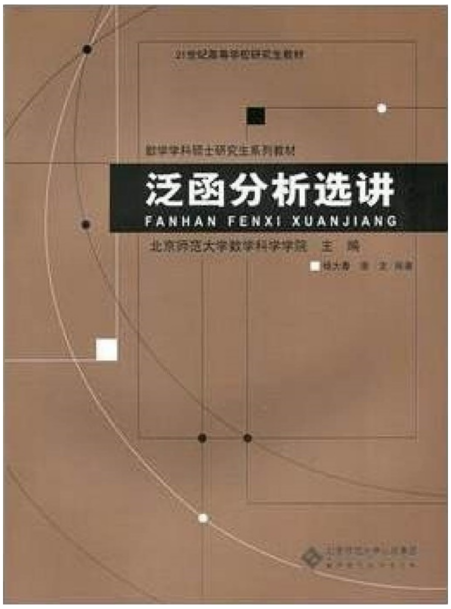
《泛函分析选讲》

习题参考解答



吴瀚霖

hlwu.bnu@gmail.com

2018 年 4 月 23 日

目录

第一章　紧算子的谱理论

1.1　有界线性算子的谱

习题 1.1.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个有限维 *Banach* 空间，$A:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 为有界线性算子。则对于任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, λ 必为A的正则值或特征值之一.

证明: 若 A 为有限维空间 $\mathscr{X}$ 上的有界算子, 则 A 可由矩阵 (a_{ij}) 表示. A 单射当且仅当 A 满射. 从而$\lambda I-A$ 可逆当且仅当 $\lambda E-A$ 可逆. 而当

- $\det(\lambda E-A)=0$ 时, $\lambda\in\sigma(A)$;
- $\det(\lambda E-A)\neq 0$ 时, $\lambda\in\rho(A)$.

故对$\forall\lambda\in\mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值. □

习题 1.1.2 设 $\mathscr{X}$ 为一个 *Banach* 空间. 证明 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆（有有界逆）算子集为开集.

证明: $\forall A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. $\forall T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 $\|T-A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<\frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}\|T^{-1}\|&=\|(T-A+A)^{-1}\|\\&=\|A^{-1}(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|\\&\leq\|A^{-1}\|\cdot\|(I+(T-A)A^{-1})^{-1}\|\\&<\infty.\end{aligned}$$

由引理1.1.9, $\|(T-A)A^{-1}\|\leq\|T-A\|\cdot\|A^{-1}\|<1$. 故 $\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 中的可逆算子为开集. □

习题 1.1.3 考虑 ℓ^2 上的左推移算子

$$A:(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mapsto(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

证明$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\},\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$ 且 $\sigma_r(A)=\varnothing$.

证明: 首先说明A是有界线性算子且$\|A\|=1$. 设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\ell^2,$$
$$y=Ax=(x_2,x_3,\cdots,x_{n+1},\cdots).$$

有

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=2}^{\infty}|x_n|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\|x\|^2\Longrightarrow\|Ax\|\le\|x\|\Longrightarrow\|A\|\le 1.$$

另一方面, $x':=(0,1,0\cdots)$, 则$Ax'=(1,0,0,\cdots)$, $\|Ax'\|=\|x'\|$. 故 $\|A\|=\sup\limits_{x\neq\theta}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=1$.

(1) 当$|\lambda|>1$时, $|\lambda|>\|A\|\Longrightarrow\lambda\in\rho(A)$.

(2) $D:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$. $\forall\lambda\in D,\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell^2$. 因为

$$A(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)=(\lambda,\lambda^2,\cdots)=\lambda(1,\lambda,\lambda^2,\cdots),$$

所以$\lambda\in\sigma_p(A)$.

(3) 先考虑$\lambda=1$时. 首先证明$(I-A)^{-1}$存在. $\forall x\in\ell^2$, 若$(I-A)x=0$, 则

$$(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots).$$

于是 $x=x_1(1,1,\cdots)$. 又因为$x\in\ell^2$, 所以$x_1=0$, 从而$x=\theta$. 即$(I-A)^{-1}$存在.

下证$R(I-A)\neq\ell^2$, 但$\overline{R(I-A)}=\ell^2$.

若$y=(I-A)x$, 则$y_k=x_k-x_{k+1}$, 即

$$\left.\begin{array}{l} y_1=x_1-x_2\\ y_2=x_2-x_3\\ \quad\cdots\\ y_k=x_k-x_{k+1}\end{array}\right\}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{k}y_j=x_1-x_{k+1}.$$

即$x_{k+1}=x_1-\sum_{j=1}^{k}y_j$. 易知, 非零分量为有限个的$y\in R(I-A)$. 事实上, 设$y$的非零分量个数为$K$, 取$x_1=\sum_{j=1}^{k}y_j$,

$$x_{k+1}=\begin{cases}x_1-\sum\limits_{j=1}^{k}y_j, k=1,2,\cdots,K\\ 0, k>K\end{cases}.$$

由上式可知, $x\in\ell^2$.

存在$y \in \ell^2$, 但是$y \notin R(I-A)$. 事实上, 取$y = \{\frac{1}{j}\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$. 则

$$x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \to -\infty,\ k \to \infty.$$

所以, $x \notin \ell^2$, 也就是说$y \notin R(I-A)$, 那么$R(I-A) \neq \ell^2$.

下证$\overline{R(I-A)} = \ell^2$, 为此, 设$\xi := \{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in (0,\infty)$. 存在$N \in \mathbb{N}$, 使得$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon$. 令 $y := \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. 其中

$$y_j = \begin{cases} \xi_j, j \leq N \\ 0, j > N. \end{cases}$$

有

$$\|y - \xi\|_{\ell^2} = \|\{\xi_j - y_j\}_{j=N+1}^{\infty}\|_{\ell^2} = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \varepsilon.$$

故$\overline{R(I-A)} = \ell^2$. 从而$1 \in \sigma_c(A)$.

其次, 对于一般的λ使$|\lambda| = 1$. 可以划归为$\lambda = 1$ 的情形. 事实上,

$$(\lambda I - A)x = y \Longleftrightarrow \lambda x_k - x_{k+1} = y_k \Longleftrightarrow \frac{x_k}{\lambda^k} - \frac{x_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \cdots$$

令$\xi_k = \frac{x_k}{\lambda^k}, \eta_k = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \cdots$. 则有$\xi_k - \xi_{k+1} = \eta_k, k = 1, 2, \cdots$. 即划归为$\lambda = 1$ 的情形. □

习题 1.1.4 *考虑$L^2(0,+\infty)$上的微分算子:*

$$A : x(t) \mapsto x'(t).D(A) = H^1(0,+\infty).$$

证明$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0\}$. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = 0\}$且$\sigma_r(A) = \varnothing$. 其中$Re\lambda$表示$\lambda$ 的实部.

证明: 记$\Omega := (0,\infty)$. 由Meyers-Serrin定理有

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \widetilde{d}^{\alpha} u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}.$$

其中$\langle \widetilde{d}u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \widetilde{d}^{\alpha}\varphi\rangle$. $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

先证明A是闭算子. 只需证明当$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$. 且

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ in } L^2(\Omega) \\ u_n' \to v \text{ in } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (n \to \infty).$$

时, 有$u \in D(A)$, 且$u' = v$. $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \langle u_n', \varphi\rangle = -\langle u_n, \varphi'\rangle$. 从而由

$$|\langle u_n, \varphi'\rangle - \langle u, \varphi'\rangle| = |\langle u_n - u, \varphi'\rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi'\|_{L^2(\Omega)} \to 0.(n \to \infty).$$

知$\langle u_n', \varphi\rangle = -\langle u_n, \varphi'\rangle \to -\langle u, \varphi'\rangle$.

类似可以证明$\langle u_n', \varphi\rangle \to \langle v, \varphi\rangle, n \to \infty$. 即$\langle v, \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立. 由弱导数的定义知$u' = v \in L^2(\Omega)$. 从而$u \in H^1(\Omega)$, 且$u' = v$. 故A 为闭算子.

再证$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 考虑方程$(\lambda I - A)u = 0$, 即$u' - \lambda u = 0$. 由PDE知系数光滑从而弱解也光滑. 解ODE, $u' - \lambda u = 0$. 得$u = 0$ 或$ce^{\lambda x} \in L^2(\Omega)$. 故$(\lambda I - A)^{-1}$不存在. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

再证$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda = 0\}$. 先说明$R(\lambda I - A) \subsetneqq L^2(\Omega)$. 令$v(x) := \frac{e^{\lambda x}}{x+1} \in L^2(\Omega)$. 由$(\lambda I - A)u = v$得

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\lambda x}[u(0) - \int_0^x e^{-\lambda t}v(t)dt] \\ &= e^{\lambda x}[u(0) - \ln(x+1)] \notin L^2(\Omega). \end{aligned}$$

故$R(\lambda I - A) \subsetneqq L^2(\Omega)$.

再证$\overline{R(\lambda I - A)} = L^2(\Omega)$. 因$\overline{C_c^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, 故只需说明$R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 事实上, 对$\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$. $\exists M_v$, 使得supp$v \subset (0, M_v)$. 由$(\lambda I - A)u = v$, 得$u(x) = e^{\lambda x}[u(0) - \int_0^x e^{-\lambda x}v(t)dt]$. 令 $u(0) := \int_0^{M_v} e^{-\lambda t}v(t)dt$. 则

$$u(x) = \begin{cases} e^{\lambda x}\displaystyle\int_x^{M_v} e^{-\lambda x}v(t)dt, & x \in (0, M_v) \\ 0, & x \in (M_v, \infty). \end{cases}$$

满足$u \in H^1(\Omega)$. 即$R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 故$\overline{\lambda I - A} = L^2(\Omega)$.

最后说明$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 设$Re\lambda > 0$, 此时$ce^{\lambda x} \notin L^2(\Omega)$. 从而$(\lambda I - A)^{-1}$存在. 断言$R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 事实上, 对$\forall v \in L^2(\Omega)$. 令$u(x) = e^{\lambda x}\int_0^\infty e^{\lambda t}v(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda s}v(s+x)ds$. 则$u$ 满足$u' - \lambda u = v$ 且$u \in H^1(\Omega)$. 由Minkovski不等式, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda x}v(s+x)ds\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^\infty |e^{-\lambda s}|ds\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{Re\lambda}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

即$R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 由命题1.1.4知, $\lambda \in \rho(A)$. 故$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$. 又因$\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C}$ 且互不相交, 故结论得证. □

习题 1.1.5 *(1) 证明(1.1.1)和(1.1.2)成立*

(2) 利用$S^n y = \sum_{k=0}^n A^k y$给出引理1.1.9的另一个证明.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义$\mathbb{R}$上的线性算子$A_x : y \mapsto xy, \forall y \in \mathbb{R}$. 利用此算子说明当$|x| < 1$时.

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

只是(1.1.3)的一个特例.

证明: (1)因为$\| \sum_{n=0}^N A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq \sum_{n=0}^N \|A^n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq \sum_{n=0}^N \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$. 所以$\forall k, N \in \mathbb{N}$,

$$\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N \to \infty.$$

故$\{\sum_{n=0}^N A^n\}_{N\in\mathbb{N}}$为$\mathscr{L}(\mathscr{X})$中的基本列. 而$\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 为Banach空间, 故此基本列收敛, 设其极限为$\sum_{n=0}^\infty A^n$. 由此, 有

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} &\leq \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \| \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \\ &\leq \| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} + \sum_{n=0}^{N} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}. \end{aligned}$$

令$N \to \infty$, 有$\| \sum_{n=0}^\infty A^n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq \sum_{n=0}^\infty \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$.

$\forall x \in \mathscr{X}$,

$$\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n x \|_{\mathscr{X}} \leq \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|^n_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \|x\|_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\|A\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}<1} 0, N \to \infty.$$

故$\{\sum_{n=0}^N A^n x\}_{N\in\mathbb{N}}$为$\mathscr{X}$中的基本列. 由$\mathscr{X}$ 的完备性知其有极限, 记其极限为$\sum_{n=0}^\infty A^n x$. $\|y - y_k\|_{\mathscr{X}} = \| \sum_{n=k+1}^\infty A^n x \| \to 0, k \to \infty$.

(2) $\forall y \in \mathscr{X}$. 由压缩映射原理知, 存在唯一的$x_y \in \mathscr{X}$. 使得$Sx_y = x_y$. 即$y = (I-A)^{-1} x_y$. 令$\widetilde{x} = \lim\limits_{n\to\infty} S^n y$. 又由$S^n y = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k y$ 及(1.1.2) 式知$\widetilde{x} \in \mathscr{X}$.

因S连续, 则$S\widetilde{x} = S(\lim\limits_{n\to\infty} S^n y) = \lim\limits_{n\to\infty} S^{n+1} y = \widetilde{x}$. 由压缩映射原理的唯一性知, $\widetilde{x} = x_y$, 即

$$y = (I-A)x_y = (I-A)\widetilde{x} = (I-A)(\lim_{n\to\infty} S^n)y.$$

由y的任意性知, $(I-A)(\lim\limits_{n\to\infty} S^n)=I$. 类似可证$(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n)(I-A)=I$. 故

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

且

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n=\frac{1}{1-\|A\|}.$$

(3) 当$|x|<1$时, $\|A_x\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})}<1$. 由(2)知, $(I-A)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_x^n$. 故$(I-A)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_x^n)=I$. 注意到$I=1$ 且$A_x(1)=x$, 知

$$(1-x)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)=1.$$

从而$(1-x)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. □

习题 1.1.6 (补充题) $\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$

证明: 因$A^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 则$0\in\rho(A)$且$0\in\rho(A^{-1})$. 下证

$$\rho(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$

若$\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}$, 则$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. 对$\forall x\in\mathscr{X}$, 方程

$$(\lambda^{-1}I-A^{-1})y=x$$

有唯一解$y=-\lambda A(\lambda I-A)^{-1}x\in\mathscr{X}$. 从而$R(\lambda^{-1}I-A^{-1})=\mathscr{X}$, 又因$A^{-1}\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 由命题1.1.4 知$\lambda^{-1}\in\rho(A)$. 故$\rho(A^{-1})\supset\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}$.

若$\lambda\in\rho(A^{-1})\backslash\{0\}$, 同上可证$\lambda^{-1}\in\rho((A^{-1})^{-1})=\rho(A)$. 故

$$\rho(A^{-1})\subset\{\lambda^{-1}:\lambda\in\rho(A)\backslash\{0\}\}\cup\{0\}.$$

从而$\sigma(A^{-1})=\{\lambda^{-1}:\lambda\in\sigma(A)\}$. □

1.2 紧算子

习题 1.2.1 *设$\mathscr{X},\mathscr{Y}$为Banach空间. $A:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$为线性算子. 证明以下三条等价:*

(1) A为全连续算子;

(2) 对$\mathscr{X}$中任意弱收敛于θ的点列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 均有$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$\mathscr{Y}$ 中强收敛于θ.

(3) 存在$x_0 \in \mathscr{X}$且对$\mathscr{X}$中任意弱收敛于x_0 的点列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 均有$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在$\mathscr{Y}$中强收敛于Ax_0.

证明: (1)⇒(2) 因A为全连续算子. $\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{X}$ 且$x_n \rightharpoonup \theta, n \to \theta$. 根据全连续算子的定义知$Ax_n \to A\theta, n \to \infty$. 又因$A$ 为线性算子, 知$A\theta = \theta$. 故$\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$在$\mathscr{Y}$中强收敛于$\theta$.

(2)⇒(3) 设$\forall x_n \rightharpoonup, n \to \infty$, 则$x_n - x_0 \rightharpoonup \theta$. 由(2)知$A(x_n - x_0) \to \theta$, 于是$Ax_n \to Ax_0$.

(3)⇒(1) 若$\exists x_0 \in \mathscr{X}$, $\forall\{x_n\}$, $x_n \rightharpoonup x_0, n \to \infty$. 有$Ax_n \to Ax_0, n \to \infty$. 那么, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\forall\{x_n'\} \subset \mathscr{X}$ 且 $x_n' \rightharpoonup x, n \to \infty$. 则对于 $\forall f \in \mathscr{X}^*$, $f(x_n') \to f(x), n \to \infty$. 那么

$$\begin{aligned} |f(x_n' - x + x_0) - f(x_0)| &= |f(x_n') - f(x) + f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x_n') - f(x)| \to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

故$x_n' - x + x_0 \rightharpoonup x_0$. 则

$$\begin{aligned} &A(x_n' - x + x_0) \to A(x_0) \\ \Longrightarrow &A(x_n') - A(x) + A(x_0) \to A(x_0) \\ \Longrightarrow &A(x_n') \to A(x), n \to \infty. \end{aligned}$$

所以A为全连续算子. □

习题 1.2.2 记S_n如引理*1.2.26*之证明. 证明*:* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界当且仅当, 对$\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathscr{X}^*$.

证明: $S_n(x) := \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i$.

(⇒) 若$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界. 则$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M > 0$, 使得$\|S_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq M$.

$$\|C_n(x)e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq 2M\|x\|_{\mathscr{X}},$$

而 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq 2M\|e_n\|_{\mathscr{X}}^{-1}$. 故$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathscr{X}^*$.

(⇐) 若$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n \in \mathscr{X}^*$, 而 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n > 0$, 使得$\|C_n\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq M_n$. 由$\|x - S_n(x)\| \to 0, n \to \infty$. 故$\exists N_0 > 0$, 当$n > N_0$ 时,

$$\|S_n(x)\| \leq \|x\|_{\mathscr{X}} + 1. \tag{1.2.1}$$

又$n \in \{1, 2, \cdots, N_0\}$,

$$\|S_n(x)\|_{\mathscr{X}} = \|\sum_{i=1}^n C_i(x)e_i\|_{\mathscr{X}} \leq M_0 N_0 \|e_0\|_{\mathscr{X}} \|x\|_{\mathscr{X}}, \tag{1.2.2}$$

其中$M_0 := \max\{M_1, \cdots, M_{N_0}\}$, $\|e_0\|_{\mathscr{X}} := \max\{\|e_1\|, \cdots, \|e_{N_0}\|\}$. 由(1.2.1) 和(1.2.2)知, $\exists \widetilde{M} > 0, \forall x \in \mathscr{X}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|_{\mathscr{X}} \leq \widetilde{M}.$$

则由共鸣定理, 知$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致有界. □

习题 1.2.3 证明: 若$\mathscr{X}$为无穷维$Banach$空间, 则$\mathscr{X}$上紧算子没有有界逆.

证明: 若不然, $A \in \mathfrak{C}$且A有有界逆, 即$A^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 由命题1.2.6(vi) 可知, $AA^{-1} = I \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$. $\forall B \in \mathscr{X}$且$B$ 为有界集, $\overline{I(B)}$为$\mathscr{X}$ 中的紧集. 从而$\overline{B}$为$\mathscr{X}$中的紧集, 故$\overline{B}$自列紧.

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \subset \overline{B}$, 由$\overline{B}$ 是自列紧的知$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列, 故B是列紧的. 由[2]推论1.4.30: "B^*空间$\mathscr{X}$ 是有穷维的, 当且仅当任意有界集是列紧的." 可知$\mathscr{X}$ 是有穷维的. 矛盾. □

习题 1.2.4 设$\mathscr{X}$为$Banach$空间, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$. 满足对$\forall x \in \mathscr{X}$,

$$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha\|x\|_{\mathscr{X}}.$$

其中α为一正常数. 证明A紧当且仅当$\mathscr{X}$是又穷维的.

证明: ($\Leftarrow$)若$\dim \mathscr{X} < \infty$. 由注记1.2.4知, $A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$.

($\Rightarrow$) 令$Ax = \theta$. 若$\|Ax\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha\|x\|_{\mathscr{X}}$, 知$x = \theta$. 故$A$为单射. 从而$A^{-1}$存在. $\forall x \in \mathscr{X}$, 令$y = Ax$. 则

$$\|y\|_{\mathscr{X}} \geq \alpha\|A_{-1}y\|_{\mathscr{X}} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\mathscr{X}} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

故A有有界逆. 由习题3知, $\dim \mathscr{X} < \infty$. □

习题 1.2.5 设$p \in [1, \infty]$. $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 且$\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$. 证明算子

$$T : \{\xi_n\} \to \{\omega_n\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

是ℓ^p上的紧算子.

证明: $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in \ell^p$. 令$T_N\xi = (\omega_1\xi_1, \omega_2\xi_2, \cdots, \omega_n\xi_n, 0, \cdots)$. 下证$T_N\xi$为$\ell^p$上的有界线性算子.

①线性: $\forall \xi, \eta \in \ell^p$,

$$\begin{aligned} T_N(\alpha\xi + \beta\eta) &= (\omega(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1), \cdots, \omega(\alpha\xi_N + \beta\eta_N), 0, \cdots) \\ &= (\alpha\omega_1\xi_1, \cdots, \alpha\omega_N\xi_N, 0, \cdots) + (\alpha\omega_1\eta_1, \cdots, \alpha\omega_N\eta_N, 0, \cdots) \\ &= \alpha T_N\xi + \beta T_N\eta. \end{aligned}$$

②有界性:

$$\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T_N\xi\|_{\ell^p} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^{N} |\omega_i\xi_i|^p\right)^{1/p}.$$

令$M = \max\limits_{1\le i\le N}\{|\omega_i|\}$. 则

$$\begin{aligned}\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} &\le M \sup_{\|\ell^p\|=1} \left(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p\right)^{1/p}\\ &\le M \sup_{\|\ell^p\|=1} \|\xi\|_{\ell^p}\\ &= M.\end{aligned}$$

由①, ②知 $T_N \in \mathscr{L}(\ell^p)$. 再由注记1.2.4及$\dim R(T_N) < \infty$知$T_N \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. 因

$$\|T_N\xi - T\xi\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |\omega_i\xi_i|^P\right)^{1/p} \le \sup_{n>N} |\omega_n|\|\xi\|_{\ell^p}.$$

故

$$\|T - T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T\xi - T_N\xi\|_{\ell^p} \le \sup_{n\ge N} |\omega_n| \to 0, N \to \infty.$$

由命题1.2.6(iii)知$T \in \mathfrak{C}(\ell^p)$. □

习题 1.2.6 设H是*Hilbert*空间, A是H上紧算子. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是H 的规范正交集. 证明

$$\lim_{n\to\infty} (Ae_n, e_n) = 0.$$

证明: 因$\{e_n\}$为H的规范正交集, 所以由Bessel不等式有$\forall x \in \mathscr{X}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \le \|x\|^2$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} (x, e_n) = 0, \forall x \in H$ 成立.

$\forall f \in \mathscr{X}^*$, 由F·Riesz定理, 存在唯一的$y_f \in \mathscr{X}$, 使$f(x) = (x, y_f)$. 故$f(e_n) = (e_n, y_f) = \overline{(y_f, e_n)}$, 由于$y_f \in \mathscr{X}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}(y_f, e_n) = 0$. 于是$\lim\limits_{n\to\infty} \overline{(y_f, e_n)} = 0$, 从而$\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = 0$, 故$e_n \rightharpoonup 0$.

由命题1.2.14知, A是全连续算子, 故$Ae_n \to 0$. 由[2]习题2.5.18知, 在H中$x_n \rightharpoonup x_0, y_n \to y_0$, 有$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}(Ae_n, e_n) = 0$. □

习题 1.2.7 证明注记*1.2.23*中的$\ell^2(\Gamma)$为*Hilbert*空间.

证明: 首先证明$\ell^2(\Gamma)$为内积空间.

①$(f,g)=\sum_{x\in\Gamma}f(x)g(x)=\sum_{x\in\Gamma}g(x)f(x)=(g,f)$.

②$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2\geq 0$.

③$(f,f)=\sum_{x\in\Gamma}[f(x)]^2=0\Leftrightarrow f(x)\equiv 0$.

下证完备性. 任取$\ell^2(\Gamma)$中的基本列$f^{(n)}$, 则

$$\|f_m-f_n\|_{\ell^2(\Gamma)}:=\left\{\sum_{x\in\Gamma}|f_m(x)-f_n(x)|^2\right\}^{1/2}\to 0,m,n\to\infty.$$

那么, $|f_m(x)-f_n(x)|\to 0,m,n\to\infty$. 即$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\mathbb{R}$中的Cauchy 列. 可设其极限函数

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x),x\in\cup_{n=1}^{\infty}\{x\in\Gamma:f_n(x)\neq 0\},\\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_{\ell^2(\Gamma)}&=\left\{\sum_{x\in\Gamma}\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|^2\right\}^{1/2}\\ (\text{Fatou引理})&\leq\varliminf_{m\to\infty}\left\{\sum_{x\in\Gamma}|f_n(x)-f_m(x)|^2\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

再令$n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\ell^2(\Gamma)}\leq\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{x\in\Gamma}|f_n(x)-f_m(x)|^2\right\}=0.$$

即$f_n\to f$ in $\ell^2(\Gamma)$. $\|f\|_{\ell^2(\Gamma)}\leq\|f_n-f\|_{\ell^2(\Gamma)}+\|f_n\|_{\ell^2(\Gamma)}<\infty$. 完备性得证. □

习题 1.2.8 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$为*Hilbert*空间. 证明$\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})}=\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.9 设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, $\mathscr{Y}$为具有*Schauder*基的*Banach*空间. 证明$\overline{F(\mathscr{X},\mathscr{Y})}=\mathfrak{C}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

证明: 同书中定理. □

习题 1.2.10 (补充题) 定义$T:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\ \{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}\mapsto\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\}_{i\in\mathbb{N}}.\end{cases}$ 其中$\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$. 满足$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty$.

i) 证明T是ℓ^2上的紧算子.

ii) 举例说明: 存在无穷维的矩阵(a_{ij})使$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\infty$. 但按上述定义的$T$ 仍然是紧算子.

iii) 若$\forall i\neq j, a_{ij}=0$. 证明: T是紧算子$\Longleftrightarrow a_{mm}\to 0, n\to\infty$.

证明: i) 令$T_N(\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}):=\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,\cdots,\sum_{j=1}^{\infty}a_{Nj}\xi_j,0,\cdots\}$, 则$\dim(R(T))<\infty$. 往证$T_N\in\mathscr{L}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned}\|T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^2)}&:=\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\|T_N\xi\|_{\ell^2}\\&=\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\left\{\sum_{i=1}^{N}|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j|^2\right\}^{1/2}\\(\text{Cauchy-Schwarz不等式})&\le\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right\}<\infty.\end{aligned}$$

从而$T_N\in F(\ell^2)$. 由注记知$T_N\in\mathfrak{C}(\ell^2)$.

$$\begin{aligned}\|T-T_N\|_{\mathscr{L}(\ell^2)}&=\sup_{|\xi|_{\ell^2}=1}\left\{\sum_{i=N+1}^{\infty}|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j|^2\right\}^{1/2}\\&\le\sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1}\left\{\sum_{i=N+1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2)(\sum_{j=1}^{\infty}|xi_j|^2)\right\}^{1/2}\\&=\left\{\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right\}^{1/2},\ N\to\infty.\end{aligned}$$

从而由命题1.2.6(iii)知, $T\in\mathfrak{C}(\ell^2)$.

ii) 令

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\cdots&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\0&0&\cdots&\frac{1}{\sqrt{n}}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

则 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$. 由例题1.3.7知, T 为紧算子.

iii) 由习题1.2.5知, $a_{m,m} \to 0, m \to 0 \Longrightarrow T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$. 若$T \in \mathfrak{C}(\ell^2)$, 则$T \in \mathscr{L}(\ell^2)$. 于是

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\ell^2)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^2}=1} \|T\xi\|_{\ell^2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

则$\lim\limits_{m\to\infty} a_{m,m} = 0$. □

1.3 紧算子的谱理论

习题 1.3.1 *举例说明Banach空间$\mathscr{X}$及$A \in \mathfrak{C}(\mathscr{X})$, 但$0 \notin \sigma(A)$.*

解：固定$n \in \mathbb{N}$, 取$\mathscr{X} := \mathbb{R}^n$. 定义$A := I$. 对$\mathscr{X}$ 中任意有界集B, $\overline{I(B)} = \overline{B}$ 为有界闭集. 由于有限维Banach 空间中紧集$\Longleftrightarrow$有界闭集. 故I 为紧算子. 又由于$I^{-1} = I \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. 故$0 \notin \sigma(A)$.

习题 1.3.2 *举例说明注记1.3.4情形(i)中的连续谱, 情形(ii)中的连续谱, 剩余谱, 情形(iii) 中的剩余谱.*

解：(i) 取$\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}, \lambda_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{Z}_+$且$\lambda_i \to 0, i \to \infty$. 定义

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

和

$$T_1 : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\cdots, \lambda_2 x_{-2}, \lambda_1 x_{-1}, \lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots), \end{cases}$$

则T_1是紧算子. 事实上, 对于$\forall m \in \mathbb{N}$. 定义

$$T_1^{(m)}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \{\cdots, 0, \lambda_m x_{-m}, \cdots, \lambda_0 x_0, \cdots, \lambda_m x_m, 0, \cdots\},$$

则$T_1^{(m)} \in \mathscr{F}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由$\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ 知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N^* \in \mathbb{N}$, 使当$i > N^*$时, $|\lambda_i| < \varepsilon$. 此时

$$\begin{aligned} \|T_1^{(m)} - T_1\|_{\mathscr{L}(\ell^2(Z))} &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1(m) - T_1)x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \left\{ \sum_{|n|>m} |\lambda_n|^2 |x_n|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

对于T_1, 寻找到了一列有穷秩算子, 且依范数收敛到T_1, 故$T_1 \in \mathfrak{C}(\ell^2(\mathbb{Z}))$. 由于$\dim(\ell^2(\mathbb{Z})) = \infty$, 又由定理1.3.1(i)知, $0 \in \sigma(T_1)$.

先证$\sigma(T_1) = \{0\}$. 事实上, 对$\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. 若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足$(\lambda I - T_1)(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \theta$, 则$\lambda x_n - \lambda_{|n-1|}x_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. 故

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\lambda^n}x_0, n \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\lambda^{|n|}}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{|n|}}x_0, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

由此及$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$有$x_0 = 0 \Longrightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \theta$. 即$\sigma(T_1) = \{0\}$.

再证$\{0\} = \sigma_c(T_1)$. 注意到若$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 满足$T_1(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \theta$. 则对$\forall n \in \mathbb{Z}, \lambda_{|n|}x_n = 0 \Rightarrow x_n = 0$. 所以$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \theta$. 即$0 \notin \sigma_p(T_1)$且$T_1$为单射, 因此$T_1^{-1}$存在. 又因为$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset R(T_1)$ 且$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$为$\ell^2(\mathbb{Z})$ 的一组Schauder 基. 故$\overline{R(T_1)} = \ell^2(\mathbb{Z})$. 因此$\{0\} = \sigma_c(T_1)$. 即$T_1$满足要求.

(ii)-(a)(连续谱) 令$\ell^2(\mathbb{Z}), T_1$如(i)中. 给定$m \in \mathbb{N}$ 与$\{\lambda_1\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$. 定义

$$T_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m \\ (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_m x_m) \end{cases}$$

和

$$A_1 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^m \oplus \ell^2(\mathbb{Z}) \\ x \oplus y \mapsto T_2 x \oplus T_1 y \end{cases}$$

且对$\forall x \oplus y \in \mathbb{C}^m + \ell^2(\mathbb{Z}), \|x+y\|_{\mathbb{C}^m\oplus\ell^2(\mathbb{Z})} := \|x\|_{\mathbb{C}^m} + \|y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. 则$A_1$ 为紧算子且$\sigma(A_1) = \sigma_c(A_1) \cup \sigma_p(A_1)$. 其中$\sigma_c(A_1) = \{0\}, \sigma_p(A_1) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(ii)-(b)(剩余谱) 令T_2如(a)中所示, 给定$\{\mu_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{C}, \mu_i \neq 0. \forall i \in \mathbb{N}$ 且$\mu_i \to 0, i \to \infty$. 定义

$$T_3 : \begin{cases} \ell^2 \to \ell^2 \\ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \{0, \mu_1 a_1, \mu_2 a_2, \cdots\} \end{cases}$$

和

$$A_2 : \begin{cases} \mathbb{C}^m \oplus \ell^2 \to \mathbb{C}^m \oplus \ell^2 \\ x \oplus y \mapsto T_2 x \oplus T_3 y. \end{cases}$$

且对$\forall x \oplus y \in \mathbb{C}^m \oplus \ell^2, \|x \oplus y\|_{\mathbb{C}^m\oplus\ell^2} := \|x\|_{\mathbb{C}^m} + \|y\|_{\ell^2}$. 则$A_2$为紧算子且$\sigma(A_2) = \sigma_r(A_2) \cup \sigma_p(A_2)$. 其中$\sigma_r(A_2) = \{0\}, \sigma_p(A_2) = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$.

(iii) 令T_3和$\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$如(ii)所示. 定义

$$T_4:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\ \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}\mapsto\{\mu_k a_k\}_{k\in\mathbb{N}}.\end{cases}$$

和

$$A_3:\begin{cases}\ell^2\oplus\ell^2\to\ell^2\oplus\ell^2\\ x\oplus y\mapsto T_3x\oplus T_4y.\end{cases}$$

且对$\forall x\oplus y\in\ell^2\oplus\ell^2$, $\|x\oplus y\|_{\ell^2\oplus\ell^2}:=\|x\|_{\ell^2}+\|y\|_{\ell^2}$. 则$A_3$ 为紧算子且$\sigma(A_3)=\sigma_r(A_3)\cup\sigma_p(A_3)$, 其中$\sigma_r(A_3)=\{0\},\sigma_p(A_3)=\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

习题 1.3.3 设$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$,在$\ell^2$上定义算子

$$A:(x_1,x_2,\cdots)\to(a_1x_1,a_2x_2,\cdots)$$

(1) 证明: A在ℓ^2上有界当且仅当$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为有界数列.
(2) 若A有界. 求$\sigma(A)$.

证明: (1)($\Rightarrow$) 反证法. 若$\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|=\infty$, 对$\forall k\in\mathbb{N}$, 取$e_k:=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$. 则$\|Ae_k\|_{\ell^2}=1$. 故由算子范数定义知$\|A\|\geq\|Ae_k\|_{\ell^2}=|a_k|$. 因此$\infty=\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_k|\leq\|A\|$. 这与$A\in\mathscr{L}(\ell^2)$ 矛盾. 即$\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<\infty$. 即$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为有界数列.

($\Leftarrow$) A显然为线性算子且对$\forall x\in\ell^2$, 有

$$\|Ax\|_{\ell^2}=\left[\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_ix_i|^2\right]^{1/2}\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|\|x\|_{\ell^2}.$$

于是$\|A\|\leq\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<\infty$. 故$A\in\mathscr{L}(\ell^2)$.

(2) 取$\lambda:=a_i$, 和$e_i=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots),i\in\mathbb{N}$. 因$(\lambda I-A)e_i=\theta$. 故$\lambda\in\sigma_p(A)\subset\sigma(A)$. 又由$A$ 有界及推论1.1.11 知$\sigma(A)$ 闭. 故$\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}\subset\sigma(A)$.

下证$\sigma(A)\subset\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 为此只需证明$\forall\lambda\in\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 有$\lambda\notin\sigma(A)$. 事实上, 对$\forall\lambda\notin\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$与$x\in\ell^2$ 满足

$$(\lambda I-A)(x_1,x_2,\cdots)=((\lambda-a_1)x_1,(\lambda-a_2)x_2,\cdots)=\theta.$$

有$x_i=0,\forall i\in\mathbb{N}$, 即$x=\theta$. 故$(\lambda I-A)$ 为单射, 即$(\lambda I-A)^{-1}$ 存在. 注意到对$\forall\lambda\notin\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$, 存在正常数$c$, 使得对$\forall i\in\mathbb{N}$, 有$|\lambda-a_i|>c$. 由此及$(\lambda I-A)^{-1}$ 存在且对$\forall x\in\ell^2$,

$$(\lambda I-A)^{-1}(x_1,x_2,\cdots)=(\frac{1}{\lambda-a_1}x_1,\frac{1}{\lambda-a_2}x_2,\cdots)$$

知$(\lambda I-A)^{-1}$有界. 又因若$y_i=(y_1,y_2,\cdots)\in\ell^2$, 则$x=(x_1,x_2,\cdots):=(\frac{y_1}{\lambda-a_1},\frac{y_2}{\lambda-a_2},\cdots)\in\ell^2$, 且$(\lambda I-A)x=y$. 即$R(\lambda I-A)=\ell^2$. 故$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\ell^2)$. 因此$\lambda\in\sigma(A)$. 从而有$\sigma(A)\subset\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$. 综上得$\sigma(A)=\overline{\{a_i:i\in\mathbb{N}\}}$. □

习题 1.3.4 在$C[0,1]$中考虑映射$T:x(t)\to\int_0^t x(s)ds,\forall x\in C[0,1]$. 证明

(i) T是紧算子.

(ii) 求$\sigma(T)$及T的一个非平凡的闭的不变子空间.

证明: (i) 定义

$$k(s,t)=\begin{cases}1,0\le s\le t\le 1\\ 0,0\le t<s\le 1\end{cases},$$

则$k(s,t)\in L^2([0,1]\times[0,1])$. 且对$\forall x\in C[0,1]$和$t\in[0,1]$,

$$Tx(t)=\int_0^t x(s)ds=\int_0^1 k(s,t)x(s)ds.$$

由于$C([0,1]\times[0,1])$ 在$L^2([0,1]\times[0,1])$中稠, 故$\exists\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C([0,1]\times[0,1])$. 使得$k_n\to k$ in $L^2([0,1]\times[0,1])$. 注意到对$\forall x\in C([0,1])$ 与$t\in[0,1]$. 类似于例1.2.17 可证

$$T_Nx(t):=\int_0^1 k_n(s,t)x(s)ds$$

为紧算子. 且有Holder不等式知

$$\begin{aligned}\|T_Nx-Tx\|_{L^2}&=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1[k_n(s,t)-k(s,t)]x(s)ds\right|^2dt\right\}^{1/2}\\&\le\left\{\int_0^1\left[\int_0^1|k_n(s,t)-k(s,t)|^2\right]\left[\int_0^1|x(s)|^2ds\right]dt\right\}^{1/2}\\&\le\|x\|\|k_n-k\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}.\end{aligned}$$

所以

$$\|T_n-T\|\le\|k_n-k\|_{L^2([0,1]\times[0,1])}\to 0,n\to\infty.$$

由此及命题1.2.6(iii)知T为紧算子.

(ii) 由T紧及定理1.3.1(i)知$0\in\sigma(T)$. 下证$\sigma(T)=\{0\}$. 为此只需证明$r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|^{1/n}=0$. 事实上, 注意到对$\forall x\in C[0,1]$ 与$t\in[0,1]$. 有

$$\begin{aligned}Tx(t)&=\int_0^t x(s)ds\\T^2x(t)&=\int_0^t\int_0^u x(s)dsdu=\int_0^t(t-s)x(s)ds.\end{aligned}$$

由此及数学归纳法知, 对$\forall n\in\mathbb{N}$,

$$T^n x(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}x(s)ds.$$

故

$$\|T^n x\|\le\frac{1}{(n-1)!}\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t (t-s)^{n-1}x(s)ds\right|\le\frac{1}{n!}\|x\|.$$

于是$\|T^n\|\le\frac{1}{n!}$. 故$\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=0$, 因此$\sigma(T)=\{0\}$.

下面说明T存在非平凡不变子空间, 为此只需证$\{0\}=\sigma_r(T)$. 事实上, 由T 的定义与微积分基本定理知$R(T)=\{y\in C^1[0,1]:y(0)=0\}$. 注意到若$Tx=\theta$. 则$x=\theta$. 故$T$ 为单射, 即T^{-1}存在. 由此及$x\equiv 1\in C[0,1]$, 但$1\notin\overline{R(T)}$ 知$0\in\sigma_r(T)$. 故T 存在非平凡的不变子空间.

令$\Omega:=\{y\in C[0,1]:y(0)=0\}$. Ω即为一个非平凡的不变子空间. 下证Ω闭. $\forall\{x_n\}\subset\Omega$且$x_n\to x$ in $C[0,1]$.

$$|x(0)|=|x(0)-x_n(0)|\le\|x-x_n\|\to 0, n\to\infty.$$

于是$x(0)=0$. 即$x\in\Omega$, 故Ω闭. □

习题 1.3.5 (补充题) 给定数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定义$A:\begin{cases}\ell^1\to\ell^1\\ \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to\{a_ix_i\}_{i\in\mathbb{N}}.\end{cases}$ 证明:

(1) $A\in\mathscr{L}(\ell^1)\Longleftrightarrow\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<\infty$.

(2) $A^{-1}\in\mathscr{L}(\ell^1)\Longleftrightarrow\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|>0$.

(3) $A\in\mathfrak{C}(\ell^1)\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明: (1) 同习题1.2.2(i).

(2) ($\Rightarrow$) 若$A^{-1}\in\mathscr{L}(\ell^1)$, 则$\exists M\in(0,\infty)$. 使得$\forall x\in\ell^1,\|Ax\|_{\ell^1}\ge M\|x\|_{\ell^1}$. 取$e_n:=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots),\forall n\in\mathbb{N}$. 则有$|a_n|=\|Ae_n\|_{\ell^1}\ge M\|e_n\|_{\ell^1}=m$. 于是$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|>0$.

($\Leftarrow$) 若$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|>0$, 则对$\forall n\in\mathbb{N}$, 有$|a_n|>0$, 定义

$$B:\begin{cases}\ell^1\to\ell^1\\ (x_1,x_2,\cdots)\mapsto(a_1^{-1}x_1,a_2^{-1}x_2,\cdots)\end{cases},$$

则$AB=BA=I$. 故$A^{-1}=B$. 由(1)知,

$$\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(\ell^1)}=\|B\|_{\mathscr{L}(\ell^1)}\le\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n^{-1}|=\frac{1}{\inf_{n\in\mathbb{N}}|a_n|}<\infty.$$

故$A^{-1} \in \mathscr{L}(\ell^1)$.

(3) ($\Leftarrow$) 同习题1.2.5.

($\Rightarrow$) 反证法. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 则$\exists \varepsilon_0 > 0$, 及$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$的子列$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. 使得对于$\forall k \in \mathbb{N}, |a_{n_k}| \geq \varepsilon_0 > 0$, 取$e_{n_k} := (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$. 则$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$为$\ell^1$中有界列, 但对于$\forall l \in \mathbb{N}, \|Ae_k - Ae_{n_{k_l}}\|_{\ell^1} = |a_{n_k}| + |a_{k_l}| \geq 2\varepsilon_0 > 0$. 即$\{Ae_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$没有收敛子列. 从而$A \notin \mathscr{L}(\ell^1)$, 矛盾. □

1.4 Hilbert-Schmidt 定理

习题 1.4.1 设H为复*Hilbert*空间, 且A为H上的有界线性算子. 证明$A + A^*, AA^*, A^*A$均为对称算子, 且

$$\|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A\|^2_{\mathscr{L}(H)}.$$

证明: (i) ①

$$\begin{aligned}((A + A^*)x, y) &= (Ax, y) + (A^*x, y) \\ &= (x, A^*y) + (x, Ay) \\ &= (x, (A + A^*)y).\end{aligned}$$

所以$A + A^*$是对称算子.

② $(AA^*x, y) = (A^*x, A^*y) = (x, AA^*y)$. 所以$AA^*$是对称算子.

③ $(A^*Ax, y) = (Ax, Ay) = (x, A^*Ay)$. 所以$A^*A$是对称算子.

(2) 因为$(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2_H$. 所以

$$\|AA^*\|_{\mathscr{L}(H)} = \sup_{\|x\|_H=1} |(AA^*x, x)| = \sup_{\|x\|_H=1} \|A^*x\|^2_H = \|A^*\|^2_{\mathscr{L}(H)}.$$

同理

$$\|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)} = \sup_{\|x\|_H=1} |(A^*Ax, x)| = \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|^2_H = \|A\|^2_{\mathscr{L}(h)}.$$

又因$\|A^*\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A\|_{\mathscr{L}(H)}$, 故$\|AA^*\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A^*A\|_{\mathscr{L}(H)} = \|A\|_{\mathscr{L}(H)^2}$. □

习题 1.4.2 设H为复*Hilbert*空间, 且A为H上的有界线性算子, 满足$(Ax, x) \geq 0, \forall x \in H$, 且$(Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$. 证明

$$\|Ax\|^2_H \leq \|A\|_{\mathscr{L}(H)}(Ax, x), \forall x \in H.$$

证明: 设$a(x,y)=(Ax,y)$, 则$a(\cdot,\cdot)$为$H\times H\to\mathbb{K}$ 上的共轭双线性函数, 由《泛函分析(上册)》命题1.6.9有

$$|a(x,y)|\le[a(x,x)a(y,y)]^{1/2},\forall x,y\in H.$$

那么

$$|(Ax,y)|^2\le(Ax,x)(Ay,y).$$

在上式中, 令$y=Ax$, 则

$$\begin{aligned}\|Ax\|_H^4&\le(Ax,x)(A^2x,Ax)\\&\le(Ax,x)\|A^2x\|_H\|Ax\|_H.\end{aligned}$$

所以$\|Ax\|_H^4\le\|A\|_{\mathscr{L}(H)}\|Ax\|_H^2$. 即得$\|Ax\|_H^4\le\|A\|_{\mathscr{L}(H)}(Ax,x)$. □

习题 1.4.3 *设H为复Hilbert空间, 且A为H上的对称紧算子. 令*

$$m(A):=\inf_{\|x\|_H=1}(Ax,x),\ M(A):=\sup_{\|x\|_H=1}(Ax,x).$$

证明:

(1) 若$m(A)\neq0$, 则$m(A)\in\sigma_p(A)$;

(2) 若$M(A)\neq0$, 则$M(A)\in\sigma_p(A)$.

证明: (1) 因A为紧算子, 则$\sigma(A)\backslash\{0\}=\sigma_p(A)\backslash\{0\}$. 从而为证$m(A)\in\sigma_p(A)$, 只需证$m(A)\in\sigma(A)$. 令$B:=A-m(A)I$, 则$B\in\mathscr{L}(H)$, 且对$\forall x,\|x\|_H=1$, 有$(Bx,x)=(Ax,x)-m(A)\ge0$. 从而对$\forall x\in H,(Bx,x)\ge0$. 从而对$\forall t\in R$ 及$\|x\|_H=1$,

$$0\le(B(tBx+x),tBx+x)=t^2(B^2x,Bx)+2t\|Bx\|_H+(Bx,x).$$

于是$4\|Bx\|_H^4\le4\|B\|_H^3(Bx,x)$. 取$\inf\limits_{\|x\|_H=1}=0$, 若$m(A)\notin\sigma(A)$, 则$m(A)\in\rho(A)$. 从而$B^{-1}\in\mathscr{L}(H)$. 取$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\{x\in H:\|x\|_H=1\}$使得$\|Bx_n\|\to0,n\to\infty$, 则

$$1=\|x_n\|=\|B^{-1}Bx_n\|\le\|B^{-1}\|\|Bx_n\|\to0.$$

矛盾. 故$m(A)\in\sigma(A)$.

(2) 记$B:=-A$, 则

$$m(B)=\inf_{\|x\|_H=1}(Bx,x)=\inf_{\|x\|_H=1}(-Ax,x)=-\sup_{\|x\|_H=1}(Ax,x)=-M(A).$$

由(1)知$m(B)\in\sigma_p(B)$, 从而$-M(A)\in\sigma_p(-A)$. 故$M(A)\in\sigma_p(A)$. □

习题 1.4.4 设H为复*Hilbert*空间, 且A为H上的对称紧算子. 证明

(1) 若A非零, 则A至少有一个非零本征值.

(2) 若M是A的非零闭不变子空间, 则M上必含有A 的本征值.

证明: (1) 由定理1.4.6知, $\exists x_0 \in H, \|x_0\|_H = 1$使得

$$|(Ax_0, x_0)| = \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x) = \|A\|_{\mathscr{L}(H)},$$

且$Ax_0 = (Ax_0, x_0)x_0$. 因为A非零, $\|x_0\|_H = 1$, 故$(Ax_0, x_0) \neq 0$, 且(Ax_0, x_0)位A的非零本征值.

(2) 由命题1.4.5(ii)及命题1.2.6(iv)知, $A|_M$还是对称紧算子.

若$A|_M = \theta$, 则$0 \in \sigma_p(A|_M)$. 事实上, $\forall \theta \neq x_0 \in M$, $A|_M x_0 = 0 = x_0$.

若$A|_M \neq 0$, 同(1)中的结果, $\exists x_0 \in M, \|x_0\|_H = 1$. 使得$A|_M x_0 = (A|_M x_0, x_0)x_0$.

于是$(A|_M x_0, x_0)$为$A|_M$的本征值. □

习题 1.4.5 设H为复*Hilbert*空间. 则$P \in \mathscr{L}(H)$为H上的正交投影算子当且仅当

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2, \ \forall x \in H.$$

证明: $(\Rightarrow)$ 因$P \in \mathscr{L}(H)$是H的正交投影算子. 设M 是一个闭的线性子空间. 由正交分解定理, 对$\forall x, y \in H$, 有

$$x = x_M + x_{M^\perp}, \ (x_M \in M, x_{M^\perp} \in M^\perp)$$
$$y = y_M + y_{M^\perp}. \ (y_M \in M, y_{M^\perp} \in M^\perp)$$

有P的定义知, $x_M = Px, y_M = Py$. 故

$$(Px, y) = (x_M, y_M + y_{M^\perp}) = (x_m, y_m) = (x, Py).$$

所以P对称. 因此$(P^2x, x) = (Px, Px) = \|Px\|_{H^2}$. 又因$P^2 = P$, 故$(Px, x) = \|Px\|_H^2$.

$(\Leftarrow)$ 因$(Px, x) = \|Px\|_H^2 \in \mathbb{R}$, 故$P$是对称算子(由命题1.4.5(i)). 又因

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2 = (Px, Px) = (P^2x, x),$$

所以$((P - P^2)x, x) = 0, \forall x \in H$. 再由[2] 习题1.6.1中的极化恒等式, 有

$$((P - P^2)x, y) = 0, \forall x, y \in H.$$

所以$P=P^2$.

令$M = P(H)$, 可知M闭. 事实上, 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, 且有$Px_n \to y$, $P^2x_n = Px_n \to Py$. 所以$P = Py \in M$. 故M是闭的. 下证P是正交投影算子. 对$\forall x \in H$, 有$x = Px + (I-P)x, Px \in M$. 又因$\forall y \in H$,

$$((I-P)x, Py) = (x, Py) - (Px, Py) = (x, Py) - (x, P^2y) = 0.$$

从而$(I-P)x \in M^{\perp}$, 即P为$H \to M$的正交投影算子.

□

第二章　Banach 代数

2.1　代数准备知识

习题 2.1.1 *在注记2.1.8中, 若$\mathscr{A}$为一个Banach代数, 并在$\hat{\mathscr{A}}$ 上赋予范数*

$$\|(x,\alpha)\| := \|x\| + |\alpha|\|.$$

证明$\hat{\mathscr{A}}$是一个Banach代数.

证明: ① 由习题2.1.3知, $\hat{\mathscr{A}}$是一个代数.

② 首先说明$\|\cdot\|$是范数. $\forall (a,\lambda)\in\hat{\mathscr{A}}$,

i) $\|(a,\lambda)\| \geq 0$显然成立. $\|(a,\lambda)\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| + \|\lambda\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| = 0 = \|\lambda\| \Leftrightarrow (a,\lambda) = (\theta, 0)$.

ii) $\|(a,\lambda)+(b,\mu)\| = \|(a+b,\lambda+\mu)\| = \|a+b\| + |\lambda+\mu| \leq \|a\| + \|b\| + |\lambda| + |\mu| = \|(a,\lambda)\| + \|(b,\mu)\|$.

iii) $\|\alpha(a,\lambda)\| = \|(\alpha a, \alpha\lambda)\| = \|\alpha a\| + \|\alpha\lambda\| = |\alpha|(\|a\| + |\lambda|) = |\lambda|\|(a,\lambda)\|$.

再证其完备性. 设$\{(a_n,\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$为$\hat{\mathscr{A}}$中的基本列. 由$\mathscr{A}$ 和$\mathbb{C}$的完备性知, $\exists a\in\mathscr{A}, \lambda\in\mathbb{C}$, 使

$$\|a_n - a\| \to 0, |\lambda_n - \lambda| \to 0.$$

那么

$$\|(a_n,\lambda_n) - (a,\lambda)\| = \|a_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \to 0.$$

故$\hat{\mathscr{A}}$完备. $\hat{\mathscr{A}}$在$\|\cdot\|$下是一个完备的Banach空间.

③ 最后证明$\|(a,\lambda)(b,\lambda)\| \le \|(a,\lambda)\|\|(b,\lambda)\|$.

$$\begin{aligned}\|(a,\lambda)(b,\mu)\| &= \|(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu)\| \\ &= \|ab+\lambda b+\mu a\| + \|\lambda\mu\| \\ &\le \|ab\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda\mu| \\ &\le \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu| \\ &= (\|a\|+|\lambda|)(\|b\|+|\mu|) \\ &= \|(a,\lambda)\|\|(b,\mu)\|.\end{aligned}$$

综上， $\hat{\mathscr{A}}$是一个Banach代数. □

习题 2.1.2 证明定义*2.1.1*中$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$等价于

$$\begin{cases}(a+b)c = ac+bc \\ a(c+d) = ac+ad.\end{cases}$$

且$(\lambda\mu)(ab) = (\lambda a)(\mu b)$等价于

$$\begin{cases}\lambda(ab)c = (\lambda a)b \\ \lambda(ab) = a(\lambda b).\end{cases}$$

证明: ① $(\Rightarrow)$ 若$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd$. 取$d=\theta$, 则$(a+b)c = ac+bc$. 同理取$b=\theta$, 则$a(c+d) = ac+ad$.

$(\Leftarrow)$ 若

$$\begin{cases}(a+b)c = ac+bc \\ a(c+d) = ac+ad.\end{cases}$$

则$(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d = ac+bc+ad+bd$.

② $(\Rightarrow)$ 令$\mu=1$, 得$\lambda(ab) = (\lambda a)b, \forall\lambda\in\mathbb{C}$. 令$\lambda=1$, 得$\mu(ab) = a(\mu b), \forall\mu\in\mathbb{C}$.

$(\Leftarrow)$ $(\lambda\mu)(ab) = (\lambda\mu a)b = \mu(\lambda a)b = (\lambda a)(\mu b)$. □

习题 2.1.3 设$\hat{\mathscr{A}}$为一个代数, 令$\hat{\mathscr{A}} = \mathscr{A}\times\mathbb{C}$ 并且规定$\hat{\mathscr{A}}$ 上代数运算如下*:*

$$\alpha(a,\lambda)+\beta(b,\mu) := (\alpha a+\beta b, \alpha\lambda+\beta\mu).$$
$$(a,\lambda)(b,\mu) := (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu).$$

$(a,\lambda),(b,\mu)\in\hat{\mathscr{A}}, \alpha\beta\in\mathbb{C}$. 证明$\hat{\mathscr{A}}$ 为一个代数.

证明: ① 易验证$\hat{\mathscr{A}}$满足线性空间的八条性质, 故$\hat{\mathscr{A}}$ 为线性空间.

② 结合律:

$$[(a,\lambda)(b,\mu)](c,\xi)=(a,\lambda)[(b,\mu)(c,\xi)].$$

③

$$[(a,\lambda)+(b,\mu)](c,\xi)=(a,\lambda)(c,\xi)+(b,\mu)(c,\xi),$$

$$(a,\lambda)[(c,\xi)+(d,\eta)]=(a,\lambda)(c,\xi)+(a,\lambda)(d,\eta).$$

④

$$\alpha[(a,\lambda)(b,\mu)]=[\alpha(a,\lambda)](b,\mu),$$

$$\alpha[(a,\lambda)(b,\mu)]=(a,\lambda)[\alpha(b,\mu)].$$

综上, $\hat{\mathscr{A}}$为一个代数. □

习题 2.1.4 (补充题) *设$\mathscr{A}$是一个代数. $x,y\in\mathscr{A}$, 记$G(\mathscr{A})$为$\mathscr{A}$中的全体可逆元.*

i) 若$x,xy\in G(\mathscr{A})$, 证明$y\in G(\mathscr{A})$.

ii) 若$xy,yx\in G(\mathscr{A})$. 证明$x,y\in G(\mathscr{A})$.

iii) 说明可能存在$xy=e$, 但$yx\neq e$的情况.

iv) 若$xy=e$且$yx=z\neq e$. 说明z是非平凡幂等元.$(z^2=z,z\neq 0)$

证明: i) 因$x,xy\in G(\mathscr{A})$. 则$y=x^{-1}xy$. 故$y(x^{-1}xy)^{-1}=e$. 由于$G(\mathscr{A})$是群, 故$y\in G(\mathscr{A})$.

ii) 因$x,y\in G(\mathscr{A})$, 则$xy(xy)^{-1}=e$. 从而$x^{-1}=y(xy)^{-1}$. 即$x\in G(\mathscr{A})$. 类似可证$y\in G(\mathscr{A})$.

iii) 令$\mathscr{A}:=\mathscr{L}(\ell^2)$. 令

$$x:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto(a_2,a_3,\cdots)\end{cases},y:\begin{cases}\ell^2\to\ell^2\\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto(0,a_1,a_2,\cdots)\end{cases}.$$

易知满足条件.

iv) 因为$z^2=(yx)(yx)=y(xy)x=yx=z$, 故只需证$z\neq\theta$. 事实上, 若$z=\theta$, 则$\theta=(yx)y=y(xy)=y$. 从而$xy=x\theta=\theta$. 矛盾. 所以z 是非平凡幂等元. □

2.2 Banach 代数

习题 2.2.1 证明例*2.2.6*中$\mathscr{A}$完备.

证明: S^1是平面上的单位圆周且

$$\mathscr{A} := \{u \in C(S^1) : u(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty\}.$$

范数$\|u\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$.

设$\{u^{(m)}\}$为$\mathscr{A}$中的基本列. $u^{(m)}(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^{(m)} e^{in\theta}$. 则

$$\|u^{(m)} - u^{(\ell)}\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \to 0, m, \ell \to \infty.$$

即对$\forall n \in \mathbb{Z}$, 有$|c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \to 0, m, \ell \to \infty$. 故对$\forall n \in \mathbb{Z}, \{c_n^{(m)}\}$ 为$\mathbb{C}$ 中的基本列. 由$\mathbb{C}$的完备性, 可设其极限为c_n. 令$u(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{in\theta}$. 因为

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]} |(u_j - u)(e^{i\theta})| = \max_{\theta\in[0,2\pi]} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} (c_n^{(j)} - c_n)(e^{i\theta})\right| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(j)} - c_n| \to 0, j \to \infty.$$

即$u_j \rightrightarrows u$. 故$u \in C(S^1)$.

$$\begin{aligned} \|u^{(m)} - u\| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lim_{\ell\to\infty} (c_n^{(m)} - c_n^{\ell}) \\ \text{(Fatou 引理)} &\le \varliminf_{\ell\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}|. \end{aligned}$$

再令$m \to \infty$. 则

$$\lim_{m\to\infty} \|u^{(m)} - u\| \le \lim_{m\to\infty} \varliminf_{\ell\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^{(m)} - c_n^{(\ell)}| = 0.$$

即$u^{(m)} \to u, m \to \infty$. 又

$$\|u\| \le \|u^{(m)} - u\| + \|u^{(m)}\| < \infty.$$

故$u \in \mathscr{A}$. 完备性得证. □

习题 2.2.2 设$\mathscr{B}$及其他记号同定理*2.2.13*且商模$\|[\cdot]\|$定义如定理*2.2.13*的证明. 证明$\|[e]\| = 1$且

$$\inf_{x\in[a],y\in[b]} \|xy\| = \inf_{x\in[a]} \|x\| \inf_{y\in[b]} \|y\|.$$

证明: (1) $\mathscr{B}=\mathscr{A}/J, \|a\|=\inf_{x\in[a]}\|x\|, \forall a\in\mathscr{B}$. 由商模的定义知$\|[e]\|=\inf_{x\in[e]}\|x\|\leq\|e\|=1$. 又因为$J$是极大理想, 故由命题2.1.13 知, $e\notin J$. 故$[e]\neq[\theta]$. 由此及$\|[e]\|=\|[ee]\|=\|[e][e]\|\leq\|[e]\|\cdot\|[e]\|$. 进一步知$\|[e]\|\geq 1$. 故$\|[e]\|=1$.

(2) 一方面, 由下确界的定义, $\forall\varepsilon>0, \exists\widetilde{x}\in[a], \widetilde{y}\in[b]$, 满足

$$\inf_{x\in[a]}\|x\|+\varepsilon\geq\|\widetilde{x}\|\geq 0, \inf_{y\in[b]}\|x\|+\varepsilon\geq\|\widetilde{y}\|\geq 0.$$

故

$$(\inf_{x\in[a]}\|x\|+\varepsilon)(\inf_{y\in[b]}\|y\|+\varepsilon)\geq\|\widetilde{x}\|\cdot\|\widetilde{y}\|\geq\|\widetilde{x}\widetilde{y}\|\geq\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\|.$$

由ε的任意性知

$$\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\|\geq\inf_{x\in[a]}\|x\|\inf_{y\in[b]}\|y\|.$$

另一方面, 由定理2.2.13知, $\mathscr{B}=\mathscr{A}/J\cong\mathbb{C}$. 即对$\forall[a]\in\mathscr{B}, [a]=z[e]$, 其中$[e]$为单位元. $z\in\mathbb{C}, |z|=\|[a]\|$. 故对于$[a],[b]\in\mathscr{B}$. 设$[a]=z_1[e], [b]=z_2[e], z_1, z_2\in\mathbb{C}$且$|z_1|=\|[a]\|, |z_2|=\|[b]\|$. $\forall x\in[a]$, 则$x\in z_1[e]$, 存在$\widetilde{x}\in[e]$, 使$x=z_1\widetilde{x}$. $\forall y\in[b]$, 则$y\in z_2[e]$, 存在$\widetilde{y}\in[e]$, 使$y=z_2\widetilde{y}$. 有$\widetilde{x}\widetilde{y}\in[e]$. 事实上, $\exists x', y'\in J$, 使$\widetilde{x}=e+x', \widetilde{y}=e+y'$. 则$\widetilde{x}\widetilde{y}=e+x'+y'+x'y'$. 由$x', y'\in J$, 故$x'y'\in J$. 故$\widetilde{x}\widetilde{y}\in[e]$. 则

$$\begin{aligned}\inf_{x\in[a],y\in[b]}\|xy\| &= \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[e]}\|(z_1z_2)\widetilde{x}\widetilde{y}\|\\ &= \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[e]}|z_1|\cdot|z_2|\|\widetilde{x}\widetilde{y}\|\\ &= \|[a]\|\cdot\|[b]\|\inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in[e]}\|\widetilde{x},\widetilde{y}\|\\ &\geq\|[a]\|\cdot\|[b]\|\\ &= \inf_{x\in[a]}\|x\|\inf_{y\in[b]}\|y\|.\end{aligned}$$

□

习题 2.2.3 设$\mathscr{A}$是有单位元的$Banach$代数, $a,b\in\mathscr{A}$. 证明:

(1) 若$e-ab$可逆, 则$e-ba$也可逆.

(2) 若非零复数$\lambda\in\sigma(ab)$, 则$\lambda\in\sigma(ba)$.

(3) 若a可逆, 则$\sigma(ab)=\sigma(ba)$.

证明: (1) 设$e-ab$的逆为A, 则$(e-ab)A=e \Rightarrow A-abA=e \Rightarrow bA-babA=eb=b \Rightarrow (e-ab)(bA)=b \Rightarrow (e-ba)(bAa)=ba \Rightarrow (e-ba)(bAa)-(e-ba)=e \Rightarrow (e-ba)(bAa-e)=e$. 同理$(bAa+e)(e-ba)=e$. 故$e-ba$ 可逆.

(2) 若$\lambda \in \sigma(ab)$. 即$\lambda e-ab \notin G(\mathscr{A})$. 要证$\lambda \in \sigma(ba)$. 即要证$\lambda e-ba \notin G(\mathscr{A})$. 利用反证法. 若$\lambda e-ba \in G(\mathscr{A})$. 即$e-ba$ 可逆. 则$e-(\frac{1}{\lambda}b)a$ 可逆. 由(1) 的结论知$e-\frac{1}{\lambda}ab$ 可逆. 故$\lambda e-ab$ 可逆矛盾. 所以$\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 由(2)知, $\sigma(ba)\backslash\{0\}=\sigma(ba)\backslash\{0\}$. 故只需证明, 若$0 \in \sigma(ab)$, 则$0 \in \sigma(ba)$.

若$0 \in \sigma(ab)$. 即$ab \in G(\mathscr{A})$. 即ab可逆, 设其逆为$(ab)^{-1}$. 设a的逆为a^{-1}. 因$a(ba)=(ab)a \Rightarrow ba=a^{-1}(ab)a \Rightarrow ba[a^{-1}(ab)^{-1}a]=e$且$[a^{-1}(ab)a](ba)=e$. 故$ba$可逆. 反之同理. 证毕. □

习题 2.2.4 设$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$是两个可交换的有单位元的$Banach$代数. $\mathscr{B}$ 是半单的. 若φ 是$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的一个同态. 求证φ 是连续的.

证明: 设$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, 且$a_n \to a, \varphi(a_n) \to b$. 则$a \in \mathscr{A}$. 由闭图像定理, 要证$\varphi$连续, 只需$\varphi(a)=b$. 不妨设$\varphi$非零. 若$\varphi$ 是零映射, 即$\forall a \in \mathscr{A}, \varphi(a)=0$. 则$\varphi(a_n)=\theta$. 结论显然成立.

设$\triangle_{\mathscr{B}}$为$\mathscr{B} \to \mathscr{C}$上的非零同态全体. $\forall h \in \triangle_{\mathscr{B}}$. 记$\psi := h \circ \varphi$. 下证$\psi$是$\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的非零连续同态.

① 由φ是$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$的同态知, ψ是$\mathscr{A} \to \mathscr{C}$的同态. 事实上, $\forall a_1, a_2 \in \mathscr{A}.\lambda, \mu \in \mathscr{C}$. 有

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda a_1+\mu a_2) &= h \circ \varphi(\lambda a_1+\mu a_2) = h(\lambda\varphi(a_1)+\mu\varphi(a_2)) \\ &= \lambda(h\circ\varphi)(a_1)+\mu(h\circ\varphi)(a_2) = \lambda\psi(a_1)+\mu\psi(a_2).\end{aligned}$$

$$\psi(a_1a_2) = h\circ\varphi(a_1a_2) \xlongequal{\varphi\text{同态}} h(\varphi(a_1)\varphi(a_2)) = \varphi(a_1)\varphi(a_2).$$

故ψ是$\mathscr{A} \to \mathscr{C}$的同态映射.

② 又由φ与h均为非零, 知ψ也非零.

③ 又由命题2.2.14知, $\forall a \in \mathscr{A}$, $|\psi(a)| \le \|a\|$. 即ψ连续.

故ψ是$\mathscr{A} \to \mathscr{C}$的非零连续同态. 由假设知$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(a_n)=b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 故

$$\begin{aligned}h(b) &= h(\lim_{n\to\infty}\varphi(a_n)) = \lim_{n\to\infty} h\circ\varphi(a_n) = \lim_{n\to\infty}\psi(a_n) \\ &= \psi(\lim_{n\to\infty} a_n) = \psi(a) = h(\varphi(a)).\end{aligned}$$

故$h(\varphi(a)-b)=0$, 对$\forall h \in \triangle_{\mathscr{B}}$ 均成立. 即$\varphi(a) \to b \in \ker h$ 对$\forall h \in \triangle_{\mathscr{B}}$成立.

记i为注记2.2.17, 即:

$$i:\begin{cases}\mathfrak{M}\to\triangle_{\mathscr{B}}\\ J\mapsto\varphi_J.\end{cases}$$

由引理2.2.19知i为双射. 故$\forall h\in\triangle_{\mathscr{B}}$. 都存在$J\in\mathfrak{M}$, 使得$h_J=h$. 故$\varphi(a)-b\in\ker h_J$对$\forall h_J\in\triangle_{\mathscr{B}}$成立.

由i为双射, 即$\varphi(a)-b\in\ker h_J$对$\forall J\in\mathfrak{M}$ 均成立. 又由引理2.2.18知$\ker h_J=J$. 故$\varphi(a)-b\in J,\forall J\in\mathfrak{M}$ 成立. 即

$$\varphi(a)-b\in\cap_{J\in\mathfrak{M}}J.$$

又由$\mathscr{B}$是半单的. 故$\cap_{J\in\mathfrak{M}}=\{\theta\}$. 故$\varphi(a)-b=\theta$, 即$\varphi(a)=b$. □

习题 2.2.5 证明定理*: 设$\mathscr{X}$是一个集合, 又设对于每一点$x\in\mathscr{X}$指定了$\mathscr{X}$的一个集族$\mathscr{U}_x$, 它们满足*

(i) 对$\forall x\in\mathscr{X},\mathscr{U}_x\neq\varnothing$; 如果$U\in\mathscr{U}_x$, 则$x\in U$;

(ii) 如果$U,V\in\mathscr{U}_x$, 则$U\cup V\in\mathscr{U}_x$;

(iii) 如果$U\in\mathscr{U}_x$, 并且$U\subset V$, 则$V\in\mathscr{U}_x$;

(iv) 如果$U\in\mathscr{U}_x$, 则存在$V\in\mathscr{U}_x$满足: $V\subset U$且对$\forall y\in V$, 有$V\in\mathscr{U}_y$.

则$\mathscr{X}$有唯一的拓扑τ使得对于每一个$x\in\mathscr{X}$, 子集族$\mathscr{U}_x$恰是x 在拓扑空间$(\mathscr{X},\tau)$中的邻域系.

设$\mathscr{X}$是一个*Banach*空间, 对任意的$n\in\mathbb{N},\varepsilon\in(0,+\infty)$ 及$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset\mathscr{X}$, 定义

$$V(\varepsilon,x_1,x_2,\cdots,x_n):=\{\varphi\in\mathscr{X}*:|\varphi(x_i)|<\varepsilon,i\in\{1,2,\cdots,n\}\}.$$

城$\mathscr{X}^*$的任一个含有一个形如*(2.2.6)*的集合的子集为$\mathscr{X}^*$ 中零泛函的一个邻域. 证明所有的这样的邻域构成$\mathscr{X}^*$ 原点的邻域系, 且该邻域系及其平移可以唯一确定$\mathscr{X}^*$ 的$*$弱拓扑, 并且$\mathscr{X}^*$ 依此$*$弱拓扑构成拓扑线性空间.

证明: 参考[3]第61页, 定理2.3.3. □

习题 2.2.6 用定理*1.1.14*即"有界线性算子A, $\sigma(A)\neq\varnothing$" 来证明定理*2.2.10* 即"可除*Banach* 代数$\mathscr{A}$等距同构与$\mathbb{C}$".

证明: 令$\mathscr{B} := \{ze : z \in \mathbb{C}\}$. 为证$\mathscr{A}$等距同构于$\mathscr{C}$. 只需证$\mathscr{A} = \mathscr{B}$. 即对$\forall a \in \mathscr{A}, \exists z \in \mathbb{C}$, 使得$a = ze$. 若不然, $\exists a_0 \in \mathscr{A}$, 使得$\forall z \in \mathbb{C}, a \neq ze$. 由$\mathscr{A}$可除知, $(ze - a_0)^{-1}$存在. 对此a_0, 定义

$$f_{a_0} : \begin{cases} \mathscr{A} \to \mathscr{A} \\ x \mapsto a_0 x. \end{cases}$$

则$f_{a_0} \in \mathscr{L}(A)$. 由此及定理1.1.14知, $\sigma(f_{a_0}) \neq \varnothing$. 注意到对$\forall z \in \mathbb{C}$. $zI - f_{a_0}$为单射, 且$\forall y \in \mathbb{A}$,

$$(zI - f_{a_0})((ze - a_0)^{-1} y) = (ze - a_0)(ze - a_0)^{-1} y = y.$$

即$zI - f_{a_0}$为单射. 故由性质1.1.4知$(zI - f_{a_0})^{-1} \in \mathscr{L}(A)$. 即

$$z \in \rho(f_{a_0}) \Rightarrow \mathbb{C} = \rho(f_{a_0}) \Rightarrow \sigma(f_{a_0}) = \varnothing.$$

矛盾. □

习题 2.2.7 证明以下两条等价.

(1) 设$\mathscr{X}$为Banach空间, $\forall A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $\sigma(A) \neq \varnothing$.

(2) 设$\mathscr{A}$是有单位元的Banach代数. 则$\forall a \in \mathscr{A}$, $\sigma(a) \neq \varnothing$.

证明: $(2) \Rightarrow (1)$: 若$\mathscr{X}$为Banach空间, 则$\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 是交换的, 有单位元的Banach代数. 从而由(2) 知, $\forall A \in \mathscr{L}(\mathscr{X}), \sigma(A) \neq \varnothing$. 即(1)成立.

$(2) \Rightarrow (2)$: 对任意给定$a \in A$. 定义

$$f_a : \begin{cases} \mathscr{A} \to \mathscr{A} \\ x \mapsto ax. \end{cases}$$

那么, $f_a \in \mathscr{L}(\mathscr{A})$. 由此及(1)知, $\sigma(f_a)$非空. 即$\exists \lambda \in \mathbb{C}$, 使得$\lambda I - f_a$非单射或非满射.

若$\lambda I - f_a$非单射: 即$\exists x, y \in \mathscr{A}$, 使得$x \neq y$ 且$(\lambda I - f_a)x = (\lambda I - f_a)y$. 于是$(\lambda e - a)x = (\lambda e - a)y \Rightarrow \lambda e - a \notin G(\mathscr{A}) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$. 故$\sigma(a)$ 非空.

若$\lambda I - f_a$非满射: 即$\exists y \in \mathscr{A}$. 使得对$\forall x \in \mathscr{A}, (\lambda I - f_a)x = y$. 于是$\lambda e - a \notin G(\mathscr{A}) \Rightarrow \lambda \in \sigma(a)$. 故$\sigma(a)$非空. □

习题 2.2.8 证明引理*2.2.16*证明中的$\widetilde{\varphi}$ 是$\mathscr{A}/J \to \mathbb{C}$ 上的等距同构映射.

$$\widetilde{\varphi} : \begin{cases} \mathscr{A}/J \to \mathbb{C} \\ [a] \to \varphi(a). \end{cases}$$

证明: ① 证明$\widetilde{\varphi}$是同态.

$$\widetilde{\varphi}([a][b]) = \widetilde{\varphi}([ab]) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \widetilde{\varphi}([a])\widetilde{\varphi}([b]).$$

$$\widetilde{\varphi}([a]+[b]) = \varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b) = \widetilde{\varphi}([a])+\widetilde{\varphi}([b]).$$

② 证明$\widetilde{\varphi}$是单射. 若$\widetilde{\varphi}([a])=0$, 则$\varphi(a)=0$, 于是$a\in\ker\varphi=J$.

③ 证明$\widetilde{\varphi}$是满射. 对$\forall z\in\mathbb{C}$. $\widetilde{\varphi}([ze])=\varphi(ze)=z\varphi(e)=z$.

④ $\widetilde{\varphi}$等距. 注意到对$\forall a\in\mathscr{A}$. $\varphi(a-\varphi(a)e)=0$. 故$a-\varphi(a)e\in J$. 即$[a]=\varphi(a)[e]$. 由此及$\|e\|_*=1$知$\|[a]\|_*=\|\varphi(a)[e]\|_*=|\varphi(a)|$. □

习题 2.2.9 *设$\mathscr{X}$为线性赋范空间, 若S为$\mathscr{X}^*$ 的$*$弱闭集且有界. 证明S是$*$弱紧的.*

证明: 设B为$\mathscr{X}^*$中的单位闭球. 由于S有界, 故存在$M\in(0,\infty)$. 使得$S\subset MB$. 由Alaogu定理知MB 是$*$- 弱紧的. 由于$S\subset MB$, S是$*$- 弱闭的. 所以S 是$*$-弱紧的. □

习题 2.2.10 (补充题) *设$\mathscr{A}$是Banach代数, 则对$\forall x\in\mathscr{A}$. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$ 存在且等于$\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\|x^n\|}$.*

证明: 记$r:=\inf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}$, 显然$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}\ge r$. 故只需证

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}\le r. \tag{2.2.1}$$

由下确界定义知, 对$\forall\varepsilon\in(0,\infty),\exists m\in\mathbb{N}$. 使得

$$\sqrt[m]{\|x^m\|}<r+\varepsilon. \tag{2.2.2}$$

注意到对$\forall n\in\mathbb{N},\exists k_n,\ell_n\in\mathbb{N},0\le\ell_n<m$. 使得$n=k_nm+\ell_n$. 由此及对$\forall k\in\mathbb{N},\|x^k\|\le\|x\|^k$和(2.2.2) 式知,

$$\sqrt[n]{\|x^n\|}\le\sqrt[n]{\|x^{k_nm}\|\cdot\|x^{\ell_n}\|}\le\|x\|^{\frac{\ell_n}{n}}\|x^m\|^{\frac{\ell_n}{n}}\le\|x\|^{\frac{\ell_n}{n}}(r+\varepsilon)^{\frac{mk_n}{n}}.$$

于是$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|}\le r+\varepsilon$. 由$\varepsilon$的任意性知(2.2.1) 式成立. □

2.3 例子与应用

习题 2.3.1 *设 $\mathscr{A}:=\left\{f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}:\|f\|:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|2^{|n|}<\infty\right\}$. 按函数的加法和数乘定义线性运算, 并定义乘法: $f*g(n):=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}f(n-k)g(k)$. 证明:*

(1) $\mathscr{A}$是可交换的*Banach*代数;

(2) 令$K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 2\}$. 则$K$与$\mathfrak{M}$ 一一对应, 且$\mathscr{A}$的*Gelfand*表示是K 上绝对收敛的*Laurent* 级数.

证明: (1) 先证$\mathscr{A}$为代数.

① $\forall f, g \in \mathscr{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha f(n) + \beta g(n)| \cdot 2^{|n|} \\ &= |\alpha| \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| \cdot 2^{|n|} + |\beta| \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)| \cdot 2^{|n|} < \infty.\end{aligned}$$

故$\mathscr{A}$为一个线性空间.

② $\forall f \in \mathscr{A}. \|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| \cdot 2^{|n|} < \infty$. 故$\exists M_f > 0$, 使得$\forall n \in \mathbb{Z}$. 有$|f(n)| \leq M_f$. 故

$$|f * g(n)| = |\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n-k)g(k)| \leq M_g \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n-k)| \cdot 2^{|n-k|} = M_g \cdot \|f\| < \infty.$$

故"$*$"是良定义的.

③ $\forall f, g, h, \rho, \varphi \in \mathscr{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(f * g) * h(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f * g)(n-k)h(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\sum_{i\in\mathbb{Z}} f(n-k-i)g(k))h(k)\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

与"*"的良定义证明类似, (2.3.1)式是绝对收敛的, 故(2.3.1)式

$$\begin{aligned}&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\sum_{i\in\mathbb{Z}} (f(n-i)g(i-k))h(k)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-i)g(i-k)h(k) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(n-i)g * h(i) = f * (g * h)(n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g) * (\rho + \varphi)(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f+g)(n-k)(\rho+\varphi)(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} [f(n-k)\rho(k) + f(n-k)\varphi(k) + g(n-k)\rho(k) + g(n-k)\varphi(k)].\end{aligned}$$

由于各部分收敛. 故上式$= f * \rho(n) + f * \varphi(n) + g * \rho(n) + g * \varphi(n)$.

最后$(\lambda\mu)(f * g) = (\lambda f) * (\mu g)$是显然的. 从而$\mathscr{A}$ 是代数.

④ $f*g(n)=\sum_{k\in Z}f(n-k)g(k)=\sum_{k'\in\mathbb{Z}}f(k')g(n-k')=g*f(n)$. 故$\mathscr{A}$ 是可交换的.

然后说明$\mathscr{A}$的完备性:

$\forall\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A$且$\|f_m-f_k\|:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f_m(k)-f_k(n)|\cdot 2^{|n|}\to 0,\quad m,k\to\infty$. 显然$\{f_k(n)\}_{k\in\mathbb{N}}$为Cauchy 列. 令$f_n=\lim_{k\to\infty}f_k(n)$. 易知$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$. 下证$\|f\|<\infty$. 注意到对$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使得$\forall m>k>N$有$\sum_{k\in\mathbb{N}}|f_m(n)-f_k(n)|\cdot 2^{|n|}<\varepsilon$. 令$m\to\infty$, 可得$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)-f_k(n)|\cdot 2^{|n|}<\varepsilon$. 故$f-f_k\in\mathscr{A}$. 从而$f\in\mathscr{A}$.

综上, $\mathscr{A}$是可交换的Banach代数.

(2) 令

$$e^{(k)}(n):=\begin{cases}1,n=k\\0,n\in\mathbb{Z}\backslash\{k\}.\end{cases}$$

则$e^{(f)}*e^{(k)}=e^{(j+k)},\forall j,k\in\mathbb{Z}$. 从而对$\forall f\in\mathscr{A}$.

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)e^{(n)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)[e^{(1)}]^n.$$

注意到$e^{(0)}$为$\mathscr{A}$的单位元. 则$\mathscr{A}$为有单位元的交换Banach代数. $\forall f\in\mathscr{A}$. 定义$\Gamma_f(z):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)z^n$为$K$上绝对收敛的Laurent级数. 考虑

$$\phi_z:\begin{cases}\mathscr{A}\to\mathbb{C}\\f\mapsto\Gamma_f(z).\end{cases}$$

ϕ_z为非零同态且$\phi_z(f*g)=\phi_z(f)*\phi_z(g)$. 由引理2.2.16知, $\ker\phi_z$是极大理想.

定义

$$\psi:\begin{cases}K\to\mathfrak{M}\\z\mapsto\ker\phi_z.\end{cases}$$

下证ψ为双射.

① 先证ψ单. $\forall z_1,z_2\in K.z_1\neq z_2$. 令

$$f(n):=\begin{cases}z_1,n=1\\-1,n=2\\0,n\in\mathbb{Z}\backslash\{1,2\}.\end{cases}$$

则$f\in\mathscr{A}$. 且$\Gamma_f(z_1)=z_1^2-z_1^2=0.\Gamma_f(z_2)=z_1z_2-z_2^2\neq 0$. 即$f\in\psi(z_1)$但$f\notin\psi(z_2)$. 由$\psi(z_1),\psi(z_2)\in\mathfrak{M}$ 知, $\psi(z_1)\neq\psi(z_2)$, 故ψ单.

② 再证ψ满. $J\in\mathfrak{M}$. 由引理2.2.18, $J\in\ker\varphi_J$. 从而为证ψ满, 只需证明$\exists z_0\in K$, 使得$\phi_{z_0}=\varphi_J$, 即$\phi_{z_0}(f)=\varphi_J(f)$. 由$\phi_{z_0},\varphi_J$连续. 上式等价于证明: $\phi_{z_0}(e^{(1)})=\varphi_J(e^{(1)})$, 对于某个$z_0\in K$. 事实上, $\phi_{z_0}(e^{(1)})=\Gamma_{e^{(1)}}(z_0)=z_0$. 而

$$\begin{aligned}|\varphi_J(e^{(1)})| &= \left|[\varphi_J(e^{(1)})]\right|^{1/n}=\left|[\varphi_J([e^{(1)}]^n)]\right|^{1/n}\\ &= \left|\varphi_J(e^{(n)})\right|^{1/n}=\begin{cases}\le \|e^n\|^{1/n}=2^{|n|/n}=2, n\in\mathbb{N}\\ \ge \|e^n\|=2^{|n|/n}=\dfrac{1}{2}, n\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}.\end{cases}\end{aligned}$$

即$\frac{1}{2}\le|z_0|\le 2$, $z_0\in K$. 故ψ满.

因此ψ为K到$\mathfrak{M}$的双射, $f\mapsto\Gamma_f$为$\mathscr{A}$上的Gelfand表示. □

习题 2.3.2 设M是T_2紧拓扑空间, 证明M的全体闭子集与$C(M)$的全体理想间有一一对应.

证明: 若X为M的一个闭子集. 定义$J_X:=\{f\in C(M):f(x)=0,\forall x\in X\}$. 则$J_X$为$C(M)$的闭理想.

下证$J:X\to J_X$为M全体闭子集到$C(M)$全体闭理想的双射.

① 先证J单: $\forall E,F$为M闭子集. 因M为紧T_2空间. 由Urysohn引理, $\exists f\in C(M)$, 使得$f(x_0)=1, f|_F=0$. 其中$x_0\in E\backslash F$. 从而$F\notin J_E, f\in J_F$. 即$J_E\ne J_F$, J为单射.

② 再证J满: $\forall J$为$C(M)$的一个闭理想. 令$X=\cap_{f\in J}\{x\in M:f(x)=0\}$. 因$f\in C(M)$, 则$X$ 闭. 且由定理2.3.3知$X\ne\varnothing$. 我们断言$J=J_X$. 事实上, 只需证明$J_X\subset J$.

$\forall f\in J_X,\forall\varepsilon>0$, 定义$F_\varepsilon:=\{x\in M:|f(x)|\ge\varepsilon\}$, 则$F_\varepsilon\cap X=\varnothing$. 从而对$\forall x\in F_\varepsilon,\exists f_x\in J$, 使得$f_x(x)\ne 0$. 进一步知, 存在邻域$U_x$, 使得$f(x)\ne 0,\forall x\in U_x$. 因$F_\varepsilon\subset\cup_{x\in F_\varepsilon}U_x$, 且$F_\varepsilon$紧. 则$\exists\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset M$, 使得$F_\varepsilon\subset\cup_{i=1}^n U_{x_i}$. 令$h_\varepsilon:=\sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)\overline{f_{x_i}(x)}=\sum_{i=1}^n|f_{x_i}(x)|^2\in J$. 则$h(x)>0,\forall x\in F_\varepsilon$. 又$F_\varepsilon$紧, 则$h_\varepsilon$在$F_\varepsilon$上存在最小值. 记为$c$. 令$k_\varepsilon:=\max\{h_\varepsilon,c\}\in C(M)$, $g_\varepsilon:=k_\varepsilon^{-1}h_\varepsilon\in J$ 且满足$g_\varepsilon(x)=1,\forall f\in F_\varepsilon$. $|g_\varepsilon(x)|\le 1,\forall x\in M$. 则$fg_\varepsilon\in J$ 且

$$\|f-fg_\varepsilon\|=\sup_{M\backslash F_\varepsilon}|(f-fg_\varepsilon)(x)|\le 2\sup_{M\backslash F_\varepsilon}|f(x)|<2\varepsilon.$$

由此及J闭知$f\in J_\varepsilon$. 故$J_X\subset J$.

综上, M的全体闭子集与$C(M)$的全体理想间由一一对应. □

习题 2.3.3 (补充题) 设$\mathscr{A}$是半单的交换*Banach*代数. 证明: $\mathscr{A}$的*Gelfand*表示的值域$\Gamma(\mathscr{A})$是$C(\mathfrak{M})$的闭集的充要条件是存在正常数$k<\infty$, 使得对$\forall a\in\mathscr{A}$, 有$\|a\|^2\le k\|a^2\|$.

证明: 令

$$r := \inf_{a\in\mathscr{A}\setminus\{0\}} \frac{\|a^2\|}{\|a\|^2}, s := \inf_{a\in\mathscr{A}\setminus\{0\}} \frac{\|\Gamma(a)\|_{C(\mathfrak{M})}}{\|a\|}.$$

首先断言$s^2 \le r \le s$. 事实上, 由s的定义, Γ为同态和定理2.2.23知, 对$\forall a \in \mathscr{A}$, $\|a^2\| \ge \|\Gamma(a^2)\| = \|\Gamma(a)\|^2 \ge s^2\|a\|^2$. 由此及$a$的任意性知$s^2 \le r$. 由$r$的定义知, 对$\forall a \in \mathscr{A}$有$\|a^2\| \ge r\|a\|^2$. 由此及归纳法知, $\|a^m\| \ge r^{m-1}\|a\|^m, m = 2^n, n \in \mathbb{N}$. 对上式两边同时开$n$次方并令$n \to \infty$. 由引理2.2.28知$\|\Gamma(a) \ge r\|a\|\|$. 由$a$的任意性知$r \ge s$. 综上, 断言成立.

下证题目中的充要条件:

① (充分性). 注意到题中满足条件的k存在, 当且仅当$r > 0$. 又由断言知当且仅当$s > 0$. 若$s > 0$, 则Γ是一一映射且有连续逆. 即Γ是$\mathscr{A} \to \Gamma\mathscr{A}$ 的同胚. 故$\Gamma\mathscr{A}$在$C(\mathfrak{M})$中闭.

② (必要性). 若$\Gamma\mathscr{A}$在$C(\mathfrak{M})$中闭, 由Γ连续和开映射定理知, Γ是开映射. 故$\Gamma^{-1} : \Gamma\mathscr{A} \subset C(\mathfrak{M}) \to \mathscr{A}$ 是连续的, 且存在正常数$\widetilde{k}$, 使得$\forall a \in \mathscr{A}, \|a\| \le \widetilde{k}\|\Gamma(a)\|$. 由此及$\Gamma$为同态和定理2.2.23知

$$\|a\|^2 \le \widetilde{k}^2\|\Gamma(a)\| = \widetilde{k}^2\|[\Gamma(a)]^2\| \le \widetilde{k}^2\|a^2\|.$$

取$k := \widetilde{k}^2$即得证. □

2.4 C^*代数

习题 2.4.1 设所有记号如定理*2.4.14*的证明. 证明:

(1) $\widetilde{\mathscr{A}}$为$C(\mathscr{Y})$的实值子代数;

(2) 对任意$\widetilde{f} \in C(\mathscr{Y})_r$, $\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathscr{X})$;

(3) *(2.4.1)*成立.

证明: (1) 容易验证$\widetilde{A}$ 为$C(\mathscr{Y})$的子空间且对乘法运算封闭. 故$\widetilde{A}$ 为$C(\mathscr{Y})$的实值子代数.

(2) 因为$\widetilde{f} \in C(\mathscr{Y})_r, \mathscr{Y} = \mathscr{X} \cup \{\partial\}$. 所以$\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial)$ 为实值函数且在$\mathscr{X}$上连续. 又$\widetilde{f} - \widetilde{f}(\partial)$ 也在∂处连续. 故

$$\lim_{x\to\partial}[\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(\partial)] = \widetilde{f}(\partial) - \widetilde{f}(\partial) = 0.$$

所以$\forall\varepsilon \in (0, +\infty)$存在紧集$D_\varepsilon \subset \mathscr{X}$, 使得$\forall x \in \mathscr{X}\setminus D_\varepsilon, |\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(\partial)| < \varepsilon$. 所以$\widetilde{f}-\widetilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathscr{X})$.

(3) 已证 $\widetilde{A}=C(\mathscr{Y})_r$. 由于$\mathscr{A}\subset C_\infty(\mathscr{X})$. 所以$\widetilde{\mathscr{A}}=\{f+r:f\in\mathscr{A},r\in\mathbb{R}\}\subset\{f+r:f\in C_\infty(\mathscr{X}),r\in\mathbb{R}\}$. 即$C(\mathscr{Y})_r\subset\{f+r:f\in C_\infty(\mathscr{X}),r\in R\}$. 又由定理2.4.14前面的证明知$C_\infty(\mathscr{X})\subset C(\mathscr{Y})_r$. 故$C_\infty(\mathscr{X})+\mathbb{R}\subset C(\mathscr{Y})_r$. 所以$\{f+r:f\in C_\infty,r\in\mathbb{R}\}\subset C(\mathscr{Y})_r$. 所以$C(\mathscr{Y})_r=\{f+r:f\in C_\infty(\mathscr{X}),r\in\mathbb{R}\}$. □

习题 2.4.2 *证明注记2.4.15. 即: $f\in C_\infty(\mathscr{X})\Longleftrightarrow f\in C(\mathscr{Y})_r$ 且$f(\partial)=0$.*

证明: $(\Rightarrow)$ $f\in C_\infty(\mathscr{X})$. 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{X}$, 且当$n\to\infty$时, x_n在$\mathscr{Y}$中收敛到∂. 由于$\forall\varepsilon>0$, 存在紧急$D_\varepsilon\subset\mathscr{X}$, 使得$|f(x)|<\varepsilon,\forall x\in\mathscr{X}\backslash D_\varepsilon$. 又由$x_n$在$\mathscr{Y}$中收敛到$\partial$知, 对$\partial$的邻域$(\mathscr{X}\backslash D_\varepsilon)\cup\{\partial\}$, 存在$N_\varepsilon\in\mathbb{N}$, 使得当$n>N_\varepsilon$时, $x_n\in(\mathscr{X}\backslash D_\varepsilon)\cup\{\partial\}$. 故$|f(x)|<\varepsilon$.

所以$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$, 于是可定义$f(\partial)=0$. 此时$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\partial)$. 即有$x_n\to\partial,f(x_n)\to f(\partial),n\to\infty$. 所以$f$在$\partial$连续. 故$f\in C(\mathscr{Y})_r$.

$(\Leftarrow)$ 当$f\in C(\mathscr{Y})_r$且$f(\partial)=0$时, 由习题2.4.1(2)知, $f-f(\partial)=f\in C_\infty(\mathscr{X})$. □

习题 2.4.3 *证明交换半单有单位元的Banach代数上的任意对合运算均连续.*

证明: 设$\mathscr{A}$是有单位元的交换的交换半单Banach代数, $*$为$\mathscr{A}$上的对合运算. $\mathfrak{M}$为$\mathscr{A}$的一切极大理想全体. 为证$*$连续, 只需证若$a_n\to a$ in $\mathscr{A}$. 则$a_n^*\to a^*$ in $\mathscr{A}$ $,n\to\infty$. 事实上, 设$\Delta:=\{\varphi\in\mathscr{A}^*:\forall a,b\in\mathscr{A},\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),\varphi(e)=1\}$. 由定理2.2.13知, 存在映射

$$i:\begin{cases}\mathfrak{M}\to\Delta\\ J\mapsto\varphi_J.\end{cases}$$

由定理2.2.19知, i为双射. 因$\forall J\in\mathfrak{M},\varphi_J\in\Delta$, 知$\overline{\varphi_J\circ*}\in\Delta$. 从而由定理2.2.14(i)知

$$|\overline{\varphi_J(a_n^*-a^*)}|=|\overline{\varphi_J\circ*}(a_n-a)|\le\|a_n-a\|_{\mathscr{A}}\to0,n\to\infty.$$

由J的任意性及φ_J的连续性知$\lim_{n\to\infty}(a_n^*-a^*)\in\bigcap_{J\in\mathfrak{M}}\ker\varphi_J$. 由引理2.2.18知$\ker\varphi_J=J$. 从而$\lim_{n\to\infty}(a_n^*-a^*)\in\bigcap_{J\in\mathfrak{M}}J$. 再由$\mathscr{A}$半单知, $a_n^*\to a^*$ in $\mathscr{A}$, $n\to\infty$. □

习题 2.4.4 (补充题) *设$\mathscr{A}$是一个交换的C^*代数. 设其单位元为e. 若$\forall x\in\mathscr{A}.x$ 为Hermite元且$\sigma(x)\subset[0,\infty)$. 则称$x$是正的, 记作$x\ge0$. 证明:*

(1) $x\ge0\Longleftrightarrow\exists h\in\mathscr{A}$是Hermite元, 使得$x=h^2$.

(2) $x\ge0\Longleftrightarrow x$ 为Hermite元且$\|\|x\|e-x\|\le\|x\|$.

证明: (1) ($\Rightarrow$) 若$x \geq 0$, 由定理2.2.27知, $\forall J \in \mathfrak{M}, \Gamma x(J) \geq 0$. 从而由定理2.4.10知, $\exists h \in \mathscr{A}$, 使得 $\forall J \in \mathfrak{M}, \Gamma h(J) = \sqrt{\Gamma x(J)}$且$x = h^2, h = h^*$.

($\Leftarrow$) 若$x = h^2, h = h^*$, 由引理2.4.11知Γh为$\mathfrak{M}$上实值函数. 因此$\forall J \in \mathfrak{M}, \Gamma x(J) = \Gamma h^2(J) = [\Gamma h(J)]^2 \geq 0$. 再由定理2.2.27知$\sigma(x) \in [0, \infty)$. 即$x \geq 0$.

(2) 不妨设$x \neq \theta$.

$$\begin{aligned}
\sigma(x) \in [0,\infty) &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\Gamma x(J)}{\|x\|} \leq 2, \forall J \in \mathfrak{M} \\
&\Leftrightarrow \left|1 - \frac{\Gamma x(J)}{\|x\|}\right| \leq 1 \\
(1 = \varphi_J(e)) &\Leftrightarrow \left|\Gamma e(J) - \frac{\Gamma x(J)}{\|x\|}\right| \leq 1, \forall J \in \mathfrak{M} \\
&\Leftrightarrow \left|\Gamma e - \frac{\Gamma x}{\|x\|}\right|_{C(\mathfrak{M})} \leq 1 \\
(\text{定理2.4.10}) &\Leftrightarrow \left\|e - \frac{x}{\|x\|}\right\| \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \|\|x\|e - x\| \leq \|x\|.
\end{aligned}$$

□

2.5 Hilbert空间上的正常算子

习题 2.5.1 *见命题2.5.7.*

习题 2.5.2 *证明: N为Hilbert空间H上的正常算子当且仅当$\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H, \forall x \in H$.*

证明: 注意到对$\forall x \in H$,

$$\begin{aligned}
\|Nx\|_H^2 &= (Nx, Nx) = (N^*Nx, x) \\
\|N^*x\|_H^2 &= (N^*x, N^*x) = (NN^*x, x)
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

(必要性) 若N为正常算子, 则由$NN^* = N^*N$及(2.5.1)知, 对$\forall x \in H, \|Nx\|_H = \|N^*x\|_H$.

(充分性) 首先断言: 若$T \in \mathscr{L}(H)$且对$\forall x \in H, (Tx, x) = 0$, 则$T = \theta$. 事实上, 对$\forall x, y \in H$. 由$(T(x+y), (x+y)) = 0$知

$$(Tx, y) + (Ty, x) = 0 \tag{2.5.2}$$

故$-i(Tx,y)+i(Ty,x)=0\Rightarrow(Tx,y)-(Ty,x)=0$. 由此及(2.5.2)知, 对$\forall x,y\in H,(Tx,y)=0$. 令$y:=Tx$, 则有$Tx=\theta$. 由此及$x$的任意性知$T=\theta$. 故断言成立.

由(2.5.1)和$\|Nx\|_H=\|N^*x\|_H,\forall x\in H$知$(N^*Nx,x)=(NN^*x,x)=0$. 即$((N^*N-NN^*)x,x)=0$. 由此及断言知$N^*N=NN^*$, 即$N$为正常算子. □

习题 2.5.3 *证明: 两个可交换的正算子的积仍为正算子.*

证明: 设T_1,T_2为正算子且$T_1T_2=T_2T_1$. 由此及推论2.5.9知, 存在正算子Q, 使得$T_1=Q^2$且$QT_2=T_2Q$. 故对$\forall x\in H$,

$$(T_1T_2x,x)=(Q^2T_2x,x)=(QT_2x,Qx)=(T_2Qx,Qx)\geq 0 \tag{2.5.3}$$

又注意到$(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*=T_2T_1=T_1T_2$. 即$T_1T_2$为自伴算子. 由此及(2.5.3)知$T_1T_2$为正算子. □

习题 2.5.4 *设N为Hilbert空间H上的正常算子. 则存在唯一正算子$P\in\mathscr{L}(H)$及酉算子$Q\in\mathscr{L}(H)$ 使得$N=PQ=QP$.*

证明: 令

$$P(\lambda):=|\lambda|,\ q(\lambda):=\begin{cases}\lambda/|\lambda|,\lambda\neq 0\\ 1,\lambda=0.\end{cases}$$

则$p,q\in B(\sigma(N))$. 令$P:=p(N),Q=q(N)$. 则由定理2.5.20知, $PQ=p(N)q(N)=pq(N)=\lambda(N)=N$. 且$QP=q(N)p(N)=qp(N)=\lambda(N)=N$. 即$N=PQ=QP$. 由命题2.5.6知$Q^*Q=\overline{q}(N)q(N)=\overline{q}q(N)=1(N)=I$. 故$Q$为酉算子.

下证P为正算子. 事实上, 由$P=p(N)=\widetilde{\Gamma}^{-1}p$和命题2.5.6知

$$P^*=(\widetilde{\Gamma}^{-1}p)^*=\widetilde{\Gamma}^{-1}\overline{p}=\widetilde{\Gamma}^{-1}p=P.$$

即P自伴. 令$P^{1/2}:=|\lambda|^{1/2}(N)$, 则由命题2.5.6知

$$P^{1/2}=|\lambda|^{1/2}(N)=\overline{|\lambda|^{1/2}}(N)=(P^{1/2})^*.$$

由此及$P=|\lambda|(N)=|\lambda|^{1/2}|\lambda|^{1/2}(N)=P^{1/2}P^{1/2}$知, 对$\forall x\in H$,

$$(Px,x)=(P^{1/2}P^{1/2}x,x)=(P^{1/2}x,P^{1/2}x)=\|P^{1/2}x\|_H^2\geq 0.$$

故P为正算子.

下证唯一性. 若还存在正算子$\widetilde{P}$与酉算子$\widetilde{Q}$, 使得$N=\widetilde{Q}\widetilde{P}$. 则

$$N^*N=\widetilde{P}^*\widetilde{Q}^*\widetilde{Q}\widetilde{P}=\widetilde{P}^*\widetilde{P}=\widetilde{P}^2.$$

同理有$N^*N=P^2$. 即$\widetilde{P}^2=P^2$. 由此及平方根的唯一性知$\widetilde{P}=P$. □

习题 2.5.5 设N为正常算子. 证明:

(1) N是酉算子当且仅当$\sigma(N)\subset S^1$;

(2) N是自伴算子当且仅当$\sigma(N)\subset\mathbb{R}$;

(3) N是正算子当且仅当$\sigma(N)\subset\mathbb{R}_+$.

证明: (1) 由连续算符演算知, N为酉算子$\Leftrightarrow NN^*=I\Leftrightarrow z(N)z(N)=1(N)\Leftrightarrow |z|^2=1$.
(2),(3)见定理2.5.8. □

习题 2.5.6 证明推论*2.5.28*.

证明: 由命题2.5.27知, 为证结论, 只需证明以下命题: 设μ_1,μ_2为$\mathbb{C}$上的复测度, 且$\forall\Omega\in\mathscr{B},\mu_1(\Omega)=\mu_2(\Omega)$. 则对任意的Borel可测函数$f$, 有

$$\int_{\mathbb{C}}fd\mu_1=\int_{\mathbb{C}}fd\mu_2.$$

事实上, 由[1]定理6.12知, 对$i\in\{1,2\}$, 存在可测函数h_i, 使得

$$d\mu_i=h_id|\mu_i|. \tag{2.5.4}$$

由此可知, 对$\forall\Omega\in\mathscr{B},i=1,2$,

$$\int_\Omega h_i(z)d|\mu_i|(z)=\int_{\mathbb{C}}\chi_\Omega(z)h_i(z)d|\mu_i|(z)=\int_\Omega\chi_\Omega(z)d\mu_i(z)=\mu_i(\Omega). \tag{2.5.5}$$

由[4]定理2.10(b)知, 存在简单函数列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}:=\left\{\sum_{k=1}^{N(n)}a_k^{(n)}\chi_{E_k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得在点态意义下$f_n\to f$. 由此及(2.5.4)和(2.5.5)和控制收敛定理知, 对任意的Borel可积函数f,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}}f(z)d\mu_1(z)&=\int_{\mathbb{C}}f(z)h_1(z)d|\mu_1|(z)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{C}}f_n(z)h_1(z)d|\mu_1|(z)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)}a_k^{(n)}\int_{E_k}h_1(z)d|\mu_1|(z)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)}a_k^{(n)}\mu_1(E_k).\end{aligned}$$

同理,

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu_2(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)} a_k^{(n)}\mu_2(E_k).$$

由以上两式及对$\forall\Omega\in\mathscr{B},\mu_1(\Omega)=\mu_2(\Omega)$和$\int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu_1(z)=\int_{\mathbb{C}} f(z)d\mu_2(z)$. 即得所证命题. □

习题 2.5.7 (补充题1) *设H为Hilbert空间, $U\in\mathscr{L}(H)$. 证明以下三个论述等价:*

(1) U是酉算子;

(2) $R(U)=H$且对$\forall x,y\in H$, $(Ux,Uy)=(x,y)$.

(3) $R(U)=H$且对$\forall x,y\in H, \|Ux\|_H=\|x\|_H$.

证明: (1)$\Rightarrow$(2). $U^{-1}=U^*\in\mathscr{L}(H)$, 故$R(U)=D(U^{-1})=D(U^*)=H$. 由于$U^*U=I$, 故对$\forall x,y\in H,(Ux,Uy)=(U^*Ux,y)=(x,y)$. 即得(2).

(2)$\Rightarrow$(3). 显然.

(3)$\Rightarrow$(1). 由于对$\forall x\in H$, 由(3)知, $(U^*Ux,x)=(Ux,Ux)=(x,x)$. 于是$((U^*U-I)x,x)=0,\forall x\in H$. 又由习题2.5.2的断言知, $U^*U=I$. 即U为酉算子. 即得(1). □

习题 2.5.8 (补充题2) *设H为Hilbert空间, $T\in\mathscr{L}(H)$. 证明:*

(1) T^*T的平方根$P\in\mathscr{L}(H)$是唯一满足$\|Px\|_H=\|Tx\|_H$, $\forall x\in H$ 的正算子.

(2) 若T可逆, 则有唯一分解$T=UP$, 其中U为酉算子, P 为正算子.

证明: (1) 注意到$(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|_H^2\geq 0$. 故$T^*T$ 为正算子. 由此及推论2.5.9 知, $\exists P\in\mathscr{L}(H)$. 使得$P^2=T^*T$, 且$P=P^*$. 故对$\forall x\in H$,

$$\|Px\|_H^2=(Px,Px)=(P^2x,x)=(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=\|Tx\|_H^2.$$

下证唯一性: 若$P\in\mathscr{L}(H)$且$P=P^*$. 则对$\forall x\in H$,

$$\|Px\|_H^2=\|Tx\|_H\Leftrightarrow(Px,Px)=(Tx,Tx)\Leftrightarrow(P^2x,x)=(T^*Tx,x).$$

从而由断言知, $P^2=T^*T$. 即P为T^*T的正平方根.

(2) 若T可逆, 则T^*,T^*T也可逆. 类似(1)可证, T^*T为正算子. 故由推论2.5.9 知. T^*T存在可逆平方根P. 令$U:=TP^{-1}$, 则U 可逆且

$$U^*U=(P^{-1})^*T^*TP^{-1}=P^{-1}P^2P^{-1}=I.$$

即U为酉算子.

下证唯一性. 若$T=\widetilde{U}\widetilde{P}$为另一满足上述条件的分解. 则

$$T^*T=\widetilde{P}^*\widetilde{U}^*\widetilde{U}\widetilde{P}=\widetilde{P}^*\widetilde{P}=\widetilde{P}^2.$$

由正平方根的唯一性知$P=\widetilde{P}$. 从而$U=\widetilde{U}$, 唯一性得证. □

参考文献

[1] 袁文 杨大春. *泛函分析选讲*. 北京师范大学出版社, 2016.

[2] 张恭庆，林源渠. *泛函分析讲义(上册)*. 北京大学出版社, 1987.

[3] 熊金城. *点集拓扑讲义(第三版)*. 高等教育出版社, 2004.

[4] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.