}$, 使当 $i > N^*$ 时, $|\lambda_i| < \varepsilon$. 此时

$$\begin{aligned} \|T_1^{(m)} - T_1\|_{\mathscr{L}(\ell^2(Z))} &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1(m) - T_1)x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sum_{|n|>m} |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

对于 T_1, 寻找到了一列有穷秩算子, 且依范数收敛到 T_1, 故 $T_1 \in \mathfrak{C}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由于 $\dim(\ell^2(\mathbb{Z})) = \infty$, 又由定理 1.3.1(i) 知, $0 \in \sigma(T_1)$.

先证 $\sigma(T_1) = \{0\}$. 事实上, 对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. 若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足 $(\lambda I - T_1)(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \theta$, 则 $\lambda x_n - \lambda_{|n-1|} x_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. 故

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\lambda^n} x_0, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda^{|n|}}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{|n|}} x_0, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

由此及 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 有 $x_0 = 0 \Longrightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \theta$. 即 $\sigma(T_1) = \{0\}$.

再证 $\{0\} = \sigma_c(T_1)$. 注意到若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足 $T_1(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \theta$. 则对 $\forall n \in \mathbb{Z}, \lambda_{|n|}x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0$. 所以 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \theta$. 即 $0 \notin \sigma_p(T_1)$ 且 T_1 为单射, 因此 T_1^{-1} 存在. 又因为 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset R(T_1)$ 且 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的一组 Schauder 基. 故 $\overline{R(T_1)} = \ell^2(\mathbb{Z})$. 因此 $\{0\} = \sigma_c(T_1)$. 即 T_1 满足要求.

(ii)-(a)(连续谱) 令 $\ell^2(\mathbb{Z}), T_1$ 如 (i) 中. 给定 $m \in \mathbb{N}$ 与 $\{\lambda_1\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$. 定义

$$T_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m \\ (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_m x_m) \end{cases}$$

和

$$A_1 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \\ x \oplus y \mapsto T_2 x \oplus T_1 y \end{cases}$$

且对 $\forall x \oplus y \in \mathbb{C}^m + \ell^2(\mathbb{Z}), \|x+y\|_{\mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z})} := \|x\|_{\mathbb{C}^m} + \|y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. 则 A_1 为紧算子且 $\sigma(A_1) = \sigma_c(A_1) \cup \sigma_p(A_1)$. 其中 $\sigma_c(A_1) = \{0\}, \sigma_p(A_1) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(ii)-(b)(剩余谱) 令 T_2 如 (a) 中所示, 给定 $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{C}, \mu_i \neq 0. \forall i \in \mathbb{N}$ 且 $\mu_i \to 0, i \to \infty$. 定义

$$T_3 : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \{0, \mu_1 a_1, \mu_2 a_2, \cdots\} \end{cases}$$

和

$$A_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \oplus \ell^2 \to \mathbb{C}^m \oplus \ell^2 \\ x \oplus y \mapsto T_2 x \oplus T_3 y. \end{cases}$$

且对 $\forall x \oplus y \in \mathbb{C}^m \oplus \ell^2, \|x\oplus y\|_{\mathbb{C}^m \oplus \ell^2} := \|x\|_{\mathbb{C}^m} + \|y\|_{\ell^2}$. 则 A_2 为紧算子且 $\sigma(A_2) = \sigma_r(A_2) \cup \sigma_p(A_2)$. 其中 $\sigma_r(A_2) = \{0\}, \sigma_p(A_2) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(iii) 令 T_3 和 $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 如 (ii) 所示. 定义

$$T_4 : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \{\mu_k a_k\}_{k\in\mathbb{N}}. \end{cases}$$

和

$$A_3 : \begin{cases} \ell^2 \oplus \ell^2 \to \ell^2 \oplus \ell^2 \\ x \oplus y \mapsto T_3 x \oplus T_4 y. \end{cases}$$

且对 $\forall x \oplus y \in \ell^2 \oplus \ell^2, \|x \oplus y\|_{\ell^2 \oplus \ell^2} := \|x\|_{\ell^2} + \|y\|_{\ell^2}$. 则 A_3 为紧算子且 $\sigma(A_3) = \sigma_r(A_3) \cup \sigma_p(A_3)$, 其中 $\sigma_r(A_3) = \{0\}, \sigma_p(A_3) = \{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

习题 1.3.3 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 在 ℓ^2 上定义算子

$$A : (x_1, x_2, \cdots) \to (a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots)$$

(1) 证明: A 在 ℓ^2 上有界当且仅当 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为有界数列.

(2) 若 A 有界. 求 $\sigma(A)$.

证明: (1)($\Rightarrow$) 反证法. 若 $\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|=\infty$, 对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 取 $e_k:=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$. 则 $\|Ae_k\|_{\ell^2}=1$. 故由算子范数定义知 $\|A\|\geq\|Ae_k\|_{\ell^2}=|a_k|$. 因此 $\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|\leq\|A\|$. 这与 $A\in\mathscr{L}(\ell^2)$ 矛盾. 即 $\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<\infty$. 即 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为有界数列.

($\Leftarrow$) A 显然为线性算子且对 $\forall x\in\ell^2$, 有

$$\|Ax\|_{\ell^2}=\left[\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_ix_i|^2\right]^{1/2}\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|\|x\|_{\ell^2}.$$

于是 $\|A\|\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<\infty$. 故 $A\in\mathscr{L}(\ell^2)$.

(2) 取 $\lambda:=a_i$, 和 $e_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots),i\in\mathbb{N}$. 因 $(\lambda I-A)e_i=\theta$. 故 $\lambda\in\sigma_p(A)\subset\sigma(A)$. 又由 A 有界及推论 1.1.11 知 $\sigma(A)$ 闭. 故 $\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}\subset\sigma(A)$.

下证 $\sigma(A)\subset\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 为此只需证明 $\forall\lambda\in\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 有 $\lambda\notin\sigma(A)$. 事实上, 对 $\forall\lambda\notin\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$ 与 $x\in\ell^2$ 满足

$$(\lambda I-A)(x_1,x_2,\cdots)=((\lambda-a_1)x_1,(\lambda-a_2)x_2,\cdots)=\theta.$$

有 $x_i=0,\forall i\in\mathbb{N}$, 即 $x=\theta$. 故 $(\lambda I-A)$ 为单射, 即 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在. 注意到对 $\forall\lambda\notin\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 存在正常数 c, 使得对 $\forall i\in\mathbb{N}$, 有 $|\lambda-a_i|>c$. 由此及 $(\lambda I-A)^{-1}$ 存在且对 $\forall x\in\ell^2$,

$$(\lambda I-A)^{-1}(x_1,x_2,\cdots)=(\frac{1}{\lambda-a_1}x_1,\frac{1}{\lambda-a_2}x_2,\cdots)$$

知 $(\lambda I-A)^{-1}$ 有界. 又因若 $y_i=(y_1,y_2,\cdots)\in\ell^2$, 则 $x=(x_1,x_2,\cdots):=(\frac{y_1}{\lambda-a_1},\frac{y_2}{\lambda-a_2},\cdots)\in\ell^2$, 且 $(\lambda I-A)x=y$. 即 $R(\lambda I-A)=\ell^2$. 故 $(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\ell^2)$. 因此 $\lambda\in\sigma(A)$. 从而有 $\sigma(A)\subset\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$. 综上得 $\sigma(A)=\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$. □

习题 1.3.4 在 $C[0,1]$ 中考虑映射 $T:x(t)\to\int_0^t x(s)ds,\forall x\in C[0,1]$. 证明

(i) T 是紧算子.

(ii) 求 $\sigma(T)$ 及 T 的一个非平凡的闭的不变子空间.

证明: (i) 定义

$$k(s,t)=\begin{cases}1,0\leq s\leq t\leq 1\\0,0\leq t<s\leq 1\end{cases},$$

则 $k(s,t)\in L^2([0,1]\times[0,1])$. 且对 $\forall x\in C[0,1]$ 和 $t\in[0,1]$,

$$Tx(t)=\int_0^t x(s)ds=\int_0^1 k(s,t)x(s)ds.$$

由于 $C([0,1]\times[0,1])$ 在 $L^2([0,1]\times[0,1])$ 中稠, 故 $\exists\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C([0,1]\times[0,1])$. 使得 $k_n\to k$ in $L^2([0,1]\times[0,1])$. 注意到对 $\forall x\in C([0,1])$ 与 $t\in[0,1]$. 类似于例 1.2.17 可证

$$T_Nx(t):=\int_0^1 k_n(s,t)x(s)ds$$

为紧算子. 且有 Holder 不等式知

$$\begin{aligned}\|T_N x - Tx\|_{L^2} &= \left\{\int_0^1 \left|\int_0^1 [k_n(s,t)-k(s,t)]x(s)ds\right|^2 dt\right\}^{1/2}\\&\le \left\{\int_0^1 \left[\int_0^1 |k_n(s,t)-k(s,t)|^2\right]\left[\int_0^1 |x(s)|^2 ds\right] dt\right\}^{1/2}\\&\le \|x\|\|k_n-k\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}.\end{aligned}$$

所以

$$\|T_n - T\| \le \|k_n - k\|_{L^2([0,1]\times[0,1])} \to 0, n\to\infty.$$

由此及命题 1.2.6(iii) 知 T 为紧算子.

(ii) 由 T 紧及定理 1.3.1(i) 知 $0\in\sigma(T)$. 下证 $\sigma(T)=\{0\}$. 为此只需证明 $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|^{1/n}=0$. 事实上, 注意到对 $\forall x\in C[0,1]$ 与 $t\in[0,1]$. 有

$$\begin{aligned}Tx(t) &= \int_0^t x(s)ds\\T^2x(t) &= \int_0^t\int_0^u x(s)dsdu = \int_0^t (t-s)x(s)ds.\end{aligned}$$

由此及数学归纳法知, 对 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$T^n x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}x(s)ds.$$

故

$$\|T^n x\| \le \frac{1}{(n-1)!}\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t (t-s)^{n-1}x(s)ds\right| \le \frac{1}{n!}\|x\|.$$

于是 $\|T^n\|\le\frac{1}{n!}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=0$, 因此 $\sigma(T)=\{0\}$.

下面说明 T 存在非平凡不变子空间, 为此只需证 $\{0\}=\sigma_r(T)$. 事实上, 由 T 的定义与微积分基本定理知 $R(T)=\{y\in C^1[0,1]: y(0)=0\}$. 注意到若 $Tx=\theta$. 则 $x=\theta$. 故 T 为单射, 即 T^{-1} 存在. 由此及 $x\equiv 1\in C[0,1]$, 但 $1\notin\overline{R(T)}$ 知 $0\in\sigma_r(T)$. 故 T 存在非平凡的不变子空间.

令 $\Omega:=\{y\in C[0,1]: y(0)=0\}$. Ω 即为一个非平凡的不变子空间. 下证 Ω 闭. $\forall\{x_n\}\subset\Omega$ 且 $x_n\to x$ in $C[0,1]$.

$$|x(0)| = |x(0)-x_n(0)| \le \|x-x_n\| \to 0, n\to\infty.$$

于是 $x(0)=0$. 即 $x\in\Omega$, 故 Ω 闭. □

习题 1.3.5 (补充题) 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 定义 $A:\begin{cases}\ell^1\to\ell^1\\ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to\{a_ix_i\}_{i\in\mathbb{N}}.\end{cases}$ 证明:

(1) $A\in\mathscr{L}(\ell^1)\Longleftrightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<\infty$.

(2) $A^{-1} \in \mathscr{L}(\ell^1) \iff \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0.$

(3) $A \in \mathfrak{C}(\ell^1) \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

证明: (1) 同习题 1.2.2(i).

(2) ($\Rightarrow$) 若 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\ell^1)$, 则 $\exists M \in (0,\infty)$. 使得 $\forall x \in \ell^1, \|Ax\|_{\ell^1} \geq M\|x\|_{\ell^1}$. 取 $e_n := (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots), \forall n \in \mathbb{N}$. 则有 $|a_n| = \|Ae_n\|_{\ell^1} \geq M\|e_n\|_{\ell^1} = m$. 于是 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0$.

($\Leftarrow$) 若 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0$, 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $|a_n| > 0$, 定义

$$B : \begin{cases} \ell^1 \to \ell^1 \\ (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (a_1^{-1}x_1, a_2^{-1}x_2, \cdots) \end{cases},$$

则 $AB = BA = I$. 故 $A^{-1} = B$. 由 (1) 知,

$$\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\ell^1)} = \|B\|_{\mathscr{L}(\ell^1)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n^{-1}| = \frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n|} < \infty.$$

故 $A^{-1} \in \mathscr{L}(\ell^1)$.

(3) ($\Leftarrow$) 同习题 1.2.5.

($\Rightarrow$) 反证法. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 及 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. 使得对于 $\forall k \in \mathbb{N}, |a_{n_k}| \geq \varepsilon_0 > 0$, 取 $e_{n_k} := (0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$. 则 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 ℓ^1 中有界列, 但对于 $\forall l \in \mathbb{N}, \|Ae_k - Ae_{n_{k_l}}\|_{\ell^1} = |a_{n_k}| + |a_{k_l}| \geq 2\varepsilon_0 > 0$. 即 $\{Ae_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 没有收敛子列. 从而 $A \notin \mathscr{L}(\ell^1)$, 矛盾. □

1.4 Hilbert-Schmidt 定理

习题 1.4.1 *设 H 为复 Hilbert 空间, 且 A 为 H 上的有界线性算子. 证明 $A+A^*, AA^*, A^*A$ 均为对称算子, 且*

$$\|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A\|^2_{\mathscr{L}(H)}.$$

证明: (i)

$$\begin{aligned} ((A+A^*)x, y) &= (Ax, y) + (A^*x, y) \\ &= (x, A^*y) + (x, Ay) \\ &= (x, (A+A^*)y). \end{aligned}$$

所以 $A+A^*$ 是对称算子.

$(AA^*x, y) = (A^*x, A^*y) = (x, AA^*y)$. 所以 AA^* 是对称算子.

$(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)$. 所以 A^*A 是对称算子.

(2) 因为 $(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|_H^2$. 所以

$$\|AA^*\|_{\mathscr{L}(H)} = \sup_{\|x\|_H=1} |(AA^*x, x)| = \sup_{\|x\|_H=1} \|A^*x\|_H^2 = \|A^*\|^2_{\mathscr{L}(H)}.$$

同理

$$\|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)}=\sup_{\|x\|_H=1}|(A^*Ax,x)|=\sup_{\|x\|_H=1}\|Ax\|_H^2=\|A\|_{\mathscr{L}(h)}^2.$$

又因 $\|A^*\|_{\mathscr{L}(H)}=\|A\|_{\mathscr{L}(H)}$, 故 $\|AA^*\|_{\mathscr{L}(H)}=\|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)}=\|A\|_{\mathscr{L}(H)^2}$. □

习题 1.4.2 设 H 为复 *Hilbert* 空间, 且 A 为 H 上的有界线性算子, 满足 $(Ax,x)\geq 0,\forall x\in H$, 且 $(Ax,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$. 证明

$$\|Ax\|_H^2\leq\|A\|_{\mathscr{L}(H)}(Ax,x),\forall x\in H.$$

证明: 设 $a(x,y)=(Ax,y)$, 则 $a(\cdot,\cdot)$ 为 $H\times H\to\mathbb{K}$ 上的共轭双线性函数, 由《泛函分析（上册)》命题 1.6.9 有

$$|a(x,y)|\leq[a(x,x)a(y,y)]^{1/2},\forall x,y\in H.$$

那么

$$|(Ax,y)|^2\leq(Ax,x)(Ay,y).$$

在上式中, 令 $y=Ax$, 则

$$\|Ax\|_H^4\leq(Ax,x)(A^2x,Ax)\leq(Ax,x)\|A^2x\|_H\|Ax\|_H.$$

所以 $\|Ax\|_H^4\leq\|A\|_{\mathscr{L}(H)}\|Ax\|_H^2$. 即得 $\|Ax\|_H^4\leq\|A\|_{\mathscr{L}(H)}(Ax,x)$. □

习题 1.4.3 设 H 为复 *Hilbert* 空间, 且 A 为 H 上的对称紧算子. 令

$$m(A):=\inf_{\|x\|_H=1}(Ax,x),\ \ M(A):=\sup_{\|x\|_H=1}(Ax,x).$$

证明*:*

(1) 若 $m(A)\neq 0$, 则 $m(A)\in\sigma_p(A)$;

(2) 若 $M(A)\neq 0$, 则 $M(A)\in\sigma_p(A)$.

证明: (1) 因 A 为紧算子, 则 $\sigma(A)\backslash\{0\}=\sigma_p(A)\backslash\{0\}$. 从而为证 $m(A)\in\sigma_p(A)$, 只需证 $m(A)\in\sigma(A)$. 令 $B:=A-m(A)I$, 则 $B\in\mathscr{L}(H)$, 且对 $\forall x,\|x\|_H=1$, 有 $(Bx,x)=(Ax,x)-m(A)\geq 0$. 从而对 $\forall x\in H,(Bx,x)\geq 0$. 从而对 $\forall t\in R$ 及 $\|x\|_H=1$,

$$0\leq(B(tBx+x),tBx+x)=t^2(B^2x,Bx)+2t\|Bx\|_H+(Bx,x).$$

于是 $4\|Bx\|_H^4\leq 4\|B\|_H^3(Bx,x)$. 取 $\inf\limits_{\|x\|_H=1}=0$, 若 $m(A)\notin\sigma(A)$, 则 $m(A)\in\rho(A)$. 从而 $B^{-1}\in\mathscr{L}(H)$. 取 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\{x\in H:\|x\|_H=1\}$ 使得 $\|Bx_n\|\to 0,n\to\infty$, 则

$$1=\|x_n\|=\|B^{-1}Bx_n\|\leq\|B^{-1}\|\|Bx_n\|\to 0.$$

矛盾. 故 $m(A)\in\sigma(A)$.

(2) 记 $B:=-A$, 则

$$m(B)=\inf_{\|x\|_H=1}(Bx,x)=\inf_{\|x\|_H=1}(-Ax,x)=-\sup_{\|x\|_H=1}(Ax,x)=-M(A).$$

由 (1) 知 $m(B)\in\sigma_p(B)$, 从而 $-M(A)\in\sigma_p(-A)$. 故 $M(A)\in\sigma_p(A)$. □

习题 1.4.4 设 H 为复 *Hilbert* 空间, 且 A 为 H 上的对称紧算子. 证明

(1) 若 A 非零, 则 A 至少有一个非零本征值.

(2) 若 M 是 A 的非零闭不变子空间, 则 M 上必含有 A 的本征值.

证明: (1) 由定理 1.4.6 知, $\exists x_0\in H,\|x_0\|_H=1$ 使得

$$|(Ax_0,x_0)|=\sup_{\|x\|_H=1}(Ax,x)=\|A\|_{\mathscr{L}(H)},$$

且 $Ax_0=(Ax_0,x_0)x_0$. 因为 A 非零, $\|x_0\|_H=1$, 故 $(Ax_0,x_0)\neq 0$, 且 (Ax_0,x_0) 位 A 的非零本征值.

(2) 由命题 1.4.5(ii) 及命题 1.2.6(iv) 知, $A|_M$ 还是对称紧算子.

若 $A|_M=\theta$, 则 $0\in\sigma_p(A|_M)$. 事实上, $\forall\theta\neq x_0\in M$, $A|_M x_0=0=x_0$.

若 $A|_M\neq 0$, 同 (1) 中的结果, $\exists x_0\in M,\|x_0\|_H=1$. 使得 $A|_M x_0=(A|_M x_0,x_0)x_0$.

于是 $(A|_M x_0,x_0)$ 为 $A|_M$ 的本征值. □

习题 1.4.5 设 H 为复 *Hilbert* 空间. 则 $P\in\mathscr{L}(H)$ 为 H 上的正交投影算子当且仅当

$$(Px,x)=\|Px\|_H^2,\ \forall x\in H.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 因 $P\in\mathscr{L}(H)$ 是 H 的正交投影算子. 设 M 是一个闭的线性子空间. 由正交分解定理, 对 $\forall x,y\in H$, 有

$$x=x_M+x_{M^\perp},\ (x_M\in M,x_{M^\perp}\in M^\perp)$$
$$y=y_M+y_{M^\perp}.\ (y_M\in M,y_{M^\perp}\in M^\perp)$$

有 P 的定义知, $x_M=Px,y_M=Py$. 故

$$(Px,y)=(x_M,y_M+y_{M^\perp})=(x_m,y_m)=(x,Py).$$

所以 P 对称. 因此 $(P^2x,x)=(Px,Px)=\|Px\|_{H^2}$. 又因 $P^2=P$, 故 $(Px,x)=\|Px\|_H^2$.

$(\Leftarrow)$ 因 $(Px,x)=\|Px\|_H^2\in\mathbb{R}$, 故 P 是对称算子 (由命题 1.4.5(i)). 又因

$$(Px,x)=\|Px\|_H^2=(Px,Px)=(P^2x,x),$$

所以 $((P-P^2)x,x)=0,\forall x\in H$. 再由 [2] 习题 1.6.1 中的极化恒等式, 有

$$((P-P^2)x,y)=0,\forall x,y\in H.$$

所以 $P=P^2$.

令 $M=P(H)$, 可知 M 闭. 事实上, 设 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset M$, 且有 $Px_n\to y$, $P^2x_n=Px_n\to Py$. 所以 $P=Py\in M$. 故 M 是闭的. 下证 P 是正交投影算子. 对 $\forall x\in H$, 有 $x=Px+(I-P)x, Px\in M$. 又因 $\forall y\in H$,

$$((I-P)x,Py)=(x,Py)-(Px,Py)=(x,Py)-(x,P^2y)=0.$$

从而 $(I-P)x\in M^{\perp}$, 即 P 为 $H\to M$ 的正交投影算子.

□

第二章　Banach 代数

2.1　代数准备知识

习题 2.1.1 *在注记 2.1.8 中，若 $\mathscr{A}$ 为一个 Banach 代数，并在 $\hat{\mathscr{A}}$ 上赋予范数*

$$\|(x,\alpha)\| := \|x\| + |\alpha|\|.$$

证明 $\hat{\mathscr{A}}$ 是一个 Banach 代数.

证明:　由习题 2.1.3 知，$\hat{\mathscr{A}}$ 是一个代数.

首先说明 $\|\cdot\|$ 是范数. $\forall (a,\lambda) \in \hat{\mathscr{A}}$,

i) $\|(a,\lambda)\| \geq 0$ 显然成立. $\|(a,\lambda)\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| + \|\lambda\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| = 0 = \|\lambda\| \Leftrightarrow (a,\lambda) = (\theta, 0)$.

ii) $\|(a,\lambda)+(b,\mu)\| = \|(a+b,\lambda+\mu)\| = \|a+b\|+|\lambda+\mu| \leq \|a\|+\|b\|+|\lambda|+|\mu| = \|(a,\lambda)\|+\|(b,\mu)\|$.

iii) $\|\alpha(a,\lambda)\| = \|(\alpha a, \alpha\lambda)\| = \|\alpha a\| + \|\alpha\lambda\| = |\alpha|(\|a\| + |\lambda|) = |\lambda|\|(a,\lambda)\|$.

再证其完备性. 设 $\{(a_n,\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\hat{\mathscr{A}}$ 中的基本列. 由 $\mathscr{A}$ 和 $\mathbb{C}$ 的完备性知，$\exists a \in \mathscr{A}, \lambda \in \mathbb{C}$, 使

$$\|a_n - a\| \to 0, |\lambda_n - \lambda| \to 0.$$

那么

$$\|(a_n,\lambda_n) - (a,\lambda)\| = \|a_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \to 0.$$

故 $\hat{\mathscr{A}}$ 完备. $\hat{\mathscr{A}}$ 在 $\|\cdot\|$ 下是一个完备的 Banach 空间.

最后证明 $\|(a,\lambda)(b,\lambda)\| \leq \|(a,\lambda)\|\|(b,\lambda)\|$.

$$\begin{aligned}
\|(a,\lambda)(b,\mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| \\
&= \|ab + \lambda b + \mu a\| + \|\lambda\mu\| \\
&\leq \|ab\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda\mu| \\
&\leq \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu| \\
&= (\|a\| + |\lambda|)(\|b\| + |\mu|) \\
&= \|(a,\lambda)\|\|(b,\mu)\|.
\end{aligned}$$

综上，$\hat{\mathscr{A}}$ 是一个 Banach 代数. □

习题 2.1.2 证明定义 *2.1.1* 中 $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$ 等价于

$$\begin{cases}(a+b)c=ac+bc\\ a(c+d)=ac+ad.\end{cases}$$

且 $(\lambda\mu)(ab)=(\lambda a)(\mu b)$ 等价于

$$\begin{cases}\lambda(ab)c=(\lambda a)b\\ \lambda(ab)=a(\lambda b).\end{cases}$$

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$. 取 $d=\theta$, 则 $(a+b)c=ac+bc$. 同理取 $b=\theta$, 则 $a(c+d)=ac+ad$.

$(\Leftarrow)$ 若

$$\begin{cases}(a+b)c=ac+bc\\ a(c+d)=ac+ad.\end{cases}$$

则 $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$.

$(\Rightarrow)$ 令 $\mu=1$, 得 $\lambda(ab)=(\lambda a)b,\forall\lambda\in\mathbb{C}$. 令 $\lambda=1$, 得 $\mu(ab)=a(\mu b),\forall\mu\in\mathbb{C}$.

$(\Leftarrow)$ $(\lambda\mu)(ab)=(\lambda\mu a)b=\mu(\lambda a)b=(\lambda a)(\mu b)$. □

习题 2.1.3 设 $\hat{\mathscr{A}}$ 为一个代数, 令 $\hat{\mathscr{A}}=\mathscr{A}\times\mathbb{C}$ 并且规定 $\hat{\mathscr{A}}$ 上代数运算如下*:*

$$\alpha(a,\lambda)+\beta(b,\mu):=(\alpha a+\beta b,\alpha\lambda+\beta\mu).$$
$$(a,\lambda)(b,\mu):=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu).$$

$(a,\lambda),(b,\mu)\in\hat{\mathscr{A}},\alpha\beta\in\mathbb{C}$. 证明 $\hat{\mathscr{A}}$ 为一个代数.

证明: 易验证 $\hat{\mathscr{A}}$ 满足线性空间的八条性质, 故 $\hat{\mathscr{A}}$ 为线性空间.

结合律:

$$[(a,\lambda)(b,\mu)](c,\xi)=(a,\lambda)[(b,\mu)(c,\xi)].$$

$$[(a,\lambda)+(b,\mu)](c,\xi)=(a,\lambda)(c,\xi)+(b,\mu)(c,\xi),$$
$$(a,\lambda)[(c,\xi)+(d,\eta)]=(a,\lambda)(c,\xi)+(a,\lambda)(d,\eta).$$

$$\alpha[(a,\lambda)(b,\mu)]=[\alpha(a,\lambda)](b,\mu),$$
$$\alpha[(a,\lambda)(b,\mu)]=(a,\lambda)[\alpha(b,\mu)].$$

综上, $\hat{\mathscr{A}}$ 为一个代数. □

习题 2.1.4 (补充题) 设 $\mathscr{A}$ 是一个代数. $x,y\in\mathscr{A}$, 记 $G(\mathscr{A})$ 为 $\mathscr{A}$ 中的全体可逆元.

1) 若 $x, xy \in G(\mathscr{A})$, 证明 $y \in G(\mathscr{A})$.

2) 若 $xy, yx \in G(\mathscr{A})$. 证明 $x, y \in G(\mathscr{A})$.

3) 说明可能存在 $xy = e$, 但 $yx \neq e$ 的情况.

4) 若 $xy = e$ 且 $yx = z \neq e$. 说明 z 是非平凡幂等元.$(z^2 = z, z \neq 0)$

证明: 1) 因 $x, xy \in G(\mathscr{A})$. 则 $y = x^{-1}xy$. 故 $y(x^{-1}xy)^{-1} = e$. 由于 $G(\mathscr{A})$ 是群, 故 $y \in G(\mathscr{A})$.

2) 因 $x, y \in G(\mathscr{A})$, 则 $xy(xy)^{-1} = e$. 从而 $x^{-1} = y(xy)^{-1}$. 即 $x \in G(\mathscr{A})$. 类似可证 $y \in G(\mathscr{A})$.

3) 令 $\mathscr{A} := \mathscr{L}(\ell^2)$. 令

$$x : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_2, a_3, \cdots) \end{cases}, y : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (0, a_1, a_2, \cdots) \end{cases}.$$

易知满足条件.

4) 因为 $z^2 = (yx)(yx) = y(xy)x = yx = z$, 故只需证 $z \neq \theta$. 事实上, 若 $z = \theta$, 则 $\theta = (yx)y = y(xy) = y$. 从而 $xy = x\theta = \theta$. 矛盾. 所以 z 是非平凡幂等元. □

2.2 Banach 代数

习题 2.2.1 *证明例 2.2.6 中 $\mathscr{A}$ 完备.*

证明: S^1 是平面上的单位圆周且

$$\mathscr{A} := \{u \in C(S^1) : u(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty\}.$$

范数 $\|u\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$.

设 $\{u^{(m)}\}$ 为 $\mathscr{A}$ 中的基本列. $u^{(m)}(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{(m)} e^{in\theta}$. 则

$$\|u^{(m)} - u^{(\ell)}\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \to 0, m, \ell \to \infty.$$

即对 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 有 $|c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \to 0, m, \ell \to \infty$. 故对 $\forall n \in \mathbb{Z}, \{c_n^{(m)}\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的基本列. 由 $\mathbb{C}$ 的完备性, 可设其极限为 c_n. 令 $u(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{in\theta}$. 因为

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} |(u_j - u)(e^{i\theta})| = \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n^{(j)} - c_n)(e^{i\theta}) \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(j)} - c_n| \to 0, j \to \infty.$$

即 $u_j \rightrightarrows u$. 故 $u \in C(S^1)$.

$$\begin{aligned} \|u^{(m)} - u\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lim_{\ell\to\infty} (c_n^{(m)} - c_n^{\ell}) \\ (\text{Fatou 引理}) &\leq \varliminf_{\ell\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}|. \end{aligned}$$

再令 $m\to\infty$. 则

$$\lim_{m\to\infty}\|u^{(m)}-u\|\le\lim_{m\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n^{(m)}-c_n^{(\ell)}|=0.$$

即 $u^{(m)}\to u, m\to\infty$. 又

$$\|u\|\le\|u^{(m)}-u\|+\|u^{(m)}\|<\infty.$$

故 $u\in\mathscr{A}$. 完备性得证. □

习题 2.2.2 设 $\mathscr{B}$ 及其他记号同定理 *2.2.13* 且商模 $\|[\cdot]\|$ 定义如定理 *2.2.13* 的证明. 证明 $\|[e]\|=1$ 且

$$\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\|=\inf_{x\in[a]}\|x\|\inf_{y\in[b]}\|y\|.$$

证明: (1) $\mathscr{B}=\mathscr{A}/J, \|a\|=\inf_{x\in[a]}\|x\|, \forall a\in\mathscr{B}$. 由商模的定义知 $\|[e]\|=\inf_{x\in[e]}\|x\|\le\|e\|=1$. 又因为 J 是极大理想, 故由命题 2.1.13 知, $e\notin J$. 故 $[e]\ne[\theta]$. 由此及 $\|[e]\|=\|[ee]\|=\|[e][e]\|\le\|[e]\|\cdot\|[e]\|$. 进一步知 $\|[e]\|\ge 1$. 故 $\|[e]\|=1$.

(2) 一方面, 由下确界的定义, $\forall\varepsilon>0, \exists\widetilde{x}\in[a], \widetilde{y}\in[b]$, 满足

$$\inf_{x\in[a]}\|x\|+\varepsilon\ge\|\widetilde{x}\|\ge 0, \inf_{y\in[b]}\|x\|+\varepsilon\ge\|\widetilde{y}\|\ge 0.$$

故

$$(\inf_{x\in[a]}\|x\|+\varepsilon)(\inf_{y\in[b]}\|y\|+\varepsilon)\ge\|\widetilde{x}\|\cdot\|\widetilde{y}\|\ge\|\widetilde{x}\widetilde{y}\|\ge\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\|.$$

由 ε 的任意性知

$$\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\|\ge\inf_{x\in[a]}\|x\|\inf_{y\in[b]}\|y\|.$$

另一方面, 由定理 2.2.13 知, $\mathscr{B}=\mathscr{A}/J\cong\mathbb{C}$. 即对 $\forall[a]\in\mathscr{B}, [a]=z[e]$, 其中 $[e]$ 为单位元. $z\in\mathbb{C}, |z|=\|[a]\|$. 故对于 $[a],[b]\in\mathscr{B}$. 设 $[a]=z_1[e], [b]=z_2[e], z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 且 $|z_1|=\|[a]\|, |z_2|=\|[b]\|$. $\forall x\in[a]$, 则 $x\in z_1[e]$, 存在 $\widetilde{x}\in[e]$, 使 $x=z_1\widetilde{x}$. $\forall y\in[b]$, 则 $y\in z_2[e]$, 存在 $\widetilde{y}\in[e]$, 使 $y=z_2\widetilde{y}$. 有 $\widetilde{x}\widetilde{y}\in[e]$. 事实上, $\exists x',y'\in J$, 使 $\widetilde{x}=e+x', \widetilde{y}=e+y'$. 则 $\widetilde{x}\widetilde{y}=e+x'+y'+x'y'$. 由 $x',y'\in J$, 故 $x'y'\in J$. 故 $\widetilde{x}\widetilde{y}\in[e]$. 则

$$\begin{aligned}\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\| &= \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[e]}\|(z_1z_2)\widetilde{x}\widetilde{y}\|\\ &= \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[e]}|z_1|\cdot|z_2|\|\widetilde{x}\widetilde{y}\|\\ &= \|[a]\|\cdot\|[b]\|\inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[e]}\|\widetilde{x},\widetilde{y}\|\\ &\ge \|[a]\|\cdot\|[b]\|\\ &= \inf_{x\in[a]}\|x\|\inf_{y\in[b]}\|y\|.\end{aligned}$$

□

习题 2.2.3 设 $\mathscr{A}$ 是有单位元的 *Banach* 代数, $a, b \in \mathscr{A}$. 证明:

(1) 若 $e-ab$ 可逆, 则 $e-ba$ 也可逆.

(2) 若非零复数 $\lambda \in \sigma(ab)$, 则 $\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 若 a 可逆, 则 $\sigma(ab)=\sigma(ba)$.

证明: (1) 设 $e-ab$ 的逆为 A, 则 $(e-ab)A=e \Rightarrow A-abA=e \Rightarrow bA-babA=eb=b \Rightarrow (e-ab)(bA)=b \Rightarrow (e-ba)(bAa)=ba \Rightarrow (e-ba)(bAa)-(e-ba)=e \Rightarrow (e-ba)(bAa-e)=e$. 同理 $(bAa+e)(e-ba)=e$. 故 $e-ba$ 可逆.

(2) 若 $\lambda \in \sigma(ab)$. 即 $\lambda e-ab \notin G(\mathscr{A})$. 要证 $\lambda \in \sigma(ba)$. 即要证 $\lambda e-ba \notin G(\mathscr{A})$. 利用反证法. 若 $\lambda e-ba \in G(\mathscr{A})$. 即 $e-ba$ 可逆. 则 $e-(\frac{1}{\lambda}b)a$ 可逆. 由 (1) 的结论知 $e-\frac{1}{\lambda}ab$ 可逆. 故 $\lambda e-ab$ 可逆矛盾. 所以 $\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 由 (2) 知, $\sigma(ba)\backslash\{0\}=\sigma(ba)\backslash\{0\}$. 故只需证明, 若 $0 \in \sigma(ab)$, 则 $0 \in \sigma(ba)$.

若 $0 \in \sigma(ab)$. 即 $ab \in G(\mathscr{A})$. 即 ab 可逆, 设其逆为 $(ab)^{-1}$. 设 a 的逆为 a^{-1}. 因 $a(ba)=(ab)a \Rightarrow ba=a^{-1}(ab)a \Rightarrow ba[a^{-1}(ab)^{-1}a]=e$ 且 $[a^{-1}(ab)a](ba)=e$. 故 ba 可逆. 反之同理. 证毕. □

习题 2.2.4 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是两个可交换的有单位元的 *Banach* 代数. $\mathscr{B}$ 是半单的. 若 φ 是 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个同态. 求证 φ 是连续的.

证明: 设 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, 且 $a_n \to a, \varphi(a_n) \to b$. 则 $a \in \mathscr{A}$. 由闭图像定理, 要证 φ 连续, 只需 $\varphi(a)=b$. 不妨设 φ 非零. 若 φ 是零映射, 即 $\forall a \in \mathscr{A}, \varphi(a)=0$. 则 $\varphi(a_n)=\theta$. 结论显然成立.

设 $\triangle_{\mathscr{B}}$ 为 $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$ 上的非零同态全体. $\forall h \in \triangle_{\mathscr{B}}$. 记 $\psi := h\circ\varphi$. 下证 ψ 是 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的非零连续同态.

由 φ 是 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的同态知, ψ 是 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的同态. 事实上, $\forall a_1, a_2 \in \mathscr{A}.\lambda, \mu \in \mathscr{C}$. 有

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda a_1+\mu a_2)&=h\circ\varphi(\lambda a_1+\mu a_2)=h(\lambda\varphi(a_1)+\mu\varphi(a_2))\\&=\lambda(h\circ\varphi)(a_1)+\mu(h\circ\varphi)(a_2)=\lambda\psi(a_1)+\mu\psi(a_2).\end{aligned}$$

$$\psi(a_1a_2)=h\circ\varphi(a_1a_2)\xlongequal{\varphi\text{同态}}h(\varphi(a_1)\varphi(a_2))=\varphi(a_1)\varphi(a_2).$$

故 ψ 是 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的同态映射.

又由 φ 与 h 均为非零, 知 ψ 也非零.

又由命题 2.2.14 知, $\forall a \in \mathscr{A}$, $|\psi(a)| \le \|a\|$. 即 ψ 连续.

故 ψ 是 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的非零连续同态. 由假设知 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(a_n)=b, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 故

$$\begin{aligned}h(b)&=h(\lim_{n\to\infty}\varphi(a_n))=\lim_{n\to\infty}h\circ\varphi(a_n)=\lim_{n\to\infty}\psi(a_n)\\&=\psi(\lim_{n\to\infty}a_n)=\psi(a)=h(\varphi(a)).\end{aligned}$$

故 $h(\varphi(a)-b)=0$, 对 $\forall h\in\triangle_{\mathscr{B}}$ 均成立. 即 $\varphi(a)\to b\in\ker h$ 对 $\forall h\in\triangle_{\mathscr{B}}$ 成立.

记 i 为注记 2.2.17, 即:

$$i:\begin{cases}\mathfrak{M}\to\triangle_{\mathscr{B}}\\ J\mapsto\varphi_J.\end{cases}$$

由引理 2.2.19 知 i 为双射. 故 $\forall h\in\triangle_{\mathscr{B}}$. 都存在 $J\in\mathfrak{M}$, 使得 $h_J=h$. 故 $\varphi(a)-b\in\ker h_J$ 对 $\forall h_J\in\triangle_{\mathscr{B}}$ 成立.

由 i 为双射, 即 $\varphi(a)-b\in\ker h_J$ 对 $\forall J\in\mathfrak{M}$ 均成立. 又由引理 2.2.18 知 $\ker h_J=J$. 故 $\varphi(a)-b\in J,\forall J\in\mathfrak{M}$ 成立. 即

$$\varphi(a)-b\in\cap_{J\in\mathfrak{M}}J.$$

又由 $\mathscr{B}$ 是半单的. 故 $\cap_{J\in\mathfrak{M}}=\{\theta\}$. 故 $\varphi(a)-b=\theta$, 即 $\varphi(a)=b$. □

习题 2.2.5 证明定理*: 设 $\mathscr{X}$ 是一个集合, 又设对于每一点 $x\in\mathscr{X}$ 指定了 $\mathscr{X}$ 的一个集族 $\mathscr{U}_x$, 它们满足*

1) 对 $\forall x\in\mathscr{X},\mathscr{U}_x\neq\varnothing$; 如果 $U\in\mathscr{U}_x$, 则 $x\in U$;

2) 如果 $U,V\in\mathscr{U}_x$, 则 $U\cup V\in\mathscr{U}_x$;

3) 如果 $U\in\mathscr{U}_x$, 并且 $U\subset V$, 则 $V\in\mathscr{U}_x$;

4) 如果 $U\in\mathscr{U}_x$, 则存在 $V\in\mathscr{U}_x$ 满足: $V\subset U$ 且对 $\forall y\in V$, 有 $V\in\mathscr{U}_y$.

则 $\mathscr{X}$ 有唯一的拓扑 τ 使得对于每一个 $x\in\mathscr{X}$, 子集族 $\mathscr{U}_x$ 恰是 x 在拓扑空间 $(\mathscr{X},\tau)$ 中的邻域系.

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, 对任意的 $n\in\mathbb{N},\varepsilon\in(0,+\infty)$ 及 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathscr{X}$, 定义

$$V(\varepsilon,x_1,x_2,\cdots,x_n):=\{\varphi\in\mathscr{X}*:|\varphi(x_i)|<\varepsilon,i\in\{1,2,\cdots,n\}\}.$$

域 $\mathscr{X}^*$ 的任一个含有一个形如 (2.2.6) 的集合的子集为 $\mathscr{X}^*$ 中零泛函的一个邻域. 证明所有的这样的邻域构成 $\mathscr{X}^*$ 原点的邻域系, 且该邻域系及其平移可以唯一确定 $\mathscr{X}^*$ 的 $*$ 弱拓扑, 并且 $\mathscr{X}^*$ 依此 $*$ 弱拓扑构成拓扑线性空间.

证明: 参考 [4] 第 61 页, 定理 2.3.3. □

习题 2.2.6 用定理 *1.1.14* 即*"有界线性算子 A, $\sigma(A)\neq\varnothing$"来证明定理 2.2.10 即"可除 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 等距同构与 $\mathbb{C}$".*

证明: 令 $\mathscr{B}:=\{ze:z\in\mathbb{C}\}$. 为证 $\mathscr{A}$ 等距同构于 $\mathscr{C}$. 只需证 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$. 即对 $\forall a\in\mathscr{A},\exists z\in\mathbb{C}$, 使得 $a=ze$. 若不然, $\exists a_0\in\mathscr{A}$, 使得 $\forall z\in\mathbb{C},a\neq ze$. 由 $\mathscr{A}$ 可除知, $(ze-a_0)^{-1}$ 存在. 对此 a_0, 定义

$$f_{a_0}:\begin{cases}\mathscr{A}\to\mathscr{A}\\ x\mapsto a_0x.\end{cases}$$

则 $f_{a_0} \in \mathscr{L}(A)$. 由此及定理 1.1.14 知, $\sigma(f_{a_0}) \neq \varnothing$. 注意到对 $\forall z \in \mathbb{C}$. $zI - f_{a_0}$ 为单射, 且 $\forall y \in \mathbb{A}$,

$$(zI - f_{a_0})((ze - a_0)^{-1}y) = (ze - a_0)(ze - a_0)^{-1}y = y.$$

即 $zI - f_{a_0}$ 为单射. 故由性质 1.1.4 知 $(zI - f_{a_0})^{-1} \in \mathscr{L}(A)$. 即

$$z \in \rho(f_{a_0}) \Rightarrow \mathbb{C} = \rho(f_{a_0}) \Rightarrow \sigma(f_{a_0}) = \varnothing.$$

矛盾. □

习题 2.2.7 证明以下两条等价.

1) 设 $\mathscr{X}$ 为 *Banach* 空间, $\forall A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $\sigma(A) \neq \varnothing$.

2) 设 $\mathscr{A}$ 是有单位元的 *Banach* 代数. 则 $\forall a \in \mathscr{A}$, $\sigma(a) \neq \varnothing$.

证明: (2) $\Rightarrow$ (1) : 若 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间, 则 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 是交换的, 有单位元的 Banach 代数. 从而由 (2) 知, $\forall A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}), \sigma(A) \neq \varnothing$. 即 (1) 成立.

(1) $\Rightarrow$ (2) : 对任意给定 $a \in A$. 定义

$$f_a : \begin{cases} \mathscr{A} \to \mathscr{A} \\ x \mapsto ax. \end{cases}$$

那么, $f_a \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. 由此及 (1) 知, $\sigma(f_a)$ 非空. 即 $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, 使得 $\lambda I - f_a$ 非单射或非满射.

若 $\lambda I - f_a$ 非单射: 即 $\exists x, y \in \mathscr{A}$, 使得 $x \neq y$ 且 $(\lambda I - f_a)x = (\lambda I - f_a)y$. 于是 $(\lambda e - a)x = (\lambda e - a)y \Rightarrow \lambda e - a \notin G(\mathscr{A}) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$. 故 $\sigma(a)$ 非空.

若 $\lambda I - f_a$ 非满射: 即 $\exists y \in \mathscr{A}$. 使得对 $\forall x \in \mathscr{A}, (\lambda I - f_a)x = y$. 于是 $\lambda e - a \notin G(\mathscr{A}) \Rightarrow \lambda \in \sigma(a)$. 故 $\sigma(a)$ 非空. □

习题 2.2.8 证明引理 *2.2.16* 证明中的 $\widetilde{\varphi}$ 是 $\mathscr{A}/J \to \mathbb{C}$ 上的等距同构映射.

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} \mathscr{A}/J \to \mathbb{C} \\ [a] \to \varphi(a). \end{cases}$$

证明: 证明 $\widetilde{\varphi}$ 是同态.

$$\widetilde{\varphi}([a][b]) = \widetilde{\varphi}([ab]) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \widetilde{\varphi}([a])\widetilde{\varphi}([b]).$$

$$\widetilde{\varphi}([a] + [b]) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \widetilde{\varphi}([a]) + \widetilde{\varphi}([b]).$$

证明 $\widetilde{\varphi}$ 是单射. 若 $\widetilde{\varphi}([a]) = 0$, 则 $\varphi(a) = 0$, 于是 $a \in \ker \varphi = J$.

证明 $\widetilde{\varphi}$ 是满射. 对 $\forall z \in \mathbb{C}$. $\widetilde{\varphi}([ze]) = \varphi(ze) = z\varphi(e) = z$.

$\widetilde{\varphi}$ 等距. 注意到对 $\forall a \in \mathscr{A}$. $\varphi(a - \varphi(a)e) = 0$. 故 $a - \varphi(a)e \in J$. 即 $[a] = \varphi(a)[e]$. 由此及 $\|e\|_* = 1$ 知 $\|[a]\|_* = \|\varphi(a)[e]\|_* = |\varphi(a)|$. □

习题 2.2.9 *设 $\mathscr{X}$ 为线性赋范空间, 若 S 为 $\mathscr{X}^*$ 的 $*$ 弱闭集且有界. 证明 S 是 $*$ 弱紧的.*

证明: 设 B 为 $\mathscr{X}^*$ 中的单位闭球. 由于 S 有界, 故存在 $M \in (0, \infty)$. 使得 $S \subset MB$. 由 Alaogu 定理知 MB 是 $*$-弱紧的. 由于 $S \subset MB$, S 是 $*$-弱闭的. 所以 S 是 $*$-弱紧的. □

习题 2.2.10 (补充题) *设 $\mathscr{A}$ 是 Banach 代数, 则对 $\forall x \in \mathscr{A}$. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ 存在且等于 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.*

证明: 记 $r := \inf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \geq r$. 故只需证

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r. \tag{2.2.1}$$

由下确界定义知, 对 $\forall \varepsilon \in (0, \infty), \exists m \in \mathbb{N}$. 使得

$$\sqrt[m]{\|x^m\|} < r + \varepsilon. \tag{2.2.2}$$

注意到对 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n, \ell_n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell_n < m$. 使得 $n = k_n m + \ell_n$. 由此及对 $\forall k \in \mathbb{N}, \|x^k\| \leq \|x\|^k$ 和 (2.2.2) 式知,

$$\sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \sqrt[n]{\|x^{k_n m}\| \cdot \|x^{\ell_n}\|} \leq \|x\|^{\frac{\ell_n}{n}} \|x^m\|^{\frac{\ell_n}{n}} \leq \|x\|^{\frac{\ell_n}{n}} (r+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}.$$

于是 $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq r + \varepsilon$. 由 ε 的任意性知 (2.2.1) 式成立. □

2.3 例子与应用

习题 2.3.1 *设 $\mathscr{A} := \left\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \|f\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| 2^{|n|} < \infty\right\}$. 按函数的加法和数乘定义线性运算, 并定义乘法: $f * g(n) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$. 证明:*

(1) $\mathscr{A}$ 是可交换的 Banach 代数;

(2) 令 $K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 2\}$. 则 K 与 $\mathfrak{M}$ 一一对应, 且 $\mathscr{A}$ 的 Gelfand 表示是 K 上绝对收敛的 Laurent 级数.

证明: (1) 先证 $\mathscr{A}$ 为代数.

$\forall f, g \in \mathscr{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha f(n) + \beta g(n)| \cdot 2^{|n|} \\ &= |\alpha| \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| \cdot 2^{|n|} + |\beta| \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)| \cdot 2^{|n|} < \infty.\end{aligned}$$

故 $\mathscr{A}$ 为一个线性空间.

$\forall f \in \mathscr{A}. \|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| \cdot 2^{|n|} < \infty$. 故 $\exists M_f > 0$, 使得 $\forall n \in \mathbb{Z}$. 有 $|f(n)| \leq M_f$. 故

$$|f * g(n)| = |\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)| \leq M_g \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n-k)| \cdot 2^{|n-k|} = M_g \cdot \|f\| < \infty.$$

故“$*$”是良定义的.

$\forall f, g, h, \rho, \varphi \in \mathscr{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(f * g) * h(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f * g)(n-k)h(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\sum_{i\in\mathbb{Z}} f(n-k-i)g(k))h(k)\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

与“$*$”的良定义证明类似, (2.3.1) 式是绝对收敛的, 故 (2.3.1) 式

$$\begin{aligned}&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\sum_{i\in\mathbb{Z}} (f(n-i)g(i-k))h(k)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-i)g(i-k)h(k) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(n-i)g * h(i) = f * (g * h)(n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g) * (\rho + \varphi)(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f+g)(n-k)(\rho+\varphi)(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} [f(n-k)\rho(k) + f(n-k)\varphi(k) + g(n-k)\rho(k) + g(n-k)\varphi(k)].\end{aligned}$$

由于各部分收敛. 故上式 $= f * \rho(n) + f * \varphi(n) + g * \rho(n) + g * \varphi(n)$.

最后 $(\lambda\mu)(f * g) = (\lambda f) * (\mu g)$ 是显然的. 从而 $\mathscr{A}$ 是代数.

$f * g(n) = \sum_{k\in Z} f(n-k)g(k) = \sum_{k'\in\mathbb{Z}} f(k')g(n-k') = g * f(n)$. 故 $\mathscr{A}$ 是可交换的.

然后说明 $\mathscr{A}$ 的完备性:

$\forall \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ 且 $\|f_m - f_k\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_m(k) - f_k(n)| \cdot 2^{|n|} \to 0, \ \ m, k \to \infty$. 显然 $\{f_k(n)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 Cauchy 列. 令 $f_n = \lim_{k\to\infty} f_k(n)$. 易知 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. 下证 $\|f\| < \infty$. 注意到对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 使得 $\forall m > k > N$ 有 $\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_m(n) - f_k(n)| \cdot 2^{|n|} < \varepsilon$. 令 $m \to \infty$, 可得 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n) - f_k(n)| \cdot 2^{|n|} < \varepsilon$. 故 $f - f_k \in \mathscr{A}$. 从而 $f \in \mathscr{A}$.

综上, $\mathscr{A}$ 是可交换的 Banach 代数.

(2) 令

$$e^{(k)}(n) := \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \in \mathbb{Z} \backslash \{k\}. \end{cases}$$

则 $e^{(f)} * e^{(k)} = e^{(j+k)}, \forall j, k \in \mathbb{Z}$. 从而对 $\forall f \in \mathscr{A}$.

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)[e^{(1)}]^n.$$

注意到 $e^{(0)}$ 为 $\mathscr{A}$ 的单位元. 则 $\mathscr{A}$ 为有单位元的交换 Banach 代数. $\forall f \in \mathscr{A}$. 定义 $\Gamma_f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n$ 为 K 上绝对收敛的 Laurent 级数. 考虑

$$\phi_z : \begin{cases} \mathscr{A} \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \Gamma_f(z). \end{cases}$$

ϕ_z 为非零同态且 $\phi_z(f * g) = \phi_z(f) * \phi_z(g)$. 由引理 2.2.16 知, $\ker \phi_z$ 是极大理想.

定义

$$\psi : \begin{cases} K \to \mathfrak{M} \\ z \mapsto \ker \phi_z. \end{cases}$$

下证 ψ 为双射.

先证 ψ 单. $\forall z_1, z_2 \in K. z_1 \neq z_2$. 令

$$f(n) := \begin{cases} z_1, n = 1 \\ -1, n = 2 \\ 0, n \in \mathbb{Z}\backslash\{1,2\}. \end{cases}$$

则 $f \in \mathscr{A}$. 且 $\Gamma_f(z_1) = z_1^2 - z_1^2 = 0. \Gamma_f(z_2) = z_1z_2 - z_2^2 \neq 0$. 即 $f \in \psi(z_1)$ 但 $f \notin \psi(z_2)$. 由 $\psi(z_1), \psi(z_2) \in \mathfrak{M}$ 知, $\psi(z_1) \neq \psi(z_2)$, 故 ψ 单.

再证 ψ 满. $J \in \mathfrak{M}$. 由引理 2.2.18, $J \in \ker \varphi_J$. 从而为证 ψ 满, 只需证明 $\exists z_0 \in K$, 使得 $\phi_{z_0} = \varphi_J$, 即 $\phi_{z_0}(f) = \varphi_J(f)$. 由 ϕ_{z_0}, φ_J 连续. 上式等价于证明: $\phi_{z_0}(e^{(1)}) = \varphi_J(e^{(1)})$, 对于某个 $z_0 \in K$. 事实上, $\phi_{z_0}(e^{(1)}) = \Gamma_{e^{(1)}}(z_0) = z_0$. 而

$$\begin{aligned} |\varphi_J(e^{(1)})| &= \left|[\varphi_J(e^{(1)})]\right|^{1/n} = \left|[\varphi_J([e^{(1)}]^n)]\right|^{1/n} \\ &= \left|\varphi_J(e^{(n)})\right|^{1/n} = \begin{cases} \leq \|e^n\|^{1/n} = 2^{|n|/n} = 2, n \in \mathbb{N} \\ \geq \|e^n\| = 2^{|n|/n} = \dfrac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

即 $\frac{1}{2} \leq |z_0| \leq 2$, $z_0 \in K$. 故 ψ 满.

因此 ψ 为 K 到 $\mathfrak{M}$ 的双射, $f \mapsto \Gamma_f$ 为 $\mathscr{A}$ 上的 Gelfand 表示. □

习题 2.3.2 设 M 是 T_2 紧拓扑空间, 证明 M 的全体闭子集与 $C(M)$ 的全体理想间有一一对应.

证明: 若 X 为 M 的一个闭子集. 定义 $J_X := \{f \in C(M) : f(x) = 0, \forall x \in X\}$. 则 J_X 为 $C(M)$ 的闭理想.

下证 $J : X \to J_X$ 为 M 全体闭子集到 $C(M)$ 全体闭理想的双射.

先证 J 单: $\forall E, F$ 为 M 闭子集. 因 M 为紧 T_2 空间. 由 Urysohn 引理, $\exists f \in C(M)$, 使得 $f(x_0) = 1, f|_F = 0$. 其中 $x_0 \in E\backslash F$. 从而 $F \notin J_E, f \in J_F$. 即 $J_E \neq J_F$, J 为单射.

再证 J 满: $\forall J$ 为 $C(M)$ 的一个闭理想. 令 $X = \cap_{f\in J}\{x \in M : f(x) = 0\}$. 因 $f \in C(M)$, 则 X 闭. 且由定理 2.3.3 知 $X \neq \varnothing$. 我们断言 $J = J_X$. 事实上, 只需证明 $J_X \subset J$.

$\forall f \in J_X, \forall \varepsilon > 0$, 定义 $F_\varepsilon := \{x \in M : |f(x)| \geq \varepsilon\}$, 则 $F_\varepsilon \cap X = \varnothing$. 从而对 $\forall x \in F_\varepsilon, \exists f_x \in J$, 使得 $f_x(x) \neq 0$. 进一步知, 存在邻域 U_x, 使得 $f(x) \neq 0, \forall x \in U_x$. 因 $F_\varepsilon \subset \cup_{x \in F_\varepsilon} U_x$, 且 F_ε 紧. 则 $\exists \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset M$, 使得 $F_\varepsilon \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. 令 $h_\varepsilon := \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)\overline{f_{x_i}(x)} = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}(x)|^2 \in J$. 则 $h(x) > 0, \forall x \in F_\varepsilon$. 又 F_ε 紧, 则 h_ε 在 F_ε 上存在最小值. 记为 c. 令 $k_\varepsilon := \max\{h_\varepsilon, c\} \in C(M)$, $g_\varepsilon := k_\varepsilon^{-1} h_\varepsilon \in J$ 且满足 $g_\varepsilon(x) = 1, \forall f \in F_\varepsilon$. $|g_\varepsilon(x)| \leq 1, \forall x \in M$. 则 $fg_\varepsilon \in J$ 且

$$\|f - fg_\varepsilon\| = \sup_{M \setminus F_\varepsilon} |(f - fg_\varepsilon)(x)| \leq 2 \sup_{M \setminus F_\varepsilon} |f(x)| < 2\varepsilon.$$

由此及 J 闭知 $f \in J_\varepsilon$. 故 $J_X \subset J$.

综上, M 的全体闭子集与 $C(M)$ 的全体理想间由一一对应. □

习题 2.3.3 (补充题) 设 $\mathscr{A}$ 是半单的交换 *Banach* 代数. 证明*:* $\mathscr{A}$ 的 *Gelfand* 表示的值域 $\Gamma(\mathscr{A})$ 是 $C(\mathfrak{M})$ 的闭集的充要条件是存在正常数 $k < \infty$, 使得对 $\forall a \in \mathscr{A}$, 有 $\|a\|^2 \leq k\|a^2\|$.

证明: 令

$$r := \inf_{a \in \mathscr{A} \setminus \{0\}} \frac{\|a^2\|}{\|a\|^2}, s := \inf_{a \in \mathscr{A} \setminus \{0\}} \frac{\|\Gamma(a)\|_{C(\mathfrak{M})}}{\|a\|}.$$

首先断言 $s^2 \leq r \leq s$. 事实上, 由 s 的定义, Γ 为同态和定理 2.2.23 知, 对 $\forall a \in \mathscr{A}$, $\|a^2\| \geq \|\Gamma(a^2)\| = \|\Gamma(a)\|^2 \geq s^2\|a\|^2$. 由此及 a 的任意性知 $s^2 \leq r$. 由 r 的定义知, 对 $\forall a \in \mathscr{A}$ 有 $\|a^2\| \geq r\|a\|^2$. 由此及归纳法知, $\|a^m\| \geq r^{m-1}\|a\|^m, m = 2^n, n \in \mathbb{N}$. 对上式两边同时开 n 次方并令 $n \to \infty$. 由引理 2.2.28 知 $\|\Gamma(a) \geq r\|a\|\|$. 由 a 的任意性知 $r \geq s$. 综上, 断言成立.

下证题目中的充要条件:

(充分性). 注意到题中满足条件的 k 存在, 当且仅当 $r > 0$. 又由断言知当且仅当 $s > 0$. 若 $s > 0$, 则 Γ 是一一映射且有连续逆. 即 Γ 是 $\mathscr{A} \to \Gamma\mathscr{A}$ 的同胚. 故 $\Gamma\mathscr{A}$ 在 $C(\mathfrak{M})$ 中闭.

(必要性). 若 $\Gamma\mathscr{A}$ 在 $C(\mathfrak{M})$ 中闭, 由 Γ 连续和开映射定理知, Γ 是开映射. 故 $\Gamma^{-1} : \Gamma\mathscr{A} \subset C(\mathfrak{M}) \to \mathscr{A}$ 是连续的, 且存在正常数 $\widetilde{k}$, 使得 $\forall a \in \mathscr{A}, \|a\| \leq \widetilde{k}\|\Gamma(a)\|$. 由此及 Γ 为同态和定理 2.2.23 知

$$\|a\|^2 \leq \widetilde{k}^2\|\Gamma(a)\| = \widetilde{k}^2\|[\Gamma(a)]^2\| \leq \widetilde{k}^2\|a^2\|.$$

取 $k := \widetilde{k}^2$ 即得证. □

2.4 C^* 代数

习题 2.4.1 设所有记号如定理 *2.4.14* 的证明. 证明*:*

(1) $\widetilde{\mathscr{A}}$ 为 $C(\mathscr{Y})$ 的实值子代数*;*

(2) 对任意 $\widetilde{f} \in C(\mathscr{Y})_r$, $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathscr{X})$*;*

(3) (2.4.1) 成立.

证明: (1) 容易验证 $\widetilde{A}$ 为 $C(\mathscr{Y})$ 的子空间且对乘法运算封闭. 故 $\widetilde{A}$ 为 $C(\mathscr{Y})$ 的实值子代数.

(2) 因为 $\widetilde{f} \in C(\mathscr{Y})_r, \mathscr{Y} = \mathscr{X} \cup \{\partial\}$. 所以 $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial)$ 为实值函数且在 $\mathscr{X}$ 上连续. 又 $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial)$ 也在 ∂ 处连续. 故

$$\lim_{x \to \partial}[\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(\partial)] = \widetilde{f}(\partial) - \widetilde{f}(\partial) = 0.$$

所以 $\forall \varepsilon \in (0, +\infty)$ 存在紧集 $D_\varepsilon \subset \mathscr{X}$, 使得 $\forall x \in \mathscr{X} \backslash D_\varepsilon, |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(\partial)| < \varepsilon$. 所以 $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathscr{X})$.

(3) 已证 $\widetilde{A} = C(\mathscr{Y})_r$. 由于 $\mathscr{A} \subset C_\infty(\mathscr{X})$. 所以 $\widetilde{\mathscr{A}} = \{f + r : f \in \mathscr{A}, r \in \mathbb{R}\} \subset \{f + r : f \in C_\infty(\mathscr{X}), r \in \mathbb{R}\}$. 即 $C(\mathscr{Y})_r \subset \{f + r : f \in C_\infty(\mathscr{X}), r \in R\}$. 又由定理 2.4.14 前面的证明知 $C_\infty(\mathscr{X}) \subset C(\mathscr{Y})_r$. 故 $C_\infty(\mathscr{X}) + \mathbb{R} \subset C(\mathscr{Y})_r$. 所以 $\{f + r : f \in C_\infty, r \in \mathbb{R}\} \subset C(\mathscr{Y})_r$. 所以 $C(\mathscr{Y})_r = \{f + r : f \in C_\infty(\mathscr{X}), r \in \mathbb{R}\}$. □

习题 2.4.2 *证明注记 2.4.15. 即: $f \in C_\infty(\mathscr{X}) \Longleftrightarrow f \in C(\mathscr{Y})_r$ 且 $f(\partial) = 0$.*

证明: $(\Rightarrow)$ $f \in C_\infty(\mathscr{X})$. 设 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{X}$, 且当 $n \to \infty$ 时, x_n 在 $\mathscr{Y}$ 中收敛到 ∂. 由于 $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧急 $D_\varepsilon \subset \mathscr{X}$, 使得 $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathscr{X} \backslash D_\varepsilon$. 又由 x_n 在 $\mathscr{Y}$ 中收敛到 ∂ 知, 对 ∂ 的邻域 $(\mathscr{X} \backslash D_\varepsilon) \cup \{\partial\}$, 存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_\varepsilon$ 时, $x_n \in (\mathscr{X} \backslash D_\varepsilon) \cup \{\partial\}$. 故 $|f(x)| < \varepsilon$.

所以 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, 于是可定义 $f(\partial) = 0$. 此时 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\partial)$. 即有 $x_n \to \partial, f(x_n) \to f(\partial), n \to \infty$. 所以 f 在 ∂ 连续. 故 $f \in C(\mathscr{Y})_r$.

$(\Leftarrow)$ 当 $f \in C(\mathscr{Y})_r$ 且 $f(\partial) = 0$ 时, 由习题 2.4.1(2) 知, $f - f(\partial) = f \in C_\infty(\mathscr{X})$. □

习题 2.4.3 *证明交换半单有单位元的 Banach 代数上的任意对合运算均连续.*

证明: 设 $\mathscr{A}$ 是有单位元的交换的交换半单 Banach 代数, $*$ 为 $\mathscr{A}$ 上的对合运算. $\mathfrak{M}$ 为 $\mathscr{A}$ 的一切极大理想全体. 为证 $*$ 连续, 只需证若 $a_n \to a$ in $\mathscr{A}$. 则 $a_n^* \to a^*$ in $\mathscr{A}$ $, n \to \infty$. 事实上, 设 $\Delta := \{\varphi \in \mathscr{A}^* : \forall a, b \in \mathscr{A}, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \varphi(e) = 1\}$. 由定理 2.2.13 知, 存在映射

$$i : \begin{cases} \mathfrak{M} \to \Delta \\ J \mapsto \varphi_J. \end{cases}$$

由定理 2.2.19 知, i 为双射. 因 $\forall J \in \mathfrak{M}, \varphi_J \in \Delta$, 知 $\overline{\varphi_J \circ *} \in \Delta$. 从而由定理 2.2.14(i) 知

$$|\overline{\varphi_J(a_n^* - a^*)}| = |\overline{\varphi_J \circ *}(a_n - a)| \leq \|a_n - a\|_{\mathscr{A}} \to 0, n \to \infty.$$

由 J 的任意性及 φ_J 的连续性知 $\lim_{n \to \infty}(a_n^* - a^*) \in \bigcap_{J \in \mathfrak{M}} \ker \varphi_J$. 由引理 2.2.18 知 $\ker \varphi_J = J$. 从而 $\lim_{n \to \infty}(a_n^* - a^*) \in \bigcap_{J \in \mathfrak{M}} J$. 再由 $\mathscr{A}$ 半单知, $a_n^* \to a^*$ in $\mathscr{A}$, $n \to \infty$. □

习题 2.4.4 (补充题) *设 $\mathscr{A}$ 是一个交换的 C^* 代数. 设其单位元为 e. 若 $\forall x \in \mathscr{A}$. x 为 Hermite 元且 $\sigma(x) \subset [0, \infty)$. 则称 x 是正的, 记作 $x \geq 0$. 证明:*

(1) $x \geq 0 \Longleftrightarrow \exists h \in \mathscr{A}$ 是 Hermite 元, 使得 $x = h^2$.

(2) $x \geq 0 \Longleftrightarrow x$ 为 Hermite 元且 $\|\|x\|e - x\| \leq \|x\|$.

证明: (1) ($\Rightarrow$) 若 $x \geq 0$, 由定理 2.2.27 知, $\forall J \in \mathfrak{M}, \Gamma x(J) \geq 0$. 从而由定理 2.4.10 知, $\exists h \in \mathscr{A}$, 使得 $\forall J \in \mathfrak{M}, \Gamma h(J) = \sqrt{\Gamma x(J)}$ 且 $x = h^2, h = h^*$.

($\Leftarrow$) 若 $x = h^2, h = h^*$, 由引理 2.4.11 知 Γh 为 $\mathfrak{M}$ 上实值函数. 因此 $\forall J \in \mathfrak{M}, \Gamma x(J) = \Gamma h^2(J) = [\Gamma h(J)]^2 \geq 0$. 再由定理 2.2.27 知 $\sigma(x) \in [0, \infty)$. 即 $x \geq 0$.

(2) 不妨设 $x \neq \theta$.

$$
\begin{aligned}
\sigma(x) \in [0,\infty) &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\Gamma x(J)}{\|x\|} \leq 2, \forall J \in \mathfrak{M} \\
&\Leftrightarrow \left|1 - \frac{\Gamma x(J)}{\|x\|}\right| \leq 1 \\
(1 = \varphi_J(e)) &\Leftrightarrow \left|\Gamma e(J) - \frac{\Gamma x(J)}{\|x\|}\right| \leq 1, \forall J \in \mathfrak{M} \\
&\Leftrightarrow \left|\Gamma e - \frac{\Gamma x}{\|x\|}\right|_{C(\mathfrak{M})} \leq 1 \\
(\text{定理 } 2.4.10) &\Leftrightarrow \left\|e - \frac{x}{\|x\|}\right\| \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \|\|x\|e - x\| \leq \|x\|.
\end{aligned}
$$

□

2.5 Hilbert 空间上的正常算子

习题 2.5.1 *见命题 2.5.7.*

习题 2.5.2 *证明: N 为 Hilbert 空间 H 上的正常算子当且仅当 $\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H, \forall x \in H$.*

证明: 注意到对 $\forall x \in H$,

$$
\begin{aligned}
\|Nx\|_H^2 &= (Nx, Nx) = (N^*Nx, x) \\
\|N^*x\|_H^2 &= (N^*x, N^*x) = (NN^*x, x)
\end{aligned}
\tag{2.5.1}
$$

(必要性) 若 N 为正常算子, 则由 $NN^* = N^*N$ 及 (2.5.1) 知, 对 $\forall x \in H, \|Nx\|_H = \|N^*x\|_H$.

(充分性) 首先断言: 若 $T \in \mathscr{L}(H)$ 且对 $\forall x \in H, (Tx, x) = 0$, 则 $T = \theta$. 事实上, 对 $\forall x, y \in H$. 由 $(T(x+y), (x+y)) = 0$ 知

$$(Tx, y) + (Ty, x) = 0 \tag{2.5.2}$$

故 $-i(Tx, y) + i(Ty, x) = 0 \Rightarrow (Tx, y) - (Ty, x) = 0$. 由此及 (2.5.2) 知, 对 $\forall x, y \in H, (Tx, y) = 0$. 令 $y := Tx$, 则有 $Tx = \theta$. 由此及 x 的任意性知 $T = \theta$. 故断言成立.

由 (2.5.1) 和 $\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H, \forall x \in H$ 知 $(N^*Nx, x) = (NN^*x, x) = 0$. 即 $((N^*N - NN^*)x, x) = 0$. 由此及断言知 $N^*N = NN^*$, 即 N 为正常算子. □

习题 2.5.3 *证明: 两个可交换的正算子的积仍为正算子.*

证明: 设 T_1, T_2 为正算子且 $T_1T_2 = T_2T_1$. 由此及推论 2.5.9 知, 存在正算子 Q, 使得 $T_1 = Q^2$ 且 $QT_2 = T_2Q$. 故对 $\forall x \in H$,

$$(T_1T_2x, x) = (Q^2T_2x, x) = (QT_2x, Qx) = (T_2Qx, Qx) \geq 0 \tag{2.5.3}$$

又注意到 $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^* = T_2T_1 = T_1T_2$. 即 T_1T_2 为自伴算子. 由此及 (2.5.3) 知 T_1T_2 为正算子. □

习题 2.5.4 *设 N 为 Hilbert 空间 H 上的正常算子. 则存在唯一正算子 $P \in \mathscr{L}(H)$ 及酉算子 $Q \in \mathscr{L}(H)$ 使得 $N = PQ = QP$.*

证明: 令

$$P(\lambda) := |\lambda|,\ q(\lambda) := \begin{cases} \lambda/|\lambda|, \lambda \neq 0 \\ 1, \lambda = 0. \end{cases}$$

则 $p, q \in B(\sigma(N))$. 令 $P := p(N), Q = q(N)$. 则由定理 2.5.20 知, $PQ = p(N)q(N) = pq(N) = \lambda(N) = N$. 且 $QP = q(N)p(N) = qp(N) = \lambda(N) = N$. 即 $N = PQ = QP$. 由命题 2.5.6 知 $Q^*Q = \overline{q}(N)q(N) = \overline{q}q(N) = 1(N) = I$. 故 Q 为酉算子.

下证 P 为正算子. 事实上, 由 $P = p(N) = \widetilde{\Gamma}^{-1}p$ 和命题 2.5.6 知

$$P^* = (\widetilde{\Gamma}^{-1}p)^* = \widetilde{\Gamma}^{-1}\overline{p} = \widetilde{\Gamma}^{-1}p = P.$$

即 P 自伴. 令 $P^{1/2} := |\lambda|^{1/2}(N)$, 则由命题 2.5.6 知

$$P^{1/2} = |\lambda|^{1/2}(N) = \overline{|\lambda|^{1/2}}(N) = (P^{1/2})^*.$$

由此及 $P = |\lambda|(N) = |\lambda|^{1/2}|\lambda|^{1/2}(N) = P^{1/2}P^{1/2}$ 知, 对 $\forall x \in H$,

$$(Px, x) = (P^{1/2}P^{1/2}x, x) = (P^{1/2}x, P^{1/2}x) = \|P^{1/2}x\|_H^2 \geq 0.$$

故 P 为正算子.

下证唯一性. 若还存在正算子 $\widetilde{P}$ 与酉算子 $\widetilde{Q}$, 使得 $N = \widetilde{Q}\widetilde{P}$. 则

$$N^*N = \widetilde{P}^*\widetilde{Q}^*\widetilde{Q}\widetilde{P} = \widetilde{P}^*\widetilde{P} = \widetilde{P}^2.$$

同理有 $N^*N = P^2$. 即 $\widetilde{P}^2 = P^2$. 由此及平方根的唯一性知 $\widetilde{P} = P$. □

习题 2.5.5 *设 N 为正常算子. 证明:*

(1) N 是酉算子当且仅当 $\sigma(N) \subset S^1$;

(2) N 是自伴算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$;

(3) N 是正算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}_+$.

证明: (1) 由连续算符演算知, N 为酉算子 $\Leftrightarrow NN^* = I \Leftrightarrow z(N)z(N) = 1(N) \Leftrightarrow |z|^2 = 1$.

(2),(3) 见定理 2.5.8. □

习题 2.5.6 证明推论 *2.5.28.*

证明: 由命题 2.5.27 知, 为证结论, 只需证明以下命题: 设 μ_1, μ_2 为 $\mathbb{C}$ 上的复测度, 且 $\forall \Omega \in \mathscr{B}, \mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$. 则对任意的 Borel 可测函数 f, 有

$$\int_{\mathbb{C}} f d\mu_1 = \int_{\mathbb{C}} f d\mu_2.$$

事实上, 由 [3] 定理 6.12 知, 对 $i \in \{1,2\}$, 存在可测函数 h_i, 使得

$$d\mu_i = h_i d|\mu_i|. \tag{2.5.4}$$

由此可知, 对 $\forall \Omega \in \mathscr{B}, i = 1, 2$,

$$\int_{\Omega} h_i(z) d|\mu_i|(z) = \int_{\mathbb{C}} \chi_{\Omega}(z) h_i(z) d|\mu_i|(z) = \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(z) d\mu_i(z) = \mu_i(\Omega). \tag{2.5.5}$$

由 [1] 定理 2.10(b) 知, 存在简单函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\sum_{k=1}^{N(n)} a_k^{(n)} \chi_{E_k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得在点态意义下 $f_n \to f$. 由此及 (2.5.4) 和 (2.5.5) 和控制收敛定理知, 对任意的 Borel 可积函数 f,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} f(z) d\mu_1(z) &= \int_{\mathbb{C}} f(z) h_1(z) d|\mu_1|(z) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} f_n(z) h_1(z) d|\mu_1|(z) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} a_k^{(n)} \int_{E_k} h_1(z) d|\mu_1|(z) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} a_k^{(n)} \mu_1(E_k).
\end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) d\mu_2(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} a_k^{(n)} \mu_2(E_k).$$

由以上两式及对 $\forall \Omega \in \mathscr{B}, \mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ 和 $\int_{\mathbb{C}} f(z) d\mu_1(z) = \int_{\mathbb{C}} f(z) d\mu_2(z)$. 即得所证命题. □

习题 2.5.7 (补充题 1) 设 *H 为 Hilbert 空间, $U \in \mathscr{L}(H)$. 证明以下三个论述等价:*

(1) U 是酉算子;

(2) $R(U) = H$ 且对 $\forall x, y \in H$, $(Ux, Uy) = (x, y)$.

(3) $R(U)=H$ 且对 $\forall x,y\in H,\|Ux\|_H=\|x\|_H$.

证明: (1)⇒(2). $U^{-1}=U^*\in\mathscr{L}(H)$, 故 $R(U)=D(U^{-1})=D(U^*)=H$. 由于 $U^*U=I$, 故对 $\forall x,y\in H,(Ux,Uy)=(U^*Ux,y)=(x,y)$. 即得 (2).

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 由于对 $\forall x\in H$, 由 (3) 知, $(U^*Ux,x)=(Ux,Ux)=(x,x)$. 于是 $((U^*U-I)x,x)=0,\forall x\in H$. 又由习题 2.5.2 的断言知, $U^*U=I$. 即 U 为酉算子. 即得 (1). □

习题 2.5.8 (补充题 2) *设 H 为 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{L}(H)$. 证明:*

(1) T^*T 的平方根 $P\in\mathscr{L}(H)$ 是唯一满足 $\|Px\|_H=\|Tx\|_H$, $\forall x\in H$ 的正算子.

(2) 若 T 可逆, 则有唯一分解 $T=UP$, 其中 U 为酉算子, P 为正算子.

证明: (1) 注意到 $(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|_H^2\geq 0$. 故 T^*T 为正算子. 由此及推论 2.5.9 知, $\exists P\in\mathscr{L}(H)$. 使得 $P^2=T^*T$, 且 $P=P^*$. 故对 $\forall x\in H$,

$$\|Px\|_H^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|_H^2.$$

下证唯一性: 若 $P\in\mathscr{L}(H)$ 且 $P=P^*$. 则对 $\forall x\in H$,

$$\|Px\|_H^2=\|Tx\|_H\Leftrightarrow(Px,Px)=(Tx,Tx)\Leftrightarrow(P^2x,x)=(T^*Tx,x).$$

从而由断言知, $P^2=T^*T$. 即 P 为 T^*T 的正平方根.

(2) 若 T 可逆, 则 T^*,T^*T 也可逆. 类似 (1) 可证, T^*T 为正算子. 故由推论 2.5.9 知. T^*T 存在可逆平方根 P. 令 $U:=TP^{-1}$, 则 U 可逆且

$$U^*U=(P^{-1})^*T^*TP^{-1}=P^{-1}P^2P^{-1}=I.$$

即 U 为酉算子.

下证唯一性. 若 $T=\widetilde{U}\widetilde{P}$ 为另一满足上述条件的分解. 则

$$T^*T=\widetilde{P}^*\widetilde{U}^*\widetilde{U}\widetilde{P}=\widetilde{P}^*\widetilde{P}=\widetilde{P}^2.$$

由正平方根的唯一性知 $P=\widetilde{P}$. 从而 $U=\widetilde{U}$, 唯一性得证. □

参考文献

[1] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, 2013.

[2] 张恭庆，林源渠. *泛函分析讲义 (上册)*. 北京大学出版社, 1987.

[3] 袁文杨大春. *泛函分析选讲*. 北京师范大学出版社, 2016.

[4] 熊金城. *点集拓扑讲义 (第三版)*. 高等教育出版社, 2004.