



中国矿业大学  
CHINA UNIVERSITY OF MINING AND TECHNOLOGY

本科生毕业论文

基于高斯过程下的奇异期权的  
定价问题研究

Study of the Exotic Option Pricing based on  
Gaussian Process

作 者:王海燕  
导 师:张 艳 2 讲师

中国矿业大学  
2022 年 6 月

中国矿业大学  
本科生毕业论文

基于高斯过程下的奇异期权的  
定价问题研究  
Study of the Exotic Option Pricing based on  
Gaussian Process

作	者	王海燕	学	号	10183751
导	师	张艳 2	职	称	讲师
学	院	数学学院	专	业	数学与应用数学

二〇二二年六月

# 学位论文原创性声明

本人郑重声明:所呈交的学位论文《基于高斯过程下的奇异期权的定价问题研究》,是本人在指导教师指导下,在中国矿业大学攻读学位期间进行的研究工作所取得的成果。据我所知,除文中已经标明引用的内容外,本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名:

年 月 日

# 中国矿业大学

## 本科毕业论文诚信承诺书

本人郑重声明：所呈交的毕业论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

作者签名：

年 月 日

# 中国矿业大学

## 毕业论文使用授权声明

本人完全了解中国矿业大学有关收集、保留和使用本人所送交的毕业论文的规定，即：本科生在校攻读学位期间毕业论文工作的知识产权单位属中国矿业大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交毕业论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编论文。保密的论文在解密后适用本声明。

论文涉密情况：

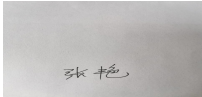
☐ 不保密

☐ 保密，保密期（起讫日期： ）

作者签名：

年 月 日

导师签名：



2022 年 6 月 3 日

## 致谢

时光飞逝，大学四年的学习生活已接近尾声。从大一刚进校时对陌生环境的惴惴不安，到如今面对各种挑战时的沉着冷静，在这四年的时光里，我经历了许多磨练，收获满满。我结识了很多优秀的人，学习到了丰富的知识，挖掘了自己的潜力，同时也体验到了一个地域的风土人情，感受到别样的人文艺术。总而言之，我已经成长为了一个更优秀的自我。

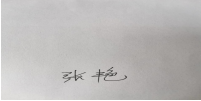
首先，我要感谢我的指导老师张艳老师。在论文选题前期，张老师给我提供了许多文献资料，同时教我如何高效查阅文献。张老师结合我的研究兴趣，在她的建议下选定题目。在整个论文的写作过程中，张老师都倾心指导，耐心解答我提出的各种问题，给予我最大的支持与鼓励。同时，张老师对待学术的严谨态度给我留下了深刻的印象，让我深刻体会到了一名优秀学者所具备的科研素养。张老师对我的专业指导，给我接下来的学习指明了方向，在此我特别向张老师表达我最真挚的感谢。

同时，我要感谢给我教授专业课的数学学院的老师们，在这四年里，正是由于老师们的教授和指导，才能让我认识数学，感知数学，应用数学，让我在“数学王国”里领略数学风采。在此感谢老师们的辛勤付出。

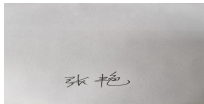
其次，我要感谢我的同学、朋友们，学习生活中有你们的陪伴让我感受到了温暖。还要感谢我的家人，给予我学业上最大的支持，你们是最坚实的后盾。

最后，感谢中国矿业大学为我提供了一个优秀的学习平台，让我充分享受丰富的学习资源，体验舒适的校园氛围。这里的四年生活将是我最为宝贵的回忆。


# 中国矿业大学本科毕业论文任务书

论文题目：基于高斯过程下的奇异期权的定价问题研究			
学院	数学学院	专业年级	数学与应用数学 18 级
学生姓名	王海燕	学号	10183751
<p>1、论文的主要内容</p> <p>(1) 介绍金融衍生品市场的发展历史，介绍 B-S 公式的发展，国内外的研究现状等；</p> <p>(2) 介绍远期、期货、期权、互换使用，掌握两种衍生品的定价方法：风险中性估值和 PDE 方法并推导经典的 B-S 公式；</p> <p>(3) 查看文献，掌握双分数布朗运动和次分数布朗运动的性质及其分布；推导双分数布朗运动和次分数布朗运动下标准期权定价公式；</p> <p>(4) 独立利用文献中的方法完成双分数布朗运动下某种新型期权的定价问题及风险管理参数；</p> <p>(5) 独立推导次分数布朗运动下某新型期权的定价问题风险管理参数；</p> <p>(6) 学会设计数值算法，并进行数值实验；</p> <p>(7) 独立翻译与毕业论文有关，近 3 年发表的、没有翻译过的论文或专著，内容不少于 3000 汉字。</p>			
<p>2、论文的基本要求</p> <p>毕业论文正文不少于 10000 字，查阅参考文献不少于 20 篇，其中查阅的外文文献不少于 5 篇；外文资料翻译部分要与毕业论文的内容有关，且需为近 3 年发表的、没有翻译过的论文或专著，翻译的中文字数不少于 3000 字。</p> <div><div>指导教师签字：</div><div></div></div>			

# 中国矿业大学毕业论文指导教师评阅书


学生姓名	王海燕	学号	10183751
论文题目	基于高斯过程下的奇异期权的定价问题研究		
<p>指导教师评语（①基础理论及基本技能的掌握；②独立解决实际问题的能力；③研究内容的理论依据和技术方法；④取得的主要成果及创新点；⑤工作态度及工作量；⑥总体评价及建议成绩；⑦存在问题；⑧是否同意答辩等：</p> <p>王海燕同学学习刻苦，有钻研精神。从上学期末就主动和指导老师反复讨论定下论文题目，在做论文期间遇到问题及时找老师讨论，总是积极主动的提前完成老师交代的论文工作，很好地完成论文要求掌握的金融衍生品的定价方法的理论学习。该同学能够用自己的语言分别利用风险中性估值原理和求解 B-S 微分方程两种方法完成了对 B-S 定价公式的推导整理。通过研读文献，掌握了双分数布朗运动和次分数布朗运动的性质及其分布；掌握了双分数布朗运动和次分数布朗运动下标准期权定价公式的推导。能够独立地利用风险中性估值方法分别研究双分数布朗运动和次分数布朗运动下任选期权的定价问题及风险管理参数，并利用数值实验对重要参数进行了研究。这是论文的重要结果也是文中的创新之处，因数据不好获取及时间原因，没有进行相应的实证分析。但该同学学习态度端正，认真，工作量饱满，是一篇高质量的本科毕业论文。同意答辩，建议成绩优。</p>			
成 绩： 94		指导教师签字： 	
		2022 年 6 月 3 日	

# 中国矿业大学毕业论文评阅教师评阅书


学生姓名	王海燕	学号	10183751
论文题目	基于高斯过程下的奇异期权的定价问题研究		
<p>评阅教师评语（①选题的意义；②基础理论及基本技能的掌握；③综合运用所学知识解决实际问题的能力；④工作量的大小；⑤取得的主要成果及创新点；⑥写作的规范程度；⑦总体评价及建议成绩；⑧存在问题；⑨是否同意答辩等）：</p> <p>股票期权是一种重要的金融衍生品。王海燕的学位论文《基于高斯过程下的奇异期权的定价问题研究》选题新颖，具有一定的理论意义和实际应用前景。本文重点分析讨论了基于双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动的奇异期权定价问题；分别构建了标的变量由双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动驱动的标准期权和任选期权定价模型，推导出相应的期权定价公式、风险管理敏感性参数；最后通过数值实验分析了相关变量之间的关系，得到了一些有意义的结果。本文工作量基本饱满，结构严谨，叙述清楚，格式符合规范，逻辑关系清楚，推理严谨，数据处理得当，数值计算结果可信，结论正确。论文达到了学士学位论文水平。这表明该同学基本掌握了金融衍生产品定价的理论与方法，具备了一定的独立解决实际问题的能力。这是一篇优秀的学士学位论文。同意王海燕同学进行论文答辩。建议成绩：优秀</p> <p>成 绩： 97</p> <p>评阅教师签字： </p> <p>2022 年 6 月 3 日</p>			



# 中国矿业大学毕业论文评阅教师评阅书

学生姓名	王海燕	学号	10183751
论文题目	基于高斯过程下的奇异期权的定价问题研究		
<p>评阅教师评语（①选题的意义；②基础理论及基本技能的掌握；③综合运用所学知识解决实际问题的能力；④工作量的大小；⑤取得的主要成果及创新点；⑥写作的规范程度；⑦总体评价及建议成绩；⑧存在问题；⑨是否同意答辩等）：</p> <p>随着金融市场交易机制的不断完善，衍生品市场在金融领域的重要程度也在逐渐增强。目前市场上被广泛应用的一种衍生品是期权，长期以来，给期权定价一直是国内外数理金融领域的研究热点。为满足投资者的各种需求，促进经济的发展，市场上出现了越来越多的新型期权，吸引了大量投资者。研究新型期权的定价有现实意义。论文基于双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境，首先推导出标准期权的定价公式，然后利用定价模型对任选期权进行定价，其中，通过计算任选期权定价公式的风险管理参数，分析了期权价格对参数变动的敏感性，最后设计了数值实验。论文结构合理、书写规范，所做工作量饱满。这是一篇优秀的本科生论文，同意进行答辩并建议授予学士学位。</p>			
成绩：94		评阅教师签字： 	
2022 年 6 月 4 日			

中国矿业大学毕业论文答辩及综合成绩

答 辩 情 况					
提 出 问 题	回 答 问 题				
	正 确	基本 正确	有一 般性 错误	有原 则性 错误	没有 回答
自己做了哪些工作，创新点体现在哪里		√			
参考文献的格式需要统一		√			
双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动的 期权定价的区别是什么		√			
<p>答辩委员会评语及建议成绩：</p> <p>该论文选题新颖，具有重要的理论意义。作者系统归纳了大量文献，全面掌握了该领域的研究现状，作者具有独立分析和解决问题的能力。论文结构严谨，叙述清楚，结论正确，答辩中作者正确地回答了委员们提出的问题。答辩委员会同意该生通过学士学位论文答辩，同意其毕业，并建议授予理学学士学位。</p> <p>成绩： 85</p> <p>答辩委员会主任签字： </p> <p>2022 年 6 月 8 日</p>					
成绩评定：					
成绩组成	指导教师	评阅教师	答辩成绩	其他	总评
成绩比例	40%	20%	40%	0%	优秀
评分	94	95.5	85	0	
<p>学院领导签字：</p> <p>2022 年 6 月 8 日</p>					

## 摘 要

金融市场的快速发展，催生了大量的金融衍生产品，这些产品被认为是一种新型的金融投资工具，具有高收益性，受到投资者的青睐。随着金融市场交易机制的不断完善，衍生品市场在金融领域的重要程度也在逐渐增强。目前市场上被广泛应用的一种衍生品是期权，长期以来，给期权定价一直是国内外数理金融领域的研究热点。为满足投资者的各种需求，促进经济的发展，市场上出现了越来越多的新型期权，吸引了大量投资者。因此，研究新型期权的定价有很大的现实意义。

通过研究期权定价模型的发展历程，可以看到最常用的 Black-Scholes 定价模型限制因素过多，不符合实际金融市场要求，因此后来期权定价模型的研究都基于 B-S 模型，通过放宽限制条件，使期权价格更加贴近实际市场。本文重点分析讨论了在双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境下的期权定价问题。第一章介绍了选题背景及意义、当前研究现状；第二章介绍了金融衍生品的分类，Poisson 过程、Brown 运动、分数 Brown 运动的定义及基本性质，以及利用风险中性估值原理和 PDE 两种方法推导 Black-Scholes 定价公式；第三章先介绍了双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动，然后分别给出两种环境下标准期权和任选期权的定价公式，并进行了风险管理参数敏感性分析；第四章中设计了数值实验，分析了相关变量之间的关系。

该论文有图 4 幅，参考文献 21 篇。

**关键词：**Black-Scholes 模型；双分数 Brown 运动；次分数 Brown 运动；  
任选期权

# Abstract

The rapid development of the financial market has spawned a large number of financial derivatives. These products are considered to be a new type of financial investment tool with high returns and are favored by investors. With the continuous improvement of the trading mechanism of the financial market, the importance of the derivatives market in the financial field is also gradually increasing. At present, a derivative widely used in the market is option. Pricing option has been a research hotspot in the field of mathematical finance at home and abroad for a long time. In order to meet the various needs of investors and promote economic development, there are more and more new options in the market, which has attracted a large number of investors. Therefore, it is of great practical significance to study the pricing of new options.

By studying the development process of option pricing model, we can see that the most commonly used Black-Scholes pricing model has too many restrictive factors and does not meet the requirements of the actual financial market. Therefore, the later research on option pricing model is based on B-S model, which makes the option price closer to the actual market by relaxing the restrictive conditions. This paper focuses on the option pricing under the environment of double fractional Brown motion and sub fractional Brown motion. The first chapter introduces the background and significance of the topic and the current research status; The second chapter introduces the classification of financial derivatives, the definitions and basic properties of Poisson process, Brown motion and fractional Brown motion, and deduces Black-Scholes pricing formula by using risk neutral valuation principle and PDE; The third chapter introduces the double fractional Brown motion and sub fractional Brown motion, gives the pricing formulas of standard option and optional option under the two environments, and analyzes the sensitivity of risk management parameters; In Chapter four, numerical experiments are designed to analyze the relationship between relevant variables.

There are 4 figures and 21 references.

**Keywords:** Black-Scholes model; Bifractional Brownian motion; Sub-fractional Brownian motion; Chooser option

# 目 录

摘要.....	I
目录.....	III
1 绪论.....	1
1.1 选题背景及意义.....	1
1.2 国内外期权定价的研究历程.....	1
1.3 本文的主要内容和创新点.....	2
2 预备知识.....	3
2.1 金融衍生品.....	3
2.2 期权.....	4
2.3 几种常见的随机过程.....	4
2.4 Itô公式.....	6
2.5 Black-Scholes 期权定价模型.....	7
3 双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动下的期权定价.....	16
3.1 双分数 Brown 运动下的期权定价.....	16
3.2 次分数 Brown 运动下的期权定价.....	27
4 数值算法.....	42
4.1 不同到期日下 Hurst 指数与期权价格的关系.....	42
4.2 不同 Hurst 指数下到期日与期权价格的关系.....	43
5 总结与展望.....	46
参考文献.....	47
翻译部分.....	49
英文原文.....	49
中文译文.....	53

# Contents

<b>Abstract.....</b>	<b>II</b>
<b>Contents.....</b>	<b>IV</b>
<b>1 Introduction.....</b>	<b>1</b>
1.1 The background and meaning of the topic.....	1
1.2 Research on option pricing at home and abroad.....	1
1.3 The main content and innovation of this paper.....	2
<b>2 Pre-knowledge.....</b>	<b>3</b>
2.1 Derivatives.....	3
2.2 Options.....	4
2.3 Several Common Stochastic Processes.....	4
2.4 Ito's Formula.....	6
2.5 Black-Scholes Option Pricing Model.....	7
<b>3 Pricing of Options under Bifractional Brownian Motion and Sub-fractional Brownian Motion.....</b>	<b>16</b>
3.1 Pricing of Options under Bifractional Brownian Motion.....	16
3.2 Pricing of Options under Sub-fractional Brownian Motion.....	27
<b>4 Numerical Algorithm.....</b>	<b>42</b>
4.1 Relationship between Hurst index and option price under different maturity dates.....	42
4.2 Relationship between maturity dates under different Hurst index and option price.....	43
<b>5 Summary and Outlook.....</b>	<b>46</b>
<b>References.....</b>	<b>47</b>
<b>Translations.....</b>	<b>49</b>
The Original Foreign Language.....	49
Chinese Translation.....	53

# 1 绪论

## 1 Introduction

### 1.1 选题背景及意义(The background and meaning of the topic)

金融市场的快速发展,催生了大量的金融衍生工具,其凭借种类多样性、高收益性等特点受到投资者青睐。然而,能否获得可观的收益取决于是否正确地使用金融衍生品,所以给衍生品进行合理定价显得尤为重要。近几年来,我国金融市场上出现了越来越多的新型期权,吸引了大量投资者,促进经济的发展,因此,研究新型期权的定价有很大的现实意义。

常见的期权定价模型有 B-S 期权定价模型,以及离散状态下的二叉树、三叉树,有限差分等模型。使用 B-S 模型需满足以下几点假设:(1)标的资产即股票的价格服从几何 Brown 运动;(2)期权仅在它的到期日被执行,即期权为欧式期权;(3)市场允许卖空,且所有证券都是完全可分割的;(4)没有交易费用;(5)市场是无套利的;(6)利率为确定的常数;(7)市场是连续的。但是此类模型理想化的假设条件与现实情况存在较大的差距。比如 B-S-M 模型中不能解释收益率表现出的“偏态、尖峰、肥尾”现象。后续有很多学者对该模型提出了改进,如考虑股价变化的长程相关性,提出用分数 Brown 运动替换 Brown 运动,还有考虑标的资产价格在大事件发生后会出现幅度较大的跳动,在资产价格变化过程中加入跳跃成分,再如基于随机利率模型定价等等。现已有很多比较成熟的期权定价模型,其给出的期权价格更贴近实际。本文基于双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境,实现某种新型期权的定价,并通过数值计算,分析影响股票价格的因素,具有一定的研究意义。

### 1.2 国内外期权定价的研究历程(Research on option pricing at home and abroad)

上世纪四十年代, Kolmogorov(1940)<sup>[1]</sup> 提出了分数 Brown 运动过程;随后, Mandelbrot 和 Ness(1968)<sup>[2]</sup> 对分数 Brown 运动过程继续进行了研究;二十世纪后, Duncan 等(2000)<sup>[3]</sup> 将分数白噪声理论与 Wick 积结合,定义了 Wick-Itô 型随机积分,为金融产品研究提供了一种重要数学工具; Bojdecki 等(2004)<sup>[4]</sup> 提出了一种更一般的高斯过程:次分数 Brown 运动; RUSSO F(2006)<sup>[5]</sup> 首次提出了双分数 Brown 运动; Tudor(2007)<sup>[6]</sup> 通过研究发现次分数 Brown 运动能够更加完整地刻画资产的长记忆性; Xiao<sup>[7]</sup> 等研究了带跳的分数 Brown 运动。Charles 和 Mounir (2015)<sup>[8]</sup> 提出了混合次分数 Brown 运动,其更加适合模拟股价波动过程。Wang 等(2021)<sup>[9]</sup> 研究了混合次分数 Brown 运动环境下的几何平均亚幂期权的定价。

近几年，国内关于分数 Brown 运动的研究也有很多成果，郭精军等(2017)<sup>[10]</sup> 研究了随机利率模型下的欧式期权定价；孙彩铃等(2021)<sup>[11]</sup> 基于跳扩散模型对随机利率下的远期期权进行研究；胡攀(2021)<sup>[12]</sup> 基于次分数跳扩散过程，给出了亚式期权的保险精算价格。

### 1.3 本文的主要内容和创新点(The main content and innovation of this paper)

第一章主要介绍了论文选题背景、研究意义以及关于期权定价研究的国内外现状。

第二章主要介绍了与本文相关的预备知识，包括金融衍生品的分类、常见的金融衍生品。介绍了几种常见的随机过程，包括 Poisson 过程、Brown 运动、分数 Brown 运动。同时介绍了 Black-Scholes 定价公式的发展，并且用风险中性估值和 PDE 这两种方法推导了 Black-Scholes 定价公式。

第三章是本文的核心内容。分别介绍了双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动的定义及性质，并且研究了两种环境下的金融市场模型，给出了标准期权和任选期权的定价公式，并且分析了相应风险管理参数的敏感性。

第四章主要通过设计数值算法，研究了期权价格与不同变量之间的关系。

本文主要基于更贴近实际金融市场的随机过程—双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动，研究了标准期权和任选期权的定价过程。通过设计数值算法，讨论影响期权价格的因素，找到期权价格与不同变量之间的关系。



## 2 预备知识

## 2 Pre-knowledge

### 2.1 金融衍生品(Derivatives)

#### 2.1.1 金融衍生品的定义

金融衍生品是由基础金融工具衍生出来的金融合约，这种合约分为标准化和非标准化两种，其价值主要取决于基础金融资产。金融衍生品主要包括：远期、期货、互换（掉期）、期权。

金融衍生品的交易特征是保证金交易，在衍生品市场中，交易者通常用其进行规避风险，发现价格，但是不当的交易会导致灾难性的风险。因此，金融衍生品具有契约性、高杠杆性、高风险性等特征。

#### 2.1.2 金融衍生品的分类

根据衍生品形态，可以将金融衍生品分为四大类：远期、期货、期权、互换，这四类是目前国际金融领域中最流行的衍生品种类，其他更为复杂的衍生产品都是基于这四类产品进行构造。

远期，是指交易双方同意在未来某一确定时间以约定好的价格买卖一定数量的相关资产的合约。远期合约主要有远期利率协议、远期外汇合约、远期股票合约等，合约中规定交易标的物、有效期、交割价格等。采取场外交易，有一定风险，且交易双方必须履行合约。

期货，是以某种实物产品如大豆、矿石、玉米等以及金融工具如债券、股票等为标的物的一类标准化合约。常见的期货有商品期货、外汇期货、贵金属期货等，采取场内交易，实行保证金制度，每日结算制度等，几乎不存在信用风险一定风险。

互换，是一种交易双方在约定的时间内相互交换已经确定好的现金流的金融交易。互换市场具有较强的流动性，互换双方是在对彼此有利的条件下进行交易，但交易过程存在一定的信用风险。市场上比较流行的互换合约有利率互换、商品互换、货币互换等。

期权，是赋予购买者的一种权利，即购买者有权利在未来特定时间以固定价格买进或者卖出一定量的某种商品。期权持有者可以选择在相应时间段内实施权利，也可以放弃权利，相反地，期权出售者只有履行期权合约规定的义务。

本文考虑的衍生品类型是期权，下面具体介绍期权的发展及其分类。

## 2.2 期权(Options)

### 2.2.1 期权的概念及分类

期权起源于十八世纪后期的欧洲和美国金融市场,随着交易制度和种类的不完善,期权受到许多交易者的青睐。期权是赋予购买者的一种权利,即购买者有权利在未来特定时间以固定价格买进或者卖出一定量的某种商品。期权持有者可以选择在相应时间段内实施权利,也可以放弃权利,相反地,期权出售者只有履行期权合约规定的义务。

考虑期权的交易方式、交割时间、标的物等因素,可以对期权品种进行分类,有助于我们了解期权产品。

按照期权的权利划分,可分为看涨期权和看跌期权。看涨期权是指期权买方在持有期权的有效期限内,按照合约规定的价格向期权卖方买进一定数量相关资产的权利。看跌期权是指期权卖方在期权有效期内,按照合约规定价格向卖方卖出一定数量相关资产的权利。两种期权中的买方都有权利决定是否在有效期内买进或者卖出相关资产,没有执行的义务,而期权卖方必须应买方的要求,卖出或买进相关资产。

按照期权的行权时间划分,可分为美式期权、欧式期权和百慕大期权。美式期权指在期权效期内可随时执行的期权,欧式期权指只有在期权到期日可以执行,一旦超过合约规定的期限,则自动失效的期权。百慕大期权介于美式期权和欧式期权的中间,允许持有者在合约有效期内的几个确定时间点执行权利。

按期权合约上的标的划分,可分为股票期权、股指期货、利率期权、商品期权以及外汇期权等种类。

按照期权执行价格和标的资产价格的大小关系划分,可分为实值期权、虚值期权和平值期权。对于看涨期权,执行价格低于标的资产价格的为实值期权,执行价格高于标的资产价格的为虚值期权,执行价格等于标的资产价格的为平值期权。对于看跌期权,执行价格高于标的资产价格的为实值期权,执行价格低于标的资产价格的为虚值期权,执行价格等于标的资产价格的为平值期权。

按照期权盈亏状态的复杂程度划分,可分为标准期权和奇异期权。金融机构设计各种奇异期权,以满足金融市场的特殊需求,增大投资者对衍生品市场的吸引力。常见的奇异期权有亚式期权、彩虹期权、任选期权等。

## 2.3 几种常见的随机过程(Several Common Stochastic Processes)

### 2.3.1 Poisson 过程的定义及性质

定义 2.1 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为随机过程,若 $N(t)$ 为取非负整数值的随机变量,并

且当  $s < t$  时, 有  $N(s) \leq N(t)$ , 则称  $\{N(t), t \geq 0\}$  为计数过程。

定义 2.2 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  为计数过程, 参数为  $\lambda (\lambda > 0)$ , 若满足

- (1)  $N(0) = 0$ ;
- (2) 平稳增量性, 即  $\forall s, t \geq 0, P[N(s+t) - N(s) = n] = P[N(t) = n]$ ;
- (3) 对  $\forall s, t \geq 0$ , 有

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

定义 2.3<sup>[13]</sup> 设  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  是一组独立同分布的随机变量序列,  $\{N(t), t \geq 0\}$  是强度为  $\lambda$  的 Poisson 过程, 并且与  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  独立, 令

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n,$$

则称随机过程  $\{Y(t), t \geq 0\}$  为复合 Poisson 过程。

定义 2.4<sup>[13]</sup> 设  $\{Y(t), t \geq 0\}$  为复合 Poisson 过程, 对任意  $t \geq 0$ , 若  $E[\xi^2] < \infty$ , 则有  $E[Y(t)] = \lambda t E[\xi]$ ,  $Var[Y(t)] = \lambda t E[\xi^2]$ 。

### 2.3.2 Brown 运动的背景及其定义

1872 年, 英国生物学家布朗 (Brown) 在观察水面上漂浮的花粉微粒时, 发现花粉微粒在进行无规则运动, 从而提出了这种物理现象。直至 1905 年, 爱因斯坦对此物理现象从数学层面上进行了描述。之后, 维纳<sup>[14]</sup> (Wiener) 在 1918 年运用数学理论严格描述了这种无规则运动, 并运用概率论和随机过程理论建立这种运动的数学模型。自此, 人们对于 Brown 运动的研究进一步深入和发展。

定义 2.5 若随机过程  $\{B(t), t \geq 0\}$  满足

- (1)  $B(0) = 0$ ;
- (2) 平稳性: 对  $\forall 0 \leq s < t$ , 有  $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$ ;
- (3) 独立增量性:  $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1), B(t_1)$  相互独立, 其中  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , 则称随机过程  $\{B(t), t \geq 0\}$  为标准 Brown 运动。

定义 2.6 设  $\{B(t), t \geq 0\}$  为标准 Brown 运动, 则称

$$X(t) = e^{\mu t + \sigma B(t)}, t \geq 0,$$

为几何 Brown 运动。

在证券定价时,  $\{S(t), t \geq 0\}$  服从漂移参数为  $\mu$ 、波动参数为  $\sigma$  的几何 Brown 运动。

### 2.3.3 分数 Brown 运动的定义及性质

定义 2.7<sup>[15]</sup> 设概率空间为  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , 具有 Hurst 指数  $H (0 < H < 1)$  的分数 Brown 运动  $B_H = \{B_H(t); t \in \mathbb{R}\}$  是一个连续高斯过程, 满足如下条件

$$B_H(0) = E[B_H(t)] = 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$E[B_H(t)B_H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

当  $H = \frac{1}{2}$  时,  $B_{\frac{1}{2}}(t)$  是标准 Brown 运动。

下面是分数 Brown 运动的两个重要性质<sup>[15]</sup>:

**性质 1:** 长期相关性。

考虑分数 Brown 运动的增量的自协方差, 对  $\forall n \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} \rho_H(n) &= E[(B_H(t+n) - B_H(t+n-1))(B_H(t) - B_H(t-1))] \\ &= \frac{1}{2}(|n+1|^{2H} - 2|n|^{2H} + |n-1|^{2H}), \end{aligned}$$

当  $\frac{1}{2} < H < 1$  时, 有  $\rho_H(n) > 0$ , 对  $\rho_H(n)$  关于  $n$  求和, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) = \infty,$$

因此, 分数 Brown 运动是长期相关的。

**性质 2:** 自相似性。

在分数 Brown 运动是一个  $H$  自相似过程, 即对  $\forall c > 0$ ,  $B_H(ct)$  与  $B_H(c^H t)$  具有相同的有限维概率分布。

## 2.4 Itô 公式(Itô's Formula)

### 2.4.1 Itô 过程

对于  $\forall 0 \leq t_0 \leq t \leq T$ , 设随机过程  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  满足下面 Itô 积分

$$X(t) = X(0) + \int_{t_0}^t a(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t b(s, X(s))dB(s),$$

或写成 Itô 微分形式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB(t), \quad (2.4.1)$$

其中  $a(t, x)$  和  $b(t, x)$  是二元连续函数, 且对于  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|a(t)|^{\frac{1}{2}}, b(t) \in \mathcal{L}_T^2$ , 称  $X = \{X(t), t \geq 0\}$  为 Itô 过程, 式(2.4.1)为 Itô 随机微分方程。

### 2.4.2 Itô 公式

**定理 2.1**<sup>[14]</sup> 设  $V_t = V(S_t, t)$ ,  $V$  是二元可微函数。若随机过程  $S_t$  满足如下随机微分方程

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t,$$

则

$$dV_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t$$

$$= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu(S_t, t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma(S_t, t) \frac{\partial V}{\partial S} dW_t. \quad (2.4.2)$$

证明 由 Taylor 展开式

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2 + O(dtdS_t), \quad (2.4.3)$$

近似地认为

$$(dW_t)^2 = dt,$$

有

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 &= (\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t)^2 \\ &= \sigma^2(S_t, t)(dW_t)^2 + 2\mu\sigma dt dW_t + \mu^2 dt^2 \\ &= \sigma^2(S_t, t)dt + o(dt), \end{aligned}$$

代入式(2.4.3), 有

$$dV_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} [\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t] + o(dt),$$

忽略 $dt$ 的高阶小量, 则式(2.4.2)成立。

## 2.5 Black-Scholes 期权定价模型(Black-Scholes Option Pricing Model)

### 2.5.1 Black-Scholes 定价公式的发展历程

期权定价是一个古老的研究课题。1900 年, L.Bachelier<sup>[14]</sup>在其学位论文中首次利用随机游动的思想为股票价格建立随机模型, 他假设股票价格服从一个绝对的布朗运动, 给出看涨期权的定价公式为

$$V(S, T) = SN\left(\frac{S - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - KN\left(\frac{S - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}n\left(\frac{S - K}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

由于 L.Bachelier 提出的模型可能会使股票价格 $S_t$ 出现负值等不合理情况, 因此, 1964 年, P.Samuelson 对上述模型进行了修正, 用股票的回报 $\frac{dS_t}{S_t}$ 代替原模型中的股票价格 $S_t$ , 提出了随机微分方程

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

基于 P.Samuelson 提出的模型, C.Sprengle 和 J.Baness 等人研究了看涨期权的定价问题, 研究成果可以表示为:

设 $V$ 是看涨期权的权利金,  $S$ 是股票价格,  $K$ 是敲定价格,  $T$ 是期权到期时间, 有

$$V = e^{-\alpha_c T} [S e^{\alpha_s T} N(d_1) - KN(d_2)],$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (\alpha_S + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha,$$

这里 $\alpha_S$ 和 $\alpha_c$ 分别是资产价格 $S_t$ 和期权价格 $V_t$ 的回报在 $T$ 时刻的期望值，但由于这两个量依赖于投资者个人偏好，因此，此定价公式不适用于实际交易过程中。

为改进Č.Sprenkle 等人提出的模型，1973 年 F.Black 和 M.Scholes 用无风险利率 $r$ 作为投资回报率代替 $\alpha_S$ 、 $\alpha_c$ ，建立了风险中性世界下的看涨期权定价公式

$$V = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

## 2.5.2 Black-Scholes 定价公式推导

**定理 2.2<sup>[14]</sup>**由 Black-Scholes 定价模型（或 B-S 模型）得到欧式看涨期权定价公式为

$$V = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.5.1)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

**定理 2.3<sup>[14]</sup>**看涨-看跌期权的平价公式

$$c_t + K e^{-r(T-t)} = p_t + S. \quad (2.5.2)$$

**定义 2.8<sup>[14]</sup>**给定期权价格 $V$ ，在相反方向交易 $\Delta$ 份原资产 $S$ ，构造无风险投资组合 $\Pi$

$$\Pi = V - \Delta S,$$

这一过程称为 $\Delta$ -对冲。

**引理 2.1** 利用 $\Delta$ -对冲技巧，可以得到用于刻画期权价格变化的偏微分方程，即 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.5.3)$$

**证明** 假设原资产价格变化遵循几何 Brown 运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

其中 $\mu$ 为期望回报率， $\sigma$ 为波动率， $dW_t$ 是标准 Brown 运动，交易过程不存在套利机会，选取适当的 $\Delta$ ，在 $(t, t+dt)$ 时间段内，构造无风险投资组合

$$\Pi = V - \Delta S,$$

在  $t + dt$  时刻, 设无风险利率为  $r$ , 则投资组合的回报是

$$\frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} = rdt,$$

即

$$dV_t - \Delta dS_t = r\Pi_t dt = r(V_t - \Delta S_t)dt, \quad (2.5.4)$$

因为  $V_t = V(S_t, t)$ , 由 Itô 公式

$$dV_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t,$$

将上式代入式(2.5.4), 得到

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \mu S \right) dt + \left( \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S \right) dW_t \\ & = r(V - \Delta S)dt, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

由于等式右端是无风险的, 因此让随机项  $dW_t$  的系数为 0, 即

$$\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S = 0,$$

因此, 无风险投资组合中的原资产份额是

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

代入式(2.5.5), 消去  $dt$ , 得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

下面给出 Black-Scholes 定价公式的证明。

**方法一: 利用 PDE 方法推导 B-S 定价公式**

考虑欧式看涨期权

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V_T = V(S_T, T) = (S_T - K)^+, \end{cases} \quad (2.5.6)$$

作代数变换

$$x = \ln S, \quad \tau = T - t,$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= -\frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{V_x}{S}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{V_x}{S} \right) = -\frac{V_x}{S^2} + \frac{V_{xx}}{S^2}, \end{aligned}$$

代入方程(2.5.6)得到

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial x} + rV = 0, \\ V_T = (e^x - K)^+, \end{cases} \quad (2.5.7)$$

令

$$V = ue^{\alpha\tau + \beta x},$$

则

$$\begin{aligned} V_\tau &= e^{\alpha\tau+\beta x}(\alpha u + u_\tau) \\ V_x &= e^{\alpha\tau+\beta x}(\beta u + u_x) \\ V_{xx} &= e^{\alpha\tau+\beta x}(\beta^2 u + 2\beta u_x + u_{xx}), \end{aligned}$$

代入方程(2.5.7)化简有

$$u_\tau - \frac{\sigma^2}{2} u_{xx} - (\sigma^2 \beta + r - \frac{\sigma^2}{2}) u_x + (\alpha + r - \beta(r - \frac{\sigma^2}{2}) - \frac{\sigma^2}{2} \beta^2) u = 0, \quad (2.5.8)$$

令 $u_x$ 和 $u$ 的系数为0, 则取

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \\ \alpha = -r + (\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2})(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}), \end{cases} \quad (2.5.9)$$

代入(2.5.8)得到 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_\tau - \frac{\sigma^2}{2} u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = e^{-\beta x} (e^x - K)^+, \end{cases} \quad (2.5.10)$$

其解表示为

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} [e^{-\beta\xi} (e^\xi - K)^+] d\xi, \quad (2.5.11)$$

由于

$$(e^\xi - K)^+ = \begin{cases} e^\xi - K, & \xi \geq \ln K \\ 0, & \xi < \ln K \end{cases}$$

且

$$V = u e^{\alpha\tau+\beta x},$$

因此

$$V = e^{\alpha\tau+\beta x} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} [e^{(1-\beta)\xi} - K e^{-\beta\xi}] d\xi = I_1 + I_2,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau} - \frac{1}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2\tau - \frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})x} \cdot e^{(1-\beta)\xi} d\xi \\ &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau} - \frac{\tau^2}{2\sigma^2\tau}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2 - \frac{1}{2\sigma^2\tau} \cdot 2(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau(\xi - x) + \xi} d\xi \\ &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[(x-\xi)^2 + 2(x-\xi)(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2\tau^2] + \xi} d\xi \\ &= e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[x-\xi+(r - \frac{\sigma^2}{2})\tau]^2 + \xi} d\xi, \end{aligned}$$



令

$$\eta = x - \xi + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau,$$

则

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{x - \eta - \frac{\sigma^2}{2}\tau} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}\eta} d\eta \\ &= \frac{e^x}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}(\eta + \sigma^2\tau)^2} d\eta, \end{aligned}$$

令

$$\omega = \frac{\eta + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

则

$$\begin{aligned} I_1 &= e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\ &= e^x N\left(\frac{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \end{aligned}$$

其中

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$$

为标准正态分布的累计概率分布函数。

同理，对于  $I_2$ ，有

$$\begin{aligned} I_2 &= -e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2\tau} - \frac{\tau}{2\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})^2 - \frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})x + \frac{1}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})\xi} d\xi \\ &= -e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[(x-\xi)^2 + 2\tau(r - \frac{\sigma^2}{2})x - 2\tau(r - \frac{\sigma^2}{2})\xi + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2\tau^2]} d\xi \\ &= -e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[(x-\xi)^2 + 2\tau(x-\xi)(r - \frac{\sigma^2}{2}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2\tau^2]} d\xi \\ &= -e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[x - \xi + \tau(r - \frac{\sigma^2}{2})]^2} d\xi, \end{aligned}$$

由

$$\eta = x - \xi + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau,$$

则

$$\begin{aligned} I_2 &= -e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} \frac{K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2\tau}} d\eta \\ &= -\frac{e^{-r\tau}K}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau} e^{-\frac{\eta^2}{2\sigma^2\tau}} d\eta, \end{aligned}$$

令

$$\rho = \frac{\eta}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

则

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-e^{-r\tau}K}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \sigma\sqrt{\tau} d\rho \\ &= -Ke^{-r\tau} N\left(\frac{x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right), \end{aligned}$$

令

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

有

$$V = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

式(2.5.1)得证。

对于欧式看跌期权，由平价公式(2.5.2)，得到

$$\begin{aligned} p_t &= c_t + Ke^{-r(T-t)} - S \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - S \\ &= Ke^{-r(T-t)}[1 - N(d_2)] - S[1 - N(d_1)], \end{aligned}$$

又由

$$\begin{aligned} 1 - N(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_1}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\ &= N(-d_1), \end{aligned}$$

因此欧式看跌期权的定价公式是

$$V = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

方法二:利用风险中性估值原理推导 B-S 定价公式

在风险中性环境下, 欧式看涨期权在到期日的价格期望值是

$$E[\max(S_T - K, 0)],$$

以无风险利率 $r$ 进行折现后, 欧式看涨期权在 $t$ 时刻的价格是

$$V = e^{-r(T-t)}E[\max(S_T - K, 0)],$$

假设股票价格变化遵循几何 Brown 运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t,$$

其中 $r$ 为无风险利率,  $\sigma$ 为波动率,  $dW_t$ 是标准 Brown 运动, 且 $dW_t \sim N(0, dt)$ , 因此, 在一段时间 $\Delta t$ 内, 股票收益回报服从正态分布

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = r\Delta t + \sigma\Delta W_t \sim N(r\Delta t, \sigma^2\Delta t),$$

令 $Y = \ln S_t$ , 由定理 2.1 得

$$\begin{aligned} dY = d\ln S_t &= \left( \frac{\partial Y}{\partial t} + rS_t \frac{\partial Y}{\partial S_t} + \frac{(\sigma S_t)^2}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial Y}{\partial S_t} dW_t \\ &= \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

对上式两端同时积分, 即

$$\int_t^T d\ln S_t = \int_t^T \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t,$$

有

$$\ln S_T - \ln S_t = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t),$$

因此

$$Y = \ln S_T \sim N(\ln S_t + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t)),$$

且

$$\begin{aligned} E[\max(S_T - K, 0)] &= E[\max(e^Y - K, 0)] \\ &= E[e^Y - K | e^Y - K > 0] \\ &= \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{e^y - K}{\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y - (\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dy \triangleq I_1 + I_2 \end{aligned}$$

其中

$$I_1 = \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{e^y}{\sigma\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y - (\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dy$$

$$\begin{aligned}
 &= S_t e^{r(T-t)} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{T-t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y - (\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dy \\
 &= S_t e^{r(T-t)} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-2\sigma^2 r(T-t)^2 - [y - (\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dy \\
 &= S_t e^{r(T-t)} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y - (\ln S_t + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t))]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dy,
 \end{aligned}$$

令

$$h = \frac{y - (\ln S_t + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t))}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

则

$$\begin{aligned}
 I_1 &= S_t e^{r(T-t)} \int_{\frac{\ln \frac{K}{S_t} - (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} dh \\
 &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}} dh,
 \end{aligned}$$

令

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

则

$$I_1 = S_t e^{r(T-t)} (1 - N(-d_1)) = S_t e^{r(T-t)} N(d_1),$$

同理可得

$$I_2 = \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{-K}{\sigma \sqrt{T-t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y - (\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dy,$$

令

$$z = \frac{y - (\ln S_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

则

$$I_2 = -K \int_{\frac{\ln \frac{K}{S_t} - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= -K \int_{\frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

令

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

则

$$I_2 = -K(1 - N(-d_2)) = -KN(d_2),$$

因此欧式看涨期权在 $t$ 时刻的价格是

$$V = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

对于欧式看跌期权，由平价公式(2.5.2)，得到

$$\begin{aligned} p_t &= c_t + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\ &= S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - S_t \\ &= Ke^{-r(T-t)} [1 - N(d_2)] - S_t [1 - N(d_1)] \\ &= Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1). \end{aligned}$$

### 3 双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动下的期权定价

### 3 Pricing of Options under Bifractional Brownian Motion and Sub-fractional Brownian Motion

#### 3.1 双分数 Brown 运动下的期权定价(Pricing of Options under Bifractional Brownian Motion)

##### 3.1.1 双分数 Brown 运动的定义及性质

定义 3.1<sup>[15]</sup> 中心高斯过程  $B^{H,K} = \{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$  称为双分数 Brown 运动, 其参数为  $H \in (0,1)$ ,  $K \in (0,1]$ , 满足  $E[B_t^{H,K}] = B_0^{H,K} = 0$ , 且协方差为

$$R^{H,K}(t,s) = E[B_t^{H,K} B_s^{H,K}] = \frac{1}{2^K} [(t^{2H} + s^{2H})^K - |t-s|^{2HK}], \forall s, t \geq 0,$$

特别地, 当  $K = 1$  时,  $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$  退化为分数 Brown 运动; 当  $K = 1$ ,  $H = \frac{1}{2}$  时,

$\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$  退化为标准 Brown 运动。

双分数 Brown 运动具有如下性质:

- (1) 双分数 Brown 运动是  $HK$  自相似的;
- (2) 双分数 Brown 运动具有  $\delta$  阶 Höder 连续性, 满足  $\delta < HK$ ;
- (3) 当  $2HK = 1$ ,  $K \in (0,1]$ ,  $H \in (0,1)$  时,  $B^{H,K} = \{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$  成了半鞅。

引理 3.1<sup>[16]</sup> 设  $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$  是定义在完备概率空间为  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上的双分数 Brown 运动, 且参数  $H \in (0,1)$ ,  $K \in (0,1]$ , 令  $f(t, x) \in C^{1,2}(R_+ \times R \rightarrow R)$ , 且

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(u, V_u) du, \int_0^t \frac{\partial f}{\partial V}(u, V_u) V_u du,$$

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial V}(u, V_u) V_u dB_u^{H,K}, \int_0^t 2HK \frac{\partial^2 f}{\partial V^2}(u, V_u) V_u^2 u^{2HK-1} du,$$

属于空间  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , 则双分数 Brown 运动的 wick-Itô 公式定义为:

$$f(t, V_t) = f(0, V_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(u, V_u) du + \mu \int_0^t \frac{\partial f}{\partial V}(u, V_u) V_u du \\ + \sigma \int_0^t \frac{\partial f}{\partial V}(u, V_u) V_u dB_u^{H,K} + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t 2HK \frac{\partial^2 f}{\partial V^2}(u, V_u) V_u^2 u^{2HK-1} du.$$

其中  $V_u$  表示资产价值。

### 3.1.2 双分数 Brown 运动环境下的金融市场模型

假定股票价格满足如下微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^{H,K}, \quad (3.1.1)$$

其中  $S_t$  是股票价格,  $\mu$  是股票预期收益率,  $\sigma$  是股票价格波动率。

引理 3.2<sup>[16]</sup> 随机微分方程(3.1.1)的解表示为

$$S_t = S_0 \exp\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^{2HK} + \sigma B_t^{H,K}\}. \quad (3.1.2)$$

定义 3.2<sup>[17]</sup> 设股票价格  $\{S_t, t \geq 0\}$  在  $[0, t]$  时间内的期望回报率为  $\beta_u$ , 其中  $u \in [0, t]$ , 则  $\beta_u$  定义为

$$\exp\{\int_0^t \beta_u du\} = \frac{E[S_t]}{S_0}. \quad (3.1.3)$$

引理 3.3<sup>[17]</sup> 股票价格  $\{S_t, t \geq 0\}$  在  $[t, T]$  时间内的期望回报率  $\beta_u$  满足

$$\exp\{\int_t^T \beta_u du\} = \exp\{\mu(T-t)\}, u \in [t, T].$$

证明 由引理(3.2)知

$$S_T = S_t \exp\{\mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} (T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_T^{H,K} - B_t^{H,K})\}, \quad (3.1.4)$$

则

$$ES_T = S_t \exp\{\mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} (T^{2HK} - t^{2HK})\} \cdot E[\exp\{\sigma(B_T^{H,K} - B_t^{H,K})\}] \\ = S_t \exp\{\mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} (T^{2HK} - t^{2HK}) + \frac{\sigma^2}{2} (T^{2HK} - t^{2HK})\},$$

因此

$$\frac{E[S_T]}{S_t} = \exp\{\mu(T-t)\},$$

即

$$\exp\{\int_t^T \beta_u du\} = \exp\{\mu(T-t)\}.$$

### 3.1.3 双分数 Brown 运动环境下的标准期权定价公式

**定理 3.1** 在双分数 Brown 运动环境下, 欧式看涨期权的到期日为  $T$ , 敲定价格为  $K_0$ , 无风险利率为  $r$ , 则对  $\forall t, t \in [0, T]$ , 该期权的定价公式为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (3.1.5)$$

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}.$$

证明 根据欧式看涨期权的定义, 期权在到期日执行的条件是

$$S_T \exp\left\{-\int_t^T \beta_u du\right\} > K_0 e^{-r(T-t)},$$

由式(3.1.4)及引理 3.3, 上式可化简为

$$S_t \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_T^{H,K} - B_t^{H,K})\right\} > K_0 e^{-r(T-t)},$$

即

$$(B_T^{H,K} - B_t^{H,K}) > -\frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma},$$

记

$$M \triangleq \{(B_T^{H,K} - B_t^{H,K}) > -\frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma}\}$$

因为  $B^{H,K} = \{B_t^{H,K}; t \geq 0\}$  为双分数 Brown 运动, 且

$$B_T^{H,K} - B_t^{H,K} \sim N(0, T^{2HK} - t^{2HK})$$

即有

$$\frac{B_T^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} \sim N(0, 1),$$

且

$$\frac{B_T^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} > -\frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}},$$

记

$$X = \frac{B_T^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}},$$

因此欧式看涨期权的价格为



$$V(S_t, t) = E[S_t \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_T^{H,K} - B_t^{H,K})\} - K_0 e^{-r(T-t)}] I_M] \\ \triangleq I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = E[S_t \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_T^{H,K} - B_t^{H,K})\} I_M] \\ = S_t \int_{-d_2}^{+\infty} \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma x \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ = S_t \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma x \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}} - \frac{x^2}{2}\} dx \\ = S_t \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x - \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}})^2}{2}\} dx,$$

令

$$\alpha = x - \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}},$$

则

$$I_1 = S_t \int_{-(d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}})}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{\alpha^2}{2}\} d\alpha,$$

记

$$(d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}) = d_1,$$

因此

$$I_1 = S_t N(d_1),$$

同理易知

$$I_2 = E[-K_0 e^{-r(T-t)} I_M] \\ = -K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

联立  $I_1, I_2$ , 可得欧式看涨期权的定价公式为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2).$$

其中

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}.$$

对于欧式看跌期权, 由平价公式(2.5.2)得到

$$p_t = c_t + K_0 e^{-r(T-t)} - S_t \\ = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) - S_t \\ = K_0 e^{-r(T-t)} [1 - N(d_2)] - S_t [1 - N(d_1)],$$

因此欧式看跌期权的定价公式是

$$p_t = K_0 e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1),$$

其中

$$d_1 = d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}.$$

### 3.1.4 双分数 Brown 运动环境下的任选期权定价公式

任选期权，或称“后定选择权”，具有如下特征：持有人可以在期权有效期内的任意时刻，选择该期权是看涨期权或者看跌期权。

**定义 3.3**<sup>[18]</sup> 在双分数 Brown 运动环境下，执行价格为  $K_0$ ，到期日为  $T$ ，在某一确定时刻  $t^*$ ,  $t^* \in (0, T)$ ，任选期权的价值是

$$V(S_{t^*}, t^*) = \max\{c(S_{t^*}, t^*), p(S_{t^*}, t^*)\},$$

其中  $c(S_{t^*}, t^*)$  为任选期权的标的看涨期权的价值， $p(S_{t^*}, t^*)$  为任选期权的标的看跌期权的价值。

若任选期权的两个标的期权都是欧式期权，且执行价格相同，则可以通过看涨-看跌期权平价公式得到价值公式为

$$\begin{aligned} V(S_{t^*}, t^*) &= \max\{c(S_{t^*}, t^*), c(S_{t^*}, t^*) + K_0 e^{-r(T-t^*)} - S_{t^*}\} \\ &= c(S_{t^*}, t^*) + \max\{K_0 e^{-r(T-t^*)} - S_{t^*}, 0\}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

**定理 3.2** 设某任选期权在  $t^*$ ,  $t^* \in (0, T)$  时刻进行选择，则在  $t^*$  前的任何时间  $t, t \in (0, t^*)$  的价格是

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) + K_0 e^{-r(T-t)} N(d_3) - S_t N(d_4). \quad (3.1.7)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} \\ d_3 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}, \quad d_4 = d_3 + \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}. \end{aligned}$$

**证明** 根据看跌期权的定义，期权在到期日执行的条件是

$$K_0 e^{-r(T-t)} > \exp\left\{-\int_t^{t^*} \beta_u du\right\} S_{t^*},$$

并且由式(3.1.4)及引理 3.3，上式可化简为

$$K_0 e^{-r(T-t)} > \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_{t^*}^{H,K} - B_t^{H,K})\right\} S_t,$$

即

$$(B_{t^*}^{H,K} - B_t^{H,K}) < -\frac{\ln \frac{S_t}{K_0} - \frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK}) + r(T-t)}{\sigma},$$

记

$$A \triangleq \{(B_T^{H,K} - B_t^{H,K}) < -\frac{\ln \frac{S_t}{K_0} - \frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK}) + r(T-t)}{\sigma}\}$$

因为  $B^{H,K} = \{B_t^{H,K}; t \geq 0\}$  为双分数 Brown 运动, 且

$$B_{t^*}^{H,K} - B_t^{H,K} \sim N(0, t^{*2HK} - t^{2HK}),$$

有

$$\frac{B_{t^*}^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}} \sim N(0,1),$$

且

$$\frac{B_{t^*}^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}} < -\frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}},$$

记

$$Y = \frac{B_{t^*}^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}, \quad d_3 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}.$$

由任选期权价值公式(3.1.6)可知, 在  $t^*$  时刻, 任选期权由两部分组合而成: 一份执行价格为  $K_0$ , 到期日为  $T$  的看涨期权; 一份执行价格为  $K_0 e^{-r(T-t^*)}$ , 到期日为  $t^*$  的看跌期权。因此,  $t, t \in (0, t^*)$  时刻该任选期权的保险精算价格为

$$\begin{aligned} V(S_t, t) &= E[\exp\{-\int_t^T \beta_u du\} S_T - K_0 e^{-r(T-t)}]^+ \\ &\quad + E[(K_0 e^{-r(T-t)} - \exp\{\int_t^{t^*} \beta_u du\} S_{t^*}) I_A] \\ &= c(S_t, t) + E[K_0 e^{-r(T-t)} I_A] - E[\exp\{\int_t^{t^*} \beta_u du\} S_{t^*} I_A] \\ &\triangleq c(S_t, t) + \pi_1 - \pi_2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \pi_1 &= E[K_0 e^{-r(T-t)} I_A] = K_0 e^{-r(T-t)} N(-d_3), \\ \pi_2 &= E[S_t \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_T^{H,K} - B_t^{H,K})\} I_M] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S_t \int_{-\infty}^{-d_3} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK}) + \sigma y \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= S_t \int_{-\infty}^{-d_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK}) + \sigma y \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}} - \frac{y^2}{2}\right\} dy \\
 &= S_t \int_{-\infty}^{-d_3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}})^2}{2}\right\} dy,
 \end{aligned}$$

令

$$\omega = x - \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}},$$

则

$$\pi_2 = S_t \int_{-\infty}^{-(d_3 + \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\omega^2}{2}\right\} d\omega,$$

记

$$(d_3 + \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}) = d_4,$$

因此

$$\pi_2 = S_t N(d_4),$$

又

$$c(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

因此双分数 Brown 运动环境下, 任选期权的定价公式为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) + K_0 e^{-r(T-t)} N(d_3) - S_t N(d_4),$$

其中

$$\begin{aligned}
 d_1 &= d_2 + \sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} \\
 d_3 &= \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(t^{*2HK} - t^{2HK})}{\sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}, \quad d_4 = d_3 + \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}.
 \end{aligned}$$

### 3.1.5 风险管理参数敏感性分析

根据前面得到的任选期权定价公式, 可以看出期权价格受到 5 种因素影响, 其中包括  $S_t$ ,  $T$ ,  $\sigma$ ,  $t^*$ ,  $r$ , 这些因素的变化对研究期权价格的敏感性来说非常重要。事实上, 期权价格敏感性的影响因素已形成通用术语, 通常用希腊字母表示<sup>[18]</sup>。下面将通过计算相关希腊字母, 来分别讨论这 5 种因素对任选期权价格的敏感性。

为方便证明, 记  $S_t = S$ ,  $N'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

**定理 3.3** 任选期权的各个敏感性指标分别为

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1) + N(-d_4) - 1,$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} + \frac{f(d_4)}{S\sigma\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}},$$

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{K_0\sigma e^{-r(T-t)}HK T^{2HK-1}f(d_2)}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} + [K_0r e^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_3))],$$

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = K_0 e^{-r(T-t)}f(d_2)\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}} + K_0 e^{-r(T-t)}f(d_3)\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}},$$

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = K_0(T-t)e^{-r(T-t)}[N(d_2) - N(d_3)],$$

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t^*} = \frac{-K_0 e^{-r(T-t)}\sigma HK t^{*2HK-1}f(d_3)}{\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}.$$

证明 任选期权价格公式对各参数求一阶偏导数

(1)

$$\begin{aligned} \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = & N(d_1) + Sf(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - K_0 e^{-r(T-t)}f(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} + K_0 e^{-r(T-t)}f(d_3)\frac{\partial d_3}{\partial S} \\ & - N(d_4) - Sf(d_4)\frac{\partial d_4}{\partial S}, \end{aligned}$$

因为

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}, \quad d_4 = d_3 + \sigma\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}},$$

有

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}, \quad \frac{\partial d_3}{\partial S} = \frac{\partial d_4}{\partial S},$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta = & N(d_1) + [Sf(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)}f(d_2)]\frac{\partial d_1}{\partial S} + [K_0 e^{-r(T-t)}f(d_3) - Sf(d_4)]\frac{\partial d_3}{\partial S} \\ & - N(d_4), \end{aligned}$$

而  $Sf(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)}f(d_2)$  可进行如下化简:

$$\begin{aligned} \frac{f(d_1)}{f(d_2)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}} \\ &= e^{\frac{d_2^2 - d_1^2}{2}} \\ &= e^{\frac{-(d_1 - d_2)(d_1 + d_2)}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\frac{\sigma\sqrt{(T^{2HK}-t^{2HK})}(2d_2+\sigma\sqrt{(T^{2HK}-t^{2HK})})}{2}} \\
 &= e^{-(\ln\frac{S}{K_0}+r(T-t)-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK}))-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})} \\
 &= \frac{K}{S}e^{-(T-t)},
 \end{aligned}$$

即  $Sf(d_1) - K_0e^{-r(T-t)}f(d_2) = 0$ 。同理可得,  $K_0e^{-r(T-t)}f(d_3) - Sf(d_4) = 0$ , 因此

$$\begin{aligned}
 \Delta &= N(d_1) - N(d_4) \\
 &= N(d_1) - [1 - N(-d_4)] \\
 &= N(d_1) + N(-d_4) - 1.
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial S} = f(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} + f(-d_4)\frac{\partial d_4}{\partial S} \\
 &= \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}} + \frac{f(d_4)}{S\sigma\sqrt{t^{2HK}-t^{2HK}}}.
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \frac{\partial V}{\partial T} = Sf(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} - [-K_0re^{-r(T-t)}N(d_2) + K_0e^{-r(T-t)}f(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T}] \\
 &\quad + [-K_0re^{-r(T-t)}N(d_3) + K_0e^{-r(T-t)}f(d_3)\frac{\partial d_3}{\partial T}] - Sf(d_4)\frac{\partial d_4}{\partial T},
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial d_1}{\partial T} \\
 &= \frac{(r + \sigma^2 HKT^{2HK-1})\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}} - [\ln\frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})]\frac{\sigma HKT^{2HK-1}}{\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}}}{\sigma^2(T^{2HK}-t^{2HK})} \\
 &= \frac{-[\ln\frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})]HKT^{2HK-1} + r(T^{2HK}-t^{2HK})}{\sigma(T^{2HK}-t^{2HK})\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}} \\
 &= \frac{HKT^{2HK-1}}{T^{2HK}-t^{2HK}}(-d_2) + \frac{r}{\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial d_2}{\partial T} \\
 &= \frac{(r - \sigma^2 HKT^{2HK-1})\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}} - [\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})] \frac{\sigma HKT^{2HK-1}}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}}{\sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK})} \\
 &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})]HKT^{2HK-1} + r(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma(T^{2HK} - t^{2HK})\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} \\
 &= \frac{HKT^{2HK-1}}{T^{2HK} - t^{2HK}}(-d_1) + \frac{r}{\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}},
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_3}{\partial T} &= \frac{\partial d_4}{\partial T} = \frac{r}{\sigma\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}, \\
 \frac{\partial d_4}{\partial T} &= \frac{\partial d_3}{\partial T},
 \end{aligned}$$

将上式代入可得

$$\begin{aligned}
 \Theta &= \frac{\partial V}{\partial T} = [Sf(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} - K_0e^{-r(T-t)}f(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T}] + [K_0re^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_3))] \\
 &= \frac{K_0\sigma e^{-r(T-t)}HKT^{2HK-1}f(d_2)}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} + [K_0re^{-r(T-t)}(N(d_2) - N(d_3))].
 \end{aligned}$$

(4)

$$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = Sf(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K_0e^{-r(T-t)}f(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} + K_0e^{-r(T-t)}f(d_3)\frac{\partial d_3}{\partial \sigma} - Sf(d_4)\frac{\partial d_4}{\partial \sigma},$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \\
 &= \frac{\sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK})\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}} - [\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})]\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}{\sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK})} \\
 &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})]}{\sigma^2\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} = \frac{-d_2}{\sigma}, \\
 & \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
 &= \frac{-\sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK})\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}} - [\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})]\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}{\sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK})} \\
 &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})]}{\sigma^2\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} = \frac{-d_1}{\sigma},
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial d_3}{\partial \sigma} = \frac{-d_4}{\sigma}, \quad \frac{\partial d_3}{\partial \sigma} = \frac{-d_3}{\sigma},$$

因此将上式代入可得

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} \{ [Sf(d_1)d_2 - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2)d_1] + [K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3)d_4 \\ &\quad - Sf(d_4)d_3] \} \\ &= K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}} + K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\partial V}{\partial r} = Sf(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - [-K_0(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2) + K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r}] \\ &\quad + [-K_0(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_3) + K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial r}] - Sf(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial r}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial r} &= \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{T-t}{\sigma \sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}, \\ \frac{\partial d_3}{\partial r} &= \frac{\partial d_4}{\partial r} = \frac{T-t}{\sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}, \end{aligned}$$

因此将上式代入可得

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\partial V}{\partial r} = K_0(T-t)e^{-r(T-t)} [N(d_2) - N(d_3)]. \end{aligned}$$

(6)

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t^*} = K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial t^*} - Sf(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial t^*},$$

其中

$$\begin{aligned} &\frac{\partial d_3}{\partial t^*} \\ &= \frac{-\sigma^2 HK t^{*2HK-1} \sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}} - [\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} (t^{*2HK} - t^{2HK})] \frac{\sigma HK t^{*2HK-1}}{\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}}{\sigma^2 (t^{*2HK} - t^{2HK})} \\ &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2} (t^{*2HK} - t^{2HK})] \frac{HK t^{*2HK-1}}{t^{*2HK} - t^{2HK}}}{\sigma \sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}} = \frac{HK t^{*2HK-1}}{t^{*2HK} - t^{2HK}} N(-d_4). \end{aligned}$$

同理可得



$$\frac{\partial d_4}{\partial t^*} = \frac{HKt^{*2HK-1}}{t^{*2HK} - t^{2HK}} N(-d_3).$$

因此将上式代入可得:

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t^*} = \frac{-K_0 e^{-r(T-t)} \sigma HK t^{*2HK-1} f(d_3)}{\sqrt{t^{*2HK} - t^{2HK}}}.$$

**敏感性分析:** 由于正态分布函数  $N(\cdot)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 且  $N(0) = \frac{1}{2}$ ,

且当  $S > K_0$  时,  $d_1, d_2, d_3, d_4$  都大于 0, 因此,  $N(d_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4$ , 即  $\Delta = N(d_1) + N(-d_4) - 1 > 0$ , 说明期权价格的变化与标的资产价格的变化呈正向关系, 即当标的资产价格增加 (减少) 1 个单位时, 期权价格增加 (减少)  $\Delta$  个单位; 对于参数  $\Gamma$ , 由定义可知  $\Gamma > 0$ , 说明标的资产价格每增加 (减少) 1 个单位时, 期权的价格相应增加 (减少)  $\Delta$  个单位; 由定义可知  $\Theta > 0$ , 说明到期时间越长, 期权的时间价值越大, 从而期权价格越高, 即当到期时间每增加 (减少) 1 个单位时, 期权价格增加 (减少)  $\Theta$  个单位; 波动率在期权交易过程中非常重要, 因为只有当市场存在一定的波动性时, 人们才愿意承担风险进行交易。v 代表期权价格随着标的资产波动率变化的快慢程度, 在上述计算中, 可知  $v > 0$ , 说明当标的资产波动率增加 (减少) 1 个单位时, 期权价格增加 (减少)  $v$  个单位; 利率水平反映出持有期权的机会成本, 如果利率水平越高, 则持有看涨期权的机会成本越大, 期权价格就越高, 相反地, 如果利率水平越低, 则持有看跌期权的机会成本越大, 期权价格就越高。由定义知  $\rho > 0$ , 说明当利率增加 (减少) 1 个单位时, 期权价格增加 (减少)  $\rho$  个单位; 由定义知  $\theta < 0$ , 说明当选择时刻  $t^*$  越迟, 即期权持有人在快接近到期日时才选择看涨或看跌期权, 此时持有人承担的风险降低, 相应期权的价格升高。

## 3.2 次分数 Brown 运动下的期权定价(Pricing of Options under sub-fractional Brownian Motion)

### 3.2.1 次分数 Brown 运动的定义及性质

**定义 3.4<sup>[10]</sup>** Hurst 指数  $H (H \in (0, 1))$  的连续高斯过程  $\{W_t^H, t \geq 0\}$  称为次分数 Brown 运动, 满足  $E[W_t^H] = W_0^H = 0$ , 且协方差为

$$E[W_t^H W_s^H] = t^{2H} + s^{2H} - \frac{1}{2}(|t + s|^{2H} + |t - s|^{2H}), \forall s, t \geq 0,$$

特别地, 当  $H = \frac{1}{2}$  时,  $\{W_t^H, t \geq 0\}$  为标准 Brown 运动。

次分数 Brown 运动具有如下性质<sup>[21]</sup>:

(1) 自相似性: 当  $a > 0$  时, 有  $\{W^H(at), t \geq 0\} \stackrel{d}{\Leftrightarrow} \{a^H W^H(t), t \geq 0\}$ ;

(2) 长相依性: 当  $H > \frac{1}{2}$  时,  $W^H(t)$  有长期依赖性, 即若

$$r(n) = \text{cov}(W^H(1), W^H(n+1) - W^H(n)), \text{有 } \sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty;$$

(3)  $H \in (0, 1), \forall t \geq 0$ , 有  $E[W_t^H]^2 = (2 - 2^{2H-1})t^{2H}$ ;

引理 3.4<sup>[19]</sup> 设  $\{X(t)\}$  是由  $dX(t) = \mu dt + \sigma dW_t^H$  构成的次分数 Itô 过程,  $g(t, X(t))$  式定义在  $[0, +\infty] \times R$  上的二次连续函数, 则  $\{G(t) = g(t, X(t))\}$  仍然为次分数 Itô 过程, 且满足

$$dG_t = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \mu \frac{\partial g}{\partial X} + (2 - 2^{2H-1})H\sigma^2 t^{2H-1} \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial g}{\partial X} dW_t^H. \quad (3.1.8)$$

### 3.2.2 次分数 Brown 运动环境下的金融市场模型

假定股票价格满足如下微分方程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^H, \quad (3.1.9)$$

其中,  $S_t$  是股票价格,  $\mu$  是股票预期收益率,  $\sigma$  是股票价格波动率。

引理 3.5<sup>[20]</sup> 随机微分方程(3.1.9)的解表示为

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})t^{2H} + \sigma W_t^H\right\}. \quad (3.1.10)$$

引理 3.6 股票价格  $\{S_t, t \geq 0\}$  在  $[t, T]$  时间内的期望回报率  $\beta_u$  满足

$$\exp\left\{\int_t^T \beta_u du\right\} = \exp\{\mu(T-t)\}, u \in [t, T].$$

证明 由引理 3.5 知

$$S_T = S_t \exp\left\{\mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma(W_T^H - W_t^H)\right\}, \quad (3.1.11)$$

则

$$\begin{aligned} ES_T &= S_t \exp\left\{\mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2HK} - t^{2HK})\right\} \cdot E[\exp\{\sigma(W_T^H - W_t^H)\}] \\ &= S_t \exp\left\{\mu(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2HK} - t^{2HK}) + \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2HK} - t^{2HK})\right\} \end{aligned}$$

因此, 由期望回报率的定义式(3.1.3)有

$$\frac{E[S_T]}{S_t} = \exp\{\mu(T-t)\},$$

即

$$\exp\left\{\int_t^T \beta_u du\right\} = \exp\{\mu(T-t)\}.$$

引理 3.7 利用风险中性估值原理, 我们可以给出次分数 Brown 运动环境下的期权价格变化所满足的偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV_t = 0. \quad (3.1.12)$$

证明 假设标的资产价格变化遵循次分数 Brown 运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^H, \quad (3.1.13)$$

其中  $\mu$  为期望收益率,  $\sigma$  为股价波动率,  $dW_t^H$  是次分数 Brown 运动, 交易过程不存在套利机会。选取  $\Delta$  份股票  $S_t$ , 1 份衍生证券  $V(S_t, t)$ , 在  $t$  时刻, 构造无风险投资组合

$$\Pi_t = V - \Delta S_t,$$

则该投资组合在  $t + dt$  时刻的回报为

$$\frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} = rdt,$$

即

$$dV_t - \Delta dS_t = r\Pi_t dt = r(V_t - \Delta S_t)dt, \quad (3.1.14)$$

因为  $V_t = V(S_t, t)$ , 由次分数 Itô 公式(3.1.8)可得

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + H\sigma^2 S_t^2 t^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt, \quad (3.1.15)$$

将(3.1.13)和(3.1.15)代入式(3.1.14)中, 可得

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \mu S_t + H\sigma^2 S_t^2 t^{2H-1} (2 - 2^{2H-1}) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S_t dW_t^H \\ & = r(V_t - \Delta S_t)dt, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

由于等式右端是无风险的, 因此让随机项  $dW_t^H$  的系数为 0, 即

$$\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta = 0,$$

因此无风险投资组合中的股票份额是

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

代入式(3.1.16), 消去  $dt$  得到

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 H(2 - 2^{2H-1}) t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV_t = 0.$$

### 3.2.3 次分数 Brown 运动环境下的标准期权定价公式

定理 3.4 在次分数 Brown 运动环境下, 某欧式看涨期权的到期日为  $T$ , 敲定价格为  $K_0$ , 无风险利率为  $r$ , 则对  $\forall t, t \in [0, T]$ , 该期权的定价公式为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2). \quad (3.1.17)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}},$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}.$$

证明 由引理 3.7, 可知欧式看涨期权的价格  $V = V(S_t, t)$  满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S_t^2 H(2-2^{2H-1}) t^{2H-1} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV_t = 0, \\ V_T = V(S_T, T) = (S_T - K_0)^+, \end{cases} \quad (3.1.18)$$

作变量代换, 令

$$x = \ln S, V(S_t, t) \triangleq c(t, x)$$

则有  $S = S_t = e^x$ , 且

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{V_c}{S},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{V_c}{S} \right) = -\frac{V_c}{S^2} + \frac{V_{cc}}{S^2},$$

代入方程(3.1.18), 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + r \frac{\partial c}{\partial x} + \sigma^2 H(2-2^{2H-1}) t^{2H-1} \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) - rc = 0, \\ c_T = (e^x - K_0)^+, \end{cases} \quad (3.1.19)$$

令

$$u(s, z) = c(t, x) e^{r(T-t)},$$

$$s = \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H}), \quad z = x + r(T-t) - s,$$

则

$$c(t, x) = u(s, z) e^{-r(T-t)},$$

又因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= r u e^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} [ru + H\sigma^2(2-2^{2H-1})t^{2H-1} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial s} \right) - r \frac{\partial u}{\partial z}], \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= e^{-r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

将上面三个等式代入(3.1.19), 化简后可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \\ u(0, z) = (e^z - K_0)^+, \end{cases}$$

其解可以表示为

$$u(s, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, \tau) e^{-\frac{(\tau-z)^2}{4s}} d\tau,$$

易知  $u(0, \tau) = (e^z - K)^+$ , 且欧式看涨期权执行时满足  $\tau \geq \ln K$ , 由  $c(t, x)$  定义

$$c(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K_0}^{+\infty} (e^\tau - K) e^{-\frac{(\tau-z)^2}{4s}} d\tau \triangleq I_1 + I_2,$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K_0}^{+\infty} e^{\tau - \frac{(\tau-z)^2}{4s}} d\tau \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K_0}^{+\infty} e^{\frac{4s\tau - (\tau-z)^2}{4s}} d\tau \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K_0}^{+\infty} e^{\frac{[4s\tau - \tau^2 + 2\tau z - z^2 + (4s^2 + 4sz)] - (4s^2 + 4sz)}{4s}} d\tau \\ &= \frac{e^{-r(T-t) + (s+z)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K_0}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau-z-2s)^2}{4s}} d\tau, \end{aligned}$$

令

$$\xi = \frac{\tau - z - 2s}{\sqrt{2s}},$$

则

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-r(T-t) + (s+z)} \int_{\frac{\ln K_0 - z - 2s}{\sqrt{2s}}}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \\ &= e^{-r(T-t) + (s+z)} \int_{-\left(\frac{2s - z - \ln K_0}{\sqrt{2s}}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi, \end{aligned}$$

由  $z$  和  $s$  的定义, 代入上式可得

$$I_1 = e^x \int_{-\left(\frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi,$$

记

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}},$$

则

$$I_1 = e^x N(d_1),$$

同理

$$I_2 = \frac{-K_0 e^{-r(T-t)}}{2\sqrt{\pi s}} \int_{\ln K_0}^{+\infty} e^{-\frac{(\tau-z)^2}{4s}} d\tau,$$

令

$$\omega = \frac{\tau - z}{\sqrt{2s}},$$

则

$$\begin{aligned} I_2 &= -K_0 e^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln K_0 - z}{\sqrt{2s}}}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\ &= -K_0 e^{-r(T-t)} \int_{-\left(\frac{z - \ln K_0}{\sqrt{2s}}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega \\ &= -K_0 e^{-r(T-t)} \int_{-\left(\frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}\right)}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega, \end{aligned}$$

记

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}},$$

则

$$I_2 = -K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

联立 $I_1, I_2$ , 可得欧式看涨期权的定价公式为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}, \\ d_2 &= \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}. \end{aligned}$$

对于欧式看跌期权, 由平价公式(2.5.2), 得到

$$\begin{aligned} p_t &= c_t + K_0 e^{-r(T-t)} - S_t \\ &= S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) - S_t \\ &= K_0 e^{-r(T-t)} [1 - N(d_2)] - S_t [1 - N(d_1)], \end{aligned}$$

因此欧式看跌期权的定价公式是

$$p_t = K_0 e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

### 3.2.4 次分数 Brown 运动环境下的任选期权定价公式

**定理 3.5** 在次分数 Brown 运动环境下, 某任选期权在  $t^*$ ,  $t^* \in (0, T)$  时刻进行选择, 则在  $t^*$  前的任何时间  $t, t \in (0, t^*)$  的价格是

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) + K_0 e^{-r(T-t)} N(-d_3) - S_t N(-d_4). \quad (3.1.20)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H}-t^{2H})}$$

$$d_3 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H}-t^{2H})}{\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H}-t^{2H})}}, \quad d_4 = d_3 - \sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H}-t^{2H})}.$$

**证明** 根据 3.1.4 节中任选期权的价值公式的定义, 可以直接写出  $t, t \in (0, t^*)$  时刻任选期权的保险精算价格为:

$$\begin{aligned} V(S_t, t) &= E[(\exp\{-\int_t^T \beta_u du\} S_T - K_0 e^{-r(T-t)})^+] \\ &\quad + E[(K_0 e^{-r(T-t)} - \exp\{\int_t^{t^*} \beta_u du\} S_{t^*}) I_D] \\ &= c(S_t, t) + E[K_0 e^{-r(T-t)} I_D] - E[\exp\{\int_t^{t^*} \beta_u du\} S_{t^*} I_D] \\ &\triangleq c(S_t, t) + \pi_1 - \pi_2. \end{aligned}$$

其中

$$D \triangleq \{(W_{t^*}^H - W_t^H) > \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H}-t^{2H}) + r(T-t)}{\sigma}\}$$

因为

$$W_{t^*}^H - W_t^H \sim N(0, (2-2^{2H-1})(t^{*2H}-t^{2H}))$$

有

$$\frac{W_{t^*}^H - W_t^H}{\sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H}-t^{2H})}} \sim N(0, 1),$$

且

$$\frac{W_{t^*}^H - W_t^H}{\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}} > \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H}) + r(T - t)}{\sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}},$$

记

$$X = \frac{W_{t^*}^H - W_t^H}{\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}},$$

$$d_3 = \frac{\ln \frac{S_t}{K_0} + \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H}) + r(T - t)}{\sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}},$$

因此

$$\begin{aligned} \pi_1 &= E[K_0 e^{-r(T-t)} I_D] \\ &= K_0 e^{-r(T-t)} \int_{d_3}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= K_0 e^{-r(T-t)} N(-d_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= E[S_t \exp\{-\frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H}) + \sigma x \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})} I_D\}] \\ &= S_t \int_{d_3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(x - \sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})})^2}{2}\} dy, \end{aligned}$$

令

$$z = x - \sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})},$$

则

$$\pi_2 = S_t \int_{d_3 - \sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz,$$

记

$$(d_3 - \sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}) = d_4,$$

因此

$$\pi_2 = S_t N(-d_4).$$

又

$$c(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

因此次分数 Brown 运动环境下, 任选期权的定价公式为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) + K_0 e^{-r(T-t)} N(-d_3) - S_t N(-d_4),$$



其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}$$

$$d_3 = \frac{\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}{\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}, \quad d_4 = d_3 - \sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}.$$

### 3.2.5 风险管理参数敏感性分析

定理 3.6 任选期权价格敏感性参数为

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1) + N(d_4) - 1,$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{f(d_1)}{S\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}} + \frac{f(d_4)}{S\sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}},$$

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{K_0 e^{-r(T-t)} \sigma H \sqrt{(2-2^{2H-1})} T^{2H-1} f(d_2)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} + [K_0 r e^{-r(T-t)} (N(d_2) + N(d_3) - 1)],$$

$$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \sqrt{(2-2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})},$$

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = K_0 (T-t) e^{-r(T-t)} [N(d_2) + N(d_3) - 1],$$

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t^*} = \frac{-K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) H t^{*2H-1}}{t^{*2H} - t^{2H}}.$$

证明 由  $1 - N(x) = N(-x), \forall x$ , 次分数 Brown 运动环境下任选期权定价公式可进一步化简为

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_2) - K_0 e^{-r(T-t)} N(d_3) + S_t N(d_4) + K_0 e^{-r(T-t)} - S_t.$$

为方便证明, 记  $S_t = S$ ,  $N'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

任选期权价格公式对各参数求一阶偏导数得

(1)

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1) + S f(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial S} + N(d_4) + S f(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial S} - 1,$$

因为

$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}$ ,  $d_3 = d_4 + \sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}$ ,  
 有

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}, \quad \frac{\partial d_3}{\partial S} = \frac{\partial d_4}{\partial S},$$

所以

$$\Delta = N(d_1) + [Sf(d_1) - K_0e^{-r(T-t)}f(d_2)]\frac{\partial d_1}{\partial S} - [K_0e^{-r(T-t)}f(d_3) - Sf(d_4)]\frac{\partial d_3}{\partial S} + N(d_4) - 1$$

而  $Sf(d_1) - K_0e^{-r(T-t)}f(d_2)$  可进行如下化简

$$\begin{aligned} \frac{f(d_1)}{f(d_2)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}} \\ &= e^{\frac{d_2^2 - d_1^2}{2}} \\ &= e^{\frac{-(d_1 - d_2)(d_1 + d_2)}{2}} \\ &= e^{\frac{\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}(2d_2 + \sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})})}{2}} \\ &= e^{-(\ln\frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} \\ &= \frac{K}{S}e^{-(T-t)}, \end{aligned}$$

即  $Sf(d_1) - K_0e^{-r(T-t)}f(d_2) = 0$ 。同理可得,  $K_0e^{-r(T-t)}f(d_3) - Sf(d_4) = 0$ ,

因此

$$\Delta = N(d_1) + N(d_4) - 1.$$

(2)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\partial \Delta}{\partial S} = f(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} + f(d_4)\frac{\partial d_4}{\partial S} \\ &= \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}} + \frac{f(d_4)}{S\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\Theta = & -\frac{\partial V}{\partial T} = -\{Sf(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} - [-K_0re^{-r(T-t)}N(d_2) + K_0e^{-r(T-t)}f(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T}] \\ & - [-K_0re^{-r(T-t)}N(d_3) + K_0e^{-r(T-t)}f(d_3)\frac{\partial d_3}{\partial T}] \\ & + Sf(d_4)\frac{\partial d_4}{\partial T} - K_0re^{-r(T-t)}\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_1}{\partial T} &= \frac{(r + \sigma^2 H(2 - 2^{2H-1})T^{2H-1})\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} \\ &\quad - \frac{[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})]\frac{\sigma H\sqrt{2 - 2^{2H-1}}T^{2H-1}}{\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}}}{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} \\ &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})]H\sqrt{2 - 2^{2H-1}}T^{2H-1}}{\sigma(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \\ &\quad + \frac{r\sqrt{2 - 2^{2H-1}}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \\ &= \frac{HT^{2H-1}}{T^{2H} - t^{2H}}(-d_2) + \frac{r}{\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}. \\ \frac{\partial d_2}{\partial T} &= \frac{(r - \sigma^2 H(2 - 2^{2H-1})T^{2H-1})\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} \\ &\quad - \frac{[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})]\frac{\sigma H\sqrt{2 - 2^{2H-1}}T^{2H-1}}{\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}}}{\sigma^2(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} \\ &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})]H\sqrt{2 - 2^{2H-1}}T^{2H-1}}{\sigma(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \\ &\quad + \frac{r\sqrt{2 - 2^{2H-1}}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \\ &= \frac{HT^{2H-1}}{T^{2H} - t^{2H}}(-d_1) + \frac{r}{\sigma\sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial d_3}{\partial T} = \frac{\partial d_4}{\partial T} = \frac{r}{\sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}.$$

将上式代入可得

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\partial V}{\partial T} = [Sf(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial T} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial T}] + [K_0 r e^{-r(T-t)} (N(d_2) \\ &\quad + N(d_3))] - K_0 r e^{-r(T-t)} \\ &= \frac{K_0 e^{-r(T-t)} \sigma H \sqrt{(2 - 2^{2H-1})} T^{2H-1} f(d_2)}{\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} + [K_0 r e^{-r(T-t)} (N(d_2) + N(d_3) - 1)]. \end{aligned}$$

(4)

$$v = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = Sf(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial \sigma} + Sf(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial \sigma},$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} &= \frac{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H}) \sqrt{(2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}}{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})} \\ &\quad - \frac{[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})] \sqrt{(2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}}{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})} \\ &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})]}{\sigma^2 \sqrt{(2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}} \\ &= \frac{-d_2}{\sigma}, \\ \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} &= \frac{-\sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H}) \sqrt{(2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}}{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})} \\ &\quad - \frac{[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})] \sqrt{(2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}}{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})} \\ &= \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2} (2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})]}{\sigma^2 \sqrt{(2 - 2^{2H-1}) (T^{2H} - t^{2H})}} \\ &= \frac{-d_1}{\sigma}, \end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{\partial d_3}{\partial \sigma} = \frac{-d_4}{\sigma}, \quad \frac{\partial d_3}{\partial \sigma} = \frac{-d_3}{\sigma}.$$

因此将上式代入可得

$$\begin{aligned} & Sf(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial \sigma} + Sf(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial \sigma} \\ v = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = & -\frac{1}{\sigma} \{ [Sf(d_1)d_2 - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2)d_1] - [K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3)d_4 \\ & - Sf(d_4)d_3] \} \\ = & K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})} \\ & - K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \rho = \frac{\partial V}{\partial r} = & Sf(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - [-K_0(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) + K_0 e^{-r(T-t)} f(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r}] \\ & - [-K_0(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_3) + K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial r}] \\ & + Sf(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial r} - K_0(T-t)e^{-r(T-t)}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r} = & \frac{T-t}{\sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(T^{2H} - t^{2H})}}, \\ \frac{\partial d_3}{\partial r} = \frac{\partial d_4}{\partial r} = & \frac{T-t}{\sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}, \end{aligned}$$

因此将上式代入可得

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r} = K_0(T-t)e^{-r(T-t)}[N(d_2) + N(d_3) - 1].$$

(6)

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t^*} = -K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial t^*} + Sf(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial t^*},$$

其中

$$\frac{\partial d_3}{\partial t^*} = \frac{\sigma^2 H (2 - 2^{2H-1}) t^{*2H-1} \sigma \sqrt{(2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}{\sigma^2 (2 - 2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})] \frac{\sigma H \sqrt{2-2^{2H-1}} t^{*2H-1}}{\sqrt{(t^{*2H} - t^{2H})}}}{\sigma^2(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})} \\
 & = \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})] H \sqrt{2-2^{2H-1}} t^{*2H-1}}{\sigma(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H}) \sqrt{t^{*2H} - t^{2H}}} \\
 & = \frac{H t^{*2H-1}}{t^{*2H} - t^{2H}} (-d_4). \\
 \frac{\partial d_2}{\partial T} & = \frac{-\sigma^2 H(2-2^{2H-1}) t^{*2H-1} \sigma \sqrt{(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})}}{\sigma^2(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})} \\
 & - \frac{[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})] \frac{\sigma H \sqrt{2-2^{2H-1}} t^{*2H-1}}{\sqrt{(t^{*2H} - t^{2H})}}}{\sigma^2(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})} \\
 & = \frac{-[\ln \frac{S}{K_0} + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H})] H \sqrt{2-2^{2H-1}} t^{*2H-1}}{\sigma(2-2^{2H-1})(t^{*2H} - t^{2H}) \sqrt{t^{*2H} - t^{2H}}} \\
 & = \frac{H t^{*2H-1}}{t^{*2H} - t^{2H}} (-d_3).
 \end{aligned}$$

将上式代入可得

$$\begin{aligned}
 \theta & = \frac{\partial V}{\partial t^*} = -K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) \frac{\partial d_3}{\partial t^*} + S f(d_4) \frac{\partial d_4}{\partial t^*} \\
 & = \frac{-K_0 e^{-r(T-t)} f(d_3) H t^{*2H-1}}{t^{*2H} - t^{2H}}.
 \end{aligned}$$

**敏感性分析:** 由于正态分布函数  $N(\cdot)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 且  $N(0) = \frac{1}{2}$ , 且当  $S > K_0$  时,  $d_1, d_2, d_3, d_4$  都大于 0, 因此,  $N(d_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4$ , 即  $\Delta = N(d_1) + N(d_4) - 1 > 0$ , 说明期权价格的变化与标的资产价格的变化呈正向关系, 即当标的资产价格增加 (减少) 1 个单位时, 期权价格增加 (减少)  $\Delta$  个单位; 对于参数  $\Gamma$ , 由定义可知  $\Gamma > 0$ , 说明标的资产价格每增加 (减少) 1 个单位时, 期权的价格相应增加 (减少)  $\Delta$  个单位; 由定义可知  $\Theta > 0$ , 说明到期时间越长, 期权的时间价值越大, 从而期权价格越高, 即当到期时间每增加 (减少) 1 个单

位时，期权价格增加（减少） $\theta$ 个单位；波动率在期权交易过程中非常重要，因为只有当市场存在一定的波动性时，人们才愿意承担风险进行交易。 $v$ 代表期权价格随着标的资产波动率变化的快慢程度，在上述计算中，可知 $v > 0$ ，说明当标的资产波动率增加（减少）1个单位时，期权价格增加（减少） $v$ 个单位；利率水平反映出持有期权的机会成本，如果利率水平越高，则持有看涨期权的机会成本越大，期权价格就越高，相反地，如果利率水平越低，则持有看跌期权的机会成本越大，期权价格就越高。由定义知 $\rho > 0$ ，说明当利率增加（减少）1个单位时，期权价格增加（减少） $\rho$ 个单位；由定义知 $\theta < 0$ ，说明当选择时刻 $t^*$ 越迟，即期权持有人在快接近到期日时才选择看涨或看跌期权，此时持有人承担的风险降低，相应期权的价格升高。

## 4 数值算法

## 4 Numerical Algorithm

### 4.1 不同到期日下 Hurst 指数与期权价格的关系(Relationship between Hurst index and option price under different maturity dates)

分别研究双分数 Brown 运动环境和次分数 Brown 运动环境下的欧式看涨期权。首先给期权定价公式中的变量取值:设期权价格 $S_t = 120$ , 敲定价格 $K_0 = 90$ ,  $t = 0$ , 无风险利率为 $r = 0.1$ , 波动率 $\sigma = 0.15$ ,  $K = 0.25$ , 分别讨论到期日 $T = \frac{1}{12}$ ,  $T = \frac{4}{12}$ ,  $T = \frac{8}{12}$ 时的 $H$ 与 $V$ 的关系。

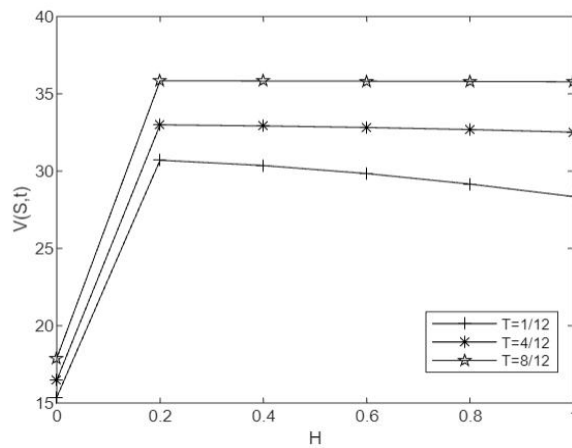


图 1 双分数 Brown 环境中不同到期日下的  $H$  与  $V$  的关系

Figure1 Relationship between Hurst index and option price under different maturity dates in Bifractional Brownian Motion

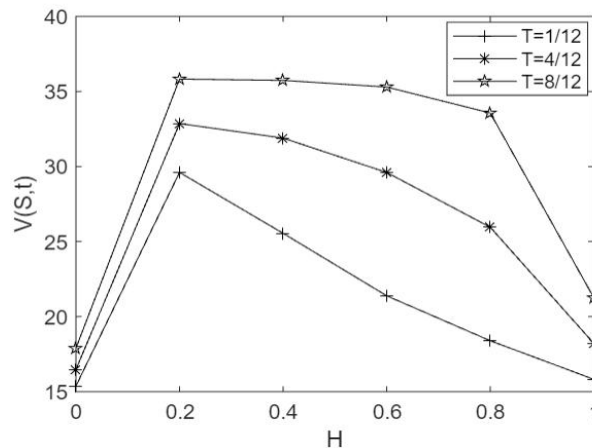




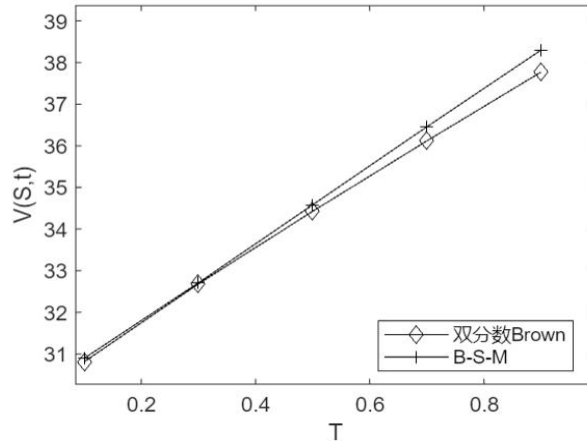
图 2 次分数 Brown 环境中不同到期日下的  $H$  与  $V$  的关系

Figure2 Relationship between Hurst index and option price under different maturity dates in Sub-fractional Brownian Motion

图 1、图 2 表明，在相同到期日下，随着 Hurst 指数的增大，期权价格逐渐减少，即  $H$  与  $V$  成反比例关系，且 Hurst 指数越大，期权价格的变动幅度呈现出较强的“长记忆性”；在相同 Hurst 指数下，期权价格随着到期日的增大而增大，说明到期日越长，期权持有者所承担的风险越小，期权价格越高。

#### 4.2 不同 Hurst 指数下到期日与期权价格的关系(Relationship between maturity dates under different Hurst index and option price)

研究双分数 Brown 运动环境和次分数 Brown 运动环境下的欧式看涨期权。首先给期权定价公式中的变量取值:设期权价格  $S_t = 120$ , 敲定价格  $K_0 = 90$ ,  $t = 0$ , 无风险利率为  $r = 0.1$ , 波动率  $\sigma = 0.15$ ,  $K = 0.25$ , 给定到期日  $T = 0, T = 0.2, T = 0.4, T = 0.6, T = 0.8, T = 1.0$ , 分别讨论  $H = 0.25$  和  $H = 0.75$  时的  $T$  与  $V$  的关系。



(a)  $H=0.25$  时期权价格变化趋势

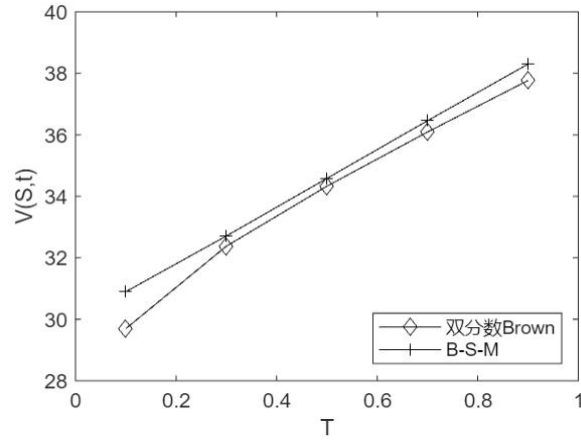
(b)  $H=0.75$  时期权价格变化趋势

图 3 双分数 Brown 运动环境下对不同 Hurst 指数到期日  $T$  与期权价格  $V$  的关系  
 Figure3 The relationship between different Hurst index maturity  $T$  and option price  $V$  under the environment of Bifractional Brownian Motion

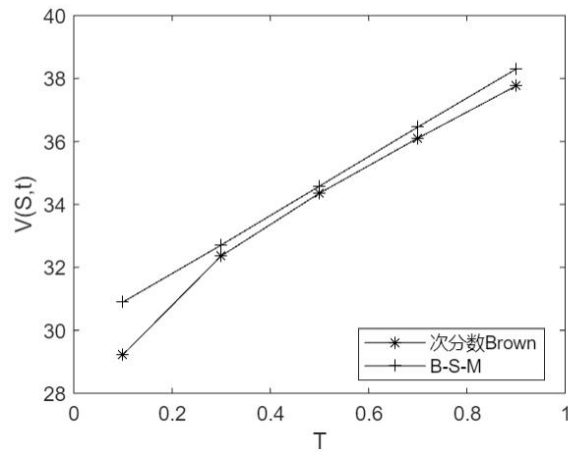
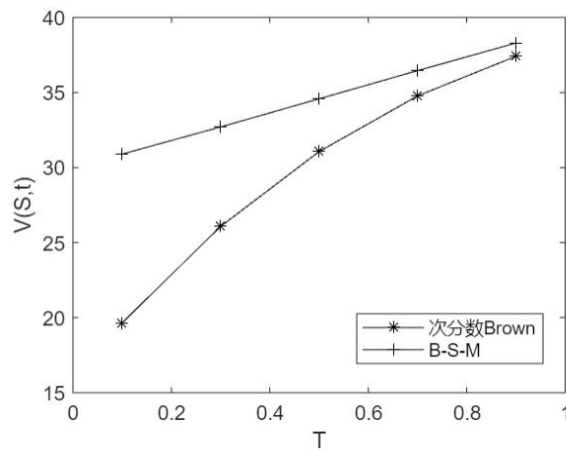
(c)  $H=0.25$  时期权价格变化趋势(d)  $H=0.75$  时期权价格变化趋势

图 4 次分数 Brown 运动环境下对不同 Hurst 指数到期日  $T$  与期权价格  $V$  的关系  
 Figure4 The relationship between different Hurst index maturity  $T$  and option price  $V$  under the environment of Sub-fractional Brownian Motion

在研究不同 Hurst 指数下到期日  $T$  与期权价格  $V$  的关系时,同时给出了基于 Black-Scholes 定价模型的期权价格变化趋势,这样能够更好地比较不同定价模型。从图 3、图 4 可以看出, Hurst 指数越大,期权价格的变动幅度呈现出较强的“长记忆性”,且对于同一定价环境,同一 Hurst 指数, B-S 定价模型给出的期权价格要更高,说明双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动存在“长记忆性”,刻画出标的资产的“长记忆性”,进一步表明双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境下的期权定价模型更适用于实际金融市场。

## 5 总结与展望

### 5 Summary and Outlook

金融衍生品市场的繁荣发展，产生了大量的投资产品，合理利用这些产品获得收益已经成为投资者关注的焦点。目前，由基础资产衍生出来的新型产品数不胜数，研究新型期权的定价不仅是市场发展的需要，更是维持经济稳定的必要条件。

相较于传统期权定价模型 B-S 模型，用分数布朗运动过程刻画股票价格的变化更贴近现实市场。这种方法能够克服传统模型中的对于股价波动服从绝对的正态分布等缺点。在目前的研究中，我们考虑股票价格的长程相关性，用一个更完善的模型来为期权定价。

本文基于双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境，首先推导出标准期权的定价公式，然后利用定价模型对任选期权进行定价，其中，通过计算任选期权定价公式的风险管理参数，分析了期权价格对参数变动的敏感性，最后，设计数值实验。在双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境下，基于标准期权的定价公式，分别研究了 Hurst 指数对股票价格变动趋势的影响，以及不同 Hurst 指数下到期期限对股票价格变动趋势的影响，并结合经典 B-S 定价模型，将两种定价环境下的股票价格变动趋势进行比较。

从数值实验的结果来看，在双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动环境下，Hurst 指数的变化能够对股票价格产生一定的影响，并且同一定价环境下，固定 Hurst 指数，B-S 定价模型给出的期权价格要更高，进一步表明双分数 Brown 运动和次分数 Brown 运动能够刻画出标的资产的“长记忆性”，更适用于实际金融市场。

由于时间不足，基础知识有限，本文还存在以下不足：

- (1) 由于在实际市场中，利率是一个关于时间  $t$  的随机变量，而文中使用无风险利率给标的资产进行折现，不具备一般性。
- (2) 由于数据来源有限，无法进行实证模拟，通过对实验数据的分析来比较模型的优劣。
- (3) 没有考虑两个标的资产执行价格不同时的任选期权，以及选择时点有多个的较为复杂的任选期权的定价。

## 参考文献

- [1] Kolmogorov A N. Wiener'sche spiralen und einige andere interessante kurven im hilbertschen raum[J]. (German) C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS(N.S.), 1940, 26:115-118.
- [2] Mandelbrot B B, Ness J W. Fractional brownian motions fractional noises and applications[J]. Siam Review, 1968, 10(4):422-437.
- [3] Duncan T E, Hu Y Z, Pasik D B. Stochastic calculus for fractional brownian motion theory[J]. Siam Journal on Control and Optimization, 2000, 38(2):582-612.
- [4] Bojdecki, Gorostizal, Talarczyk A. Sub-fractional brownian motion and its relation to occupation times[J]. Statistics and Probability, 2004, 69(5):717-739.
- [5] Russo F, Tundo R C. On the bifractional brownian motion[J]. Stochastic Processes and Applications, 2006, 116(5):830-856.
- [6] Constantin T. Some properties of the sub-fractional brownian motion[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2007, 79(5):431-448.
- [7] Xiao W. Pricing currency option in a fractional brownian motion with jumps[J]. Economic Modeling, 2010, 27(8):935-942.
- [8] Charles E N, Mounir Z. On the sub-mixed fractional brownian motion[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2015, 30(1):27-43.
- [9] Wang W, Cai G H, Tao X X. Pricing geometric Asian power options in the sub-fractional brownian motion environment[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2021, 145:1-6.
- [10] 郭精军, 张亚芳. 次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价[J]. 应用数学, 2017, 30(3):503-510.
- [11] 孙彩灵, 刘丽霞. 基于跳扩散模型对随机利率下远期开始期权定价研究[J]. 黑龙江大学学报自然科学学报, 2021, 38(3):275-282.
- [12] 胡攀. 次分数跳扩散过程下亚式期权的保险精算定价[J]. 宁夏大学学报, 2021, 40(3):241-247.
- [13] 王军, 王娟. 随机过程及其在金融领域中的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 北京交通大学出版社, 2007:46-65.
- [14] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008:56-80.
- [15] Gripenberg G, Norros I. On the prediction of fractional brown motion[J]. Journal of Applied Probability, 1996, 33(2):400-410.
- [16] 肖玮麟, 张卫国, 徐维东. 双分式布朗运动下股本权证的定价[J]. 系统工程学报, 2013, 28(3):348-354.
- [17] 张雪莲, 薛红. 分数布朗运动环境下重置期权定价模型研究[J]. 西安工程大学学报,

- 2009, 23(4):141-145.
- [18] 期权, 期货及其他衍生产品[M]. 张陶伟, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2009:512.
- [19] Yan L, Shen G, He K. Itô's formula for a sub-fractional brownian motion[J]. *Communication on Stochastic Analysis*, 2011, 5(1):135-159.
- [20] 肖玮麟, 张卫国, 徐维东. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. *中国管理科学*, 2014, 22(5):1-7.
- [21] 肖爽, 蹇明, 陈爱香, 蹇贝. 模糊环境中跳扩散模型下带交易费用的期权定价方法[J]. *数学物理学报*, 2015, 35(A):118-131.

# 翻译部分

## 英文原文(The Original Foreign Language)

Physica A 560 (2020) 125118



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/physa](http://www.elsevier.com/locate/physa)



### Derivation of non-classical stochastic price dynamics equations

Carey Caginalp<sup>a,b</sup>, Gunduz Caginalp<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> Mathematics Department, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA 15260, United States of America

<sup>b</sup> Economic Science Institute, Chapman University, Orange, CA 92866, United States of America



#### ARTICLE INFO

##### Article history:

Received 10 May 2020

Received in revised form 21 July 2020

Available online 26 August 2020

##### JEL classification:

C00

G12

G40

##### Keywords:

Asset prices

Asset price dynamics

Fat tails

Stochastic differential equations

Stochastic models

Price variance

Risk

Volatility

Supply and demand

#### ABSTRACT

We analyze the relative price change of assets starting from basic supply/demand considerations subject to arbitrary motivations. The resulting stochastic differential equation has coefficients that are functions of supply and demand. We derive these rigorously. The variance in the relative price change is then also dependent on the supply and demand, and is closely connected to the expected return. An important consequence for risk assessment and options pricing is the implication that variance is highest when the magnitude of price change is greatest, and lowest near market extrema. This occurs even if supply and demand are not dependent on price trend. The stochastic equation differs from the standard equation in mathematical finance in which the expected return and variance are decoupled. The methodology has implications for the basic framework for risk assessment, suggesting that volatility should be measured in the context of regimes of price change. The model we propose shows how investors are often misled by the apparent calm of markets near a market peak. Risk assessment methods utilizing volatility can be improved using this formulation.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

#### 1. Introduction

While equilibrium price theory has been developed extensively in classical economics, the study of dynamics that describes the path to equilibrium is still in the developing stage. Broadly speaking, the approaches can be divided into (i) discrete models – based on an imbalance of supply and demand – that have typically been considered for goods and commodities, (ii) continuum models – often incorporating randomness – for asset price dynamics that are standard in options pricing and risk assessment.

1.1. A simple and standard model of type (i) above is the excess demand model, which is often stated in classical economics<sup>1</sup> as

$$p_t - p_{t-1} = \frac{1}{\tau_0} (d_{t-1} - s_{t-1}) \quad (1)$$

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [carey\\_caginalp@alumni.brown.edu](mailto:carey_caginalp@alumni.brown.edu) (C. Caginalp), [caginalp@pitt.edu](mailto:caginalp@pitt.edu) (G. Caginalp).

<sup>1</sup> Walrasian equilibrium is defined by zero excess demand,  $E = D - S$ , i.e., the right hand side of (1), vanishes so that the price is unchanged in the next time period. The price thereby adjusts to the quantity. A tatonnement process (see e.g., [1]), such as (1) is one in which trading occurs only at equilibrium. When trading at the discrete time  $t$  has ended, the intersection of the new supply and demand then determines the price  $P_{t+1}$  of the next trade.

<https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.125118>

0378-4371/© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

where  $p_t$  is the price at the discrete time,  $t$ , and  $s_{t-1}$  and  $d_{t-1}$  are the supply and demand at time  $t-1$ , and  $\tau_0^{-1}$  is a constant that determines the extent to which prices move for each unit of imbalance between supply and demand (e.g. Watson and Getz, 1981 [2] or Weintraub 1979 [1]). This is obtained directly from supply and demand functions that are assumed to be straight lines, which are good approximations for small deviations when these functions are smooth. Of course, (1) is only a local equation that is valid for a particular pair of linear supply and demand. For example, an imbalance created by  $d_{t-1} = 10,020$  and  $s_{t-1} = 10,000$  will have a much smaller impact on price change than would  $d_{t-1} = 40$  and  $s_{t-1} = 20$ . This demonstrates the need for normalization, realized by dividing the right hand side of (1) by  $s_{t-1}$ . Similarly, the left hand side must be normalized by dividing by  $p_{t-1}$  leading to the equation

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{1}{\tau_0} \frac{d_{t-1} - s_{t-1}}{s_{t-1}}. \quad (2)$$

While these normalizations lead to an equation that is a reasonable non-local model, another feature of (1) is that it is a linear equation, so that the price change is always proportional to the excess demand. While linearity is often a convenient and reasonable approximation, there is no compelling requirement that price change be a linear function of excess demand. Introducing a differentiable function  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  with suitable properties including  $g(1) = 0$  and  $g' > 0$ , we can write in place of (1) the equation

$$\tau_0 \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = g\left(\frac{d_{t-1}}{s_{t-1}}\right). \quad (3)$$

Thus, information on the supply and demand at a any discrete time determines the price change for the next discrete time. The design of markets and efficient price discovery has been an active research area from both a theoretical and experimental perspective. See models in Milgrom, 2017 [3] and Gjerstad and Dickhaut, 1998 [4], Hirshleifer et al. 2005 [5], Gjerstad, 2007 [6] and 2013 [7] and references therein. The experimental aspect has been studied by researchers including Plott and Pogorelskiy, 2017 [8], Crockett et al. 2009 [4], Bossaerts and Plott, 2004 [9], Porter and Rassenti, 2003 [10].

**1.2.** At the continuum level, the focus of research for several decades has been on the price dynamics of asset prices, such as stocks and options, subject to randomness. A standard equation that has been the starting point for much of mathematical finance is written in terms of Brownian motion  $W(t; \omega)$ , with  $\omega \in \Omega$ , the probability state space, as

$$P^{-1} \frac{dP}{dt} = \mu dt + \sigma dW. \quad (4)$$

Here  $P$  is the price as a function of continuous time,  $t$ , while  $\mu$  and  $\sigma$  are the expected return and standard deviation. The parameter  $\mu$  is the expected return (often based on historical data), and  $\sigma$  is often set based on the idea (that has some limited empirical justification) that volatility remains relatively stable in time. These parameters are often assumed to be constant, and in some cases a prescribed function of time. This equation has a long history, with the main ideas dating back to Bachelier, 1900 [11] and now utilized in basic textbooks such as Karatzas and Shreve, 1998 [12] and Wilmott, 2013 [13]. With no information besides some price history, one can regard (4) as a good first approximation for several mathematical problems such as options pricing and risk assessment.

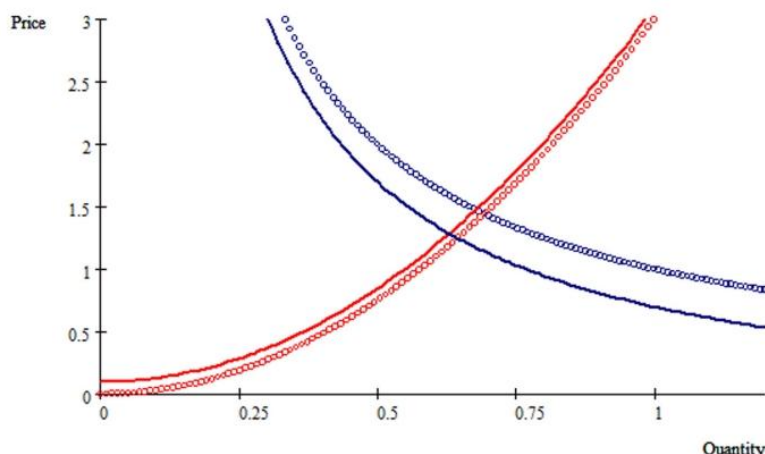
The approach leading to (4) does not build on the basic economic ideas of supply and demand, but rather has limited justification based on empirical observation and is appealing due to the salient mathematical properties. One of the deficiencies of (4) is that it vastly understates the risk for unusual events. For example, if one calculates the probability of, say, a 4% or 5% drop in a stock index based upon the empirical daily standard deviation, one obtains a result that is vastly smaller than empirical observations. While many explanations (with some justification) have been offered for this anomaly, often called “fat tails”, Caginalp and Caginalp 2018, [14], 2019, [15] showed that it arises as a consequence of the mathematical property that a quotient of normals is approximately normal in part of the domain of the density (see Díaz-Francés and Rubio 2013 [16], Champagnat et al. 2013 [17] and references therein), but not near the tail, where it can be a power law rather than exponential. The basic idea is that supply and demand can be expected to be normal as a consequence of the Central Limit Theorem. Thus, their quotient as one has in (2) or (3) will **not** be close to normal near the tail of the distribution, i.e., for rare events.

A practical examination of the source of randomness in asset prices shows that the overwhelming fraction of the randomness arises from the randomness in supply and demand. In other words, if one knew how the supply and demand would change at the next time interval, one would essentially know how prices would evolve.<sup>2</sup> In trading of a major stock or index, for example, there are dozens of professionals focusing on the same stock and whose sole business consists of exploiting very small deviations from optimal pricing. Indeed, these professionals observe the same shifts in supply and demand again and again, and earn their living by adjusting their bids and asks in response to these shifts.

These professionals, some of whom are “market makers” tasked with ensuring orderly markets, are not concerned with the fundamentals or even the long term trends. At any given moment they observe the change in the supply-demand

<sup>2</sup> One can almost regard this statement as a tautology since the price is determined exclusively by the supply and demand functions. Theoretically, the price change after a small time increment will be determined by the change in these functions. In many markets there are features that complicate the supply/demand analysis, such as market makers who can buy on their own account at better prices than the traders.





**Fig. 1.** The supply–demand graph displays the initial supply function (which is increasing) in solid red and the (decreasing) demand function in solid blue. The price is established by the intersection at the price  $P = 1.29$ . A short time later a random event increases demand and decreases supply, so the blue curve shifts upward to the dotted blue line, and the supply shifts downward to the dotted red line, establishing a higher price,  $P = 1.44$ .

curves regardless of origin of those changes. Given the change in supply and demand, there will be a unique price that is clearly based on previous iterations. If some of the professionals have biases or irrational expectations whereby they are not able to deduce the correct new price, they will not be in business very long since there are many trades throughout one day, so that a losing strategy will exhaust the capital in a short time. This does not contradict the premises of behavioral finance since there are many aspects of trading, with some having an efficiency higher than others. The perspective of the market makers is that they have some capital for their business which involves adjusting to the orders of a stock. Unlike individual or hedge fund investors or even mutual fund managers, the market makers cannot tie up their business capital based on their assessment of either the fundamental value or the long term trend (and other technical indicators), or other beliefs they may hold about the stock.

The situation is illustrated in Fig. 1. The supply–demand graph displays the initial supply function (which is increasing) in solid red and the (decreasing) demand function in solid blue. The price is established by the intersection at the price  $P = 1.29$ . A short time later, there is a random event (e.g., a news announcement such as an earnings report) that changes the supply and demand for the asset. In particular, if the news is positive, it will increase the demand, so the solid blue curve shifts upward to the dotted blue line. The potential sellers are also aware of the positive news and re-adjust their orders to reflect the changing circumstances, thereby raising the price that they are willing to accept. The solid red curve thus shifts upward to the dotted red curve. The new supply and demand functions now intersect at a higher price,  $P = 1.44$ . The key point is that the random event influences a large number of agents in terms of their preferences to buy or sell, so that the impact of the randomness is entirely comprised of the shifts in the supply and demand curves. Given the shifts in the supply and demand curves, there is little additional source of randomness given the large number of market makers who are seeking to capitalize on these shifts and have optimized on the same shift many times.

Examples of company specific news that influences the supply/demand curves include quarterly revenue and earnings reports, changes in the company's leadership, securing a lucrative contract, announcements on restating previous earnings, government announcements of investigations into the company, etc. For the broader market, the supply/demand curves often shift with government updated indicators, most of them monthly, such as the nonfarm payrolls, stating the net number of jobs added or lost during the preceding month, the retail sales changes, the consumer price increases, trade balance numbers, etc. Other factors are also include changes in interest rates, i.e., the bond markets, international trade and currencies, natural disasters, etc. Large changes in supply/demand occur when there is large deviation from the expected outcome. For example, during both the financial crisis of 2008 and the Covid pandemic of 2020, the employment announcements were very significant as the markets braced for job loss of hundreds of thousands or millions, respectively. What is often surprising to non-experts, however, is that supply/demand curves prior to an announcement are based on the current forecast. If that forecast is for two million jobs lost, and the news is that "only" one million jobs are lost, this is favorable news, and the supply (of shares submitted for sale in the S&P index, for example) often shifts down, and the demand shifts up (as displayed in Fig. 1). Thus, the impact of the news is always relative to the existing expectations.

This idea can be tested empirically in exchanges and experimentally in laboratories. Given the same shift in supply and demand how much variance will there be in a market with many experienced market makers and short term traders? We

claim that it will be negligible compared to the randomness in supply and demand arising from news items (e.g., earnings reports, forecasts and analysts reports for a stock) and influx or outflow of funds for a particular asset.

In particular, one can design a market in which news (altering the payout) will arrive at various times. In addition to the usual traders, there will be short term traders who have the constraint that they must have zero inventory of the asset at the end of each period (similar to a market maker). By analyzing the supply/demand changes throughout the experiment, one can determine the variance in the relative price change among the times when the shift in supply/demand is nearly identical. The hypothesis is that when the shift in supply/demand is similar, so is the price change. On the other hand, one can determine the variance in the supply/demand shift given a spectrum of news that impacts the asset payoff.

Thus, a fundamental analysis of randomness in asset prices should begin with an examination of the process by which randomness in supply and demand propagates to the stochastics of price change.

Our goal here is to present a precise derivation and justification of an equation analogous to (4) that is based on supply and demand considerations (see Caginalp and Caginalp, 2019, [18]), namely,

$$P^{-1}dP = G(D/S)dt + \sigma \frac{D}{S} G'(D/S) dW. \quad (5)$$

Here,  $S$  and  $D$  be the expected value of supply and demand, respectively. The basic premise is that the relative change in price,  $P^{-1}dP/dt$  in terms of a function  $G$ , which is analogous to  $g$  above, and meets the requirements specified in Section 2. Since  $G$  depends on the ratio of total supply,  $\tilde{S}$ , and demand,  $\tilde{D}$ , one has the basic equation  $P^{-1}dP/dt = G(\tilde{D}/\tilde{S})$ . Writing

$$\tilde{D}(t, \omega) = D(t) \left(1 + \frac{\sigma}{2} R\right), \quad \tilde{S}(t, \omega) = S(t) \left(1 - \frac{\sigma}{2} R\right)$$

with  $R$  as the standard normal, denoted  $\mathcal{N}(0, 1)$ , and expanding  $G$  in a Taylor series formally leads to (5) in the limit (see [18] for details). One important consequence of this equation is that the volatility (as defined in Section 5) will be a function of  $D/S$ , as is the price derivative. Prior research [18] concludes that volatility will be a minimum at price extrema, and a maximum when the ratio  $D/S$  (and consequently the magnitude of the price derivative) are at a maximum. Of course, for market bottoms, there may be other factors at work, e.g., margin calls, that would need to be modeled, as discussed in Section 5. Eq. (5) has important implications for risk assessment and options pricing. For example, if one is using the classical equation (4), and measuring  $\sigma$ , the risk and volatility would be underestimated if the trading price of the asset is near a market top. There is empirical evidence that major stock market tops are associated with low volatility (Sornette et al. 2018 [19]) suggestive of the maxim ‘‘calm before the storm’’. The supply,  $S(t)$  and demand,  $D(t)$ , in (5) can be specified, or be coupled to other differential equations, such as the asset flow equations that have been developed since the late 1980’s (see e.g., Caginalp and Balenovich, 1999 [20], Merdan and Alisen, 2011 [21], DeSantis and Swigon, 2018 [22], and references therein).

While volatility is an active research area (see e.g., [23–26]) and advances in empirical calculations of volatility have been made in recent years, an approach based on microeconomics and (5) can be instrumental in an integrated understanding of price change and volatility.

In this paper, we present a rigorous derivation of the probability density corresponding to (5). This provides a justification of the fat tail properties established in [14] that demonstrated that a power law decay in relative price change is a consequence of the probability distribution in inherent in the supply/demand ratio. In other words, assuming that supply and demand are normally distributed (as one would expect from the Central Limit Theorem) the quotient will have a density that decays (in many cases) as a power law. Furthermore, we use this density to derive the stochastic equation (5).

## 中文译文(Chinese Translation)

### 非经典随机价格动态方程的推导 摘 要

从考虑受任意动机的基本供需开始分析资产的相对价格变化，我们将严格推导出由此产生的随机微分方程的系数是供需的函数。相对价格变化的方差也取决于供求关系，并与预期收益密切相关。风险评估和期权定价的一个重要结果是，当价格变化幅度最大时方差最大，而在接近市场极值时方差最小。即使供需不依赖于价格趋势，也会发生这种情况。随机方程不同于金融数学中的标准方程，其中预期收益和方差是解耦的。该方法对风险评估的基本框架有影响，表明应在价格变化机制的背景下衡量波动性。我们提出的模型将表明投资者是如何经常被市场峰值附近明显的平静所误导。使用该公式可以改进利用波动性的风险评估方法。

关键词: 资产价格 肥尾 随机微分方程 随机模型 价格方差 风险 波动率 供需

## 1 介绍

虽然均衡价格理论在古典经济学中已经得到了广泛发展,但是描述均衡路径的动力学研究仍处于发展阶段。从广义上来讲,这些方法可以分为 (i) 离散模型—基于供需失衡—通常用于货物和大宗商品, (ii) 连续模型—通常包含随机性—用于期权定价和风险评估的标准:资产价格动态。

1. 1. 上述类型 (i) 的一个简单标准化模型是超额需求模型,它在古典经济学中通常被表示为 1

$$p_t - p_{t-1} = \frac{1}{\tau_0} (d_{t-1} - s_{t-1}), \quad (1)$$

其中  $p_t$  是离散时间  $t$  的价格,  $s_{t-1}$  和  $d_{t-1}$  分别是时间  $t-1$  的供给与需求,  $\tau_0^{-1}$  是一个常数,它决定了每个单位供需失衡的价格变动幅度(见 Watson 和 Getz 1981 [2], 或者 Weintraub 1979 [1])。这一结论是直接从假定为直线的供给和需求函数中获得的,当这些函数表现平滑时,其是小偏差的良好近似值。当然, (1) 式只是一个局部方程,它对特定的线性供求关系有效。例如,由  $d_{t-1} = 10,020$  和  $s_{t-1} = 10,000$  造成的不平衡对价格变化的影响比  $d_{t-1} = 40$  和  $s_{t-1} = 20$  的影响要小得多。这一点表明,将 (1) 式的右侧除以  $s_{t-1}$  使其标准化是非常有必要的。类似地, (1) 式左侧必须通过除以  $p_{t-1}$  使其标准化,从而得出等式

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{1}{\tau_0} \frac{d_{t-1} - s_{t-1}}{s_{t-1}}. \quad (2)$$

虽然这些标准化导致方程是一个合理的非局部模型,但 (1) 式的另外一个特征是它是一个线性方程,因此价格的变化总是与超额需求成正比。虽然线性通常是一个便捷合理的近似值,但并没有强制要求价格变化是超额需求的线性函数。这里引入一个可微函数  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , 它有一些合理性质,包括  $g(1) = 0$  和  $g' > 0$ , 我们可以用下面方程代替 (1)

$$\tau_0 \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = g\left(\frac{d_{t-1}}{s_{t-1}}\right). \quad (3)$$

因此,任何离散时间的供求信息决定了下一个离散时间的价格变化。从理论和实验的角度来看,市场的设计和有效的价格发现一直是一个活跃的研究领域。可以参考 Milgrom 2017 [3], Gjerstad 和 Dickhaut 1998 [4], Hirshleifer 等 2005 [5], Gjerstad 2007 [6] 和 2013 [7] 以及其中的参考文献。包括 Plott 和 Pogorelskiy 2017 [8], Crocket 等 2009 [4], Bossaerts 和 Plott 2004 [9], Porter 和 Rassenti 2003 [10] 在内的研究人员已经对实验方面进行了研究。

1. 2. 在连续统层面,几十年来的研究重点一直是股票和期权等受随机性影响的资产价格的价格动态。许多金融数学的起点是一个标准方程,可以用布朗运动  $W(t; \omega)$  表示,其中  $\omega \in \Omega$ , 为概率状态空间,如

$$p^{-1} \frac{dp}{dt} = \mu dt + \sigma dW. \quad (4)$$

这里 $p$ 表示价格，是连续时间 $t$ 的函数，而 $\mu$ 和 $\sigma$ 是预期收益和标准差。参数 $\mu$ 是预期收益（通常由历史数据得到），且 $\sigma$ 的设定通常基于波动率在时间上保持相对稳定的原则（存在一些有限的经验证明）。这些参数通常被假定为常数，并且在某些情况下是特定的时间函数。这个方程历史悠久，其主要思想可以追溯到 Bachelier 1900 [11]以及现在被用在基础教科书中的，如 Karatzas 和 Shreve 1998 [12], Wilmott 2013 [13]。除了一些价格历史信息外没有任何信息，可以将(4)视为几个数学问题（如期权定价和风险评估）的良好初步近似值。

推导出(4)的方法并不是建立在供给和需求的基本经济学思想之上的，而是基于经验观察的有限的理由，并且由于其具有突出的数学特性，对研究者有一定吸引力。(4)的缺陷之一是它大大低估了异常事件的风险。例如，如果根据经验的每日标准差计算股票指数下跌 4%或 5%的概率，得到的结果远小于经验观察结果。虽然学者们已经为这种异常现象提出了许多解释（和一些正当理由），通常被称为“肥尾”，但 Caginalp 和 Caginalp 2018 [14]、2019 [15]表明它是数学性质的结果，即法线的商在密度域的一部分中近似为法线（见 Díaz-Francés 和 Rubio 2013 [16], Champagnat 等 2013 [17]和其中的参考文献），但并不靠近尾部：可以是幂律而不是指数。它的基本思想是，由于中心极限定理，供需可以被认为是正常的。因此，它们在(2)或(3)中的商在分布尾部附近不会接近正态，比如在罕见的情况下。

对资产价格随机性来源的实际检验表明，绝大部分的随机性来源于供需的随机性。换句话说，如果一个人知道下一个时间间隔的供需将如何变化，那么他基本上就知道了价格将如何演变<sup>2</sup>。例如，在交易主要股票或指数时，有数十名专业人士专注于相同的股票，他们唯一需要做的就是利用与最优定价的非常小的偏差。事实上，这些专业人士一次又一次地观察到同样的供需变化，为了应对这些变化，他们对出价和要价作出了调整。

这些专业人士，其中一些是负责确保市场有序的“做市商”，他们并不关心基本面甚至长期趋势。在任何特定时刻，他们都会观察到供给和需求曲线的变化，而不管这些变化的来源。鉴于供需的变化将会导致一个特殊的价格，而这个价格明显基于之前的迭代过程。如果一些专业人士持有偏见或不合理的期望，他们将无法正确推断出新价格，由于一天中有很多交易，他们不会经营很长时间，因此亏损策略将在短时间内耗尽资金。这与行为金融学的前提并不矛盾，因为交易有很多方面，其中一些方面的效率要高于其他方面。做市商的观点是他们有一些资金用于他们的业务，包括调整股票的订单等。与个人或对冲基金投资者甚至共同



基金经理不同的是，做市商不能根据他们对基本价值或长期趋势（和其他技术指标）的评估，或者他们可能对股票持有的其他信念来占用他们的商业资本股票。

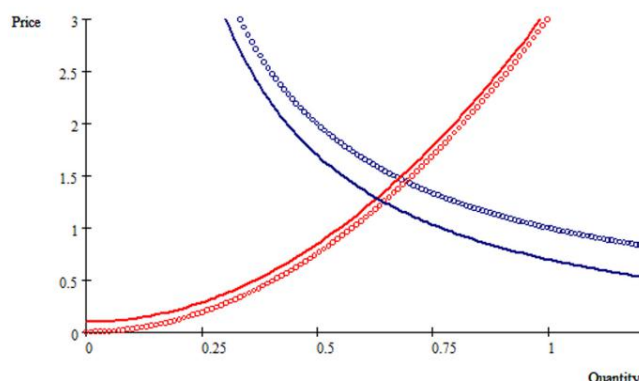


Fig. 1. The supply-demand graph displays the initial supply function (which is increasing) in solid red and the (decreasing) demand function in solid blue. The price is established by the intersection at the price  $P = 1.29$ . A short time later a random event increases demand and decreases supply, so the blue curve shifts upward to the dotted blue line, and the supply shifts downward to the dotted red line, establishing a higher price,  $P = 1.44$ .

图 1

这一情况在图 1 中可以看到。供需图展示了红色实线表示的初始供给函数（上升）以及蓝色实线表示的需求函数（下降）。交点处的价格是  $P = 1.29$ 。不久之后，出现了一个随机事件（如盈利报告等新闻公告），改变了资产的供求关系。特别地，如果消息是正面的，需求将增加，因此蓝色实线向上移动到蓝色虚线。潜在卖家也注意到了积极的消息，他们重新调整订单应对不断变化的情况，从而提高了他们愿意接受的价格。因此，红色实线向上移动到红色虚线位置，新的供需函数在更高的价格处相交，此时， $P = 1.44$ 。这里体现出的关键点是随机事件会影响大量代理人的买卖偏好，因此随机性的影响完全由供求曲线的变化组成。考虑到供求曲线的变化，大量寻求利用这些变化并多次优化同一变化的做市商们几乎没有额外的随机性的来源。

影响供给/需求曲线的公司特定新闻包括季度收入和盈利报告、公司领导层的变动、获得丰厚利润的合同、重新公布以前收益的公告、政府对公司的调查的公告等等。对于更广泛的市场，供给/需求曲线通常会随着政府更新的指标而变化，其中大部分指标都是月度指标，如非农就业人数，上个月新增或流失的净就业人数、零售额变化、消费物价上涨、贸易平衡数等。其他因素还包括利率的变化，即债券市场、国际贸易和货币，自然灾害等。当与预期结果存在较大偏差时，供给/需求会发生较大变化。例如，在 2008 年的金融危机和 2020 年的新冠疫情期间，就业公告显得非常重要，因为市场将分别面临数十万或数百万人的失业。

然而，非专家人员通常感到惊讶的是，在公告宣布之前，供需曲线变化基于当前的预测。如果这个预测是关于 200 万个工作岗位的损失，而新闻是“只有”100

万个工作岗位的损失，这是一个好消息，供给（例如标准普尔指数中提交出售的股票）通常会下降，需求则会上升（如图 1 所示）。因此，新闻的影响总是相对于现有的预期。这一想法可以在交易所和实验室进行经验验证。那么，在面对同样的供求变化时，一个经验丰富的做市商和短期交易员在市场中的表现会有多大的差异呢？我们声称，与新闻项目（例如，股票的收益报告、预测和分析师报告）以及特定资产的资金流入或流出所产生的供求随机性相比，这种随机性可以忽略不计。

特别地，我们可以设计一个新闻（比如改变支出），让其在不同时间到达市场。除了常规交易者外，还有一些短期交易者将会受到限制，他们必须在每个周期结束时拥有零资产库存（类似于做市商）。通过分析整个实验过程中的供需变化，可以确定在供需变化几乎相同的时间段内，相对价格变化的方差。假设条件是，当供给/需求的变化相似时，价格变化也是如此。另一方面，我们可以根据影响资产回报的各种新闻来判断供需变化的差异。

因此，对资产价格随机性的基本分析应该从研究供求随机性向价格变化随机性传播的过程开始。

这里，考虑供给和需求（见 Caginalp 和 Caginalp 2019 [18]），我们对形如(4)的方程式进行精确推导和论证，即

$$p^{-1}dp = G(D/S)dt + \sigma \frac{D}{S} G'(D/S)dW. \quad (5)$$

这里， $S$ 和 $D$ 分别是供给和需求的预期值。基本前提是价格的相对变化:函数 $G$ 中的 $p^{-1}dp/dt$ ，类似于上述 $G$ ，并满足第 2 节规定的要求。由于 $G$ 取决于总供给 $\tilde{S}$ 与总需求 $\tilde{D}$ 之比，因此基本方程是 $p^{-1}dp = G(D/S)$ 。写为

$$\tilde{D}(t, \omega) = D(t)(1 + \frac{\sigma}{2}R), \quad \tilde{S}(t, \omega) = S(t)(1 - \frac{\sigma}{2}R),$$

其中， $R$ 为标准法线，表示 $\mathcal{N}(0,1)$ ，在泰勒级数中展开 $G$ ，推导出极限为(5)（详见[18]）。这个等式的一个重要结果是，波动率（如第 5 节所定义）将是 $D/S$ 的函数，价格导数也是如此。之前的研究[18]表明，波动率在价格极值时为最小值，而在 $D/S$ 比率（以及由此产生的价格衍生品的幅度）达到最大值时为最大值。当然，可能还有其他因素对市场底部起作用，例如保证金催缴，如第 5 节中所述，需要进行建模。等式(5)对风险评估和期权定价具有重要影响。例如，如果使用经典方程(4)并测量 $\sigma$ ，如果资产的交易价格接近市场顶部，那么风险和波动性将被低估。有经验证据表明，主要股市顶部与低波动性相关（Sornette 等 2018 [19]），这暗示了“风暴前平静”的格言。(5)中的供给 $S(t)$ 和需求 $D(t)$ 可以特别指定，也可以与其他微分方程进行耦合，例如自 20 世纪 80 年代末以来发展起来的资产流动方程（参见 Caginalp 和 Balenovich 1999 [20], Merdan 和 Alisen 2011 [21], DeSantis 和 Swigon 2018 [22]，以及其中的参考文献）。

虽然波动性是一个活跃的研究领域（参见[23–26]），且近年来在波动性的实证计算方面取得了进展，但基于微观经济学和(5)的方法有助于综合理解价格变化和波动性。

在本文中，我们给出了对于(5)式的概率密度的严格推导。这为[14]中建立的肥尾特性提供了理由，同时[14]证明了相对价格变化中的幂律衰减是供需比固有概率分布的结果。换句话说，假设供给和需求服从正态分布（正如人们从中心极限定理所期望的那样），商的密度将以幂律的形式衰减（在大多数情况下）。此外，我们将使用这个密度来推导随机方程(5)。