《泛函分析选讲》习题参考解答

吴瀚霖 hlwu.bnu@gmail.com

2018 年 2 月 20 日

1 紧算子的谱理论

1.1 有界线性算子的谱

习题 1.1.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个有限维 *Banach* 空间，$A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 为有界线性算子。则对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, λ 必为A的正则值或特征值之一.

证明: 若 A 为有限维空间 $\mathscr{X}$ 上的有界算子, 则 A 可由矩阵 (a_{ij}) 表示. A 单射当且仅当 A 满射. 从而$\lambda I-A$ 可逆当且仅当 $\lambda E-A$ 可逆. 而当

- $\det(\lambda E-A)=0$ 时, $\lambda\in\sigma(A)$;
- $\det(\lambda E-A)\neq 0$ 时, $\lambda\in\rho(A)$.

故对$\forall\lambda\in\mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值. □

习题 1.1.2 设 $\mathscr{X}$ 为一个 *Banach* 空间. 证明 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆（有有界逆）算子集为开集.

证明: $\forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. $\forall T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|T-A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}\|T^{-1}\|&=\|(T-A+A)^{-1}\|\\&=\|A^{-1}(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|\\&\leq\|A^{-1}\|\cdot\|(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|\\&<\infty.\end{aligned}$$

由引理1.1.9, $\|(T-A)A^{-1}\|\leq\|T-A\|\cdot\|A^{-1}\|<1$. 故 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆算子为开集. □

习题 1.1.3 考虑 ℓ^2 上的左推移算子

$$A:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

证明$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\},\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ 且 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明: 首先说明A是有界线性算子且$\|A\|=1$. 设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\ell^2,$$
$$y=Ax=(x_2,x_3,\cdots,x_{n+1},\cdots).$$

有

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\|x\|^2\Longrightarrow\|Ax\|\le\|x\|\Longrightarrow\|A\|\le 1.$$

另一方面, $x':=(0,1,0\cdots)$, 则$Ax'=(1,0,0,\cdots)$, $\|Ax'\|=\|x'\|$. 故 $\|A\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=1$.

(1) 当$|\lambda|>1$时, $|\lambda|>\|A\|\Longrightarrow\lambda\in\rho(A)$.

(2) $D:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$. $\forall\lambda\in D,\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell^2$. 因为

$$A(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)=(\lambda,\lambda^2,\cdots)=\lambda(1,\lambda,\lambda^2,\cdots),$$

所以$\lambda\in\sigma_p(A)$.

(3) 先考虑$\lambda=1$时. 首先证明$(I-A)^{-1}$存在. $\forall x\in\ell^2$, 若$(I-A)x=0$, 则

$$(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots).$$

于是 $x=x_1(1,1,\cdots)$. 又因为$x\in\ell^2$, 所以$x_1=0$, 从而$x=\theta$. 即$(I-A)^{-1}$存在.

下证$R(I-A)\neq\ell^2$, 但$\overline{R(I-A)}=\ell^2$.

若$y=(I-A)x$, 则$y_k=x_k-x_{k+1}$, 即

$$\left.\begin{aligned}y_1&=x_1-x_2\\y_2&=x_2-x_3\\&\cdots\\y_k&=x_k-x_{k+1}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{k}y_j=x_1-x_{k+1}.$$

即$x_{k+1}=x_1-\sum_{j=1}^{k}y_j$. 易知, 非零分量为有限个的$y\in R(I-A)$. 事实上, 设$y$的非零分量个数为$K$, 取$x_1=\sum_{j=1}^{k}y_j$,

$$x_{k+1}=\begin{cases}x_1-\sum\limits_{j=1}^{k}y_j,k=1,2,\cdots,K\\0,k>K\end{cases}.$$

由上式可知, $x \in \ell^2$.

存在$y \in \ell^2$, 但是$y \notin R(I-A)$. 事实上, 取$y = \{\frac{1}{j}\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$. 则

$$x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \to -\infty,\ k \to \infty.$$

所以, $x \notin \ell^2$, 也就是说$y \notin R(I-A)$, 那么$R(I-A) \neq \ell^2$.

下证$\overline{R(I-A)} = \ell^2$, 为此, 设$\xi := \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in (0,\infty)$. 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon$. 令 $y := \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. 其中

$$y_j = \begin{cases} \xi_j, j \leq N \\ 0, j > N. \end{cases}$$

有

$$\|y - \xi\|_{\ell^2} = \|\{\xi_j - y_j\}_{j=N+1}^{\infty}\|_{\ell^2} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon.$$

故$\overline{R(I-A)} = \ell^2$. 从而$1 \in \sigma_c(A)$.

其次, 对于一般的λ使$|\lambda| = 1$. 可以划归为$\lambda = 1$的情形. 事实上,

$$(\lambda I - A)x = y \Longleftrightarrow \lambda x_k - x_{k+1} = y_k \Longleftrightarrow \frac{x_k}{\lambda^k} - \frac{x_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \cdots$$

令$\xi_k = \frac{x_k}{\lambda^k}, \eta_k = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \cdots$. 则有$\xi_k - \xi_{k+1} = \eta_k, k = 1, 2, \cdots$. 即划归为$\lambda = 1$的情形. □

习题 1.1.4 *考虑$L^2(0,+\infty)$上的微分算子:*

$$A : x(t) \mapsto x'(t). D(A) = H^1(0,+\infty).$$

证明$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = 0\}$且$\sigma_r(A) = \varnothing$. 其中$Re\lambda$表示$\lambda$的实部.

证明: 记$\Omega := (0,\infty)$. 由Meyers-Serrin定理有

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \tilde{d}^{\alpha} u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}.$$

其中$\langle \tilde{d}u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \tilde{d}^{\alpha} \varphi \rangle$. $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

先证明A是闭算子. 只需证明当$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$. 且

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ in } L^2(\Omega) \\ u_n' \to v \text{ in } L^2(\Omega) \end{cases} (n \to \infty).$$

时, 有$u\in D(A)$, 且$u'=v$. $\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega),\langle u_n',\varphi\rangle=-\langle u_n,\varphi'\rangle$. 从而由

$$|\langle u_n,\varphi'\rangle-\langle u,\varphi'\rangle|=|\langle u_n-u,\varphi'\rangle|\le\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi'\|_{L^2(\Omega)}\to 0.(n\to\infty).$$

知$\langle u_n',\varphi\rangle=-\langle u_n,\varphi'\rangle\to-\langle u,\varphi'\rangle$.

类似可以证明$\langle u_n',\varphi\rangle\to\langle v,\varphi\rangle,n\to\infty$. 即$\langle v,\varphi\rangle=-\langle u,\varphi'\rangle,\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 成立. 由弱导数的定义知$u'=v\in L^2(\Omega)$. 从而$u\in H^1(\Omega)$, 且$u'=v$. 故A为闭算子.

再证$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>0\}$. 考虑方程$(\lambda I-A)u=0$, 即$u'-\lambda u=0$. 由PDE知系数光滑从而弱解也光滑. 解ODE, $u'-\lambda u=0$. 得$u=0$或$ce^{\lambda x}\in L^2(\Omega)$. 故$(\lambda I-A)^{-1}$不存在. $\lambda\in\sigma_p(A)$.

再证$\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda=0\}$. 先说明$R(\lambda I-A)\subsetneqq L^2(\Omega)$. 令$v(x):=\frac{e^{\lambda x}}{x+1}\in L^2(\Omega)$. 由$(\lambda I-A)u=v$得

$$\begin{aligned}u(x)&=e^{\lambda x}[u(0)-\int_0^x e^{-\lambda t}v(t)dt]\\&=e^{\lambda x}[u(0)-\ln(x+1)]\notin L^2(\Omega).\end{aligned}$$

故$R(\lambda I-A)\subsetneqq L^2(\Omega)$.

再证$\overline{R(\lambda I-A)}=L^2(\Omega)$. 因$C_c^\infty(\Omega)=L^2(\Omega)$, 故只需说明$R(\lambda I-A)\supset C_c^\infty(\Omega)$. 事实上, 对$\forall v\in C_c^\infty(\Omega)$. $\exists M_v$, 使得supp$v\subset(0,M_v)$. 由$(\lambda I-A)u=v$, 得$u(x)=e^{\lambda x}[u(0)-\int_0^x e^{-\lambda x}v(t)dt]$. 令 $u(0):=\int_0^{M_v}e^{-\lambda t}v(t)dt$. 则

$$u(x)=\begin{cases}e^{\lambda x}\displaystyle\int_x^{M_v}e^{-\lambda x}v(t)dt, & x\in(0,M_v)\\ 0, & x\in(M_v,\infty).\end{cases}$$

满足$u\in H^1(\Omega)$. 即$R(\lambda I-A)\supset C_c^\infty(\Omega)$. 故$\overline{\lambda I-A}=L^2(\Omega)$.

最后说明$\rho(A)\supset\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>0\}$. 设$Re\lambda>0$, 此时$ce^{\lambda x}\notin L^2(\Omega)$. 从而$(\lambda I-A)^{-1}$存在. 断言$R(\lambda I-A)=L^2(\Omega)$. 事实上, 对$\forall v\in L^2(\Omega)$. 令$u(x)=e^{\lambda x}\int_0^\infty e^{\lambda t}v(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda s}v(s+x)ds$. 则$u$满足$u'-\lambda u=v$ 且$u\in H^1(\Omega)$. 由Minkovski不等式, 有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\Omega)}&=\|\int_0^\infty e^{-\lambda x}v(s+x)ds\|_{L^2(\Omega)}\\&=\int_0^\infty|e^{-\lambda s}|ds\|v\|_{L^2(\Omega)}\\&=\frac{1}{Re\lambda}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\&<\infty.\end{aligned}$$

即$R(\lambda I-A)=L^2(\Omega)$. 由命题1.1.4知, $\lambda\in\rho(A)$. 故$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:Re\lambda>0\}$. 又因$\rho(A)\cup\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)=\mathbb{C}$且互不相交, 故结论得证. $\square$

习题 1.1.5 *(1) 证明(1.1.1)和(1.1.2)成立*

(2) 利用$S^n y = \sum_{k=0}^{n} A^k y$*给出引理1.1.9的另一个证明.*

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$*, 定义*$\mathbb{R}$*上的线性算子*$A_x : y \mapsto xy, \forall y \in \mathbb{R}$*. 利用此算子说明当*$|x| < 1$*时.*

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

只是(1.1.3)的一个特例.

证明: (1)因为$\| \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{N} \|A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{N} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$. 所以$\forall k, N \in \mathbb{N}$,

$$\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N \to \infty.$$

故$\{\sum_{n=0}^{N} A^n\}_{N\in\mathbb{N}}$为$\mathscr{L}(\mathscr{X})$中的基本列. 而$\mathscr{L}(\mathscr{X})$为Banach空间, 故此基本列收敛, 设其极限为$\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. 由此, 有

$$\begin{aligned}\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} &\le \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \| \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \\ &\le \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \sum_{n=0}^{N} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}.\end{aligned}$$

令$N \to \infty$, 有$\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$.

$\forall x \in \mathscr{X}$,

$$\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n x \|_{\mathscr{X}} \le \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \|x\|_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N \to \infty.$$

故$\{\sum_{n=0}^{N} A^n x\}_{N\in\mathbb{N}}$为$\mathscr{X}$中的基本列. 由$\mathscr{X}$的完备性知其有极限, 记其极限为$\sum_{n=0}^{\infty} A^n x$. $\|y - y_k\|_{\mathscr{X}} = \| \sum_{n=k+1}^{\infty} A^n x \| \to 0, k \to \infty$.

(2) $\forall y \in \mathscr{X}$. 由压缩映射原理知, 存在唯一的$x_y \in \mathscr{X}$. 使得$S x_y = x_y$. 即$y = (I-A)^{-1} x_y$. 令$\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} S^n y$. 又由$S^n y = \sum_{k=0}^{n} A^k y$及(1.1.2)式知$\widetilde{x} \in \mathscr{X}$.

因S连续, 则$S\widetilde{x} = S(\lim_{n\to\infty} S^n y) = \lim_{n\to\infty} S^{n+1} y = \widetilde{x}$. 由压缩映射原理的唯一性知, $\widetilde{x} = x_y$, 即

$$y = (I-A)x_y = (I-A)\widetilde{x} = (I-A)(\lim_{n\to\infty} S^n)y.$$

由y的任意性知, $(I-A)(\lim_{n\to\infty} S^n) = I$. 类似可证$(\sum_{n}^{\infty} A^n)(I-A) = I$. 故

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

且
$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

(3) 当$|x|<1$时, $\|A_x\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})}<1$. 由(2)知, $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_x^n$. 故$(I-A)(\sum_{n=0}^{\infty}A_x^n)=I$. 注意到$I=1$且$A_x(1)=x$, 知
$$(1-x)(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)=1.$$
从而$(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. □

习题 1.1.6 (补充题) $\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$

证明: 因$A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则$0\in\rho(A)$且$0\in\rho(A^{-1})$. 下证
$$\rho(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$
若$\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}$, 则$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. 对$\forall x\in\mathscr{X}$, 方程
$$(\lambda^{-1}I-A^{-1})y=x$$
有唯一解$y=-\lambda A(\lambda I-A)^{-1}x\in\mathscr{X}$. 从而$R(\lambda^{-1}I-A^{-1})=\mathscr{X}$, 又因$A^{-1}\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 由命题1.1.4知$\lambda^{-1}\in\rho(A)$. 故$\rho(A^{-1})\supset\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}$.

若$\lambda\in\rho(A^{-1})\backslash\{0\}$, 同上可证$\lambda^{-1}\in\rho((A^{-1})^{-1})=\rho(A)$. 故
$$\rho(A^{-1})\subset\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$
从而$\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$. □

1.2 紧算子

习题 1.2.1 *设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$为Banach空间. $A:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$为线性算子. 证明以下三条等价:*

(1) A为全连续算子;

(2) 对$\mathscr{X}$中任意弱收敛于θ的点列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 均有$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$\theta$.

(3) 存在$x_0\in\mathscr{X}$且对$\mathscr{X}$中任意弱收敛于x_0的点列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 均有$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$Ax_0$.

证明: (1)$\Rightarrow$(2) 因A为全连续算子. $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{X}$且$x_n\rightharpoonup\theta, n\to\theta$. 根据全连续算子的定义知$Ax_n\to A\theta, n\to\infty$. 又因$A$为线性算子, 知$A\theta=\theta$. 故$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$\theta$.

(2)$\Rightarrow$(3) 设$\forall x_n\rightharpoonup, n\to\infty$, 则$x_n-x_0\rightharpoonup\theta$. 由(2)知$A(x_n-x_0)\to\theta$, 于是$Ax_n\to Ax_0$.

(3)$\Rightarrow$(1) 若$\exists x_0\in\mathscr{X}$, $\forall\{x_n\}$, $x_n\rightharpoonup x_0, n\to\infty$. 有$Ax_n\to Ax_0, n\to\infty$. 那么, $\forall x\in\mathscr{X}$, $\forall\{x_n'\}\subset\mathscr{X}$ 且 $x_n'\rightharpoonup x, n\to\infty$. 则对于 $\forall f\in\mathscr{X}^*$, $f(x_n')\to f(x), n\to\infty$. 那么

$$\begin{aligned}|f(x_n'-x+x_0)-f(x_0)| &= |f(x_n')-f(x)+f(x_0)-f(x_0)|\\ &= |f(x_n')-f(x)|\to 0, n\to\infty.\end{aligned}$$

故$x_n'-x+x_0\rightharpoonup x_0$. 则

$$\begin{aligned}&A(x_n'-x+x_0)\to A(x_0)\\ \Longrightarrow &A(x_n')-A(x)+A(x_0)\to A(x_0)\\ \Longrightarrow &A(x_n')\to A(x), n\to\infty.\end{aligned}$$

所以A为全连续算子. □

习题 1.2.2 记S_n如引理*1.2.26*之证明. 证明: $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界当且仅当, 对$\forall n\in\mathbb{N}, C_n\in\mathscr{X}^*$.

证明: $S_n(x):=\sum_{i=1}^n C_i(x)e_i$.

($\Rightarrow$) 若$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界. 则$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists M>0$, 使得$\|S_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\le M$.

$$\|C_n(x)e_n\|=\|S_n(x)-S_{n-1}(x)\|\le 2M\|x\|_{\mathscr{X}},$$

而 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\le 2M\|e_n\|_{\mathscr{X}}^{-1}$. 故$\forall n\in\mathbb{N}$, $C_n\in\mathscr{X}^*$.

($\Leftarrow$) 若$\forall n\in\mathbb{N}$, $C_n\in\mathscr{X}^*$, 而 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists M_n>0$, 使得$\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}\le M_n$. 由$\|x-S_n(x)\|\to 0, n\to\infty$. 故$\exists N_0>0$, 当$n>N_0$时,

$$\|S_n(x)\|\le\|x\|_{\mathscr{X}}+1. \tag{1.1}$$

又$n\in\{1,2,\cdots,N_0\}$,

$$\|S_n(x)\|_{\mathscr{X}}=\|\sum_{i=1}^n C_i(x)e_i\|_{\mathscr{X}}\le M_0N_0\|e_0\|_{\mathscr{X}}\|x\|_{\mathscr{X}}, \tag{1.2}$$

其中$M_0:=\max\{M_1,\cdots,M_{N_0}\}$, $\|e_0\|_{\mathscr{X}}:=\max\{\|e_1\|,\cdots,\|e_{N_0}\|\}$. 由(1.1)和(1.2)知, $\exists\widetilde{M}>0, \forall x\in\mathscr{X}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|S_n(x)\|_{\mathscr{X}}\le\widetilde{M}.$$

则由共鸣定理, 知$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界. □

习题 1.2.3 证明: 若$\mathscr{X}$为无穷维Banach空间, 则$\mathscr{X}$上紧算子没有有界逆.

证明: 若不然, $A \in \mathfrak{C}$且A有有界逆, 即$A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 由命题1.2.6(vi) 可知, $AA^{-1} = I \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$. $\forall B \in \mathscr{X}$且$B$为有界集, $\overline{I(B)}$为$\mathscr{X}$中的紧集. 从而$\overline{B}$为$\mathscr{X}$中的紧集, 故$\overline{B}$自列紧.

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \subset \overline{B}$, 由$\overline{B}$是自列紧的知$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列, 故$B$是列紧的. 由《泛函分析(上册)》推论1.4.30: "B^*空间$\mathscr{X}$是有穷维的, 当且仅当任意有界集是列紧的." 可知$\mathscr{X}$是有穷维的. 矛盾. □

习题 1.2.4 设$\mathscr{X}$为Banach空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 满足对$\forall x \in \mathscr{X}$,

$$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha \|x\|_{\mathscr{X}}.$$

其中α为一正常数. 证明A紧当且仅当$\mathscr{X}$是又穷维的.

证明: ($\Leftarrow$)若$\dim \mathscr{X} < \infty$. 由注记1.2.4知, $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$.

($\Rightarrow$) 令$Ax = \theta$. 若$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha\|x\|_{\mathscr{X}}$, 知$x = \theta$. 故$A$为单射. 从而$A^{-1}$存在. $\forall x \in \mathscr{X}$, 令$y = Ax$. 则

$$\|y\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha \|A_{-1}y\|_{\mathscr{X}} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\mathscr{X}} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

故A有有界逆. 由习题3知, $\dim \mathscr{X} < \infty$. □

习题 1.2.5 设$p \in [1, \infty]$. $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$且$\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. 证明算子

$$T : \{\xi_n\} \to \{\omega_n \xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是ℓ^p上的紧算子.

证明: $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in \ell^p$. 令$T_N\xi = (\omega_1\xi_1, \omega_2\xi_2, \cdots, \omega_n\xi_n, 0, \cdots)$. 下证$T_N\xi$为$\ell^p$上的有界线性算子.

①线性: $\forall \xi, \eta \in \ell^p$,

$$\begin{aligned} T_N(\alpha\xi + \beta\eta) &= (\omega(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1), \cdots, \omega(\alpha\xi_N + \beta\eta_N), 0, \cdots) \\ &= (\alpha\omega_1\xi_1, \cdots, \alpha\omega_N\xi_N, 0, \cdots) + (\alpha\omega_1\eta_1, \cdots, \alpha\omega_N\eta_N, 0, \cdots) \\ &= \alpha T_N\xi + \beta T_N\eta. \end{aligned}$$

②有界性:

$$\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^p} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^{N} |\omega_i\xi_i|^p \right)^{1/p}.$$

令$M=\max\limits_{1\leq i\leq N}\{|\omega_i|\}$. 则

$$\begin{aligned}\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)}&\leq M\sup_{\|\ell^p\|=1}\left(\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\\&\leq M\sup_{\|\ell^p\|=1}\|\xi\|_{\ell^p}\\&=M.\end{aligned}$$

由①, ②知 $T_N\in\mathscr{L}(\ell^p)$. 再由注记1.2.4及$\dim R(T_N)<\infty$知$T_N\in\mathfrak{C}(\ell^p)$. 因

$$\|T_N\xi-T\xi\|_{\ell^p}=\left(\sum_{i=N+1}^{\infty}|\omega_i\xi_i|^P\right)^{1/p}\leq\sup_{n>N}|\omega_n|\|\xi\|_{\ell^p}.$$

故

$$\|T-T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)}=\sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1}\|T\xi-T_N\xi\|_{\ell^p}\leq\sup_{n\geq N}|\omega_n|\to 0,N\to\infty.$$

由命题1.2.6(iii)知$T\in\mathfrak{C}(\ell^p)$. □

习题 1.2.6 设H是*Hilbert*空间, A是H上紧算子. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是H的规范正交集. 证明

$$\lim_{n\to\infty}(Ae_n,e_n)=0.$$

证明: 因$\{e_n\}$为H的规范正交集, 所以由Bessel不等式有$\forall x\in\mathscr{X}$, $\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leq\|x\|^2$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}(x,e_n)=0,\forall x\in H$ 成立.

$\forall f\in\mathscr{X}^*$, 由F·Riesz定理, 存在唯一的$y_f\in\mathscr{X}$, 使$f(x)=(x,y_f)$. 故$f(e_n)=(e_n,y_f)=\overline{(y_f,e_n)}$, 由于$y_f\in\mathscr{X}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}(y_f,e_n)=0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{(y_f,e_n)}=0$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(e_n)=0$, 故$e_n\rightharpoonup 0$.

由命题1.2.14知, A是全连续算子, 故$Ae_n\to 0$. 由《泛函分析（上册）》习题2.5.18知, 在H中$x_n\rightharpoonup x_0,y_n\to y_0$, 有$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(Ae_n,e_n)=0$. □

习题 1.2.7 证明注记*1.2.23*中的$\ell^2(\Gamma)$为*Hilbert*空间.

证明: 首先证明$\ell^2(\Gamma)$为内积空间.

①$(f,g)=\sum_{x\in\Gamma}f(x)g(x)=\sum_{x\in\Gamma}g(x)f(x)=(g,f)$.

②$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2\geq 0$.

③$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2=0\Leftrightarrow f(x)\equiv 0$.

下证完备性. 任取$\ell^2(\Gamma)$中的基本列$f^{(n)}$, 则

$$\|f_m - f_n\|_{\ell^2(\Gamma)} := \left\{\sum_{x\in\Gamma} |f_m(x) - f_n(x)|^2\right\}^{1/2} \to 0, m, n \to \infty.$$

那么, $|f_m(x) - f_n(x)| \to 0, m, n \to \infty$. 即$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\mathbb{R}$中的Cauchy列. 可设其极限函数

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in \Gamma : f_n(x) \neq 0\}, \\ 0, \text{其它}. \end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} &= \left\{\sum_{x\in\Gamma} \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2\right\}^{1/2} \\ (\text{Fatou引理}) &\le \liminf_{m\to\infty} \left\{\sum_{x\in\Gamma} |f_n(x) - f_m(x)|^2\right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

再令$n \to \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} \le \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left\{\sum_{x\in\Gamma} |f_n(x) - f_m(x)|^2\right\} = 0.$$

即$f_n \to f$ in $\ell^2(\Gamma)$. $\|f\|_{\ell^2(\Gamma)} \le \|f_n - f\|_{\ell^2(\Gamma)} + \|f_n\|_{\ell^2(\Gamma)} < \infty$. 完备性得证. □

习题 1.2.8 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$为*Hilbert*空间. 证明$\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})} = \mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.9 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$为具有*Schauder*基的*Banach*空间. 证明$\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})} = \mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.10 (补充题) 定义$T : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j\}_{i\in\mathbb{N}}. \end{cases}$ 其中$\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. 满足$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 < \infty$.

i) 证明T是ℓ^2上的紧算子.

ii) 举例说明: 存在无穷维的矩阵(a_{ij})使$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 = \infty$. 但按上述定义的$T$仍然是紧算子.

iii) 若$\forall i \neq j, a_{ij} = 0$. 证明: T是紧算子$\Longleftrightarrow a_{mm} \to 0, n \to \infty$.

1.3 紧算子的谱理论

习题 1.3.1 (原第3题) 设$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$,在$\ell^2$上定义算子

$$A : (x_1, x_2, \cdots) \to (a_1x_1, a_2x_2, \cdots)$$

(1) 证明：A在ℓ^2上有界当且仅当$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$为有界数列.
(2) 若A有界. 求$\sigma(A)$.

习题 1.3.2 (补充题) 给定数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定义$A : \begin{cases} \ell^1 \to \ell^1 \\ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to \{a_ix_i\}_{i\in\mathbb{N}}. \end{cases}$ 证明：

(1) $A \in \mathscr{L}(\ell^1) \Longleftrightarrow \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty.$

(2) $A^{-1} \in \mathscr{L}(\ell^1) \Longleftrightarrow \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0.$

(3) $A \in \mathfrak{C}(\ell^1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

1.4 Hilbert-Schmidt 定理

习题 1.4.1 (原第3题) 设H为复*Hilbert*空间, 且A为H上的对称紧算子. 令

$$m(A) := \inf_{\|x\|_H=1}(Ax, x),\ M(A) := \sup_{\|x\|_H=1}(Ax, x).$$

证明*:*

(1) 若$m(A) \neq 0$, 则$m(A) \in \sigma_p(A)$;

(2) 若$M(A) \neq 0$, 则$M(A) \in \sigma_p(A)$.

习题 1.4.2 (原第5题) 设H为复*Hilbert*空间. 则$P \in \mathscr{L}(H)$为H上的正交投影算子当且仅当

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2,\ \forall x \in H.$$

2 Banach 代数

2.1 代数准备知识

2.2 Banach 代数

习题 2.2.1 证明例*2.2.6*中$\mathscr{A}$完备.

习题 2.2.2 设$\mathscr{B}$及其他记号同定理*2.2.13*且商模$\|[\cdot]\|$定义如定理*2.2.13*的证明. 证明$\|[e]\| = 1$且

$$\inf_{x\in[a],y\in[b]} \|xy\| = \inf_{x\in[a]} \|x\| \inf_{y\in[b]} \|y\|.$$

习题 2.2.3 设$\mathscr{A}$是有单位元的*Banach*代数, $a, b \in \mathscr{A}$. 证明:

(1) 若$e - ab$可逆, 则$e - ba$也可逆.

(2) 若非零复数$\lambda \in \sigma(ab)$, 则$\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 若a可逆, 则$\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

习题 2.2.4 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是两个可交换的有单位元的*Banach*代数. $\mathscr{B}$是半单的. 若φ是$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的一个同态. 求证φ是连续的.

习题 2.2.5 略

习题 2.2.6 用定理*1.1.14*即"有界线性算子A, $\sigma(A) \neq \varnothing$"来证明定理*2.2.10*即"可除*Banach*代数$\mathscr{A}$等距同构与$\mathbb{C}$".

习题 2.2.7 证明以下两条等价.

(1) 设$\mathscr{X}$为*Banach*空间, $\forall A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $\sigma(A) \neq \varnothing$.

(2) 设$\mathscr{A}$是有单位元的*Banach*代数. 则$\forall a \in \mathscr{A}$, $\sigma(a) \neq \varnothing$.

习题 2.2.8 证明引理*2.2.16*证明中的$\widetilde{\varphi}$是$\mathscr{A}/J \to \mathbb{C}$上的等距同构映射.

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} \mathscr{A}/J \to \mathbb{C} \\ \quad [a] \to \varphi(a). \end{cases}$$

习题 2.2.9 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, 若S为$\mathscr{X}^*$的$*$弱闭集且有界. 证明S是$*$弱紧的.

习题 2.2.10 (补充题) 设$\mathscr{A}$是*Banach*代数, 则对$\forall x \in \mathscr{A}$. 极限$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$存在且等于$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

2.3 例子与应用

习题 2.3.1 设 $\mathscr{A} := \left\{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \|f\| := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|2^{|n|} < \infty\right\}$. 按函数的加法和数乘定义线性运算, 并定义乘法: $f * g(n) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$. 证明:

(1) $\mathscr{A}$是可交换的*Banach*代数;

(2) 令$K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \le |z| \le 2\}$. 则$K$与$\mathfrak{M}$一一对应, 且$\mathscr{A}$ 的*Gelfand*表示是K上绝对收敛的*Laurent* 级数.

习题 2.3.2 设M是T_2紧拓扑空间, 证明M的全体闭子集与$C(M)$的全体理想间有一一对应.

习题 2.3.3 (补充题) 设$\mathscr{A}$是半单的交换*Banach*代数. 证明: $\mathscr{A}$ 的*Gelfand*表示的值域$\Gamma(\mathscr{A})$ 是$C(\mathfrak{M})$的闭集的充要条件是存在正常数$k < \infty$, 使得对$\forall a \in \mathscr{A}$, 有$\|a\|^2 \le k\|a^2\|$.

2.4 C^*代数

习题 2.4.1 设所有记号如定理*2.4.14*的证明. 证明:

(1) $\widetilde{\mathscr{A}}$为$C(\mathscr{Y})$的实值子代数;

(2) 对任意$\widetilde{f} \in C(\mathscr{Y})_r$, $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathscr{X})$;

(3) *(2.4.1)*成立.

习题 2.4.2 证明注记*2.4.15*. 即: $f \in C_\infty(\mathscr{X}) \Longleftrightarrow f \in C(\mathscr{Y})_r$且$f(\partial) = 0$.

习题 2.4.3 证明交换半单有单位元的*Banach*代数上的任意对合运算均连续.

习题 2.4.4 (补充题) 设$\mathscr{A}$是一个交换的C^*代数. 设其单位元为e. 若$\forall x \in \mathscr{A}.x$为*Hermite*元且$\sigma(x) \subset [0,\infty)$. 则称$x$是正的, 记作$x \ge 0$. 证明:

(1) $x \ge 0 \Longleftrightarrow \exists h \in \mathscr{A}$是*Hermite*元, 使得$x = h^2$.

(2) $x \ge 0 \Longleftrightarrow x$ 为*Hermite*元且$\|\|x\|e - x\| \le \|x\|$.

2.5 Hilbert空间上的正常算子

习题 2.5.1 见命题*2.5.7.*

习题 2.5.2 证明*:* N为*Hilbert*空间H上的正常算子当且仅当$\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H, \forall x \in H$.

习题 2.5.3 证明*:* 两个可交换的正算子的积仍为正算子.

习题 2.5.4 设N为*Hilbert*空间H上的正常算子. 则存在唯一正算子$P \in \mathscr{L}(H)$及酉算子$Q \in \mathscr{L}(H)$ 使得$N = PQ = QP$.

习题 2.5.5 设N为正常算子. 证明*:*

(1) N是酉算子当且仅当$\sigma(N) \subset S^1$;

(2) N是自伴算子当且仅当$\sigma(N) \subset \mathbb{R}$;

(3) N是正算子当且仅当$\sigma(N) \subset \mathbb{R}_+$.

习题 2.5.6 证明推论*2.5.28.*

习题 2.5.7 (补充题1) 设H为*Hilbert*空间,$U \in \mathscr{L}(H)$. 证明以下三个论述等价*:*

(1) U是酉算子;

(2) $R(U) = H$且对$\forall x, y \in H$, $(Ux, Uy) = (x, y)$.

(3) $R(U) = H$且对$\forall x, y \in H, \|Ux\|_H = \|x\|_H$.

习题 2.5.8 (补充题2) 设H为*Hilbert*空间, $T \in \mathscr{L}(H)$. 证明*:*

(1) T^*T的平方根$P \in \mathscr{L}(H)$是唯一满足$\|Px\|_H = \|Tx\|_H$, $\forall x \in H$的正算子.

(2) 若T可逆, 则有唯一分解$T = UP$, 其中U为酉算子, P为正算子.

习题 2.5.9 (补充题3) 设H为可分的*Hilbert*空间, $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$是任意有界复数列. 证明*:* 在$H$上存在唯一一个以$\mu_k$ 为特征值的正常算子T, 并且$\|T\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\mu_k|$.