

《泛函分析选讲》习题参考解答

吴瀚霖 hlwu.bnu@gmail.com

2018 年 2 月 18 日

1 紧算子的谱理论

1.1 有界线性算子的谱

习题 1.1.1 设 \mathcal{X} 是一个有限维 *Banach* 空间, $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ 为有界线性算子。则对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值之一。

证明: 若 A 为有限维空间 \mathcal{X} 上的有界算子, 则 A 可由矩阵 (a_{ij}) 表示. A 单射当且仅当 A 满射. 从而 $\lambda I - A$ 可逆当且仅当 $\lambda E - A$ 可逆. 而当

- $\det(\lambda E - A) = 0$ 时, $\lambda \in \sigma(A)$;
- $\det(\lambda E - A) \neq 0$ 时, $\lambda \in \rho(A)$.

故对 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λ 必为 A 的正则值或特征值. □

习题 1.1.2 设 \mathcal{X} 为一个 *Banach* 空间. 证明 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 中的可逆 (有有界逆) 算子集为开集.

证明: $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ 且 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. $\forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ 且 $\|T - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$$\begin{aligned}\|T^{-1}\| &= \|(T - A + A)^{-1}\| \\ &= \|A^{-1}(I + (T - A)A^{-1})^{-1}\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|(I + (T - A)A^{-1})^{-1}\| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

由引理 1.1.9, $\|(T - A)A^{-1}\| \leq \|T - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$. 故 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 中的可逆算子为开集. □

习题 1.1.3 考虑 ℓ^2 上的左推移算子

$$A: (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \dots),$$

证明 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ 且 $\sigma_r(A) = \emptyset$.

证明: 首先说明 A 是有界线性算子且 $\|A\| = 1$. 设

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2, \\ y &= Ax = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots). \end{aligned}$$

有

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2 \implies \|Ax\| \leq \|x\| \implies \|A\| \leq 1.$$

另一方面, $x' := (0, 1, 0, \dots)$, 则 $Ax' = (1, 0, 0, \dots)$, $\|Ax'\| = \|x'\|$. 故 $\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 1$.

(1) 当 $|\lambda| > 1$ 时, $|\lambda| > \|A\| \implies \lambda \in \rho(A)$.

(2) $D := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. $\forall \lambda \in D, \{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$. 因为

$$A(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = (\lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots),$$

所以 $\lambda \in \sigma_p(A)$.

(3) 先考虑 $\lambda = 1$ 时. 首先证明 $(I - A)^{-1}$ 存在. $\forall x \in \ell^2$, 若 $(I - A)x = 0$, 则

$$(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

于是 $x = x_1(1, 1, \dots)$. 又因为 $x \in \ell^2$, 所以 $x_1 = 0$, 从而 $x = \theta$. 即 $(I - A)^{-1}$ 存在.

下证 $R(I - A) \neq \ell^2$, 但 $\overline{R(I - A)} = \ell^2$.

若 $y = (I - A)x$, 则 $y_k = x_k - x_{k+1}$, 即

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 \\ y_2 &= x_2 - x_3 \\ \dots \\ y_k &= x_k - x_{k+1} \end{aligned} \right\} \implies \sum_{j=1}^k y_j = x_1 - x_{k+1}.$$

即 $x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^k y_j$. 易知, 非零分量为有限个的 $y \in R(I - A)$. 事实上, 设 y 的非零分量个数为 K , 取 $x_1 = \sum_{j=1}^K y_j$,

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_1 - \sum_{j=1}^k y_j, & k = 1, 2, \dots, K \\ 0, & k > K \end{cases}.$$

由上式可知, $x \in \ell^2$.

存在 $y \in \ell^2$, 但是 $y \notin R(I - A)$. 事实上, 取 $y = \{\frac{1}{j}\}_{j=1}^\infty \in \ell^2$. 则

$$x_{k+1} = x_1 - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \rightarrow -\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

所以, $x \notin \ell^2$, 也就是说 $y \notin R(I - A)$, 那么 $R(I - A) \neq \ell^2$.

下证 $\overline{R(I - A)} = \ell^2$, 为此, 设 $\xi := \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \forall \varepsilon \in (0, \infty)$. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum_{k=N+1}^\infty |\xi_k|^2 < \varepsilon$. 令 $y := \{y_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. 其中

$$y_j = \begin{cases} \xi_j, & j \leq N \\ 0, & j > N. \end{cases}$$

有

$$\|y - \xi\|_{\ell^2} = \|\{\xi_j - y_j\}_{j=N+1}^\infty\|_{\ell^2} = \sum_{k=N+1}^\infty |\xi_k|^2 < \varepsilon.$$

故 $\overline{R(I - A)} = \ell^2$. 从而 $1 \in \sigma_c(A)$.

其次, 对于一般的 λ 使 $|\lambda| = 1$. 可以划归为 $\lambda = 1$ 的情形. 事实上,

$$(\lambda I - A)x = y \iff \lambda x_k - x_{k+1} = y_k \iff \frac{x_k}{\lambda^k} - \frac{x_{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

令 $\xi_k = \frac{x_k}{\lambda^k}, \eta_k = \frac{y_k}{\lambda^{k+1}}, k = 1, 2, \dots$. 则有 $\xi_k - \xi_{k+1} = \eta_k, k = 1, 2, \dots$. 即划归为 $\lambda = 1$ 的情形. □

习题 1.1.4 考虑 $L^2(0, +\infty)$ 上的微分算子:

$$A : x(t) \mapsto x'(t). D(A) = H^1(0, +\infty).$$

证明 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = 0\}$ 且 $\sigma_r(A) = \emptyset$. 其中 $\operatorname{Re} \lambda$ 表示 λ 的实部.

证明: 记 $\Omega := (0, \infty)$. 由 Meyers-Serrin 定理有

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \tilde{d}^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}.$$

其中 $\langle \tilde{d}u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \tilde{d}^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

先证明 A 是闭算子. 只需证明当 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$. 且

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega) \\ u'_n \rightarrow v \text{ in } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (n \rightarrow \infty).$$

时, 有 $u \in D(A)$, 且 $u' = v$. $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\langle u'_n, \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle$. 从而由

$$|\langle u_n, \varphi' \rangle - \langle u, \varphi' \rangle| = |\langle u_n - u, \varphi' \rangle| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi'\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0. (n \rightarrow \infty).$$

知 $\langle u'_n, \varphi \rangle = -\langle u_n, \varphi' \rangle \rightarrow -\langle u, \varphi' \rangle$.

类似可以证明 $\langle u'_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle v, \varphi \rangle, n \rightarrow \infty$. 即 $\langle v, \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立. 由弱导数的定义知 $u' = v \in L^2(\Omega)$. 从而 $u \in H^1(\Omega)$, 且 $u' = v$. 故 A 为闭算子.

再证 $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 考虑方程 $(\lambda I - A)u = 0$, 即 $u' - \lambda u = 0$. 由PDE知系数光滑从而弱解也光滑. 解ODE, $u' - \lambda u = 0$. 得 $u = 0$ 或 $ce^{\lambda x} \in L^2(\Omega)$. 故 $(\lambda I - A)^{-1}$ 不存在. $\lambda \in \sigma_p(A)$.

再证 $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = 0\}$. 先说明 $R(\lambda I - A) \subsetneq L^2(\Omega)$. 令 $v(x) := \frac{e^{\lambda x}}{x+1} \in L^2(\Omega)$. 由 $(\lambda I - A)u = v$ 得

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\lambda x} [u(0) - \int_0^x e^{-\lambda t} v(t) dt] \\ &= e^{\lambda x} [u(0) - \ln(x+1)] \notin L^2(\Omega). \end{aligned}$$

故 $R(\lambda I - A) \subsetneq L^2(\Omega)$.

再证 $\overline{R(\lambda I - A)} = L^2(\Omega)$. 因 $C_c^\infty(\Omega) = L^2(\Omega)$, 故只需说明 $R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 事实上, 对 $\forall v \in C_c^\infty(\Omega)$. $\exists M_v$, 使得 $\operatorname{supp} v \subset (0, M_v)$. 由 $(\lambda I - A)u = v$, 得 $u(x) = e^{\lambda x} [u(0) - \int_0^x e^{-\lambda t} v(t) dt]$. 令 $u(0) := \int_0^{M_v} e^{-\lambda t} v(t) dt$. 则

$$u(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} \int_x^{M_v} e^{-\lambda t} v(t) dt, & x \in (0, M_v) \\ 0, & x \in (M_v, \infty). \end{cases}$$

满足 $u \in H^1(\Omega)$. 即 $R(\lambda I - A) \supset C_c^\infty(\Omega)$. 故 $\overline{R(\lambda I - A)} = L^2(\Omega)$.

最后说明 $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 设 $\operatorname{Re} \lambda > 0$, 此时 $ce^{\lambda x} \notin L^2(\Omega)$. 从而 $(\lambda I - A)^{-1}$ 存在. 断言 $R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 事实上, 对 $\forall v \in L^2(\Omega)$. 令 $u(x) = e^{\lambda x} \int_0^\infty e^{-\lambda t} v(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda s} v(s+x) ds$. 则 u 满足 $u' - \lambda u = v$ 且 $u \in H^1(\Omega)$. 由Minkovski不等式, 有

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda x} v(s+x) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^\infty |e^{-\lambda s}| ds \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

即 $R(\lambda I - A) = L^2(\Omega)$. 由命题1.1.4知, $\lambda \in \rho(A)$. 故 $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. 又因 $\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C}$ 且互不相交, 故结论得证. \square

习题 1.1.5 (1) 证明(1.1.1)和(1.1.2)成立

(2) 利用 $S^n y = \sum_{k=0}^n A^k y$ 给出引理 1.1.9 的另一个证明.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 定义 \mathbb{R} 上的线性算子 $A_x : y \mapsto xy, \forall y \in \mathbb{R}$. 利用此算子说明当 $|x| < 1$ 时.

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

只是(1.1.3)的一个特例.

证明: (1) 因为 $\|\sum_{n=0}^N A^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=0}^N \|A^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=0}^N \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n$. 所以 $\forall k, N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n \xrightarrow{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < 1} 0, N \rightarrow \infty.$$

故 $\{\sum_{n=0}^N A^n\}_{N \in \mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 中的基本列. 而 $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ 为 Banach 空间, 故此基本列收敛, 设其极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. 由此, 有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^N A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} + \left\| \sum_{n=0}^N A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \\ &\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^N A^n \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} + \sum_{n=0}^N \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n. \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 有 $\|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n$.

$\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+k} A^n x \right\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{n=N}^{N+k} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}^n \|x\|_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} < 1} 0, N \rightarrow \infty.$$

故 $\{\sum_{n=0}^N A^n x\}_{N \in \mathbb{N}}$ 为 \mathcal{X} 中的基本列. 由 \mathcal{X} 的完备性知其有极限, 记其极限为 $\sum_{n=0}^{\infty} A^n x$.

$\|y - y_k\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} A^n x \right\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

(2) $\forall y \in \mathcal{X}$. 由压缩映射原理知, 存在唯一的 $x_y \in \mathcal{X}$. 使得 $Sx_y = x_y$. 即 $y = (I - A)^{-1}x_y$. 令 $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n y$. 又由 $S^n y = \sum_{k=0}^n A^k y$ 及 (1.1.2) 式知 $\tilde{x} \in \mathcal{X}$.

因 S 连续, 则 $S\tilde{x} = S(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n y) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n+1} y = \tilde{x}$. 由压缩映射原理的唯一性知, $\tilde{x} = x_y$, 即

$$y = (I - A)x_y = (I - A)\tilde{x} = (I - A)\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n\right)y.$$

由 y 的任意性知, $(I - A)(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n) = I$. 类似可证 $(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I - A) = I$. 故

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

且

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

(3) 当 $|x| < 1$ 时, $\|A_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R})} < 1$. 由(2)知, $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_x^n$. 故 $(I - A)(\sum_{n=0}^{\infty} A_x^n) = I$. 注意到 $I = 1$ 且 $A_x(1) = x$, 知

$$(1 - x)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) = 1.$$

从而 $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. □

习题 1.1.6 (补充题) $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$

证明: 因 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, 则 $0 \in \rho(A)$ 且 $0 \in \rho(A^{-1})$. 下证

$$\rho(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}.$$

若 $\lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}$, 则 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. 对 $\forall x \in \mathcal{X}$, 方程

$$(\lambda^{-1}I - A^{-1})y = x$$

有唯一解 $y = -\lambda A(\lambda I - A)^{-1}x \in \mathcal{X}$. 从而 $R(\lambda^{-1}I - A^{-1}) = \mathcal{X}$, 又因 $A^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{X})$, 由命题 1.1.4 知 $\lambda^{-1} \in \rho(A)$. 故 $\rho(A^{-1}) \supset \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$.

若 $\lambda \in \rho(A^{-1}) \setminus \{0\}$, 同上可证 $\lambda^{-1} \in \rho((A^{-1})^{-1}) = \rho(A)$. 故

$$\rho(A^{-1}) \subset \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(A) \setminus \{0\}\} \cup \{0\}.$$

从而 $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\}$. □

1.2 紧算子

习题 1.2.1 设 \mathcal{X}, \mathcal{Y} 为 Banach 空间. $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 为线性算子. 证明以下三条等价:

(1) A 为全连续算子;

(2) 对 \mathcal{X} 中任意弱收敛于 θ 的点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. 均有 $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 \mathcal{Y} 中强收敛于 θ .

(3) 存在 $x_0 \in \mathcal{X}$ 且对 \mathcal{X} 中任意弱收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 均有 $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 \mathcal{Y} 中强收敛于 Ax_0 .

证明: (1) \Rightarrow (2) 因 A 为全连续算子. $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ 且 $x_n \rightharpoonup \theta, n \rightarrow \infty$. 根据全连续算子的定义知 $Ax_n \rightarrow A\theta, n \rightarrow \infty$. 又因 A 为线性算子, 知 $A\theta = \theta$. 故 $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在 \mathcal{Y} 中强收敛于 θ .

(2) \Rightarrow (3) 设 $\forall x_n \rightharpoonup, n \rightarrow \infty$, 则 $x_n - x_0 \rightharpoonup \theta$. 由(2)知 $A(x_n - x_0) \rightarrow \theta$, 于是 $Ax_n \rightarrow Ax_0$.

(3) \Rightarrow (1) 若 $\exists x_0 \in \mathcal{X}, \forall \{x_n\}, x_n \rightharpoonup x_0, n \rightarrow \infty$. 有 $Ax_n \rightarrow Ax_0, n \rightarrow \infty$. 那么, $\forall x \in \mathcal{X}, \forall \{x'_n\} \subset \mathcal{X}$ 且 $x'_n \rightharpoonup x, n \rightarrow \infty$. 则对于 $\forall f \in \mathcal{X}^*, f(x'_n) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$. 那么

$$\begin{aligned} |f(x'_n - x + x_0) - f(x_0)| &= |f(x'_n) - f(x) + f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x'_n) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

故 $x'_n - x + x_0 \rightharpoonup x_0$. 则

$$\begin{aligned} A(x'_n - x + x_0) &\rightarrow A(x_0) \\ \implies A(x'_n) - A(x) + A(x_0) &\rightarrow A(x_0) \\ \implies A(x'_n) &\rightarrow A(x), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

所以 A 为全连续算子. □

习题 1.2.2 记 S_n 如引理 1.2.26 之证明. 证明: $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致有界当且仅当, 对 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{X}^*$.

证明: $S_n(x) := \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i$.

(\Rightarrow) 若 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致有界. 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0$, 使得 $\|S_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq M$.

$$\|C_n(x)e_n\| = \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq 2M\|x\|_{\mathcal{X}},$$

而 $\forall n \in \mathbb{N}, \|C_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq 2M\|e_n\|_{\mathcal{X}}^{-1}$. 故 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{X}^*$.

(\Leftarrow) 若 $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{X}^*$, 而 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n > 0$, 使得 $\|C_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq M_n$. 由 $\|x - S_n(x)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. 故 $\exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时,

$$\|S_n(x)\| \leq \|x\|_{\mathcal{X}} + 1. \quad (1.1)$$

又 $n \in \{1, 2, \dots, N_0\}$,

$$\|S_n(x)\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{i=1}^n C_i(x)e_i \right\|_{\mathcal{X}} \leq M_0 N_0 \|e_0\|_{\mathcal{X}} \|x\|_{\mathcal{X}}, \quad (1.2)$$

其中 $M_0 := \max\{M_1, \dots, M_{N_0}\}$, $\|e_0\|_{\mathcal{X}} := \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_{N_0}\|\}$. 由(1.1)和(1.2)知, $\exists \widetilde{M} > 0, \forall x \in \mathcal{X}$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(x)\|_{\mathcal{X}} \leq \widetilde{M}.$$

则由共鸣定理, 知 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 一致有界. □

习题 1.2.3 证明: 若 \mathcal{X} 为无穷维 *Banach* 空间, 则 \mathcal{X} 上紧算子没有有界逆.

证明: 若不然, $A \in \mathfrak{C}$ 且 A 有有界逆, 即 $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. 由命题 1.2.6(vi) 可知, $AA^{-1} = I \in \mathfrak{C}(\mathcal{X})$. $\forall B \in \mathcal{X}$ 且 B 为有界集, $\overline{I(B)}$ 为 \mathcal{X} 中的紧集. 从而 \overline{B} 为 \mathcal{X} 中的紧集, 故 \overline{B} 自列紧.

$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B \subset \overline{B}$, 由 \overline{B} 是自列紧的知 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 有收敛子列, 故 B 是列紧的. 由《泛函分析(上册)》推论 1.4.30: “ B^* 空间 \mathcal{X} 是有穷维的, 当且仅当任意有界集是列紧的.” 可知 \mathcal{X} 是有穷维的. 矛盾. \square

习题 1.2.4 设 \mathcal{X} 为 *Banach* 空间, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$. 满足对 $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$\|Ax\|_{\mathcal{X}} \geq \alpha \|x\|_{\mathcal{X}}.$$

其中 α 为一正常数. 证明 A 紧当且仅当 \mathcal{X} 是又穷维的.

证明: (\Leftarrow) 若 $\dim \mathcal{X} < \infty$. 由注记 1.2.4 知, $A \in \mathfrak{C}(\mathcal{X})$.

(\Rightarrow) 令 $Ax = \theta$. 若 $\|Ax\|_{\mathcal{X}} \geq \alpha \|x\|_{\mathcal{X}}$, 知 $x = \theta$. 故 A 为单射. 从而 A^{-1} 存在. $\forall x \in \mathcal{X}$, 令 $y = Ax$. 则

$$\|y\|_{\mathcal{X}} \geq \alpha \|A^{-1}y\|_{\mathcal{X}} \Rightarrow \|A^{-1}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

故 A 有有界逆. 由习题 3 知, $\dim \mathcal{X} < \infty$. \square

习题 1.2.5 设 $p \in [1, \infty]$. $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$. 证明算子

$$T : \{\xi_n\} \rightarrow \{\omega_n \xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

是 ℓ^p 上的紧算子.

证明: $\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell^p$. 令 $T_N \xi = (\omega_1 \xi_1, \omega_2 \xi_2, \dots, \omega_n \xi_n, 0, \dots)$. 下证 $T_N \xi$ 为 ℓ^p 上的有界线性算子.

① 线性: $\forall \xi, \eta \in \ell^p$,

$$\begin{aligned} T_N(\alpha \xi + \beta \eta) &= (\omega(\alpha \xi_1 + \beta \eta_1), \dots, \omega(\alpha \xi_N + \beta \eta_N), 0, \dots) \\ &= (\alpha \omega_1 \xi_1, \dots, \alpha \omega_N \xi_N, 0, \dots) + (\alpha \omega_1 \eta_1, \dots, \alpha \omega_N \eta_N, 0, \dots) \\ &= \alpha T_N \xi + \beta T_N \eta. \end{aligned}$$

② 有界性:

$$\|T_N\|_{\mathcal{L}(\ell^p)} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \|T_N \xi\|_{\ell^p} = \sup_{\|\xi\|_{\ell^p}=1} \left(\sum_{i=1}^N |\omega_i \xi_i|^p \right)^{1/p}.$$

\square

习题 1.2.6 设 H 是 Hilbert 空间, A 是 H 上紧算子. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 H 的规范正交集. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ae_n, e_n) = 0.$$

1.3 紧算子的谱理论

习题 1.3.1 (原第3题) 设 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, 在 ℓ^2 上定义算子

$$A: (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$$

(1) 证明: A 在 ℓ^2 上有界当且仅当 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为有界数列.

(2) 若 A 有界. 求 $\sigma(A)$.

习题 1.3.2 (补充题) 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, 定义 $A: \begin{cases} \ell^1 \rightarrow \ell^1 \\ \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \{a_i x_i\}_{i \in \mathbb{N}}. \end{cases}$ 证明:

(1) $A \in \mathcal{L}(\ell^1) \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty.$

(2) $A^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^1) \iff \inf_{n \in \mathbb{N}} |a_n| > 0.$

(3) $A \in \mathfrak{C}(\ell^1) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

1.4 Hilbert-Schmidt 定理

习题 1.4.1 (原第3题) 设 H 为复 Hilbert 空间, 且 A 为 H 上的对称紧算子. 令

$$m(A) := \inf_{\|x\|_H=1} (Ax, x), \quad M(A) := \sup_{\|x\|_H=1} (Ax, x).$$

证明:

(1) 若 $m(A) \neq 0$, 则 $m(A) \in \sigma_p(A)$;

(2) 若 $M(A) \neq 0$, 则 $M(A) \in \sigma_p(A)$.

习题 1.4.2 (原第5题) 设 H 为复 Hilbert 空间. 则 $P \in \mathcal{L}(H)$ 为 H 上的正交投影算子当且仅当

$$(Px, x) = \|Px\|_H^2, \quad \forall x \in H.$$

2 Banach 代数

2.1 代数准备知识

2.2 Banach 代数

习题 2.2.1 证明例 2.2.6 中 \mathcal{A} 完备.

习题 2.2.2 设 \mathcal{B} 及其他记号同定理 2.2.13 且商模 $\|[\cdot]\|$ 定义如定理 2.2.13 的证明. 证明 $\| [e] \| = 1$ 且

$$\inf_{x \in [a], y \in [b]} \|xy\| = \inf_{x \in [a]} \|x\| \inf_{y \in [b]} \|y\|.$$

习题 2.2.3 设 \mathcal{A} 是有单位元的 Banach 代数, $a, b \in \mathcal{A}$. 证明:

(1) 若 $e - ab$ 可逆, 则 $e - ba$ 也可逆.

(2) 若非零复数 $\lambda \in \sigma(ab)$, 则 $\lambda \in \sigma(ba)$.

(3) 若 a 可逆, 则 $\sigma(ab) = \sigma(ba)$.

习题 2.2.4 设 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是两个可交换的有单位元的 Banach 代数. \mathcal{B} 是半单的. 若 φ 是 \mathcal{A} 到 \mathcal{B} 的一个同态. 求证 φ 是连续的.

习题 2.2.5 略

习题 2.2.6 用定理 1.1.14 即 “有界线性算子 A , $\sigma(A) \neq \emptyset$ ” 来证明定理 2.2.10 即 “可除 Banach 代数 \mathcal{A} 等距同构与 \mathbb{C} ”.

习题 2.2.7 证明以下两条等价.

(1) 设 \mathcal{X} 为 Banach 空间, $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\sigma(A) \neq \emptyset$.

(2) 设 \mathcal{A} 是有单位元的 Banach 代数. 则 $\forall a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \neq \emptyset$.

习题 2.2.8 证明引理 2.2.16 证明中的 $\tilde{\varphi}$ 是 $\mathcal{A}/J \rightarrow \mathbb{C}$ 上的等距同构映射.

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} \mathcal{A}/J \rightarrow \mathbb{C} \\ [a] \rightarrow \varphi(a). \end{cases}$$

习题 2.2.9 设 \mathcal{X} 为线性赋范空间, 若 S 为 \mathcal{X}^* 的 $*$ 弱闭集且有界. 证明 S 是 $*$ 弱紧的.

习题 2.2.10 (补充题) 设 \mathcal{A} 是 Banach 代数, 则对 $\forall x \in \mathcal{A}$. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ 存在且等于 $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

2.3 例子与应用

习题 2.3.1 设 $\mathcal{A} := \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\| := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|2^{|n|} < \infty\}$. 按函数的加法和数乘定义线性运算, 并定义乘法: $f * g(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(n-k)g(k)$. 证明:

- (1) \mathcal{A} 是可交换的 *Banach* 代数;
- (2) 令 $K := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 2\}$. 则 K 与 \mathfrak{M} 一一对应, 且 \mathcal{A} 的 *Gelfand* 表示是 K 上绝对收敛的 *Laurent* 级数.

习题 2.3.2 设 M 是 T_2 紧拓扑空间, 证明 M 的全体闭子集与 $C(M)$ 的全体理想间有一一对应.

习题 2.3.3 (补充题) 设 \mathcal{A} 是半单的交换 *Banach* 代数. 证明: \mathcal{A} 的 *Gelfand* 表示的值域 $\Gamma(\mathcal{A})$ 是 $C(\mathfrak{M})$ 的闭集的充要条件是存在正常数 $k < \infty$, 使得对 $\forall a \in \mathcal{A}$, 有 $\|a\|^2 \leq k\|a^2\|$.

2.4 C^* 代数

习题 2.4.1 设所有记号如定理 2.4.14 的证明. 证明:

- (1) $\widetilde{\mathcal{A}}$ 为 $C(\mathcal{Y})$ 的实值子代数;
- (2) 对任意 $\tilde{f} \in C(\mathcal{Y})_r$, $\tilde{f} - \tilde{f}(\partial) \in C_\infty(\mathcal{X})$;
- (3) (2.4.1) 成立.

习题 2.4.2 证明注记 2.4.15. 即: $f \in C_\infty(\mathcal{X}) \iff f \in C(\mathcal{Y})_r$ 且 $f(\partial) = 0$.

习题 2.4.3 证明交换半单有单位元的 *Banach* 代数上的任意对合运算均连续.

习题 2.4.4 (补充题) 设 \mathcal{A} 是一个交换的 C^* 代数. 设其单位元为 e . 若 $\forall x \in \mathcal{A}$. x 为 *Hermite* 元且 $\sigma(x) \subset [0, \infty)$. 则称 x 是正的, 记作 $x \geq 0$. 证明:

- (1) $x \geq 0 \iff \exists h \in \mathcal{A}$ 是 *Hermite* 元, 使得 $x = h^2$.
- (2) $x \geq 0 \iff x$ 为 *Hermite* 元且 $\| \|x\|e - x \| \leq \|x\|$.

2.5 Hilbert空间上的正常算子

习题 2.5.1 见命题 2.5.7.

习题 2.5.2 证明: N 为 Hilbert 空间 H 上的正常算子当且仅当 $\|Nx\|_H = \|N^*x\|_H, \forall x \in H$.

习题 2.5.3 证明: 两个可交换的正算子的积仍为正算子.

习题 2.5.4 设 N 为 Hilbert 空间 H 上的正常算子. 则存在唯一正算子 $P \in \mathcal{L}(H)$ 及酉算子 $Q \in \mathcal{L}(H)$ 使得 $N = PQ = QP$.

习题 2.5.5 设 N 为正常算子. 证明:

- (1) N 是酉算子当且仅当 $\sigma(N) \subset S^1$;
- (2) N 是自伴算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$;
- (3) N 是正算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}_+$.

习题 2.5.6 证明推论 2.5.28.

习题 2.5.7 (补充题1) 设 H 为 Hilbert 空间, $U \in \mathcal{L}(H)$. 证明以下三个论述等价:

- (1) U 是酉算子;
- (2) $R(U) = H$ 且对 $\forall x, y \in H, (Ux, Uy) = (x, y)$.
- (3) $R(U) = H$ 且对 $\forall x, y \in H, \|Ux\|_H = \|x\|_H$.

习题 2.5.8 (补充题2) 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in \mathcal{L}(H)$. 证明:

- (1) T^*T 的平方根 $P \in \mathcal{L}(H)$ 是唯一满足 $\|Px\|_H = \|Tx\|_H, \forall x \in H$ 的正算子.
- (2) 若 T 可逆, 则有唯一分解 $T = UP$, 其中 U 为酉算子, P 为正算子.

习题 2.5.9 (补充题3) 设 H 为可分的 Hilbert 空间, $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ 是任意有界复数列. 证明: 在 H 上存在唯一一个以 μ_k 为特征值的正常算子 T , 并且 $\|T\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\mu_k|$.