《随机过程引论》补充习题及解答

吴瀚霖 hanlinwu@mail.bnu.edu.cn

2018 年 6 月

---

1 随机过程

习题 1.1 (P3) 当 I 为可数集时, 过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是无区别的当且仅当它们互为修正.

证明 若 (X_t) 与 (Y_t) 是无区别的, 显然它们互为修正.

另一方面, 若 (X_t) 与 (Y_t) 互为修正, 则对于任意的 $t \in I$, 存在 $N_t \in \mathscr{F}$ 满足 $\mathbf{P}(N_t) = 0$, 使得对所有的 $\omega \in N_t^c$, $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$. 令 $N := \cup_{t \in I} N_t$, 因为 I 可数, 故 $N \in \mathscr{F}$, $\mathbf{P}(N) = 0$, 而且对于所有的 $\omega \in N^c$ 和 $t \in I$, 有 $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$, 因此 (X_t) 与 (Y_t) 是无区别的. □

习题 1.2 (P8) 取值于 $(E, \mathscr{E})$ 的两个随机过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 等价当且仅当 $Q_X = Q_Y$.

证明 $(\Rightarrow)$ $\mathscr{C}$ 为全体柱集构成的集合. $\forall \pi_J^{-1}(H) \in \mathscr{C}$, 其中 $J = \{t_1, \cdots, t_n\} \subseteq I, H \in \mathscr{E}^J, \pi$ 为投影.

$$\begin{aligned} Q_X(\pi_J^{-1}(H)) &= \mathbf{P}[X \in \pi_J^{-1}(H)] = \mathbf{P}[(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \in H] \\ &\xlongequal{X \text{ 与 } Y \text{ 等价}} \mathbf{P}[(Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_n}) \in H] = Q_Y(\pi_J^{-1}(H)). \end{aligned}$$

由 $\mathscr{E}^I = \sigma(\mathscr{C})$ 以及测度扩张定理知 $Q_X = Q_Y$ 在 $\mathscr{E}^I$ 上成立.

$(\Leftarrow)$ 若 $Q_X = Q_Y$, $\mathscr{D}_X$ 表示 X 的有限维分布族, $\mathscr{D}_Y$ 表示 Y 的有限维分布族. 则 $\forall \mu_J^X \in \mathscr{D}_X, J = \{t_1, \cdots, t_n\}, \forall A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{E}$, 有

$$\begin{aligned} \mu^X_{(t_1, \cdots, t_n)}(A_1 \times \cdots \times A_n) &= \mathbf{P}[X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_n} \in A_n] = Q_X[\pi_J^{-1}(A_1, \cdots, A_n)] \\ &= Q_Y[\pi_J^{-1}(A_1, \cdots, A_n)] = \mu^Y_{(t_1, \cdots, t_n)}(A_1 \times \cdots \times A_n). \end{aligned}$$

再由测度扩张定理知, $\forall B \in \mathscr{E}^J, \mu_J^X(B) = \mu_J^Y(B)$. 再由 J 的任意性知, $\mathscr{D}_X = \mathscr{D}_Y$, 从而 X 与 Y 等价. □

习题 1.3 (P14) 给定 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 和它上的流 $(\mathscr{F}_t : t \geq 0)$ 和 $A \subset [0, \infty) \times \Omega$. 证明 $(t, \omega) \mapsto 1_A(t, \omega)$ 循序可测等价于对任何的 $t \geq 0$ 有 $([0, t] \times \Omega) \cap A \in \mathscr{B}([0, t]) \times \mathscr{F}_t$.

证明 取定 t, 记 $f:\begin{cases}[0,t]\times\Omega\to\mathbb{R}\\(s,\omega)\mapsto 1_A(s,\omega).\end{cases}$ 取 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$, 则

$$f^{-1}(B)=\begin{cases}\varnothing, & 0\notin B,1\notin B;\\ A^c\cap([0,t]\times\Omega), & 0\in B,1\notin B;\\ A\cap([0,t]\times\Omega), & 0\notin B,1\in B;\\ [0,t]\times\Omega, & 0\in B,1\in B.\end{cases}$$

所以 f 可测, 即 $1_A(t,\omega)$ 循序可测. 另一方面, 取 $B=\{1\}$, 则 $f^{-1}(B)$ 可测, 即 $f^{-1}(B)=A\cap([0,t]\times\Omega)\in\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{F}_t$. □

习题 1.4 (P14) 关于 $(\mathscr{F}_t:t\in I)$ 循序可测的过程关于该流是适应的.

证明 由可测集的截集仍可测知命题成立. 或者由命题 1.3.12 知, 循序可测的过程是强适应的. □

习题 1.5 (P15) 常数值随机变量 $T\equiv t$ 是停时, 且此时有 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$.

证明 因为

$$\{T\le s\}=\begin{cases}\varnothing, s<t;\\ \Omega, s\ge t.\end{cases}$$

所以对于任意的 $s\in I$, $\{T\le s\}\in\mathscr{F}_s$, T 是停时.

若 $A\in\mathscr{F}_T$, 则对于任意的 $s\in I$, 有 $A\cap\{T\le s\}\in\mathscr{F}_s$. 取 $s=t$, 则有 $A\cap\Omega=A\in\mathscr{F}_t$. 另一方面, 若 $A\in\mathscr{F}_t$, 则

$$A\cap\{T\le s\}=\begin{cases}\varnothing, s<t;\\ A, s\ge t.\end{cases}$$

于是对于任意的 $s\in I$, $A\cap\{T\le s\}\in\mathscr{F}_s$, 从而 $A\in\mathscr{F}_T$. 于是 $\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_t$. □

习题 1.6 (P21) 对于 $A\in\mathscr{G}^\mu$ 取 $B\in\mathscr{G}$ 使 $A\Delta B\in\mathscr{N}$, 并令 $\nu(A)=\mu(B)$. 该定义无歧义且给出 $(E,\mathscr{G}^\mu)$ 上的一个有限测度 ν, 它在 $\mathscr{G}$ 上与 μ 重合.

证明 **(1) 无歧义.** 对于任意的 $A\in\mathscr{G}^\mu$, 若有 $B_1,B_2\in\mathscr{G}$, 使得 $A\Delta B_1=N_1\in\mathscr{N},A\Delta B_2=N_2\in\mathscr{N}$. 则 $B_1\Delta B_2\subset N_1\cup N_2\in\mathscr{N}$, 从而 $\mu(B_1)=\mu(B_2)=\nu(A)$.

(2) ν 是有限测度. 设 $\{A_i\}_{i=1}^\infty\in\mathscr{G}^\mu$ 互不相交. $\forall i\in\mathbb{N}_+,\exists B_i\in\mathscr{G}$, 使得 $A_i\Delta B_i\in\mathscr{N}$. 因为 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ 互不相交, 所以当 $i\neq j$ 时, $B_i\cap B_j\in\mathscr{N}$. 令 $C_1=B_1,C_i=B_i\backslash(B_{i-1}\cup\cdots\cup B_1)$. 于是 $\{C_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathscr{G}$ 互不相交且 $B_i\Delta C_i\in\mathscr{N}$, 从而 $A_i\Delta C_i\in\mathscr{N}$.

$$\nu\left(\sum_{i=1}^\infty A_i\right)=\mu\left(\sum_{i=1}^\infty C_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\mu(C_i)=\sum_{i=1}^\infty\nu(A_i).$$

从而 ν 满足 σ-可加性. 因为 μ 是有限测度, 所以 ν 是有限测度.

(3) ν 在 $\mathscr{G}$ 上与 μ 重合. $\forall B\in\mathscr{G},B\Delta B=\varnothing\in\mathscr{N},\nu(B)=\mu(B)$. □

2 鞅论基础

习题 2.1 (P29) *命题 2.1.5 中, (X_t) 关于自然流 $(\mathscr{F}_t)$ 是否是下鞅?*

证明 不一定是. 有如下反例: $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 为概率空间, 其中 $\mathscr{F} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$, 且 $\mathbf{P}(A) = 0$. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 令 $X_n(t)(\omega) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega$. 则 $\{X_n(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ 是关于 $(\mathscr{F}_t)$ 的下鞅 (也是鞅). 令 $X_t = 1_A, A \in \mathscr{F}, A \neq \varnothing$. 那么对于任意的 $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(t) - X_t| d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} 1_A d\mathbb{P} = 0.$$

于是 $X_n(t) \xrightarrow{L^1} X_t$. 但是 X_t 关于 $\mathscr{F}_t$ 不可测, 即 (X_t) 不是关于 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的过程, 当然更不是关于 $(\mathscr{F}_t)$ 的下鞅. □

习题 2.2 (P33) *设 $(X_n : n \geq 0)$ 是鞅, τ 是停时. (1) $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$; (2) $\mathbf{P}|X_\tau| < \infty$; (3) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n; \tau > n)$; (4) $\mathbf{P}(\sup_{k\geq 0} |X_{\tau\wedge k}|) < \infty$; 若 (1) 和 (4) 满足, 则 (2) 和 (3) 成立.*

证明 (1)+(4)⇒(2):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}|X_\tau| &= \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(|X_\tau|; \tau = n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(|X_{\tau\wedge n}|; \tau = n) \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(\sup_{k\geq 0} |X_{\tau\wedge k}|; \tau = n) = \mathbf{P}(\sup_{k\geq 0} |X_{\tau\wedge k}|) < \infty.
\end{aligned}$$

(1)+(4)⇒(3):

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n; \tau > n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\sup_{k\geq 0} |X_{\tau\wedge k}|; \tau > n) = 0.$$

上式的第二个等号是由积分的绝对连续性. □

习题 2.3 (P41, 推论 2.2.7) *设有给定的随机变量列 $(Y_n)_{n\leq 0}$ 和 σ 代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. 如果几乎必然地 $\lim_{n\to-\infty} Y_n = Y$ 且有可积随机变量 Z 使得 $|Y_n| \leq Z$, 那么 $X_n := \mathbf{P}(Y_n|\mathscr{F}_n)$ 几乎必然且 L^1 收敛于 $X_{-\infty} := \mathbf{P}(Y|\mathscr{F}_{-\infty})$, 其中 $\mathscr{F}_{-\infty} = \cap_n \mathscr{F}_n$.*

证明 令 $B_n := \mathbf{P}(Y|\mathscr{F}_n)$, 则 B_n 是杜布鞅, 从而一致可积. 于是 $\inf_{n\leq 0} \mathbf{P}(B_n) > -\infty$. 由定理 2.2.6 知, B_n 几乎必然且 L^1 收敛到 $B_{-\infty} := \mathbf{P}(B_n|\mathscr{F}_\infty) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(Y|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_{-\infty}] = \mathbf{P}(Y|\mathscr{F}_{-\infty}) = X_{-\infty}$.

记 $W_m := \sup_{k\geq m} |Y_k - Y|$, 则 $|W_m| \leq 2Z, W_m \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to-\infty} |X_n - X_{-\infty}| &= \limsup_{n\to-\infty} |\mathbf{P}[(Y_n - Y) \mid \mathscr{F}_n]| \\
&\leq \limsup_{n\to-\infty} \mathbf{P}[|Y_n - Y| \mid \mathscr{F}_n] \\
&\leq \limsup_{n\to-\infty} \mathbf{P}(W_m \mid \mathscr{F}_n) = \mathbf{P}(W_m \mid \mathscr{F}_{-\infty}).
\end{aligned}$$

令 $m \to 0$, 则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X_{-\infty}$. 又因为

$$|X_n| \leq \mathbf{P}(|Y_n| \mid \mathscr{F}_n) \leq \mathbf{P}(Z \mid \mathscr{F}_n).$$

所以 X_n 一致可积, 从而 $X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$. □

习题 2.4 (P45) 由两个不同可数稠集所定义的右极限过程是不可区分的.

证明 设 D_1, D_2 是 $[0,\infty)$ 的两个不同稠子集. 由定理 2.3.1 知, 对于任意的 t 和几乎必然的 $\omega \in \Omega$, 有

$$X_{t+}^{D_1}(\omega) = \lim_{s\in D_1, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega), X_{t+}^{D_2}(\omega) = \lim_{s\in D_2, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega).$$

令 $D_3 = D_1 \cup D_2$, 则 D_3 也是可数稠子集, 那么

$$X_{t+}^{D_3}(\omega) = \lim_{s\in D_3, s\downarrow\downarrow t} X_s(\omega)$$

存在, 故子列的极限相等. 于是 $X_{t+}^{D_1} = X_{t+}^{D_2}, \forall t \geq 0, \text{a.s. } \omega \in \Omega$. 即 $X_{t+}^{D_1}$ 与 $X_{t+}^{D_2}$ 互为修正. 再由右连续性知

$$\mathbf{P}(X_{t+}^{D_1} = X_{t+}^{D_2}, \forall t \geq 0) = 1 - \cup_{t\in\mathbb{Q}^+}\mathbf{P}(X_{t+}^{D_1} \neq X_{t+}^{D_2}) = 1.$$

故 $X_{t+}^{D_1}$ 与 $X_{t+}^{D_2}$ 不可区分. □

习题 2.5 (P46, 推论 2.3.5) 关于 $(\mathscr{F}_t)$ 适应的右连续可积过程 X 是鞅当且仅当对任何有界停时 $\sigma \leq \tau$ 有 $\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\tau)$, 或等价地对任何有界停时 τ 有 $\mathbf{P}(X_\tau) = \mathbf{P}(X_0)$.

证明 $(\Rightarrow)$ 将定理 2.3.4 证明过程中的不等号改成等号即可.

$(\Leftarrow)$ 对于任意的 $s \leq t$, 任取 $A \in \mathscr{F}_s$, 定义停时

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} s, \omega \in A \\ 0, \omega \in A^c, \end{cases} \qquad \tau(\omega) = \begin{cases} t, \omega \in A \\ 0, \omega \in A^c. \end{cases}$$

则

$$\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\sigma; A) + \mathbf{P}(X_\sigma; A^c) = \mathbf{P}(X_s; A) + \mathbf{P}(X_0; A^c).$$

同理

$$\mathbf{P}(X_\tau) = \mathbf{P}(X_t; A) + \mathbf{P}(X_0; A^c).$$

由 $\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\tau)$ 知 $\mathbf{P}(X_s; A) = \mathbf{P}(X_t; A), \forall A \in \mathscr{F}_s$. 即

$$\mathbf{P}(X_t \mid \mathscr{F}_s) = X_s.$$

从而 (X_t) 是鞅. □

习题 2.6 (P47, 定理 2.3.8) 设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是右连续下鞅. 则有下面性质成立:

(1) 对任何 $\lambda > 0$ 及 $t \geq 0$ 有

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leq s\leq t} |X_s| \geq \lambda\right\} \leq 2\mathbf{P}(X_t^+) - \mathbf{P}(X_0);$$

(2) 若 X 是非负的, 则对任何 $p > 1$ 及 $t \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{P}(X_t^p);$$

(3) 若 X 是鞅, 则对任何 $t \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} X_s^2\right) \leq 4\mathbf{P}(X_t^2).$$

证明 (1) 令 $F := [0,t] \cap (\mathbb{Q} \cup \{0,t\})$, 取 $(F_n)_{n\ge 0}$ 为一列递增的有限集, 每个 F_n 都包含 $\{0,t\}$ 且 $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = F$. 令

$$A_n := \{\omega : \max_{s\in F_n} |X_s(\omega)| \ge \lambda\}.$$

由定理 2.1.14 知,

$$\lambda \mathbf{P}(A_n) \le 2\mathbf{P}(X_t^+) - \mathbf{P}(X_0). \tag{2.1}$$

显然 $A_n \uparrow A := \{\omega : \sup_{s\in F} |X_s(\omega)| \ge \lambda\}$. 对 (2.1) 式两侧关于 n 取极限, 再由测度的下连续性, 有

$$\lambda \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lambda \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \le 2\mathbf{P}(X_t^+) - \mathbf{P}(X_0).$$

因为 F 在 $[0,t]$ 中稠密, 故对任意的 $s \in [0,t]$, 存在 F 中的一列 $\{s_n\}_{n\ge 0}$ 满足 $s_n \downdownarrows s$. 由 (X_t) 轨道右连续性知, $X_s(\omega) = \lim_{s_n \downdownarrows s} X_{s_n}(\omega)$. 于是

$$\lambda \mathbf{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} |X_s| \ge \lambda\right) \le 2\mathbf{P}(X_t^+) - \mathbf{P}(X_0).$$

(2) F_n, F 同 (1) 中定义. 由定理 2.1.14 知

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\in F_n} X_s^p\right) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{P}(X_t^p).$$

因 $\max_{s\in F_n} X_s^p$ 非负且关于 n 单调上升. 由单调收敛定理, 有

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s\in F} X_s^p\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} \max_{s\in F_n} X_s^p\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max_{s\in F_n} X_s^p\right) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{P}(X_t)^p.$$

令 $A := \sup_{s\in[0,t]} X_s^p(\omega), B := \sup_{s\in F} X_s^p(\omega)$. 固定 $\omega \in \Omega$, 下面说明 $A = B$. 事实上, 显然有 $A \ge B$. 只需说明另一方面. 由上确界定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists s_0 \in [0,t]$, 使得 $X_{s_0}^p(\omega) > A - \varepsilon$. 由 F 的稠密性及 (X_t) 的右连续性知, $\exists s_0' \in F$, 满足 $X_{s_0}^p(\omega) - X_{s_0'}^p(\omega) < \varepsilon$. 于是 $X_{s_0'}^p(\omega) > A - 2\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $X_{s_0'}^p \ge A$, 于是 $B \ge A$. 从而 $A = B$, 命题得证.

(3) 因为 X 是鞅, 由命题 2.1.1 知 $|X_t|$ 是非负下鞅. 对 $|X_t|$ 应用 (2) 的结论, 取 $p = 2$ 即可. □

习题 2.7 (P48, 定理 2.3.9) *假设流 $(\mathscr{F}_t : t \ge 0)$ 满足通常条件, 而 $(X_t : t \ge 0)$ 是右连续下鞅且 $K := \sup_{t\ge 0} \mathbf{P}|X_t| < \infty$. 则 $X_t \xrightarrow{a.s.} X$ $(t \to \infty)$, 其中 X 是一个可积随机变量. 另外若 (X_t) 是一致可积下鞅, 则 $X_t \xrightarrow{L^1} X$; 若 (X_t) 是一致可积鞅, 则还有 $X_t = \mathbf{P}(X|\mathscr{F}_t)$.*

证明 (1) 令 $X^* := \limsup_{t\to\infty} X_t, X_* := \liminf_{t\to\infty} X_t$. 则

$$\{X^* > X_*\} = \cup_{a<b\in\mathbb{Q}} \{X_* < a < b < X^*\}.$$

令 $X_n^{(m)} := X_{n/2^m}, n, m \in \mathbb{N}$. 对任意的 m, $\{X_{n/2^m}\}$ 是关于 $(\mathscr{F}_{n/2^m} : n \in \mathbb{N})$ 的离散时间下鞅, 且 $\sup_n \mathbf{P}|X_n^{(m)}| \le K < \infty$. 由离散情形知: 对任意的 $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}\left\{U_N^{X^{(m)}}[a,b]\right\} \le \frac{1}{b-a} \mathbf{P}|X_N^{(m)} - a| \le \frac{K + |a|}{b-a}.$$

由单调收敛定理, $\mathbf{P}\left\{\lim_{N\to\infty} U_N^{X^{(m)}}[a,b]\right\} < \infty$. 故几乎必然有 $\lim_{N\to\infty} U_N^{X^{(m)}}[a,b] < \infty$. 令 $m\to\infty$, 由稠密性及右连续性知

$$\lim_{t\to\infty} U_t^X[a,b] < \infty, \quad \text{a.s.}$$

又因 $\{X_* < a < b < X^*\} \subset \{\lim_{t\to} U_t^X[a,b] = 0\}$. 所以 $\mathbf{P}\{X_* < a < b < X^*\} = 0$, 即 $X_* = X^*$, a.s. 从而 $\lim_{t\to\infty} X_t$ 几乎必然存在. 令 $X := \lim_{t\to\infty} X_t$, X 的可积性由 Fatou 引理:

$$\mathbf{P}(|X|) = \mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty} |X_t|\right) \le \liminf_{t\to\infty} \mathbf{P}|X_t| \le K < \infty.$$

(2) 若 (X_t) 是一致可积下鞅, 由上述证明知 $X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ $(t\to\infty)$. 再由控制收敛定理知 $X_t \xrightarrow{L^1} X$ $(t\to\infty)$.

(3) 若 (X_t) 是一致可积鞅, 则有 $X_t \xrightarrow{L^1} X$ $(t\to\infty)$. 对 $\forall s\le t$ 及 $A\in\mathscr{F}_s$,

$$\mathbf{P}(X;A) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(X_t;A) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_t|\mathscr{F}_s);A] = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(X_s;A) = \mathbf{P}(X_s;A).$$

于是 $X_s = \mathbf{P}(X|\mathscr{F}_s)$. □

习题 2.8 (P49) 可选过程是循序可测的.

证明 利用函数形式的单调类定理, 令 $L := \{X : X\text{为循序可测的随机过程}\}$, 下面验证 L 为 $\mathscr{L}$ 系.

① $1\in L$ 显然成立.

② 线性组合封闭. 对于任意的 $X,Y\in L$, 即 X,Y 循序可测. 由循序可测的定义知, 对于任意的 $t\in I$, 映射 $(s,\omega)\mapsto X_s(\omega)$ 与 $(s,\omega)\mapsto Y_s(\omega)$ 限制在 $([0,t]\cap I)\times\Omega$ 上关于 $\mathscr{B}([0,t]\cap I)\times\mathscr{F}_t$ 和 $\mathscr{E}$ 是可测的. 因为可测映射的线性组合仍可测, 所以 X,Y 的线性组合仍循序可测.

③ 若 $X^{(n)}\in L, 0\le X_n\uparrow X$, 则 $X\in L$. 事实上, 对于任意的 $n\in\mathbb{N}_+$, $X^{(n)}$ 循序可测, 即对于任意的 $t\in I$, 映射 $(s,\omega)\mapsto X^{(n)}(\omega)$ 限制在 $([0,t]\cap I)\times\Omega$ 上关于 $\mathscr{B}([0,t]\cap I)\times\mathscr{F}_t$ 和 $\mathscr{E}$ 是可测的. 由可测映射的极限仍可测, 故 $(s,\omega)\mapsto X(\omega)$ 限制在 $([0,t]\cap I)\times\Omega$ 上关于 $\mathscr{B}([0,t]\cap I)\times\mathscr{F}_t$ 和 $\mathscr{E}$ 是可测的. 于是 X 循序可测.

令 $\mathscr{A} := \{X : X\text{为右连续的适应过程}\}$. 显然 $\mathscr{A}$ 对于乘积运算封闭. 由定理 1.3.1(右连续且适应 $\Rightarrow$ 循序可测) 知, $\mathscr{A}\subset L$. 根据单调类定理, $\sigma(\mathscr{A})\subset L$.

令 $\mathscr{O}$ 为可选过程 (左极右连的适应过程) 生成的 $I\times\Omega$ 上的最小的 σ 代数, 显然 $\mathscr{O}\subset\sigma(\mathscr{A})\subset L$. 于是可选过程是循序可测的. □

3 马尔可夫过程

习题 3.1 (P55) K 是可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 到 $(F,\mathscr{F})$ 的有界核, L 是可测空间 $(F,\mathscr{F})$ 到 $(B,\mathscr{B})$ 的有界核. μ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的有限测度. 证明:

$$K(Lf) = (KL)f, \quad (\mu K)L = \mu(KL).$$

证明 (1) 对于任意的 $x \in E$,

$$\begin{aligned} K(Lf)(x) &= \int_E K(x,dy)Lf(y) = \int_E K(x,dy)\int_F L(y,dz)f(z) \\ &= \int_E\int_F K(x,dy)L(y,dz)f(z) = \int_E KL(x,dz)f(z) = (KL)f(x). \end{aligned}$$

所以 $K(Lf) = (KL)f$.

(2) 对于任意的 $A \in \mathscr{B}$, 由 Fubini 定理,

$$\begin{aligned} (\mu K)L(A) &= \int_F\int_E \mu(dx)K(x,dy)L(y,A) \\ &= \int_E \mu(dx)\int_F K(x,dy)L(y,A) = \int_E \mu(dx)KL(x,A) = \mu(KL)(A). \end{aligned}$$

所以 $(\mu K)L = \mu(KL)$. □

习题 3.2 (P55) 任何从 $(E,\mathscr{E})$ 到 $(F,\mathscr{F})$ 的有界核都可以自然地扩张为从 $(E,\mathscr{E}^\bullet)$ 到 $(F,\mathscr{F}^\bullet)$ 的有界核.

证明 ① 对于任意的 $x \in E$, 将 $K(x,\cdot)$ 扩张为 $\mathscr{F}^\bullet$ 上的测度. 对于任意的有限测度 μ,

$$\mathscr{F}^\mu = \sigma(\mathscr{F}\cup\mathscr{N}) = \{A \subset F : \exists B \in \mathscr{F} \text{ 使得} A\Delta B \in \mathscr{N}\}.$$

其中 $\mathscr{N}$ 为所有 μ-零集构成的集合. 根据习题 1.6 知, 可将 $K(x,\cdot)$ 唯一地扩张为 $\mathscr{F}^\mu$ 上的测度. 又因为 $\mathscr{F}^\bullet \subset \mathscr{F}^\mu$, 所以 $K(x,\cdot)$ 在 $\bar{\mathscr{F}}$ 上有唯一扩张.

② 往证对于任意的 $B \in \mathscr{F}^\bullet, x \mapsto K(x,B)$ 为 $\mathscr{E}^\bullet$ 可测函数. 对于 $(E,\mathscr{E})$ 上任意的有限测度 μ, μK 为 $\mathscr{F}$ 上的有限测度, 故 $B \in \mathscr{F}^{\mu K}$. 于是存在 $B_1, B_2 \in \mathscr{F}$, 使得 $B_1 \subset B \subset B_2$ 且 $\mu K(B_1) = \mu K(B_2)$. $\omega \mapsto K(\omega, B_i), i = 1,2$ 关于 $\mathscr{E}$ 可测, 且

$$\mu K(B_1) = \int_E K(\omega,B_1)\mu(d\omega) = \int_E K(\omega,B_2)\mu(d\omega) = \mu K(B_2). \tag{3.1}$$

对于任意的 $\omega \in E$, $K(\omega,B_1) \le K(\omega,B) \le K(\omega,B_2)$. 结合 (3.1) 有, $\mu\{K(\omega,B_1) \ne K(\omega,B_2)\} = 0$. 再由推论 1.4.3 知 $x \mapsto K(x,B)$ 关于 $\mathscr{E}^\mu$ 可测. 由 μ 的任意性知 $x \mapsto K(x,B)$ 关于 $\mathscr{E}^\bullet$ 可测. □

习题 3.3 (P57, 例 3.2.3) 假定 $(P_t)_{t\ge0}$ 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的马氏转移半群. 给定常数 $b \ge 0$, 对于 $t \ge 0$ 和 $x \in E$ 令 $P_t^b(x,dy) = e^{-bt}P_t(x,dy)$. 则 $(P_t^b)_{t\ge0}$ 也是 $(E,\mathscr{E})$ 上的转移半群. 显然 $(P_t^b)_{t\ge0}$ 为保守的转移半群的充要条件是 $b = 0$.

证明 对于任意的 $f \in b\mathscr{E}$,

$$P_0^b f(x) = \int_E P_0(x, dy) f(y) = P_0 f(x) = f(x).$$

满足 C-K 方程: 对于任意的 $x \in E, B \in \mathscr{E}$,

$$\begin{aligned} P_{s+t}^b(x, B) &= e^{-(s+t)} P_{s+t}(x, B) \\ &= e^{-(s+t)} \int_E P_s(x, dy) P_t(y, B) \\ &= \int_E e^{-s} P_s(x, dy) e^{-t} P_t(y, B) \\ &= \int_E P_s^b(x, dy) P_t^b(y, B). \end{aligned}$$

最后 (P_t^b) 为保守的转移半群当且仅当 $P_t^b(x, E) = e^{-bt} P_t(x, E) = 1$, 当且仅当 $b = 0$. □

习题 3.4 (P59, 命题 3.2.5) 以 $(E, \mathscr{E})$ 为状态空间的过程 $(X_t : t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathscr{E}$ 马氏性当且仅当对任意的 $\{s_1 < \cdots < s_n = s < t\} \subset I$ 和 $B \in \mathscr{E}$ 有

$$\mathbf{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) = P_{t-s}(X_s, B).$$

证明 $(\Rightarrow)$ 若 X 具有以 P_t 为转移半群的马氏性, 则 $\mathbf{P}(X_t \in B | \mathscr{F}_s) = P_{t-s}(X_s, B)$. 两边对 $(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})$ 取条件期望, 即得

$$\mathbf{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) = P_{t-s}(X_s, B).$$

$(\Leftarrow)$ 若 $\mathbf{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) = P_{t-s}(X_s, B)$ 成立, 对任意的 $A \in \mathscr{E}^n$, 有

$$\mathbf{P}[1_B(X_t) 1_A(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})] = \mathbf{P}[P_{t-s}(X_s, B) 1_A(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})].$$

固定 $s \in I$, 令 $\mathscr{C}_s := \{(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n})^{-1}(A) : A \in \mathscr{E}^n, s_1 < \cdots < s_n \in I \cap [0, s]\}$. 则 $\mathscr{C}_s$ 是 π 系且 $\sigma(\mathscr{C}_s) = \mathscr{F}_s$. 令 $\Lambda := \{G \in \mathscr{F}_s : 满足\ \mathbf{P}[1_B(X_t) 1_G] = \mathbf{P}[P_{t-s}(X_s, B) 1_G]\}$. 容易验证 Λ 满足① 对于真差封闭, ② 对于单调上升的极限封闭, ③ $E \in \Lambda$. 故 Λ 为 λ 系, 且 $\mathscr{C}_s \subset \Lambda$. 由集合形式的单调类定理知 $\mathscr{F}_s \subset \Lambda$. 从而

$$\mathbf{P}(X_t \in B | \mathscr{F}_s) = P_{t-s}(X_s, B),$$

即 $(X_t : t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathscr{E}$ 马氏性. □

习题 3.5 (P59) 证明 $\mathscr{D}_\mu$ 是相容的有限维分布族.

证明 (1) 横向相容: 对于任意的 $J = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \in \mathscr{F}(I)$ 及 $(1, 2, \cdots, n)$ 的置换 $(\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$. 记 $\sigma(J) = (t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \cdots, t_{\sigma(n)})$. 因为 P_J 是利用置换定义的, 所以

$$\begin{aligned} \mu P_{\sigma(J)}(A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(n)}) &= \int_E \mu(dx) P_{\sigma(J)}(x, A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(n)}) \\ &= \int_E \mu(dx) P_J(x, A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= \mu P_J(A_1 \times \cdots \times A_n) \\ &= \mu P_J \circ \Sigma^{-1}(A_{\sigma(1)} \times \cdots \times A_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

其中, Σ 表示映射 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(n)})$. 由单调类定理易知

$$\mu P_{\sigma(J)}=\mu P_J\circ\Sigma^{-1}.$$

(2) 纵向相容: 对于任意的 $J=(t_1,\cdots,t_n)\in\mathscr{F}(I)$ 及 $B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{E}$. 因为 P_J 是通过置换定义的, 故不妨假设 $t_1<t_2<\cdots<t_n$. 若有某个 $1\le k\le n$, 使得 $B_k=E$, 则对于任意的 $x\in E$, 有

$$\begin{aligned}&P_J(x,B_1\times\cdots\times B_n)\\=&\int_{B_1\times\cdots\times B_n}P_{t_1}(x,dx_1)P_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\\=&\int_{B_1}P_{t_1}(x_1,dx_1)\cdots\int_E P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1},dx_k)\int_{B_{k+1}}P_{t_{k+1}-t_k}(x_k,dx_{k+1})\cdots\int_{B_n}P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\\=&\int_{B_1}P_{t_1}(x_1,dx_1)\cdots\int_{B_{k+1}}P_{t_{k+1}-t_k}(x_{k-1},dx_{k+1})\cdots\int_{B_n}P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)\\=&P_{J_k}(x,B_1\times\cdots\times B_{k-1}\times B_{k+1}\times\cdots\times B_n).\end{aligned}$$

其中 $J_k:=\{t_1,\cdots,t_{k-1},t_{k+1},\cdots,t_n\}\in\mathscr{F}(I)$. 于是 $\mu P_J=\mu P_{J_k}$, 即满足纵向相容性. □

习题 3.6 (P63, 定理 3.3.4) 如果 $(X_t:t\in I)$ 相对于流 $(\mathscr{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathscr{E}$ 强马氏性, 那么对任意的 $t\in I,f\in b\mathscr{E}$ 和有限 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T 有

$$\mathbf{P}[f(X_{T+t})|\mathscr{G}_T]=\mathbf{P}[f(X_{T+t})|X_T].$$

证明 由 X_t 的 $\mathscr{E}$ 强马氏性知, $\forall t\in I$ 和有限 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T, 有

$$\mathbf{P}[f(X_{T+t})|\mathscr{G}_T]=P_tf(X_T).\tag{3.2}$$

因为 $P_tf(X_T)$ 关于 $\sigma(X_T)$ 可测, 对上式两边同时取关于 X_T 的条件期望, 得

$$\mathbf{P}[f(X_{T+t})|X_T]=P_tf(X_T).\tag{3.3}$$

比较 (3.2) 与 (3.3) 知结论成立. □

习题 3.7 (P63, 定理 3.3.5) 如果 $(X_t:t\in I)$ 相对于流 $(\mathscr{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathscr{E}$ 强马氏性, 那么对于任意的有限 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T 和 $F\in b\mathscr{F}^T$ 有

$$\mathbf{P}(F|\mathscr{G}_T)=\mathbf{P}(F|X_T).$$

证明 令 $\mathscr{C}$ 为所有形如 $f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})$ 的可测函数构成的集合, 其中 $t_1\le\cdots\le t_n\in I$ 且 $f_1,\cdots,f_n\in b\mathscr{E}$. 显然 $\mathscr{C}$ 对与乘积运算封闭且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}^T$. 令 $L:=\{F\in b\mathscr{F}_T:\mathbf{P}(F|\mathscr{G}_T)=\mathbf{P}(F|X_T)\}$, 则 L 是线性空间且包含所有的常值函数, 对非负有界上升的极限封闭. 由单调类定理, 只需证明 $\mathscr{C}\subset L$, 即得 $b\mathscr{F}^T\subset L$.

用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 由定理 3.2.9 知结论成立. 假设对于某个 $n\ge1$ 成立, 那么对于 $\forall t_{n+1}\ge t_n$ 和 $f_{n+1}\in b\mathscr{E}$, 存在 $g\in b\mathscr{E}$, 使得

$$\mathbf{P}[f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_{T+t_n}]=\mathbf{P}[f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}}|X_{T+t_n})]=g(X_{T+t_n}).$$

故

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[f_1(X_{T+t_1})\cdots f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_T]\\
=&\mathbf{P}\{\mathbf{P}[f_1(X_{T+t_1})\cdots f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_{T+t_n}]|\mathscr{G}_T\}\\
=&\mathbf{P}\{f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})\mathbf{P}[f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_{T+t_n}]|\mathscr{G}_T\}\\
=&\mathbf{P}\{f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})g(X_{T+t_n})|\mathscr{G}_T\}\\
=&\mathbf{P}\{f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})g(X_{T+t_n})|X_T\}\\
=&\mathbf{P}\{f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})\mathbf{P}[f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_{T+t_n}]|X_T\}\\
=&\mathbf{P}\{\mathbf{P}[f_1(X_{T+t_1})\cdots f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_{T+t_n}]|X_T\}\\
=&\mathbf{P}[f_1(X_{T+t_1})\cdots f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|X_T].
\end{aligned}$$

即对于 $n+1$ 的情形也成立. 从而结论成立. □

习题 3.8 (P63, 推论 3.3.6) *如果 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathscr{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathscr{E}$ 强马氏性, 那么对于任意的有限 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T, $F \in b\mathscr{F}^T$ 和 $G \in b\mathscr{G}_T$ 有*

$$\mathbf{P}(GF|X_T) = \mathbf{P}(G|X_T)\mathbf{P}(F|X_T).$$

证明

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(GF|X_T) &= \mathbf{P}[\mathbf{P}(GF|\mathscr{G}_T)|X_T] = \mathbf{P}[G\mathbf{P}(F|\mathscr{G}_T)|X_T]\\
&= \mathbf{P}[G\mathbf{P}(F|X_T)|X_T] = \mathbf{P}(G|X_T)\mathbf{P}(F|X_T).
\end{aligned}$$

□

习题 3.9 (P63, 推论 3.3.7) *如果 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathscr{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathscr{E}$ 强马氏性, 那么对于任何有限 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T, 在 $\mathbf{P}(\,\cdot\,|X_T)$ 之下 $(X_{t\wedge T} : t \in I)$ 和 $(X_{T+t} : t \in I)$ 独立.*

证明 注意到 $\mathscr{F}^T = \sigma(\{X_{T+t} : t \in I\})$, $\mathscr{G}_T = \sigma(\{X_{t\wedge T} : t \in I\})$??, 再由推论 3.3.6 立得结论. □

习题 3.10 (P64) *考虑状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 上的次马氏转移半群 $(P_t : t \in I)$. 取 $\partial \notin E$, 令 $\tilde{E} := E \cup \{\partial\}$, 再定义此状态空间上的 σ 代数 $\tilde{\mathscr{E}} := \sigma(\mathscr{E} \cup \{\{\partial\}\})$. 对 $t \in I$ 令*

$$\tilde{P}_t(y, A) = \begin{cases} P_t(y, A), & y \in E, A \in \mathscr{E}, \\ 1 - P_t(y, E), & y \in E, A = \{\partial\}, \\ \delta_\partial(A), & y = \partial, A \in \tilde{\mathscr{E}}. \end{cases}$$

证明: 上式确定了 $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{E}})$ 上的一族概率核 $(\tilde{P}_t : t \in I)$ 且它们构成马氏转移半群. 因此任何一个次马氏转移半群总可扩张为马氏转移半群.

证明 (1) 证明 $\tilde{P}_t(y, A)$ 是马氏核.

首先, 令 $\mathscr{C} := \mathscr{E} \cup \{\{\partial\}\}$. 则 $\mathscr{C}$ 是半集代数. 由 $\tilde{P}_t$ 定义知, 固定 $y \in \tilde{E}$,

- 若 $y \in E$, 则 $\tilde{P}_t(y, \tilde{E}) = \tilde{P}_t(y, A) + \tilde{P}_t(y, \{\partial\}) = 1$;
- 若 $y = \partial$, 则 $\tilde{P}_t(y, \tilde{E}) = \delta_{\{\partial\}}(\tilde{E}) = 1$.

又因为 σ 可加性显然成立, 故 $\tilde{P}_t$ 是 $(\tilde{E},\mathscr{C})$ 上的概率测度. 由测度扩张定理知, 可唯一扩张为 $\tilde{\mathscr{E}}=\sigma(\mathscr{C})$ 上的概率, 仍记作 $\tilde{P}_t$.

其次, 固定 $A\in\tilde{\mathscr{E}}$, $\tilde{P}_t(\,\cdot\,,A)$ 关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测. 事实上,

- 若 $A\in\mathscr{E}$, 则 $\tilde{P}_t(y,A)=1_E\cdot P_t(y,A)+1_\partial\cdot 0$, 关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测.
- 若 $A=\{\partial\}$, 则 $\tilde{P}_t(y,A)=1_E(1-P_t(y,E))+1_\partial\cdot 1$, 关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测.

故对于任意的 $A\in\mathscr{C}$, 有 $\tilde{P}_t(\,\cdot\,,A)$ 关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测. 令 $\Lambda:=\{A\in\tilde{E}:\tilde{P}_t(y,A)$关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测$\}$.

① $\tilde{E}\in\Lambda$. 因为 $\tilde{P}_t(y,\tilde{E})=\tilde{P}_t(y,E)+\tilde{P}_t(y,\{\partial\})$.

② 若 $A\in\Lambda,B\in\Lambda$ 且 $A\subset B$, 则 $\tilde{P}_t(y,B-A)=\tilde{P}_t(y,B)=\tilde{P}_t(y,A)$ 关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测, 于是 $B-A\in\Lambda$.

③ 若 $A_n\in\Lambda,A_n\uparrow A$, 则 $\tilde{P}_t(y,A)=\lim_{n\to\infty}\tilde{P}_t(y,A_n)$ 关于 $\tilde{\mathscr{E}}$ 可测, 于是 $A\in\Lambda$.

从而 Λ 是 λ 系, 又因 $\mathscr{C}\subset\Lambda$, 由单调类定理知 $\tilde{\mathscr{E}}=\sigma(\mathscr{C})\subset\Lambda$.

故 $\tilde{P}_t(y,A)$ 是马氏核.

(2) 证明 $\tilde{P}_t(y,A)$ 是马氏转移半群.

首先说明 $\tilde{P}_0$ 是恒等算子. 因为 P_0 是恒等算子, 所以 $\forall x\in E$, $P_0(x,E)=1$. 否则对 $f\equiv 1$, $P_0f(x)=\int_E P_0(x,dy)=P_0(x,E)\neq 1$, 与 $f\equiv 1$ 矛盾. 对于任意的 $f\in b\tilde{\mathscr{E}}$,

- 若 $x\in E$, 则

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0f(x)&=\int_{\tilde{E}}f(y)\tilde{P}_0(x,dy)=\int_E f(y)P_0(x,dy)+\int_{\{\partial\}}f(y)\tilde{P}_0(x,dy)\\&=f(x)+f(\partial)[1-P_0(x,E)]=f(x).\end{aligned}$$

- 若 $x=\partial$, 则

$$\tilde{P}_0f(\partial)=\int_{\tilde{E}}f(y)\delta_\partial(dy)=f(\partial).$$

故 $\tilde{P}_t$ 是恒等算子.

其次, $\tilde{P}_t$ 满足 C-K 方程.

- 若 $x\in E$. 对于任意的 $s,t\in I$, 若 $A\in\mathscr{E}$,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{s+t}(x,A)=P_{s+t}(x,A)&=\int_E P_s(x,dy)P_t(y,A)\\&=\int_E\tilde{P}_s(x,dy)\tilde{P}_t(y,A)+\int_{\{\partial\}}\tilde{P}_s(x,dy)\tilde{P}_t(y,A)\\&=\int_{\tilde{E}}\tilde{P}_s(x,dy)\tilde{P}_t(y,A).\end{aligned}$$

若 $A=\{\partial\}$,

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{E}}\tilde{P}_s(x,dy)\tilde{P}_t(y,\{\partial\})&=\int_E\tilde{P}_s(x,dy)[1-P_t(y,E)]+\int_{\{\partial\}}\tilde{P}_s(x,dy)\delta_\partial(\{\partial\})\\&=\int_E P_s(x,dy)[1-P_t(y,E)]+\tilde{P}_s(x,\{\partial\})\\&=P_s(x,E)-P_{s+t}(x,E)+1-P_s(x,E)\\&=1-P_{s+t}(x,E)=\tilde{P}_{s+t}(x,\{\partial\}).\end{aligned}$$

令 $\Lambda := \{A \in \mathscr{E}:$ 满足$\tilde{P}_{s+t}(x,A) = \int_{\tilde{E}} \tilde{P}_s(x,dy)\tilde{P}_t(y,A)\}$, 由上面的证明知, $\mathscr{C} \subset \Lambda$. 容易证明, Λ 为 λ 系, 由单调类定理知 $\tilde{\mathscr{E}} = \sigma(\mathscr{C}) \subset \Lambda$. 那么, 对于任意的 $x \in E, A \in \tilde{\mathscr{E}}$, C-K 方程成立.

- 若 $x = \partial$, 则对于任意的 $s,t \in I$, 任意的 $A \in \tilde{\mathscr{E}}$,

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{E}} \tilde{P}_s(\partial,dy)\tilde{P}_t(y,A) &= \int_E \tilde{P}_s(\partial,dy)\tilde{P}_t(y,A) + \int_{\{\partial\}} \tilde{P}_s(\partial,dy)\tilde{P}_t(y,A) \\ &= 0 + \tilde{P}_t(\partial,A) = \delta_{\{\partial\}}(A) = \tilde{P}_{s+t}(\partial,A).\end{aligned}$$

综上, C-K 方程成立, $\tilde{P}_t(y,A)$ 是马氏转移半群. $\square$

习题 3.11 (P65) *给定 $(E,\mathscr{E})$ 上的有限测度 μ, 定义 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上的有限测度 $\mathbf{P}^\mu$ 如下:*

$$\mathbf{P}^\mu(A) = \int_E \mathbf{P}^x(A)\mu(dx), A \in \mathscr{G}.$$

如果 μ 为概率测度, 则 $\mathbf{P}^\mu$ 也是概率测度. 此时在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 $(X_t : t \in I)$ 相对于 $(\mathscr{G}_t, t \in I)$ 是以 μ 为初始分布以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程.

证明 首先说明对于任何 $F \in b\mathscr{G}$, 有

$$\mathbf{P}^\mu(F) = \int_E \mathbf{P}^x(F)\mu(dx). \tag{3.4}$$

事实上, 当 $F = 1_A, A \in \mathscr{G}$ 时, $\mathbf{P}^\mu(F) = \mathbf{P}^\mu(A) = \int_E \mathbf{P}^x(A)\mu(dx) = \int_E \mathbf{P}^x(F)\mu(dx)$. 由积分的线性性知, 对 F 为简单函数时, 结论成立. 由单调收敛定理知, 结论对于非负可测函数成立. 最后, 由于一般可测函数可以表示为正部与负部的差, 从而结论成立.

其次, 因 $(X_t : t \in I)$ 相对于 $(\mathscr{G}, \mathscr{G}_t, \mathbf{P}^x)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为半群的马氏性, 故对于任意的 $f \in b\mathscr{E}$, $\mathbf{P}^x[f(X_{s+t})|\mathscr{G}_s] = P_t f(X_s)$. 从而对于任意的 $A \in \mathscr{G}_s$, $\mathbf{P}^x[1_A f(x_{s+t})] = \mathbf{P}^x[1_A P_t f(X_s)]$. 由 (3.4) 知,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^\mu[1_A f(X_{s+t})] &= \int_E \mathbf{P}^x[1_A f(X_{s+t})]\mu(dx) \\ &= \int_E \mathbf{P}^x[1_A P_t f(X_s)]\mu(dx) \\ &= \mathbf{P}^\mu[1_A P_t f(X_s)].\end{aligned}$$

由条件期望的定义, $\mathbf{P}^\mu[f(X_{s+t})|\mathscr{G}_s] = P_t f(X_s)$. 所以, $(X_t : t \in I)$ 相对于 $(\mathscr{G}_t, t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏性.

最后, 对于任意的 $B \in \mathscr{E}$, $\mathbf{P}^\mu(X_0 \in B) = \int_E \mathbf{P}^x(X_0 \in B)\mu(dx) = \int_B 1\mu(dx) + \int_{B^c} 0\mu(dx) = \mu(B)$. 故初始分布为 μ. $\square$

习题 3.12 (P69, 定理 3.4.5) *设 X 具有 $\mathscr{E}$ 强马氏性. 那么对任意的随机变量 $F \in b\mathscr{F}$ 和 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T 有 $F \circ \theta_T 1_{\{T<\infty\}} \in b\mathscr{G}$, 且对任意的初始分布 μ 有*

$$\mathbf{P}^\mu(F \circ \theta_T 1_{\{T<\infty\}}|\mathscr{G}_T) = \mathbf{P}^{X_T}(F)1_{\{T<\infty\}}. \tag{3.5}$$

证明 令 $\mathscr{C} := \{f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n}) : n \in \mathbb{N}_+, 1 \le t_1 < \cdots < t_n \in I, f_i \in b\mathscr{E}, \forall i \in \mathbb{N}_+\}$. 对于任意的 $F = f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n}) \in \mathscr{C}$, $F \circ \theta_T 1_{\{t<\infty\}} = f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})1_{\{T<\infty\}}$. 由过程的强适应性有 $f_i(X_{t+t_i})1_{\{T<\infty\}} \in b\mathscr{G}_{t_i+T} \subset g\mathscr{G}$, 故 $F \circ \theta_T 1_{\{t<\infty\}} \in b\mathscr{G}$.

往证, 对于任意的 $F \in \mathscr{C}$ 和初始分布 μ, (3.5) 成立. 用数学归纳法, 当 $n = 1$ 时, 由强马氏性有

$$\mathbf{P}^\mu[f(X_t) \circ \theta_T 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{G}_T] = P_t f(X_T) 1_{\{T<\infty\}}.$$

由马氏系统的定义知

$$\mathbf{P}^x[f(X_t)] = \mathbf{P}^x\{\mathbf{P}^x[f(X_t)|\mathscr{G}_0]\} = \mathbf{P}^x[P_t f(X_0)] = P_t f(x),$$

将上式的 x 替换为 X_T, 再乘以 $1_{\{T<\infty\}}$ 得到 $\mathbf{P}^{X_T}[f(X_t)]1_{\{T<\infty\}} = P_t f(X_T)1_{\{T<\infty\}}$. 于是对于 $n = 1$ 时成立.

假设对于某个 $n \ge 1$ 成立, 那么

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}^\mu\left\{[f_1(X_{t_1})\cdots f_{n+1}(X_{T_{n+1}})] \circ \theta_T 1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{G}_T\right\} \\
=&\mathbf{P}^\mu\left\{f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})\mathbf{P}^\mu[f_{n+1}(X_{T+t_{n+1}})|\mathscr{G}_{T+t_{n+1}}]1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{G}_T\right\} \\
=&\mathbf{P}^\mu\left\{f_1(X_{T+t_1})\cdots f_n(X_{T+t_n})P_{t_{n+1}-t_n} f(X_{T+t_n})1_{\{T<\infty\}} | \mathscr{G}_T\right\} \\
=&\mathbf{P}^x[f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n})P_{t_{n+1}-t_n} f(X_{T+t_n})]1_{\{T<\infty\}}\Big|_{x=X_T} \\
=&\mathbf{P}^x\left\{f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n})\mathbf{P}^x[f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathscr{G}_{t_n}]\right\}1_{\{T<\infty\}}\Big|_{x=X_T} \\
=&\mathbf{P}^x\left\{\mathbf{P}^x[f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n})f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathscr{G}_{t_n}]\right\}1_{\{T<\infty\}}\Big|_{x=X_T} \\
=&\mathbf{P}^{X_T}[f_1(X_{t_1})\cdots f_n(X_{t_n})f_{n+1}(X_{t_{n+1}})]1_{\{T<\infty\}}
\end{aligned}$$

即得对任意的 $F \in \mathscr{C}, F \circ \theta_T 1_{\{T<\infty\}} \in b\mathscr{G}$ 且 (3.5) 成立.

令 $L := \{F \in g\mathscr{F} : F \circ \theta_T 1_{\{T<\infty\}} \in b\mathscr{G}$且满足 (3.5)$\}$, 则 $\mathscr{C} \subset L$. 显然 $\mathscr{C}$ 对乘积运算封闭, 由函数形式的单调类定理, $b\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C}) \subset L$. □

习题 3.13 (P71) *预解方程: 对任意的 $\alpha, \beta > 0$ 和 $f \in b\mathscr{E}$, 有*

$$(\beta - \alpha)U^\alpha U^\beta f(x) = U^\alpha f(x) - U^\beta f(x), x \in E.$$

证明

$$\begin{aligned}
P_t U^\beta f(x) &= \int_E P_t(x, dy)U^\beta f(y) = \int_E P_t(x, dy)\int_0^\infty e^{-\beta s} P_s f(y) ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\beta s} P_{s+t} f(x) ds = \int_t^\infty e^{-\beta(u-t)} P_u f(x) du.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U^\alpha U^\beta f(x) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t U^\beta f(x) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_t^\infty e^{-\beta(u-t)} P_u f(x) du dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\beta u} P_u f(x) \int_0^u e^{(\beta-\alpha)t} dt du \\
&= \int_0^\infty e^{-\beta u} P_u f(x) (\beta-\alpha)^{-1} [e^{(\beta-\alpha)u} - 1] du \\
&= (\beta-\alpha)^{-1} \int_0^\infty (e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}) P_u f(x) du \\
&= (\beta-\alpha)^{-1} [U^\alpha f(x) - U^\beta f(x)].
\end{aligned}
$$

$\square$

4 费勒过程

习题 4.1 (P78) 任何费勒半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 都是博雷尔的.

证明 给定任意的 $f \in C_0(E)$. 对于任何 $(s,x),(t,y) \in [0,\infty) \times E$, 我们有

$$\begin{aligned}|P_sf(x) - P_tf(y)| &\leq |P_sf(x) - P_sf(y)| + |P_sf(y) - P_tf(y)| \\ &\leq |P_sf(x) - P_sf(y)| + P_{s\wedge t}|P_{|t-s|f-f}|(y) \\ &\leq |P_sf(x) - P_sf(y)| + \|P_{|t-s|}f - f\|.\end{aligned}$$

当 $(s,x) \to (t,y)$ 时, 上式右端趋于零. 故映射 $(s,x) \mapsto P_sf(x)$ 关于 (s,t) 右连续, 从而是 $\mathscr{B}[0,\infty) \times \mathscr{E}$ 可测的.

令 $L := \{f : (s,x) \mapsto P_sf(x)$ 关于 $\mathscr{B}[0,\infty) \times \mathscr{E}$ 可测$\}$. 易证 L 包含所有常值函数, 对于线性运算封闭, 对于单调上升的有界极限封闭, 故 L 为 $\mathscr{L}$ 系. 又 $C_0(E) \subset L$ 且对乘积运算封闭. 由单调类定理, $b\mathscr{E} \subset b\sigma(C_0(E)) \subset L$. □

习题 4.2 (P82) E 是可分局部紧度量空间, 则 E 必存在相对紧开集构成的可数基.

证明 因 E 可分, 故可设 $\{x_n : n = 1,2,\cdots\}$ 为 E 的可数稠子集. 对任何 $n,k \geq 1$, 令 $G_{n,k} := B(x_n, \frac{1}{k}) = \{y \in E : d(y,x_n) < \frac{1}{k}\}$. 则对任意的开集 A, 一定存在 $x_n \in A$. 定义 $\rho = d(x_n, A)$, 存在 k 使得 $\frac{1}{k} < \rho$, 则 $G_{n,k} \subset A$. 从而 $\{G_{n,k}\}$ 是 E 的可数基. □

习题 4.3 (P85) 对每个 $\alpha > 0$ 和 $f \in C_u(E)$, 有 $U^\alpha f \in C_u(E)$.

证明 对于任意的 $f \in C_u(E)$, 令 $f_0(x) = f(x) - f(\partial) \in C_0(E)$, 则由命题 4.1.2 证明过程知 $U^\alpha f_0 \in C_0(E)$. 从而 $U^\alpha f = U^\alpha f_0 + U^\alpha f(\partial) = U^\alpha f_0 + \alpha^{-1} f(\partial) \in C_u(E)$. □

习题 4.4 (P78, 例 3.2.1) 设 X_0 是实值随机变量. 对任何 $t \geq 0$ 令 $X_t = X_0 + t$. 则 $(X_t : t \geq 0)$ 是马氏过程, 其转移半群 $(P_t)_{t\geq 0}$ 可定义为 $P_t(x,dy) = \delta_{x+t}(dy)$. 这样, 对于任何 $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ 及 $f \in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 有 $P_tf(x) = f(x+t)$. 此外, (P_t) 还是费勒半群, 并求其生成元.

证明 根据定义知

$$P_tf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)P_t(x,dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\delta_{x+t}(dy) = f(x+t). \tag{4.1}$$

(1) 验证 (P_t) 为转移半群.

- 因为 $P_t(x,\mathbb{R}) = \delta_{x+t}(\mathbb{R}) = 1$, 故其为马氏核.
- 由 (4.1) 知 $P_0f(x) = f(x)$.
- 满足 C-K 方程:

$$\int_{\mathbb{R}} P_s(x,dy)P_t(y,B) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x+s}(dy)\delta_{y+t}(B) = \delta_{x+s+t}(B) = P_{s+t}(x,B).$$

(2) 半群满足费勒性质.

- 对于任意的 $f \in C_0(\mathbb{R})$, $P_t f(x) = f(x+t)$ 关于 x 连续, 且

$$\lim_{x\to\infty} P_t f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x+t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

因 f 有界, 故 $P_t f(x)$ 显然有界. 于是 $P_t f(x) \in C_0(\mathbb{R})$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, f \in C_0(\mathbb{R}), \lim_{t\to 0} P_t f(x) = \lim_{t\to 0} f(x+t) = f(x)$.

(3) 半群满足马氏性. $\forall s, t \in \mathbb{R}, f \in b\mathscr{G}$,

$$\mathbf{P}[f(X_{s+t})|\mathscr{G}_s] = \mathbf{P}[f(X_s + t)|\mathscr{G}_s] = f(X_s + t) = P_t f(X_s).$$

(4) 求生成元. $\mathscr{D}(A) = C_u^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}), Af(x) = f'(x)$, 其中 $C_u^1(\mathbb{R}) := \{f : f$ 与 f' 是有界一致连续函数$\}$. 根据定义知 $\mathscr{D}(A) := \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f)$ 在上确界范数下存在$\}$.

一方面, $C_u^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) \subset \mathscr{D}(A)$. 对于任意的 $f \in C_u^1(\mathbb{R})$,

$$\left\|\frac{P_t f - f}{t} - f'\right\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x)\right|,$$

因为 $f'(x)$ 一致连续, 故 f 一致可微, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, 对 $\forall x \in \mathbb{R}, t < \delta$, 有 $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - f'(x)\right| < \varepsilon$. 于是 $\left\|\frac{P_t f - f}{t} - f'\right\| \to 0, t \downarrow 0$.

另一方面, $\mathscr{D}(A) \subset C_u^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. 对任意的 $f \in \mathscr{D}(A)$, 因 $\mathscr{D}(A) \subset C_0(\mathbb{R})$, 故 $f \in C_0(\mathbb{R})$. 由定理 4.1.3 知, $\lim_{t\to\infty} \|P_t f - f\| = 0$, 于是 $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |P_t f(x) - f(x)| = 0$, 从而 $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| = 0$, 即 f 一致连续. 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}|f'(x) - f'(x+t)| \le \left|f'(x) - \frac{P_{t_0} f(x) - f(x)}{t_0}\right| &+ \left|\frac{P_{t_0} f(x) - f(x)}{t_0} - \frac{P_{t_0} f(x+t) - f(x+t)}{t_0}\right| \\ &+ \left|\frac{P_{t_0} f(x+t) - f(x+t)}{t_0} - f'(x+t)\right|.\end{aligned}$$

因为对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 t_0, 使得 $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f'(x) - \frac{P_{t_0} f(x) - f(x)}{t_0}\right| < \varepsilon/3$, 故可以选取适当的 t_0 使得上式右侧的第一项和第三项对于 $x \in \mathbb{R}$ 一致地小于 $\varepsilon/3$. 第二项等于

$$\left|\frac{f(x+t_0) - f(x+t_0+t)}{t_0} + \frac{f(x+t) - f(x)}{t_0}\right|,$$

由 f 的一致连续性知, 存在 δ, 使得对于任意的 $t < \delta$, 都有上式对于 $x \in \mathbb{R}$ 一致地小于 $\varepsilon/3$. 因此 f' 是一致连续的. 此外, 对于任意的 $f \in \mathscr{D}(A)$, 有 $\|\frac{P_t f - f}{t} - f'\| \to 0, t \downarrow 0$. 取 $\varepsilon = 1$, 存在 t_1 使得

$$\left\|\frac{P_{t_1} f - f}{t_1} - f'\right\| \le 1.$$

因此 $\|f'\| \le 1 + \left\|\frac{P_{t_1} f - f}{t_1}\right\| \le 1 + \frac{2\|f\|}{t_1}$. 因 f 有界, 故 f' 也有界. 至此, $f \in C_u^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. □

习题 4.5 (P78, 例 3.2.2) *设 X_0 是实值随机变量. 对任意 $t \ge 0$ 令 $X_t = X_0 + \mathrm{sgn}(X_0)t$, 其中 sgn 为符号函数. 则 $(X_t : t \ge 0)$ 为马氏过程, 其转移半群 $(P_t)_{t\ge 0}$ 可定义为 $P_t(x, dy) = \delta_{x+\mathrm{sgn}(x)t}(dy)$. 对于任何 $t \ge 0, x \in \mathbb{R}$ 及 $f \in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 有 $P_t f(x) = f(x + \mathrm{sgn}(x)t)$.*

证明 根据定义知,

$$P_tf(x) = \int_{\mathbb{R}} P_t(x,dy)f(y) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x+\mathrm{sgn}(x)t} f(x) = f(x+\mathrm{sgn}(x)t). \tag{4.2}$$

(1) 验证 (P_t) 是转移半群.

- (P_t) 是马氏核.
- 由 (4.2) 知, $P_0f(x) = f(x)$.
- 满足 C-K 方程: 对任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$P_sP_tf(x) = \begin{cases} f(x+t+s), & x>0 \\ f(x-t-s), & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases} = P_{s+t}(x).$$

(2) 半群不具有费勒性质. 因存在 $f \in C_0(\mathbb{R})$ 满足 $f(x) \neq f(0), \forall x \neq 0$. $P_tf(x) = f(x+t) \to f(t), x \downarrow 0$. 而 $f(t) \neq f(0) = P_tf(0), \forall t \neq 0$. 所以 $P_tf(x) \nrightarrow P_tf(0), x \downarrow 0, \forall t \neq 0$. 故 $P_tf \notin C_0(\mathbb{R}), \forall t \neq 0$, 因此不是费勒半群.

(3) (X_t) 具有马氏性. 对于任意的 $s,t \in \mathbb{R}, f \in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[f(X_{t+s})|\mathscr{G}_s] &= \mathbf{P}[f(X_s + t\cdot \mathrm{sgn}(X_0))|\mathscr{G}_s] \\ &= f(X_s + t\cdot \mathrm{sgn}(X_0)) \\ &= f(X_s + t\cdot \mathrm{sgn}(X_s)) \\ &= P_tf(X_s) \end{aligned}$$

因此, 具有以 $(P_t : t \geq 0)$ 为转移半群的马氏性.

(4) (X_t) 具有强马氏性. 对于任意的 $t \in \mathbb{R}, f \in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 和 $(\mathscr{G}_t)$ 停时 T,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[P_tf(X_T)1_{\{T<\infty\}}] &= \mathbf{P}[f(X_T + t\cdot \mathrm{sgn}(X_T))1_{\{T<\infty\}}] \\ &= \mathbf{P}[f(X_0 + T\cdot \mathrm{sgn}(X_0) + t\cdot \mathrm{sgn}(X_0))1_{\{T<\infty\}}] \\ &= \mathbf{P}[f(X_0 + (T+t)\mathrm{sgn}(X_0))1_{\{T<\infty\}}] \\ &= \mathbf{P}[f(X_{T+t})1_{\{T<\infty\}}]. \end{aligned}$$

因此具有以 $(P_t : t \geq 0)$ 为转移半群的强马氏性. □

习题 4.6 (P78, 例 4.1.1) 固定常数 $\alpha > 0$, 对于 $f \in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 定义 $P_0f(x) = f(x)$ 和

$$P_tf(x) = e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} f(x+k), t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

则 $(P_t)_{t\geq 0}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的费勒转移半群, 并求其生成元.

证明 (1) 首先证明 $(P_t)_{t\geq 0}$ 是转移半群.

- 由定义知, $P_0f(x)=f(x)$.
- 满足 C-K 方程: 对任意的 $f\in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
P_sP_tf(x) &= e^{-\alpha s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k s^k}{k!}e^{-\alpha t}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\alpha^\ell t^\ell}{\ell!}f(x+\ell+k)\\
&= e^{-(s+t)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\alpha^k s^k}{k!}\frac{\alpha^\ell t^\ell}{\ell!}f(x+\ell+k)\\
(\text{由 Fubini 定理}) &= e^{-(s+t)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\alpha^k s^{k-\ell}t^\ell}{(k-\ell)!\ell!}f(x+k)\\
&= e^{-\alpha(s+t)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\alpha^k(s+t)^k f(x+k)\\
&= P_{s+t}f(x).
\end{aligned}$$

(2) 半群具有费勒性质.

- 对于任意的 $f\in C_0(\mathbb{R})$, $\forall x\in\mathbb{R},\forall t\geq 0$, 因 f 有界, 故 $\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\alpha t}\frac{\alpha^k t^k}{k!}f(x)\leq\|f\|<\infty,\forall x\in\mathbb{R}$. 于是由 Lebesgue 控制收敛定理及 f 的连续性知

$$\lim_{s\to0}P_tf(x+s)=\lim_{s\to0}e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k t^k}{k!}f(x+s)=e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k t^k}{k!}\lim_{s\to0}f(x+s)=P_tf(x).$$

从而 P_tf 连续. 另外类似地由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{x\to\infty}P_tf(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k t^k}{k!}f(x)=e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k t^k}{k!}\lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

于是 $P_tf\in C_0(E)$.

- 对于任意的 $f\in C_0(E)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{t\to0}P_tf(x)=\lim_{t\to0}e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k t^k}{k!}f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{t\to0}e^{-\alpha t}\frac{\alpha^k t^k}{k!}f(x)=f(x).$$

(3) 求生成元. 见书中定理 5.2.1. □

习题 4.7 (P78, 例 4.1.2) 对于 $f\in b\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 定义 $P_0f(x)=f(x)$ 和

$$P_tf(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-(y-x)^2/2t}dy,t\geq0,x\in\mathbb{R}.$$

则 $(P_t)_{t\geq0}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的费勒转移半群, 并求其生成元.

证明 (1) 验证 $(P_t)_{t\geq0}$ 为转移半群.

- 对于任意的 $t \in \mathbb{R}, P_t$ 为马氏核. 首先对于任意的 $A \in \mathscr{B}$,

$$P_t(x, A) = P_t 1_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} 1_A(y) e^{-(y-x)^2/2t} dy$$

是可测函数. 其次对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{B}$ 两两不交,

$$\begin{aligned}
P_t(x, \cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} 1_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}(y) e^{-(y-x)^2/2t} dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_i}(y) e^{-(y-x)^2/2t} dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P_t(x, A_i).
\end{aligned}$$

所以 $P(x, \cdot)$ 是测度. 最后, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $P(x, \mathbb{R}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-x)^2/2t} dy = 1$.

- 由定义知 $P_0 f(x) = f(x)$.

- 满足 C-K 方程. 对于任意的 $f \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
P_t P_s f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(y-z)^2/2s} dy e^{-(z-x)^2/2t} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-z)^2/2s} e^{-(z-x)^2/2t} dz dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{t(y^2+z^2-2yz)+s(z^2+x^2-2zx)}{2st}\right\} dz dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(t+s)(z-\frac{2sx+2ty}{t+s})^2}{2st} - \frac{(x-y)^2}{2(t+s)}\right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(t+s)^2}\right\} dy \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{s+t}}{\sqrt{2\pi st}} \exp\left\{-\frac{(z-\frac{2sx+2ty}{t+s})^2}{2\frac{st}{t+s}}\right\} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t+s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(t+s)^2}\right\} dy \\
&= P_{s+t} f(x).
\end{aligned}$$

(2) 半群满足费勒性质.

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy \xlongequal{\frac{y-x}{\sqrt{t}}=z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+\sqrt{t}z) e^{-z^2/2} dz.$$

- 对任意的 $f \in C_0(\mathbb{R})$, 若 $t = 0$, 则 $P_0 f = f \in C_0(\mathbb{R})$. 若 $t > 0$, 因 f 有界, 故 $f(x+\sqrt{t}z)e^{-z^2/2} \leq \|f\| e^{-z^2/2}$, 且 $\int_{\mathbb{R}} \|f\| e^{-z^2/2} dz = \|f\| \sqrt{2\pi} < \infty$. 从而由 Lebesgue 控制收敛定理及 f 的连续性知

$$\lim_{x \to x_0} P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{x \to x_0} f(x+\sqrt{t}z) e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x_0+\sqrt{t}z) e^{-z^2/2} dz = P_t f(x_0).$$

类似地, $\lim_{t \to \infty} P_t f(x) = 0$. $P_t f$ 有界性显然. 从而 $P_t f \in C_0(\mathbb{R})$.

- 同样由 lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{t\to0+}P_tf(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\lim_{t\to0+}f(x+\sqrt{t}z)e^{-z^2/2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-z^2/2}dz=f(x).$$

(3) 求生成元. 对于任意的 $f\in C_u^2(\mathbb{R}):=\{f\in C_u(\mathbb{R}):f''(x)\text{ 有界且一致连续}\}$.

$$f(x+\sqrt{t}z)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\sqrt{t}z+\frac{f''(x+\theta\sqrt{t}z)}{2!}(\sqrt{t}z)^2.$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{P_tf-f}{t}&=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{f(x+\sqrt{t}z)-f(x)}{t}dz\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\left[\frac{f'(x)z}{\sqrt{t}}+\frac{f''(x+\theta\sqrt{t}z)}{2}z^2\right]dz\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{f''(x+\theta\sqrt{t}z)}{2}z^2dz.\end{aligned}$$

先求形式上的极限. 注意到 $\int_{\mathbb{R}}e^{-z^2/2}z^2dz=\sqrt{2\pi}$, 再由 Lebesgue 控制收敛定理知,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{P_tf-f}{t}&=\lim_{t\to0+}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{z^2}{2}[f''(x+\theta\sqrt{t}z)-f''(x)]dz+\lim_{t\to0+}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{z^2}{2}f''(x)dz\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{z^2}{2}\left[\lim_{t\to0+}f''(x+\theta\sqrt{t}z)-f''(x)\right]dz+\frac{1}{2}f''(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-z^2/2}z^2dz\\&=\frac{1}{2}f''(x).\end{aligned}$$

下面说明上述极限在上确界范数意义下收敛, 存在 C 使得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{P_tf}{t}-\frac{1}{2}f''(x)\right|\\=&\left|\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{f(x+\sqrt{t}z)-f(x)}{t}dz-\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{z^2}{2}f''(x)dz\right|\\\le&\sqrt{t}C\to0,t\to0.\end{aligned}$$

□

5 莱维过程

习题 5.1 (P97) 假若 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上相对于流 $(\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ 的平稳独立增量过程, 记 $X_t - X_0$ 的分布为 μ_t, 则 $(\mu_t)_{t\geq 0}$ 构成一个卷积半群.

习题 5.2 (P97) 给定 $\mathbb{R}^d$ 上的卷积半群 $(\mu_t)_{t\geq 0}$, 对于任何 $t \geq 0$ 我们可以定义

$$P_t(x, B) := \mu(B - x), x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d).$$

证明 $P_t(x, dy)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的核.

习题 5.3 $(N_t : t \geq 0)$ 为普瓦松过程, 证明 $\{N_t - \lambda t\}$ 是鞅.

习题 5.4 (P105) 证明布朗运动 $(B_t : t \geq 0)$ 是鞅. 且 $\{B_t^2 - t\}$ 也是鞅.

习题 5.5 (P109, 推论 5.3.6)

6 补充习题

习题 6.1 设 $\{N_t : t \geq 0\}$ 是参数为 α 的普瓦松过程, $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量, 且 $\{N_t\}$ 与 $\{\xi_n\}$ 独立. 令 $X_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \geq 0$. 称 $\{X_t\}$ 为复合普瓦松过程, 其转移半群为

$$P_t f(x) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \mathbf{E}[f(x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i)].$$

证明 (1) 验证 (P_t) 为转移半群.

- 对于任意的 $t \geq 0$, P_t 为马氏核. (概率为 1, 可测性, 是测度.)
- 由定义知 $P_0 f(x) = f(x)$.
- 满足 C-K 方程: 对于任意的 $f \in b\mathscr{B}(\mathbb{R}), s, t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}
P_s P_t f(x) &= e^{-\alpha s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^k}{k!} \mathbf{E} \left\{ e^{-\alpha t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^\ell}{\ell!} \mathbf{E} \left[f(x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i) \right] \right\} \\
&= e^{-\alpha s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^k}{k!} e^{-\alpha t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^\ell}{\ell!} \mathbf{E} \left[f(x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i) \right] \\
(\text{由 Fubini 定理}) &= e^{-\alpha(s+t)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\alpha^k (s+t)^k}{k!} \mathbf{E} \left[f(x + \sum_{i=1}^{k} \xi_i) \right] \\
&= P_{s+t} f(x).
\end{aligned}$$

(2) 半群满足费勒性质.

- 对于任意的 $f \in C_0(\mathbb{R}), \forall t \geq 0$,

$$e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\mathbf{E}\left[f(x+\sum_{i=1}^{k}\xi_i)\right] \leq e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\|f\| = \|f\| < \infty.$$

  故由 Lebesgue 控制收敛定理及 f 的连续性知 $\lim_{x\to x_0} P_t f(x) = P_t f(x_0)$, 即 $P_t f$ 连续. $P_t f$ 的有界性显然成立. 另外, $\lim_{x\to\infty} P_t f(x) = 0$. 于是 $P_t f \in C_0(\mathbb{R})$.

- 类似地, 由 Lebesgue 控制收敛定理知 $\lim_{t\to 0+} P_t f(x) = f(x)$.

(3) 求生成元. 首先求极限,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0+}\frac{P_t f(x)-f(x)}{t}\\
=&\lim_{t\to 0+}\frac{e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\mathbf{E}\left[f(x+\sum_{i=1}^{k}\xi_i)\right]-e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}f(x)}{t}\\
=&\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left\{e^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\mathbf{E}\left[f(x+\sum_{i=1}^{k}\xi_i)-f(x)\right]\right\}\\
=&\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\left\{e^{-\alpha t}(\alpha t)\mathbf{E}[f(x+\xi_1)-f(x)]+e^{-\alpha t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\mathbf{E}\left[f(x+\sum_{i=1}^{k}\xi_i)-f(x)\right]\right\}\\
=&\alpha\mathbf{E}[f(x+\xi_1)-f(x)].
\end{aligned}$$

下证 $Af(x) = \alpha\mathbf{E}[f(x+\xi_1)-f(x)]$. 对于任意的 $f \in C_0(\mathbb{R})$, 当 $t < 1$ 时, 存在 C 满足

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{P_t f(x)-f(x)}{t}-\alpha\mathbf{E}[f(x+\xi_1)-f(x)]\right|\\
=&\left|\alpha(e^{-\alpha t}-1)\mathbf{E}[f(x+\xi_1)-f(x)]+\alpha e^{-\alpha t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\alpha t)^{k-1}}{k!}\mathbf{E}\left[f(x+\sum_{i=1}^{k}\xi_i)-f(x)\right]\right|\\
\leq&\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\mathbf{E}\left|f(x+\xi_1)-f(x)\right|+\alpha e^{-\alpha t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\alpha t)^{k-1}}{k!}\mathbf{E}\left|f(x+\sum_{i=1}^{k}\xi_i)-f(x)\right|\\
\leq&C\|f\|t.
\end{aligned}$$

□

习题 6.2 请举例说明 *(1)* 马氏过程不一定是鞅. *(2)* 鞅不一定是马氏过程.