

## “实验室科研探究”课专题讲座

# 数学建模 (Mathematical Modeling)

## ——数学与实际问题之间的桥梁



清华大学数学科学系 谢金星

办公室：理科楼A-202# 电话：62787812

E-mail: jxie@math.tsinghua.edu.cn

http://faculty.math.tsinghua.edu.cn/~jxie

## 数学也有实验吗？



在物理、化学、生物、医学等自然科学领域中，**实验**是重大发明、著名定律及新材料、新手段的主要源泉之一

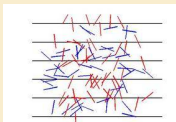


- 数学是从天上掉下来的吗？
- 是数学家头脑中固有的吗？
- 人的正确思想只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来。——毛泽东
- 数学本质上来源于实践(含实验)

## 一个新的学科分支：实验数学

- 数学起源：计数，丈量土地，航海，...

“社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。”——恩格斯



- 早期的数学实验：蒲丰投针，计算 $\pi$
- 1976年阿佩尔和哈肯在**计算机**上用1200小时作了100多亿次判断，**完成了**100多年前提出的**四色猜想的证明**
- 计算机技术用于数学研究的新手段被称为**实验数学**
- 1992年**实验数学期刊**：<http://www.emis.de/journals/EM/>
- 实验数学网站之一：<http://www.experimentalmath.info>

## 学习和应用数学的新途径：数学实验

- 1989年美国Mount Holyoke College开设数学实验课，1997年出版教材(对象主要是数学系学生)

*Laboratories in Mathematical Experimentation*

- 我国1995年开始探索，随后几所院校试点



- 实验数学：探索/发现/学习（数学研究者）
- 数学实验：学习/验证/理解（数学应用者）

问题：为什么你要学习数学？

什么是数学？

数学有没有用？

数学应用的基本步骤是什么？

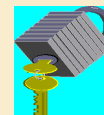
如何培养数学应用的能力？



数学建模：数学走向应用的  
必经之路与 必胜之途



## 提 纲



1. 数学的特点和重要性
2. 数学建模：概念与例子
3. 数学建模竞赛简介
4. 如何培养数学建模能力


数学及其特点

■ 数学

通常说法：研究数量关系和空间形式的科学  
按高尔斯（T. Gowers）的说法：  
数学研究的是现实世界的**数学模型**，即其从空间形式和数量关系角度的抽象。

■ 特点

思维抽象性：从**定义**出发 (Define, not only describe)  
逻辑严谨性：经严格**证明** (Prove, not only believe)  
应用广泛性：得普适**定理** (“If-then”, not only “then”)




数学的重要性：众所周知！？

■ 马克思：  
一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步。

■ E. E. David Jr.: (Notices of AMS, v31, n2, 1984, P142)  
.....现今被如此称颂的“高技术”本质上是**数学技术**。

■ 资深评估小组对美国数学科学的国际评估报告：  
(NSF Report, March 1998)  
现如今的数学科学对科学的所有的三个方面：  
观察、理论和**模拟**来说都是必不可少的。  
.....**数盲**和文盲一样是极其有害的。



应用数学：数学技术的特点

■ 随着计算机技术和数学软件的迅速发展，数学建模和与之相伴的科学计算正在成为众多领域中的关键工具

■ 数学技术往往以软件及其固化形式出现

**数学技术 ≈ 数学建模 + 科学计算**

■ 数学在其传统的应用领域继续发挥作用，推动人类文明和进步：工程技术、自然科学等领域

■ 以空前的广度和深度向新的领域渗透：经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通，甚至政治、社会等

大趋势：科学和工程领域的数学化

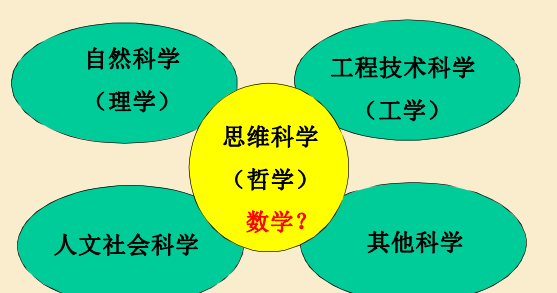
• 美国科学基金会把数学科学列为2002-2006该基金会五大创新项目之首(另四个为：**环境中的生物复杂性**，**信息技术研究**，**纳米科学和工程**，**21世纪的劳动力**)

• 该基金会数学部主任Eisenstein评述说：  
“该重大创新项目背后的推动力就是一切科学和工程领域的**数学化(Mathematization)**。”

— “The driving force behind the initiative is the ‘mathematization’ of all areas of science and engineering.”

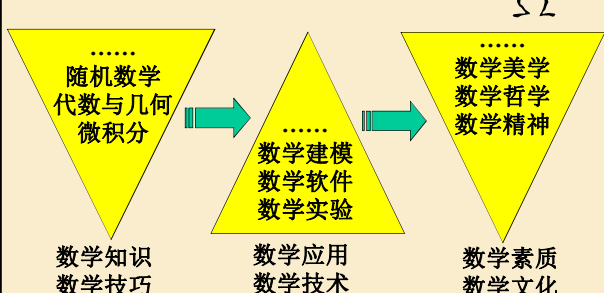
NSF Launches Major Initiative in Mathematics, Allyn Jackson, Notices of AMS, v. 48(2001), no. 2, 190 - 192.

数学：科学的皇后与仆人



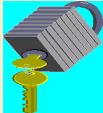
数学教育本质上是一种素质教育

数学：科学，技术，文化



数学模型

## 提 纲



1. 数学的特点和重要性
- ➡ 2. 数学建模：概念与例子
3. 数学建模竞赛简介
4. 如何培养数学建模能力

① ② ③

数学模型

## 数学建模： 数学与实际问题的桥梁




实际问题数学

- 应用数学知识解决实际问题的 **第一步**
- 通常有本质性的困难和原始性的创新(**关键一步**)
- Pure vs Applied Math: **Logic vs Problem Driving**
- “源” (Motivation) 远 “流” (Impact) 长

① ② ③

数学模型



### 林家翘：大师之忧

光明日报 2010-05-07  
[http://www.gmw.cn/content/2010-05/07/content\\_1113228.htm](http://www.gmw.cn/content/2010-05/07/content_1113228.htm)

**“应用数学”薄弱对整个科学发展非常不利**


1916年7月7日生于北京，1937年毕业于清华物理系，留校任教  
 1940年赴加拿大深造，1941年获多伦多大学硕士学位  
 1944年获美国加州理工学院博士学位  
 从1947年起，历任麻省理工学院副教授、教授、荣休教授  
 1951年起成为美国国家艺术和科学院院士  
 1962年起成为美国国家科学院院士  
 1994年当选为中国科学院外籍院士

**“使应用数学从不受重视的学科成为令人尊敬的学科”**

① ② ③

数学模型

## 什么是数学建模？



即“建立**数学模型**”


即“用数学语言/工具/结构表达的**模型**”

**模型(model)**是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的**原型(prototype)**的替代物

① ② ③

数学模型

## 我们常见的模型




玩具汽车、火箭模型、照片...	~ 实物模型
水箱中的舰艇、风洞中的飞机...	~ 物理模型
地图、电路图、分子结构图 ...	~ 符号模型

**模型**集中反映了**原型**中人们需要的那一部分特征

① ② ③

数学模型

## 你碰到过的数学模型——“航行问题”



甲乙两地相距750千米，船从甲到乙顺水航行需30小时，从乙到甲逆水航行需50小时，问船的速度是多少？

解：用  $x$  表示船速， $y$  表示水速，依题意列方程组：

$$\begin{cases} (x + y) \times 30 = 750 \\ (x - y) \times 50 = 750 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \text{求解} \end{matrix} \quad \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases}$$

答：船速是20千米/小时。      **数学建模——解应用题？**  
 可以得满分？

① ② ③

## “航行问题”建立数学模型的基本步骤

- 作出简化假设（匀速运动：船速、水速为常数）；
- 用符号表示有关量
  - 已知量(参数)：距离 $d > 0$ 千米  
顺水 $a$ 小时，逆水 $b$ 小时( $b \geq a > 0$ )
  - 未知量： $x, y$ 表示船速和水速(千米/小时， $x > y \geq 0$ )
- 根据物理定律（匀速运动的距离等于速度乘以时间）  
列出数学式子（二元一次方程）

$$\begin{aligned} (x+y) \times a &= d && \text{假设顺水：速度之和} \\ (x-y) \times b &= d && \text{逆水：速度之差} \end{aligned}$$

① ② ③

## “航行问题”建立数学模型的基本步骤(续)

## • 模型求解及检验

$$\begin{aligned} (x+y) \times a &= d \\ (x-y) \times b &= d \end{aligned} \quad \begin{aligned} d > 0 \\ b \geq a > 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= \frac{d(b+a)}{2ab} \\ y &= \frac{d(b-a)}{2ab} \end{aligned}$$

• 模型应用： $d=750, a=30, b=50$ 得到具体数学解答 ( $x=20, y=5$ )；

回答原问题（船速每小时20千米/小时）。

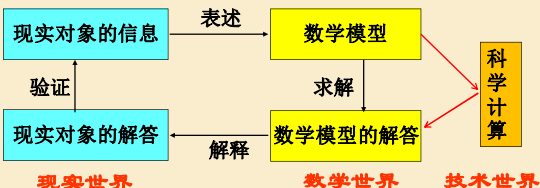
## • 模型分析：敏感性，优缺点等

如：若 $d$ 或 $a, b$ 分别有1%误差，结果误差有多大？

① ② ③

数学模型 (Mathematical Model) 和  
数学建模 (Mathematical Modeling)

**数学模型**：对于一个现实对象，为了一个特定目的，作出必要的简化假设，根据对象的内在规律，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。



① ② ③

## 数学建模：一个简单示例



## 椅子在不平的地面上放稳吗？

**问题分析** 通常~三只脚着地 放稳~四只脚着地

## 模型假设

- 四条腿一样长，椅脚与地面点接触，四脚连线呈正方形；
- 地面高度连续变化，可视为数学上的连续曲面；
- 地面相对平坦，使椅子在任意位置至少三只脚同时着地。

① ② ③

## 模型构成

用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

- 椅子位置 利用正方形(椅脚连线)的对称性

用 $\theta$ (对角线与 $x$ 轴的夹角)表示椅子位置

- 四只脚着地 椅脚与地面距离为零

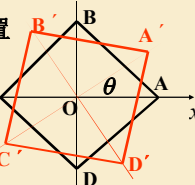
距离是 $\theta$ 的函数

四个距离  
(四只脚)

两个距离  
正方形  
对称性

A, C 两脚与地面距离之和  $\sim f(\theta)$

B, D 两脚与地面距离之和  $\sim g(\theta)$



正方形ABCD  
绕O点旋转

① ② ③

## 模型构成 用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来

地面为连续曲面  $\Rightarrow f(\theta), g(\theta)$  是连续函数

椅子在任意位置至少三只脚着地  $\Rightarrow$  对任意 $\theta, f(\theta), g(\theta)$  至少一个为0

将椅子旋转 $90^\circ$ , 则AC和BD互换  $\Rightarrow$  对任意 $\theta, f(\theta+\pi/2)=g(\theta), g(\theta+\pi/2)=f(\theta)$

**数学问题** 已知： $f(\theta), g(\theta)$ 是连续函数；  
且  $g(0)=f(\pi/2)=0, f(0)=g(\pi/2)>0$ 。

证明：存在 $\theta_0$ ，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$ 。

① ② ③

## 模型求解



证明方法: 很简单

由  $g(0)=0$ ,  $f(0)>0$ , 知  $f(\pi/2)=0$ ,  $g(\pi/2)>0$ .

令  $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$ , 则  $h(0)>0$  和  $h(\pi/2)<0$ .

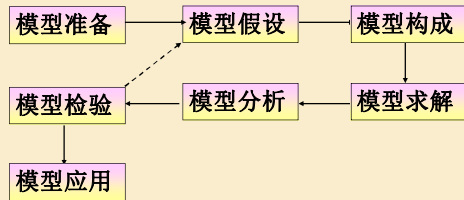
由  $f, g$  的连续性知  $h$  为连续函数, 据连续函数的基本性质, 必存在  $\theta_0$ , 使  $h(\theta_0)=0$ , 即  $f(\theta_0)=g(\theta_0)$ .

因为  $f(\theta) \cdot g(\theta)=0$ , 所以  $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$ .

评注和思考 建模的关键 ~  $\theta$  和  $f(\theta), g(\theta)$  的确定

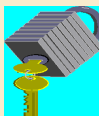
假设条件的本质与非本质 考察四脚呈长方形的椅子  
上面的模型足够严谨吗? —— 旋转轴在哪里?

## 小结: 数学建模的一般步骤



实践  $\Rightarrow$  理论  $\Rightarrow$  实践

## 提 纲



## 1. 数学的特点和重要性

## 2. 数学建模: 概念与例子

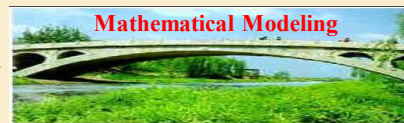
## 3. 数学建模竞赛简介

## 4. 如何培养数学建模能力

## 数学建模竞赛(MCM)简介

## Mathematical Contest in Modeling

实际问题



数学

- 美国大学生数学建模竞赛(MCM)
- 中国大学生数学建模竞赛(CUMCM)
- 竞赛内容与形式简介

## 数学建模竞赛/交叉学科竞赛: MCM/ICM

<http://www.comap.com>

- 1985年2月15日首次举行, 70所学校90个队成功参赛
- 2019年: 15国 **26285队** 注册参赛, 中国 > **98%**
- 近年来: 中美两国专家共同完成初评和终评
- 获奖比例: (2019年可能会大幅降低)
  - O + F (<1%); **M (~10%)**; **H (~35%)**; S

## 全国大学生数学建模竞赛(CUMCM)

<http://www.mcm.edu.cn> <http://cumcm.cnki.net>

- 1992年中国工业与应用数学学会(CSIAM)创办(每年9月)
- 2018年 **1449校42128队** 报名(含港澳、新加坡、美国)
- 非数学专业学生约**80%**(其中约10%来自非理工类专业)
- 赛题和优秀答卷刊登于当年《工程数学学报》  
(专家点评刊登于当年/次年《**数学建模及其应用**》)
- 全国奖: 本科**1等~300, 2等~1200**; 专科**1等~50, 2等~200**  
总比例~5% (其中1等<1%)
- 赛区奖: 1/3~1/2 (北京赛区~1/3)



**数学模型**

### 竞赛内容与形式

**内容** • 赛题：工程、管理中经过简化的实际问题  
• 答卷：一篇包含问题分析、模型假设、建立、求解(通常用计算机)、结果分析和检验等的论文

**形式** • 3名大学生组队，在3天内完成的通讯比赛  
• 可使用任何“死”材料(图书/互联网/软件等)，但不得与队外任何人讨论（包括上网讨论）

**标准** 假设的合理性，建模的创造性，结果的正确性，表述的清晰性。

**宗旨** 创新意识 团队精神 重在参与 公平竞争

① ② ③

**数学模型**

### “美赛” 2019年竞赛题目

<b>MCM:</b>	A: Game of Ecology
<b>A/B/C</b>	B: Send in the Drones
	C: The Opioid Crisis
<b>ICM:</b>	D: Time to leave the Louvre
<b>D/E/F</b>	E: Cost of Environmental Degradation
	F: Universal, Decentralized, Digital Currency

① ② ③

**数学模型**

### “国赛” (CUMCM) 近年部分赛题

14年：嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略；**创意平板折叠桌**；生猪养殖场的经营管理；**储药柜的设计**。  
15年：**太阳影子定位**，“互联网+”时代的出租车资源配置，**月上柳梢头，众筹筑屋规划方案设计**  
16年：系泊系统的设计，**小区开放对道路通行的影响**，**电池剩余放电时间预测**，**风电场运行状况分析及优化**  
17年：CT系统参数标定及成像，“拍照赚钱”的任务定价，颜色与物质浓度辨识，**巡检线路的排班**  
18年：**高温作业专业服装设计**，**智能RGV的动态高度**，**大型百货商场会员画像**，**汽车总装线的配置**

① ② ③

**数学模型**

### 竞赛的反响（例）

**IBM 中国研究中心: Business Analysis Optimization**

Job Requirements:

- 1、 PhD M.S. in mathematics, statistics, computer science, industrial engineering management science etc.
- 2、 Self-motivated, responsible, able to wk independently under tight deadline willing to wk under pressure.
- 3、 Skill in applied mathematics, including mathematical programming, statistics, data mining, simulation etc.
- 4、 Knowledge in supply chain logistics strategy modeling, simulation, planning optimization.
- 5、 Strong interest basic knowledge about industry trends, technologies, solutions in analytics optimization.
- 6、 Experience in ERP/SCM/CRM system SCM consulting practice is a plus.
- 7、 **Award in highly regarded mathematical modeling contest is a plus.**
- 8、 Experience in eclipse, Java, architecture design is a plus.

--March 26, 2009, <http://www.vyong.com.cn/job/comp/jobinfo.asp?selectedid=1514>

① ② ③

**数学模型**

### Anotehr Example: CityUHK

香港城市大学管理科学系招生

- 招募对象：计算机，自动化，数学等相关专业的本科生或研究生
- 拟入学时间：2012年9月 就读项目：全日制博士
- 预期学制：4年（以学士学位入学），3年（以硕士学位入学）
- 申请条件：1.平均分(GPA)85分及以上；2.托福成绩92分（internet-based网考）或者 IELTS 7分以上；3. **以下同学可放宽成绩要求：已有国际国内期刊发表论文者；国家或国际数学建模比赛获奖者；ACM程序设计竞赛获奖者；**
- 奖学金：.....

来源：本人收到的CityUHK邮件

① ② ③

**数学模型**

### Anotehr Example: 中国石化

来源：[http://www.sinopecgroup.com/group/s/wz/jyfw/20141008/news\\_20141008\\_349411402938.shtml](http://www.sinopecgroup.com/group/s/wz/jyfw/20141008/news_20141008_349411402938.shtml)

中国石化为优秀毕业生就业开绿色通道

- “优才引进”计划即对在行业内、国内乃至国际上有较高专业水准和公信度的大赛中获得过一等奖及以上奖项，以及连续两年获得国家奖学金的优秀毕业生，通过资格审查后不用参加统一初选考试，经招聘单位对在校表现等综合考察，符合岗位需要**直接作为拟录用人选进行公示，且不占招聘单位引进指标。**
- 据悉，国际国内知名竞赛包括：**美国大学生数学建模竞赛、全国大学生（研究生）数学建模竞赛、全国大学生机械创新设计竞赛、全国大学生结构设计竞赛、“挑战杯”全国大学生课外学术科技作品竞赛、全国石油工程设计大赛、全国化工设计竞赛等7项竞赛。**

① ② ③

**数学模型**

多位中国科学院和中国工程院院士以及教育界的专家参加过为数学建模竞赛举办的活动，并为竞赛题词，对这项竞赛给予热情关心和很高的评价。

数学要真正得到应用，数学建模是取得成功的重要途径之一。

吴文俊

2004.11.11

**数学模型**

**林家翘：大师的关怀**  
林先生2011年为全国大学生数学建模竞赛（CUMCM）20周年题词

开展数学建模活动  
推进应用数学发展

林家翘

2011-6-28

**数学模型**

竞赛长期以来受到媒体关注与支持。

**数学模型**

**七律 咏数学模型**

数学精髓何处寻，纷纭世界有模型。  
描摹万象得神韵，识破玄机算古今；  
岂是空文无实效，能生妙策济苍生；  
经天纬地展身手，七十二行任纵横。

--李尚志中国科学技术大学教授  
2002年5月于黄山  
(现为北航数学学院教授)

**数学模型**

提 纲

1. 数学的特点和重要性
2. 数学建模：概念与例子
3. 数学建模竞赛简介
- ➡ 4. 如何培养数学建模能力

**数学模型**

**怎样培养数学建模能力**

数学建模与其说是一门**技术**，不如说是一门**艺术**  
技术大致有章可循 艺术无法归纳成普遍适用的准则

想象力      洞察力      判断力

- 培养数学应用意识，丰富数学建模手段/工具
- “数学实验”课上会介绍基本的**应用数学知识/软件**
- 学习、分析、评价、改进别人作过的模型。
- “数学模型”课上会介绍大量建模案例(含“引论”课)
- 亲自动手，认真作几个实际题目。
- 参加数学建模竞赛是一种很好的训练

## 例：原子弹爆炸的能量估计

1945年7月16日，美国科学家在新墨西哥州Los Alamos进行了“Trinity Test”，试爆了全球第一颗原子弹。这一事件令世界为之震惊，并从某种程度上改变了第二次世界大战以及战后世界的历史。但在当时，有关原子弹爆炸的任何资料都是保密的，一般人无法得到任何有关的数据或影像资料，因此人们无法比较准确地了解这次爆炸的威力究竟有多大。两年以后，美国政府首次公开了这次爆炸的录影带，但没有发布任何有关的数据。英国物理学家G. I. Taylor (1886-1975)通过研究这次爆炸的录影带，建立数学模型对这次爆炸所释放的能量进行了估计，得到的估计值为19.2千吨(千吨即相当于1千吨TNT的核子能量)。后来正式公布的信息显示，这次爆炸所释放的实际能量为21千吨可见两者是相当接近的。

## Taylor测量出的数据

时刻 $t$ (毫秒)所对应的“蘑菇云”的半径 $r(t)$ (米)

$t$	$r(t)$	$t$	$r(t)$	$t$	$r(t)$	$t$	$r(t)$	$t$	$r(t)$
0.10	11.1	0.80	34.2	1.50	44.4	3.53	61.1	15.0	106.5
0.24	19.9	0.94	36.3	1.65	46.0	3.80	62.9	25.0	130.0
0.38	25.4	1.08	38.9	1.79	46.9	4.07	64.3	34.0	145.0
0.52	28.8	1.22	41.0	1.93	48.7	4.34	65.6	53.0	175.0
0.66	31.9	1.36	42.8	3.26	59.0	4.61	67.3	62.0	185.0

你一定想知道：Taylor是如何计算的呢？

## Taylor使用的是量纲分析法

记爆炸能量为 $E$ ，将“蘑菇云”近似看成球形

$r$ 与哪些因素有关？

$t$   
 $E$

空气密度  $\rho$   
大气压强  $P$

假设  $r = \varphi(t, E, \rho, P)$   $\rightarrow f(r, t, E, \rho, P) = 0$

有关的三个基本量纲：

长度 (m, 量纲用 $L$ 表示)

质量 (kg, 量纲用 $M$ 表示)

时间 (s, 量纲用 $T$ 表示)

$$[r] = L; [t] = T;$$

$$[E] = L^2 MT^{-2}; [\rho] = L^{-3} M;$$

$$[P] = L^{-1} MT^{-2}$$

## Taylor使用的是量纲分析法

$$[r] = L; [t] = T; [E] = L^2 MT^{-2}; [\rho] = L^{-3} M; [P] = L^{-1} MT^{-2}$$

量纲矩阵

$$A_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L \\ M \\ T \end{matrix}$$

$$f(r, t, E, \rho, P) = 0: r^{y_1} t^{y_2} E^{y_3} \rho^{y_4} P^{y_5} = \pi \text{ (无量纲)}$$

$$\text{由 } [\pi] = 1 = L^0 M^0 T^0, \text{ 有 } Ay = 0, y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$$

$$Ay = 0 \text{ 有 2 个基本解, 如 } y = (1, -2/5, -1/5, 1/5, 0)^T$$

$$y = (0, 6/5, -2/5, -3/5, 1)^T$$

## Taylor使用的是量纲分析法

$$f(r, t, E, \rho, P) = 0: r^{y_1} t^{y_2} E^{y_3} \rho^{y_4} P^{y_5} = \pi \text{ (无量纲)}$$

$$y = (1, -2/5, -1/5, 1/5, 0)^T$$

$$y = (0, 6/5, -2/5, -3/5, 1)^T$$

由此可以得到两个无量纲的量

$$\pi_1 = r t^{-2/5} E^{-1/5} \rho^{1/5} = r \left( \frac{\rho}{t^2 E} \right)^{1/5}$$

$$\pi_2 = t^{6/5} E^{-2/5} \rho^{-3/5} P = \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5}$$

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$r \left( \frac{\rho}{t^2 E} \right)^{1/5} = \psi \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5} \rightarrow r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5} \psi \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5}$$

## Taylor使用的是量纲分析法

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5} \psi \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5}$$

Taylor根据一些小型爆炸试验的数据建议

时间  $t$  非常短  
能量  $E$  非常大

$$\psi \left( \frac{t^6 P^5}{E^2 \rho^3} \right)^{1/5} \approx \psi(0) \approx 1$$

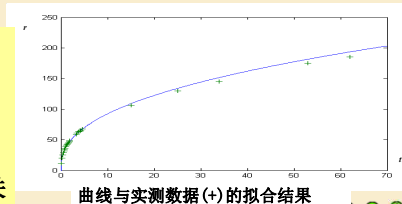
$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5}$$

检验:  $r = at^b$

最小二乘法:

$$b = 0.4058 \sim 2/5$$

$r$ 与大气压强无关





## 一种计算方法

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5} \Rightarrow E = \frac{\rho r^5}{t^2}$$

空气密度为  
 $\rho = 1.25 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

平均值  $E = 8.2825 \times 10^{13}$  (焦耳)

1千吨(TNT能量)  
 $= 4.184 \times 10^{12}$  焦耳

爆炸能量是19.7957千吨

## Taylor的计算方法

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho} \right)^{1/5} \quad \frac{5}{2} \log_{10} r = \log_{10} t + \frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{E}{\rho} \right)$$

$$y = c, \quad y = \frac{5}{2} \log_{10} r - \log_{10} t, \quad c = \frac{1}{2} \log_{10} \left( \frac{E}{\rho} \right)$$

空气密度为  
 $\rho = 1.25 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

最小二乘拟合：就是  $c$  取  $y$  的平均值，得到  $c = 6.9038$

$E = 8.0276 \times 10^{13}$  (焦耳)

爆炸能量是19.1863千吨

## 例：众议院名额分配

每十年，美国联邦政府进行一次全国人口普查(census)。各州在联邦众议院的代表名额也据此重新确定。

2000年人口普查后，犹他州(Utah)向联邦政府提出控诉，说分配给北卡罗莱纳州的名额应该是他们的。

事实上，过去200年来，美国国会在名额分配上打过多起法律官司，曾有过长期争论并用过四种分配方案。

问题的数学本质是什么？

公平的席位分配问题 (apportionment)

## 公平的席位分配

问题

三个系学生共200名(甲系100, 乙系60, 丙系40)，代表会议共20席，按比例分配，三个系分别为10, 6, 4席。

现因学生转系，三系人数为103, 63, 34, 问20席如何分配。

若增加为21席，又如何分配。

比例加惯例

系别	学生人数	比例 (%)	20席的分配		21席的分配	
			比例	结果	比例	结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.000	21

对丙系公平吗？

## 思考：“三妾争产”问题

A talmudic rule for three wives' problem

- A rich man died with an estate to be divided by his three wives.
- He promised 300 zuz for Wife I
- He promised 200 zuz for Wife II
- He promised 100 zuz for Wife III
- His estate is worth of 300 zuz.
- How much does the wives get?
- Of course: 150, 100 and 50, respectively.

## The puzzle

- If his estate is worthy of 200:
  - Talmudic rule recommended:
    - 75, 75, 50
- If his estate is worthy of 100
  - Talmudic rule recommended an equal partition for all three.

## A plausible argument

- If the rich man left 100 zuz
- Each wife wants it all. That is, it belongs to everyone.
- Then all are treated equal.
- Each gets a third of it.

## Another plausible argument

- If the rich man left 300 zuz
- Wife I wants it all
- Wife II and III together want all
- The two groups are treated equally
- Wife I get 150
- Wife II and wife III together get 150.
- Of 150 between wife II and wife III, the first 100 are demanded by both.
- The last 50 is clearly that of wife II and given to her
- The first 100 are partitioned equally between wife II and wife III
- Therefore, wife III gets 50, wife II get  $50+50=100$ .

## Dealing with 200 zuz estate

- Wife III wants the first 100.
- Both Wife I and wife II want both the first 100 and the last 100.
- Applying previous principles, wife III gets a third of the first 100, so do wife I and wife II.
- Wife I and II gets equal share of the second 100.
- It then does not agree with Talmudic rule.

## The Talmudic Solution is Nucleolus

- Aumann, R. (nobel prize winner 2005) and M. Maschler, Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, J. of Economic Theory, 36 (1985) 195-213.

[注] “三妾争产”问题的更多分析, 可参看:  
姜启源、谢金星主编, 《数学建模案例选集》,  
高等教育出版社, 2006



## 清华与数学建模活动

国内较早开设数学模型课的少数高校之一(1983年)  
国内最早编辑出版《数学模型》中文教材的高校  
—— 1987年出版, 获1992年第二届全国优秀教材奖  
国内最早参加美国MCM竞赛的三所高校之一(1989年)  
国内最早举办全国竞赛颁奖会的高校(1993年)  
—— 12月4日中央电视台晚7点新闻联播播出(约1分钟)  
亚洲唯一举办过两年一次的国际数学建模教学与应用系列会议的单位(2001年), 也是目前国内唯一拥有国际数学建模教学与应用协会国际执委的单位

## 清华与数学建模活动

中国工业与应用数学学会的秘书处单位  
—— 全国大学生数学建模竞赛组委会秘书处单位  
(<http://mcm.edu.cn>)  
国内最早编辑出版《数学实验》中文教材的高校  
清华同学参加竞赛获最高奖情况:  
美国MCM(outstanding): 98; 09; 11; 13; 14; 15年  
美国ICM(outstanding): 14, 16年(各2队); 18年  
全国大学生数学建模竞赛: 00年(网易杯)  
数学建模挑战赛: 13, 14年(深圳杯)

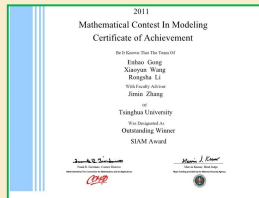
### 每年的部分数学建模活动

**CUMCM** 深圳杯 地区赛(如华东、华中)  
(每年9月) (每年4-8月) (每年4-6月)

行业赛(如电工杯)  
(奇数年11月)

网络赛(如数学中国网)  
(每年若干次)

其他: 泰迪杯、优化大赛、  
物流大赛、统计建模大赛……



美国MCM/ICM  
(每年2月)

### 选课和参加数模竞赛的建议

目的: 提高建模能力 (Ability vs. Competency)

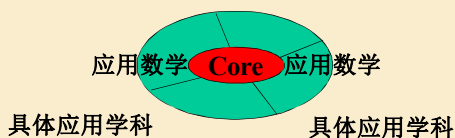
1. 选修**数学建模引论**、**数学实验**、**数学模型**, 或自学
2. 了解和掌握常用数学软件的基本用法  
(Matlab, Mathematica, Lingo, SAS, ...)
3. 自己培训, 并参加各种类型的数学建模竞赛  
(校内赛, 地区赛, 全国赛, 美国赛, ...)

注: 清华大学“华罗庚”数学建模竞赛(校内赛):  
一般每年4-5月举行(4月在数学系学生科协报名)

### 建模能力与数学的二级学科(研究生专业)

- 纯粹数学(Pure Math) – 基础/核心(Core)数学?
- 应用数学(Applied Math)
- 计算数学(Computational Math)
- 概率论与数理统计 – 随机/统计数学?
- 运筹学(OR)与控制论 – 运筹数学?

应用  
数学



### 建议课外浏览的几本书: 增长数学文化知识

1. 李大潜(主编), 数学文化小丛书(第一、二、三辑), 北京: 高等教育出版社, 2008.
2. 李文林, 数学史概论(第2版), 北京: 高等教育出版社, 2002.
3. 张顺燕, 数学的源与流(第2版), 北京: 高等教育出版社, 2003.
4. 史树中, 诺贝尔经济学奖与数学, 北京: 清华大学出版社, 2002.
5. J. G. Glimm (ed.), Mathematical Sciences, Technology, and Economic Competitiveness, National Academy Press, 1991. (邓超凡译, 数学科学·技术·经济竞争力, 天津: 南开大学出版社, 1992.)
6. 《数学文化》杂志(香港出版), <http://www.global-sci.org/mc/>
7. 《数学建模及其应用》杂志, <http://jmmia.sdust.edu.cn>

### 数学建模的力量……

推荐一本书: 《数学之美》

作者: 吴军, 计算机科学家  
也是《浪潮之巅》的作者

毕业于清华(本、硕); 约翰·霍普金斯 <http://t.qq.com/u/jwu>

曾就职于Google:

开创网络搜索反作弊的研究领域  
Google中日韩文搜索算法主要设计者

曾任腾讯副总裁; 国家重大专项“新一代搜索引擎和浏览器”总负责人



祝同学们学习进步,  
早日成才!



GAME NEVER  VER

谢 谢!